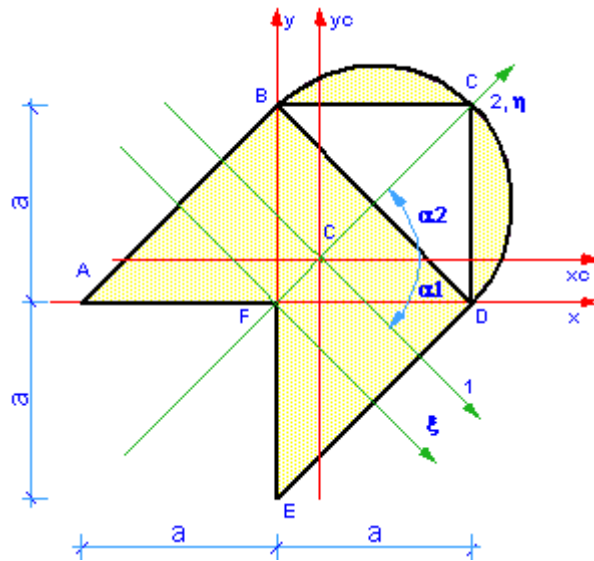


## Zadanie 2

Wyznaczyć główne centralne osie i momenty bezwładności



$$a := 1\text{m}$$

### Współrzędne środka ciężkości w układzie Fxy

Podział na obszary: ABDE – AFE – BCD + polkole

$$A(a) := (a\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \quad A(a) = 1.785\text{m}^2$$

$$S_x(a) := -\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot a\right) - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot a + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3 \cdot \pi}\right) \quad S_x(a) = 0.393\text{m}^3$$

$$y_c(a) := \frac{S_x(a)}{A(a)} \quad x_c(a) := y_c(a) \quad y_c(a) = 0.220\text{m}$$

### Momenty bezwładności w układzie Fxy :

Podział na obszary: ABDE – AFE – BCD + polkole

$$I_x(a) := \frac{(a\sqrt{2})^4}{12} - \frac{a^4}{12} - \left[ \frac{a^4}{36} + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot a\right)^2 \right] \dots \\ + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4}{8} - \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3 \cdot \pi}\right)^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3 \cdot \pi}\right)^2 \quad I_x(a) = 0.461\text{m}^4$$

$$I_y(a) := I_x(a) \quad I_y(a) = 0.461\text{m}^4$$

$$I_{xy}(a) := -\frac{a^4}{24} - \left[ -\frac{a^4}{72} + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot a\right)^2 \right] \dots \\ + 0 - \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3 \cdot \pi}\right)^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3 \cdot \pi}\right)^2 \quad I_{xy}(a) = 0.113\text{m}^4$$

### Centralne momenty bezwładności

$$I_{x_c}(a) := I_x(a) - A(a) \cdot y_c(a)^2 \quad I_{y_c}(a) := I_y(a)$$

$$I_{x_c}(a) = 0.375m^4$$

$$I_{x_c y_c}(a) := I_{x_y}(a) - A(a) \cdot y_c(a)^2$$

$$I_{x_c y_c}(a) = 0.027m^4$$

### Główne centralne momenty bezwładności

$$I_1(a) := \frac{I_{x_c}(a) + I_{y_c}(a)}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{x_c}(a) - I_{y_c}(a)}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}(a)^2}$$

$$I_1(a) = 0.401m^4$$

$$I_2(a) := \frac{I_{x_c}(a) + I_{y_c}(a)}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{x_c}(a) - I_{y_c}(a)}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}(a)^2}$$

$$I_2(a) = 0.348m^4$$

$$\alpha_1(a) := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{x_c y_c}(a)}{I_{y_c}(a) - I_1(a)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad \alpha_2(a) := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{x_c y_c}(a)}{I_{y_c}(a) - I_2(a)}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\alpha_1(a) = -45.000 \quad \alpha_2(a) = 45.000 \quad |\alpha_1(a)| + |\alpha_2(a)| = 90.000$$

### Główne centralne momenty bezwładności wprost w układzie osi głównych

Położenie środka ciężkości w układzie  $F \xi\eta$

$$S_\xi(a) := -\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3 \cdot \pi}\right)$$

$$S_\xi(a) = 0.555m^3$$

$$\eta_c(a) := \frac{S_\xi(a)}{A(a)}$$

$$\eta_c(a) = 0.311m$$

Momenty bezwładności w układzie osi  $F \xi\eta$  (osie równoległe do osi głównych)

$$I_\xi(a) := \frac{(a \cdot \sqrt{2})^4}{12} - \left[ 2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4}{36} + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \right] - \left[ 2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4}{36} + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \right] \dots$$

$$+ \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4}{8} - \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3 \cdot \pi}\right)^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3 \cdot \pi}\right)^2$$

$$I_{\xi\eta}(a) := 0m^4$$

$$I_\xi(a) = 0.574m^4$$

Momenty bezwładności w osiach głównych centralnych

$$I_\eta(a) := \frac{(a \cdot \sqrt{2})^4}{12} - \frac{a^4}{12} + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4}{8}$$

$$I_\eta(a) = 0.348m^4$$

$$I_{\xi_c}(a) := I_\xi(a) - A(a) \cdot \eta_c(a)^2 \quad I_{\eta_c}(a) := I_\eta(a)$$

$$I_{\xi_c}(a) = 0.401m^4$$