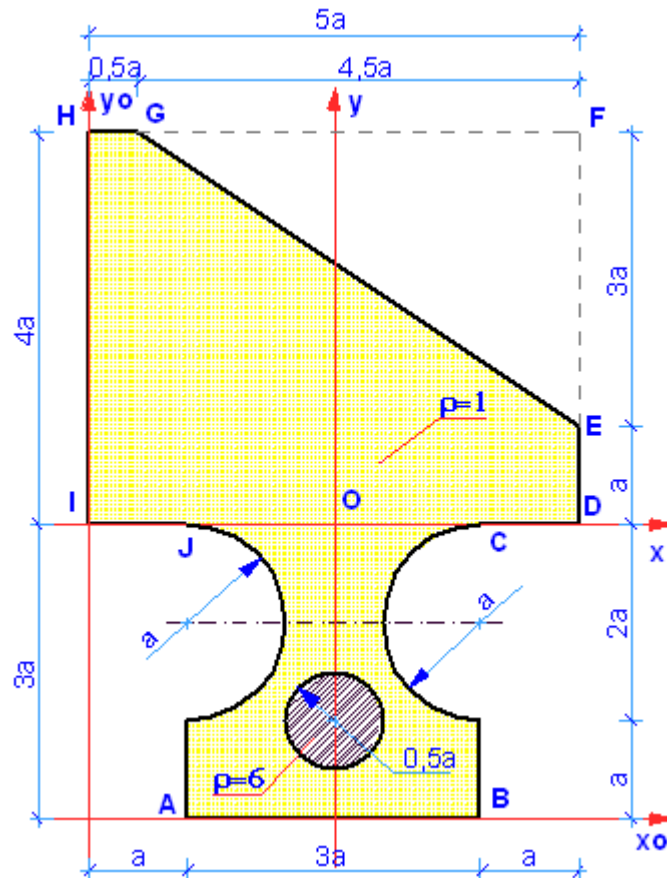


Zadanie 5

Wyznaczyć główne centralne osie i momenty bezwładności niejednorodnego przekroju poprzecznego



$a := 1\text{m}$

Rys. 1. Przekrój niejednorodny

Wyznaczenie środka ciężkości

Podział na obszary: $ABCD + DFHI - EFG - 2 \cdot \text{polkole} + \text{kolo} \cdot \Delta\rho$

$$A(a) := (3 \cdot a)^2 + 5 \cdot a \cdot 4 \cdot a - \frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot a \cdot 3 \cdot a - 2 \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{2} + \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 5 \quad A(a) = 23.035\text{m}^2$$

$$S_x(a) := (3 \cdot a)^2 \cdot (-1.5a) + 5 \cdot a \cdot 4 \cdot a \cdot 2a - \left(\frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot 3\right)a - 2 \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot (-a) + \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 5 \cdot (-2a) \quad S_x(a) = 1.538\text{m}^3$$

$$S_y(a) := -\left(\frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot a \cdot 3 \cdot a\right) \cdot a \quad S_y(a) = -6.750\text{m}^3$$

$$x_c(a) := \frac{S_y(a)}{A(a)} \quad y_c(a) := \frac{S_x(a)}{A(a)} \quad x_c(a) = -0.293\text{m}$$

$$y_c(a) = 0.067\text{m}$$

Wyznaczenie momentów bezwładności w układzie Oxy

$$I_x(a) := \left[\frac{(3 \cdot a)^4}{3} + \frac{5 \cdot a \cdot (4 \cdot a)^3}{3} - \left[\frac{4.5 \cdot a \cdot (3 \cdot a)^3}{36} + \left(\frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot a \cdot 3 \cdot a \right) \cdot (3 \cdot a)^2 \right] \right] \dots$$

$$+ -2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a^4}{8} + \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot a^2 \right) + \left[\frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^4}{4} \cdot 5 + \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot a)^2 \right]$$

$$I_x(a) = 81.568m^4$$

$$I_y(a) := \frac{(3 \cdot a)^4}{12} + \frac{4 \cdot a \cdot (5 \cdot a)^3}{12} - \left[\frac{3 \cdot a \cdot (4.5 \cdot a)^3}{36} + \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot a \cdot 4.5 \cdot a \right) \cdot a^2 \right] \dots$$

$$+ -2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot a^4}{8} - \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left[1.5 \cdot a - \left(\frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi} \right) \right]^2 \right] + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^4}{4} \cdot 5$$

$$I_y(a) = 30.464m^4$$

$$I_{xy}(a) := 0 - \left[-\frac{(3a)^2 \cdot (4.5a)^2}{72} + \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot a \cdot 4.5 \cdot a \right) \cdot (3a) \cdot a \right]$$

$$I_{xy}(a) = -17.719m^4$$

Główne momenty bezwładności w punkcie O

$$I_1(a) := \frac{I_x(a) + I_y(a)}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x(a) - I_y(a)}{2} \right)^2 + I_{xy}(a)^2}$$

$$I_1(a) = 87.110m^4$$

$$I_2(a) := \frac{I_x(a) + I_y(a)}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x(a) - I_y(a)}{2} \right)^2 + I_{xy}(a)^2}$$

$$I_2(a) = 24.922m^4$$

$$\alpha_1(a) := \text{atan} \left(\frac{I_{xy}(a)}{I_y(a) - I_1(a)} \right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad \alpha_2(a) := \text{atan} \left(\frac{I_{xy}(a)}{I_y(a) - I_2(a)} \right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\alpha_1(a) = 17.370 \quad \alpha_2(a) = -72.630 \quad |\alpha_1(a)| + |\alpha_2(a)| = 90.000$$

Centralne momenty bezwładności

$$I_{xc}(a) := I_x(a) - A(a) \cdot y_c(a)^2$$

$$I_{xc}(a) = 81.465m^4$$

$$I_{yc}(a) := I_y(a) - A(a) \cdot x_c(a)^2$$

$$I_{xcyc}(a) := I_{xy}(a) - A(a) \cdot x_c(a) \cdot y_c(a)$$

$$I_{xcyc}(a) = -17.268m^4$$

Główne centralne momenty bezwładności

$$I_{1c}(a) := \frac{I_{xc}(a) + I_{yc}(a)}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xc}(a) - I_{yc}(a)}{2}\right)^2 + I_{xcyc}(a)^2}$$

$$I_{1c}(a) = 86.597m^4$$

$$I_{2c}(a) := \frac{I_{xc}(a) + I_{yc}(a)}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xc}(a) - I_{yc}(a)}{2}\right)^2 + I_{xcyc}(a)^2}$$

$$I_{2c}(a) = 23.355m^4$$

$$\alpha_{1c}(a) := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{xcyc}(a)}{I_{yc}(a) - I_{1c}(a)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad \alpha_{2c}(a) := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{xcyc}(a)}{I_{yc}(a) - I_{2c}(a)}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\alpha_{1c}(a) = 16.550 \quad \alpha_{2c}(a) = -73.450 \quad |\alpha_{1c}(a)| + |\alpha_{2c}(a)| = 90.000$$

Sprawdzenie

W celu sprawdzenia przyjęto układ współrzędnych w taki sposób by cały przekrój znajdował się w pierwszej ćwiartce. W tym układzie współrzędnych wyznaczono momenty bezwładności a następnie, korzystając z twierdzenia Steinera, obliczono momenty w układzie Oxy.

$$I_{x0}(a) := \frac{(3 \cdot a)^4}{3} + \frac{5 \cdot a \cdot (4 \cdot a)^3}{12} + 5 \cdot a \cdot 4 \cdot a \cdot (5 \cdot a)^2 - \left[\frac{4.5 \cdot a \cdot (3 \cdot a)^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot (6a)^2 \right] - \left[\frac{\pi \cdot a^4}{4} + \pi a^2 \cdot (2a)^2 \right] \dots$$

$$+ \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^4}{4} \cdot 5 + \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 5 \cdot a^2$$

$$I_{y0}(a) := \frac{(3 \cdot a)^4}{12} + (3 \cdot a)^2 \cdot (2.5 \cdot a)^2 + \frac{4 \cdot a \cdot (5 \cdot a)^3}{3} - \left[\frac{3 \cdot a \cdot (4.5 \cdot a)^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot (3.5 \cdot a)^2 \right] \dots$$

$$+ \left[\frac{\pi \cdot a^4}{8} - \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}\right)^2 + \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left(a + \frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}\right)^2 \right] - \left[\frac{\pi \cdot a^4}{8} - \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}\right)^2 + \frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left(4 \cdot a - \frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}\right)^2 \right] \dots$$

$$+ \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^4}{4} \cdot 5 + \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 5 \cdot (2.5 \cdot a)^2$$

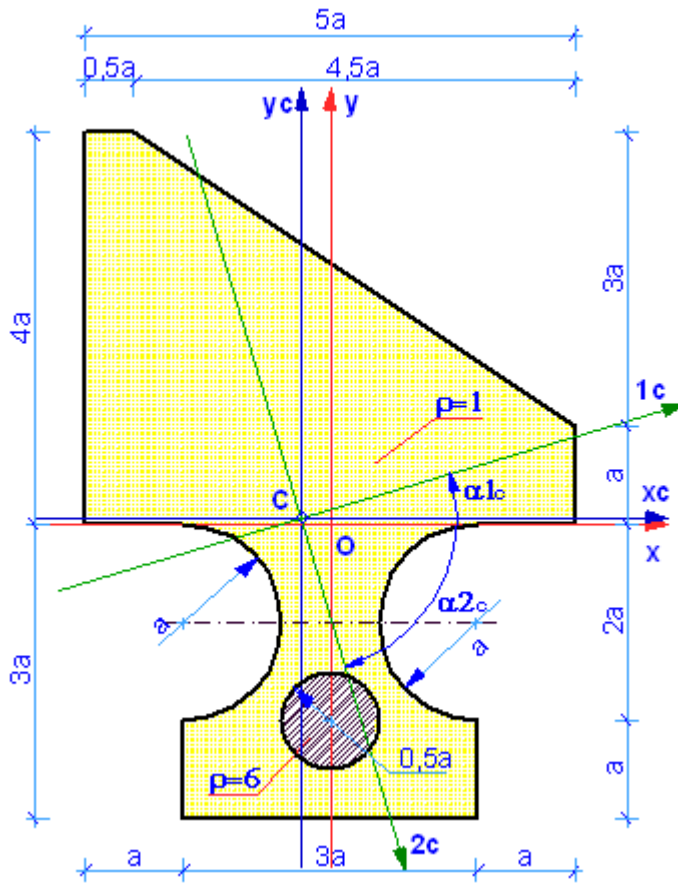
$$I_{x0y0}(a) := (3 \cdot a)^2 \cdot (2.5 \cdot a) \cdot (1.5 \cdot a) + 5 \cdot a \cdot 4 \cdot a \cdot (2.5 \cdot a) \cdot (5 \cdot a) - \left[-\frac{(4.5 \cdot a)^2 \cdot (3 \cdot a)^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot (3.5 \cdot a) \cdot (6 \cdot a) \right] \dots$$

$$+ \left[\frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left(a + \frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}\right) \cdot (2 \cdot a) \right] - \left[\frac{\pi \cdot a^2}{2} \cdot \left(4 \cdot a - \frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}\right) \cdot (2 \cdot a) \right] + \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 5 \cdot (2.5 \cdot a) \cdot a$$

$$I_x(a) := I_{x0}(a) - A(a) \cdot (3a + y_c(a))^2 + A(a) \cdot y_c(a)^2 \quad I_x(a) = 81.568m^4$$

$$I_y(a) := I_{y0}(a) - A(a) \cdot (2.5a + x_c(a))^2 + A(a) \cdot x_c(a)^2 \quad I_y(a) = 30.464m^4$$

$$I_{xy}(a) := I_{x0y0}(a) - A(a) \cdot (2.5a + x_c(a)) \cdot (3a + y_c(a)) + A(a) \cdot x_c(a) \cdot y_c(a) \quad I_{xy}(a) = -17.719m^4$$



Rys. 2. Główne centralne osie i momenty bezwładności