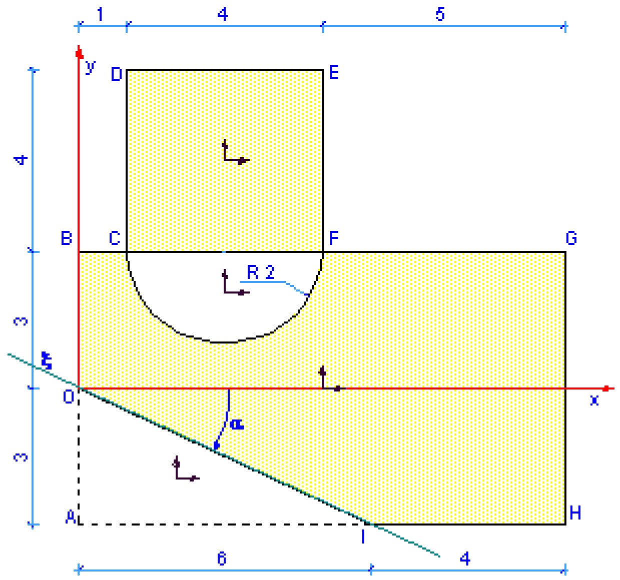
Zadanie 6

Wyznaczyć: **1. główne centralne osie i momenty bezw ladnosci**
2. moment bezwładności względem prostej ξ



Rys. 1. Przekrój

Podział na obszary: ABGH + CDEF − AOI − polkole

$$A := 10\cdot 6 + 4^2 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 \qquad A = 60.717$$

Wyznaczenie położenia środka ciężkoci

$$S_x := 10\cdot 6\cdot 0 + 4^2\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot(-2) - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot\left(3 - \frac{4\cdot 2}{3\pi}\right) \qquad S_x = 84.484$$

$$S_y := 10\cdot 6\cdot 5 + 4^2\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 3 \qquad S_y = 311.150$$

$$x_c := \frac{S_y}{A} \qquad y_c := \frac{S_x}{A} \qquad x_c = 5.125 \qquad y_c = 1.391$$

Obliczenie momentów bezwładności w układzie Oxy

$$I_x := \frac{10\cdot 6^3}{12} + \frac{4^4}{12} + 4^2\cdot 5^2 - \left[\frac{6\cdot 3^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot(-2)^2\right] - \left[\frac{\pi 2^4}{8} - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot\left(\frac{4\cdot 2}{3\cdot\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot\left(3 - \frac{4\cdot 2}{3\cdot\pi}\right)^2\right]$$

$$I_y := \frac{10^3\cdot 6}{3} + \frac{4^4}{12} + 4^2\cdot 3^2 - \frac{6^3\cdot 3}{12} - \left(\frac{\pi\cdot 2^4}{8} + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 3^2\right)$$

$$I_{xy} := 4^2\cdot 3\cdot 5 - \left[-\frac{6^2\cdot 3^2}{72} + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot 2\cdot(-2)\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 3\cdot\left(3 - \frac{4\cdot 2}{3\cdot\pi}\right)\right]$$

$$I_x = 530.001 \qquad I_y = 2048.501 \qquad I_{xy} = 239.951$$

Centralne momenty bezwładności

$I_{xc} := I_x - A \cdot y_c^2$ $\qquad I_{xc} = 412.447$

$I_{yc} := I_y - A \cdot x_c^2$ $\qquad I_{yc} = 453.975$

$I_{xcyc} := I_{xy} - A \cdot x_c \cdot y_c$ $\qquad I_{xcyc} = -192.996$

Obliczenie głównych centralnych momentów bezwładności

$$I_{1c} := \frac{I_{xc} + I_{yc}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + I_{xcyc}^2}$$

$I_{1c} = 627.320$

$$I_{2c} := \frac{I_{xc} + I_{yc}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + I_{xcyc}^2}$$

$I_{2c} = 239.102$

$$\alpha_{1c} := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{xcyc}}{I_{yc} - I_{1c}}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \qquad \alpha_{2c} := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{xcyc}}{I_{yc} - I_{2c}}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$\alpha_{1c} = 48.070$ $\qquad \alpha_{2c} = -41.930$ $\qquad |\alpha_{1c}| + |\alpha_{2c}| = 90.000$

Obliczenie momentu bezwładności względem prostej ξ

$$\alpha := -\operatorname{atan}\left(\frac{3}{6}\right)$$

$$I_\xi := I_x \cdot \cos(\alpha)^2 + I_y \cdot \sin(\alpha)^2 - I_{xy} \cdot \sin(2\alpha)$$

$I_\xi = 1025.663$

Sprawdzenie

Obliczenie momentów bezwładności w układzie centralnym Cxcyc jako sumy momentów poszczególnych obszarów

$$I_{xc} := \left[\frac{10 \cdot 6^3}{12} + 10 \cdot 6 \cdot (-y_c)^2 + \frac{4^4}{12} + 4^2 \cdot (5 - y_c)^2 - \left[\frac{6 \cdot 3^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot (-2 - y_c)^2\right]\right] \dots + -\left[\frac{\pi \cdot 2^4}{8} - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 2}{3 \cdot \pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \left(3 - \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot \pi} - y_c\right)^2\right]$$

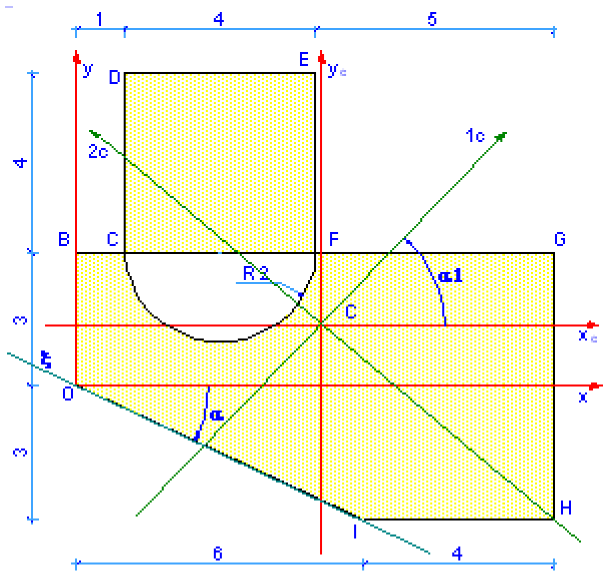
$I_{xc} = 412.447$

$$I_y := \left[\frac{10^3 \cdot 6}{12} + 10 \cdot 6 \cdot (5 - x_c)^2 + \frac{4^4}{12} + 4^2 \cdot (3 - x_c)^2 - \left[\frac{6^3 \cdot 3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot (2 - x_c)^2\right]\right] \dots + -\left[\frac{\pi \cdot 2^4}{8} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot (3 - x_c)^2\right]$$

$I_{yc} = 453.975$

$$I_{xcyc} := \left[10 \cdot 6 \cdot (5 - x_c) \cdot (-y_c) + 4^2 \cdot (3 - x_c) \cdot (5 - y_c) - \left[-\frac{6^2 \cdot 3^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot (2 - x_c) \cdot (-2 - y_c)\right]\right] \dots + -\left[\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot (3 - x_c) \cdot \left(3 - \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot \pi} - y_c\right)\right]$$

$I_{xcyc} = -192.996$



Rys. 2. Główne centralne osie i momenty bezwładności