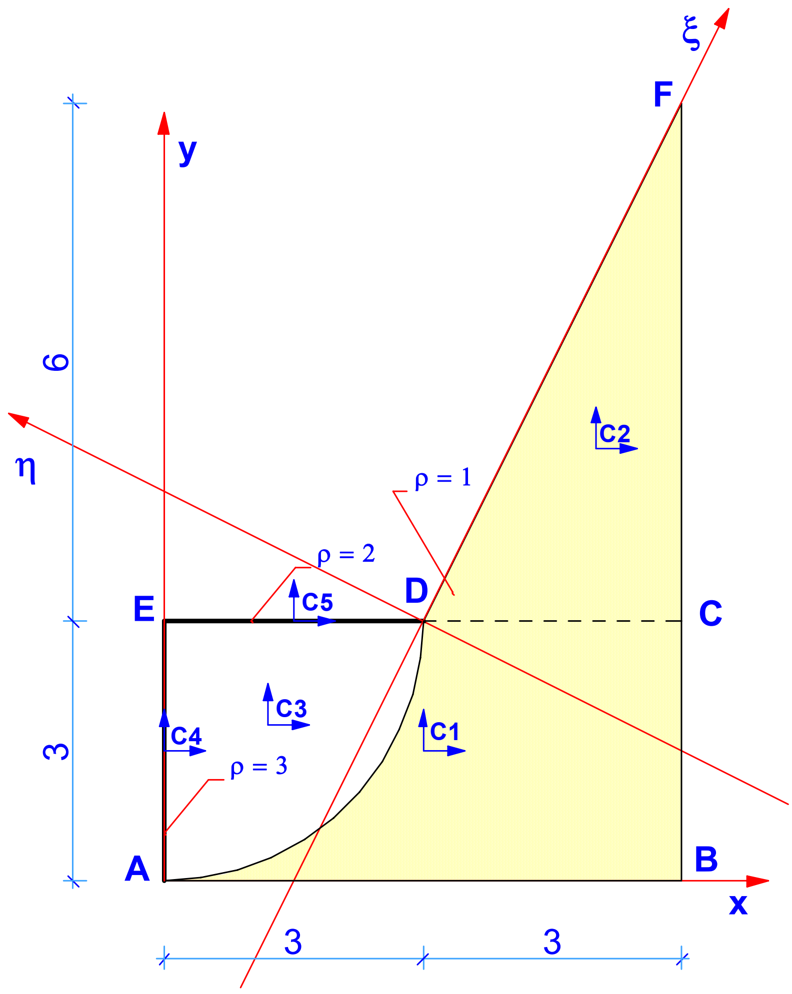
Zadanie 7

Wyznaczyć: 1. momenty główne i kierunki główne w punkcie A,
2. główne centralne osie i momenty bezwładnosci,
3. moment bezwładności w układzie $\xi\eta$.



Rys. 1. Przekrój

Podział na obszary: ABCE + CDF - ADE + AE + DE

$$M := 6\cdot3\cdot1 + \frac{1}{2}\cdot3\cdot6\cdot1 - \left(\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\right)\cdot1 + 3\cdot3 + 3\cdot2 \qquad M = 34.931$$

Wyznaczenie położenia środka ciężkoci

$$S_x := 6\cdot3\cdot1\cdot1.5 + \frac{1}{2}\cdot3\cdot6\cdot1\cdot5 - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\cdot1\cdot\left(3 - \frac{4\cdot3}{3\cdot\pi}\right) + 3\cdot3\cdot1.5 + 3\cdot2\cdot3 \qquad S_x = 91.294$$

$$S_y := 6\cdot3\cdot1\cdot3 + \frac{1}{2}\cdot3\cdot6\cdot1\cdot5 - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\cdot1\cdot\frac{4\cdot3}{3\cdot\pi} + 3\cdot3\cdot0 + 3\cdot2\cdot1.5 \qquad S_y = 99.000$$

$$x_c := \frac{S_y}{M} \qquad y_c := \frac{S_x}{M} \qquad x_c = 2.834 \qquad y_c = 2.614$$

Obliczenie momentów bezwładności w układzie Oxy

$$I_x := \frac{6\cdot 3^3}{3}\cdot 1 + \left(\frac{3\cdot 6^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot 5^2\right)\cdot 1 - \left[\frac{\pi\cdot 3^3}{16} - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot\left(\frac{4\cdot 3}{3\cdot\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot\left(3 - \frac{4\cdot 3}{3\cdot\pi}\right)^2\right]\cdot 1 \ldots$$
$$+ \frac{3^3}{3}\cdot 3 + \left(0 + 3\cdot 3^2\right)\cdot 2$$

$I_x = 363.081$

$$I_y := \frac{3\cdot 6^3}{3}\cdot 1 + \left(\frac{6\cdot 3^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot 5^2\right)\cdot 1 - \frac{\pi\cdot 3^3}{16}\cdot 1 + 0 + \frac{3^3}{3}\cdot 2$$

$I_y = 458.199$

$$I_{xy} := \frac{3^2\cdot 6^2}{4}\cdot 1 + \left(\frac{3^2\cdot 6^2}{72} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot 5\cdot 5\right)\cdot 1 - \left[-\frac{3^4}{8} - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot\frac{4\cdot 3}{3\cdot\pi}\cdot\left(-\frac{4\cdot 3}{3\cdot\pi}\right) + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot\frac{4\cdot 3}{3\cdot\pi}\cdot\left(3 - \frac{4\cdot 3}{3\cdot\pi}\right)\right]\cdot 1 \ldots$$
$$+ 0 + 0 + 3\cdot 2\cdot 3\cdot 1.5$$

$I_{xy} = 320.625$

Momenty i kierunki główne w punkcie A

$$I_{1a} := \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$I_{1a} = 734.773$

$$I_{2a} := \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$I_{2a} = 86.507$

$$\alpha_{1a} := \mathrm{atan}\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_{1a}}\right)\cdot\frac{180}{\pi} \qquad \alpha_{2a} := \mathrm{atan}\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_{2a}}\right)\cdot\frac{180}{\pi}$$

$\alpha_{1a} = -49.219$ $\quad$ $\alpha_{2a} = 40.781$

Centralne momenty bezwładności

$$I_{xc} := I_x - M\cdot y_c^2$$

$I_{xc} = 124.481$

$$I_{yc} := I_y - M\cdot x_c^2$$

$I_{yc} = 177.620$

$$I_{xcyc} := I_{xy} - M\cdot x_c\cdot y_c$$

$I_{xcyc} = 61.886$

Obliczenie głównych centralnych momentów bezwładności

$$I_{1c} := \frac{I_{xc} + I_{yc}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + I_{xcyc}^2}$$

$I_{1c} = 218.399$

$$I_{2c} := \frac{I_{xc} + I_{yc}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + I_{xcyc}^2}$$

$I_{2c} = 83.703$

$$\alpha_{1c} := \mathrm{atan}\left(\frac{I_{xcyc}}{I_{yc} - I_{1c}}\right)\cdot\frac{180}{\pi} \qquad \alpha_{2c} := \mathrm{atan}\left(\frac{I_{xcyc}}{I_{yc} - I_{2c}}\right)\cdot\frac{180}{\pi}$$

$\alpha_{1c} = -56.618$ $\quad$ $\alpha_{2c} = 33.382$

$$\left|\alpha_{1c}\right| + \left|\alpha_{2c}\right| = 90.000$$

Sprawdzenie
Obliczenie momentów bezwładności w układzie centralnym Cxcyc jako sumy momentów poszczególnych obszarów

$$I_{xc} := \left[\frac{6\cdot3^3}{12} + 3\cdot6\cdot\left(1.5 - y_c\right)^2\right]\cdot1 + \left[\frac{3\cdot6^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot3\cdot6\cdot\left(5 - y_c\right)^2\right]\cdot1 \ldots$$
$$+ -\left[\frac{\pi\cdot3^3}{16} - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\cdot\left(\frac{4\cdot3}{3\cdot\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\cdot\left(3 - \frac{4\cdot3}{3\cdot\pi} - y_c\right)^2\right]\cdot1 \ldots$$
$$+ \left[\frac{3^3}{12} + 3\cdot\left(1.5 - y_c\right)^2\right]\cdot3 + \left[0 + 3\cdot\left(3 - y_c\right)^2\right]\cdot2$$

$I_{xc} = 124.481$

$$I_{yc} := \left[\frac{3\cdot6^3}{12} + 3\cdot6\cdot\left(3 - x_c\right)^2\right]\cdot1 + \left[\frac{6\cdot3^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot3\cdot6\cdot\left(5 - x_c\right)^2\right]\cdot1 \ldots$$
$$+ -\left[\frac{\pi\cdot3^3}{16} - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\cdot\left(\frac{4\cdot3}{3\cdot\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\cdot\left(\frac{4\cdot3}{3\cdot\pi} - x_c\right)^2\right]\cdot1 \ldots$$
$$+ \left[0 + 3\cdot\left(0 - x_c\right)^2\right]\cdot3 + \left[\frac{3^3}{12} + 3\cdot\left(1.5 - x_c\right)^2\right]\cdot2$$

$I_{yc} = 177.620$

$$I_{xcyc} := \left[0 + 3\cdot6\cdot\left(1.5 - y_c\right)\cdot\left(3 - x_c\right)\right]\cdot1 + \left[\frac{3^2\cdot6^2}{72} + \frac{1}{2}\cdot3\cdot6\cdot\left(5 - y_c\right)\cdot\left(5 - x_c\right)\right]\cdot1 \ldots$$
$$+ -\left[-\frac{3^4}{8} - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\cdot\left(-\frac{4\cdot3}{3\cdot\pi}\right)\cdot\frac{4\cdot3}{3\cdot\pi} + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2\cdot\left(3 - \frac{4\cdot3}{3\cdot\pi} - y_c\right)\cdot\left(\frac{4\cdot3}{3\cdot\pi} - x_c\right)\right]\cdot1 \ldots$$
$$+ \left[0 + 3\cdot\left(1.5 - y_c\right)\cdot\left(0 - x_c\right)\right]\cdot3 + \left[0 + 3\cdot\left(3 - y_c\right)\cdot\left(1.5 - x_c\right)\right]\cdot2$$

$I_{xcyc} = 61.886$

Momenty bezwładności w układzie D ξη

$x_d := 3 \qquad y_d := 3$

$$I_{xd} := I_{xc} + M\cdot\left(y_c - y_d\right)^2$$ $I_{xd} = 129.699$

$$I_{yd} := I_{yc} + M\cdot\left(x_c - x_d\right)^2$$ $I_{yd} = 178.581$

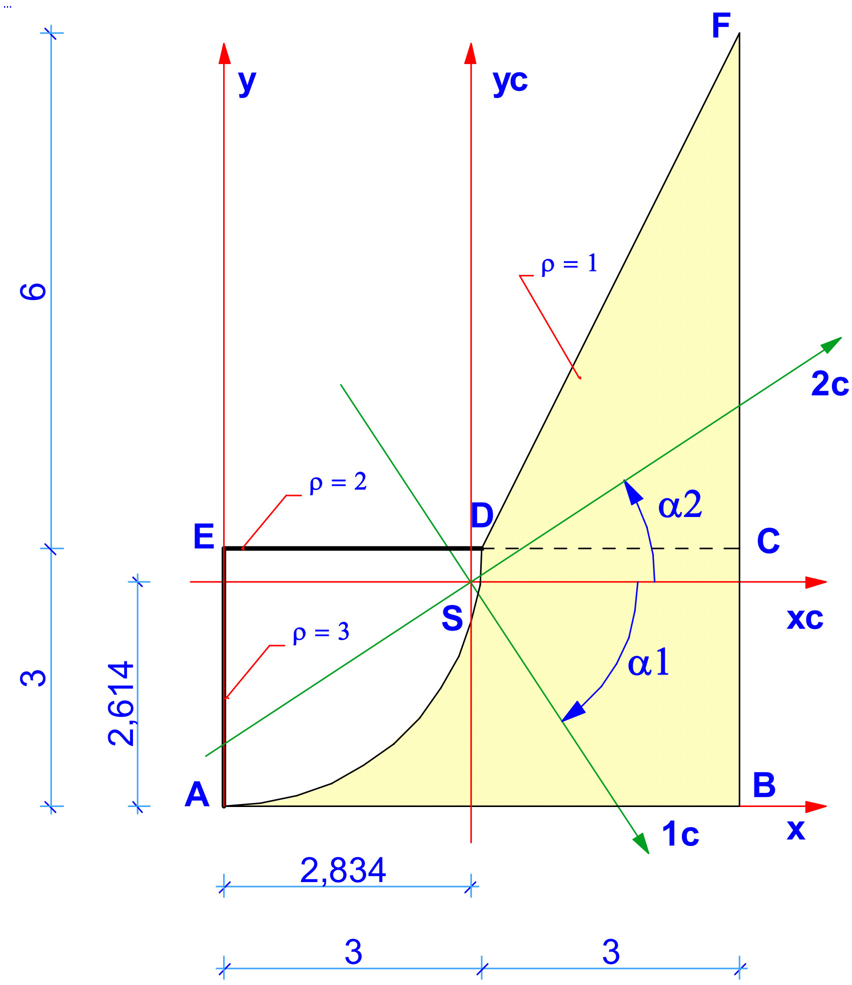
$$I_{xdyd} := I_{xcyc} + M\cdot\left(x_c - x_d\right)\cdot\left(y_c - y_d\right)$$ $I_{xdyd} = 64.125$

$$\alpha_d := \operatorname{atan}\left(\frac{6}{3}\right)$$ $\alpha_d\cdot\frac{180}{\pi} = 63.435$

$$I_\xi := I_{xd}\cdot\cos\left(\alpha_d\right)^2 + I_{yd}\cdot\sin\left(\alpha_d\right)^2 - I_{xdyd}\cdot\sin\left(2\alpha_d\right)$$ $I_\xi = 117.505$

$$I_\eta := I_{xd}\cdot\sin\left(\alpha_d\right)^2 + I_{yd}\cdot\cos\left(\alpha_d\right)^2 + I_{xdyd}\cdot\sin\left(2\cdot\alpha_d\right)$$ $I_\eta = 190.775$

$$I_{\xi\eta} := \frac{I_{xd} - I_{yd}}{2}\sin\left(2\alpha_d\right) + I_{xdyd}\cdot\cos\left(2\cdot\alpha_d\right)$$ $I_{\xi\eta} = -58.028$



Rys. 2. Główne centralne osie i momenty bezwładności