Obliczyć wariację całki działania:

$$J[y(t)] = \int_0^1 (12ty + \dot{y}^2)\,dt$$

Wariację δJ będącą liniową częścią przyrostu funkcjonału:

$$(\Delta J = J(y + \delta y) - J(y))$$

względem δy obliczamy z zależności (6.41):

$$\delta J[y(t)] = \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{\partial W}{\partial y}\delta y + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right) dt$$

Mamy zatem:

$$\delta J = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial y}(12ty + \dot{y}^2)\delta y + \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(12ty + \dot{y}^2)\delta \dot{y}\right] dt$$

a po wykonaniu oznaczonych działań:

$$\delta J = \int_0^1 (12t\delta y + 2\dot{y}\delta \dot{y})\,dt$$

Ponieważ:

$$\int_0^1 2\dot{y}\delta\dot{y}\,dt = \int_0^1 2\dot{y}\frac{d}{dt}(\delta y)\,dt$$

to całkując przez części mamy:

$$\int_0^1 2\dot{y}\delta\dot{y}\,dt = (2\dot{y}\delta y)\Big|_0^1 - \int_0^1 2\ddot{y}\delta y\,dt$$

Z warunku $\delta y(1) = \delta y(0) = 0$ wynika, że $2\dot{y}\delta y\Big|_0^1 = 0$, co pozwala zapisać wariację całki działania w postaci:

$$\delta J = \int_0^1 (12t - 2\ddot{y})\delta y\,dt$$