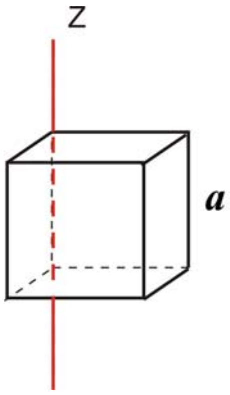
Wyznacz pęd ($\bar{p}$), kręt względem środka masy ($\bar{K}_o$) oraz energię kinetyczną (E_k) jednorodnego sześcianu o boku a i gęstości ρ obracającego się wokół krawędzi ze stałą prędkością kątową ω.

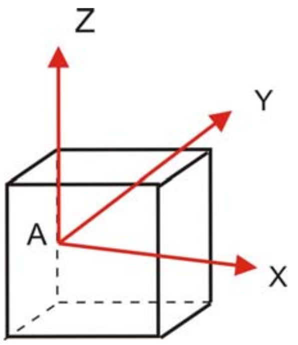


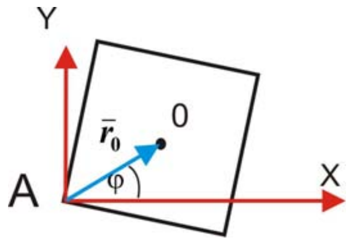
Rozwiązanie

$$\varphi = \omega t$$

$$\bar{r}_o = \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t), a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t), 0 \right)^T$$

$$\bar{v}_o = \dot{\bar{r}}_o = \left(-a\omega\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t), aw\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t), 0 \right)^T$$





układ nieruchomy
o początku na osi obrotu

Wektor pędu

.

$$\bar{p} = m\bar{v}_o = \frac{\rho a^4 \omega}{\sqrt{2}}(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)^T$$

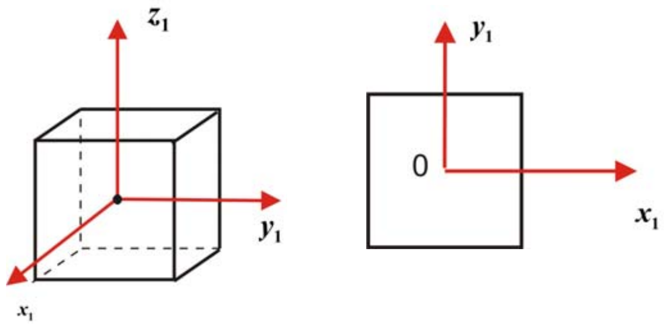
Wektor krętu względem punktu A

wektor krętu względem punktu A (A leży na osi obrotu) wynosi:

$$\bar{K}_A = I_A \bar{\omega}$$

Wyznaczenie tensora bezwładności I_A w układzie współrzędnych poruszającym się wraz z ciałem ,w którym oś z pokrywa się z osią obrotu (układ III) .

- Najpierw wyznaczamy tensor bezwładności w układzie o początku w środku masy i osiach równoległych do krawędzi (układ I).



układ I

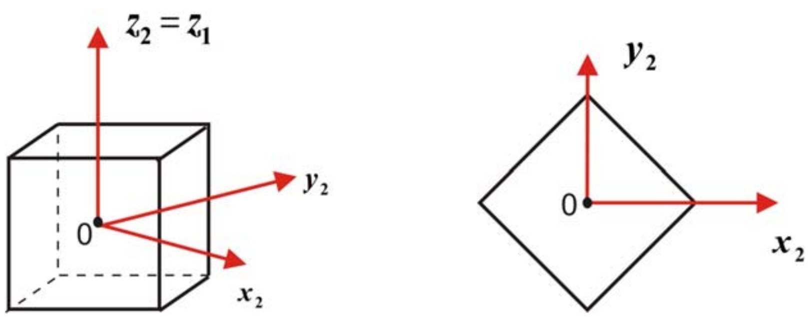
$$I_x^I = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \rho(y^2+z^2)dxdydz = \rho x\Big|_{-a/2}^{a/2} \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-a/2}^{a/2} \cdot z\Big|_{-a/2}^{a/2} + \cdot x\Big|_{-a/2}^{a/2} \cdot y\Big|_{-a/2}^{a/2} \cdot \frac{z^3}{3}\Bigg|_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \rho \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot \left(\frac{a^5}{8} + \frac{a^5}{8}\right) \cdot 2 = \rho \frac{a^5}{6}$$

$$I_y^I = I_z^I = \rho \frac{a^5}{6} \qquad I_{xy}^I = I_{xz}^I = I_{yz}^I = 0$$

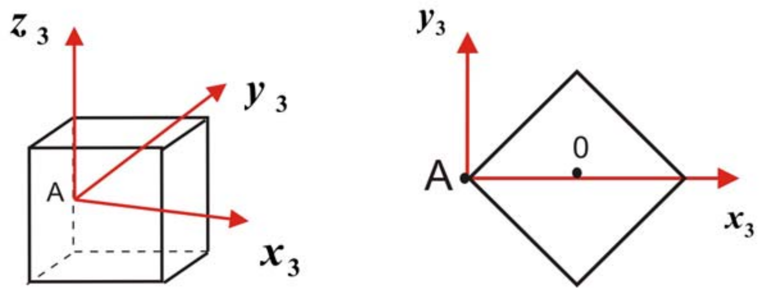
$$\mathbf{I}^{\mathrm{I}} = \frac{\rho a^5}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ponieważ wartości własne tensora $\mathbf{I}^{\mathrm{I}}$ są takie same, więc w każdym układzie współrzędnych o początku w punkcie 0 tensor ma taką samą postać. Więc w układzie wsp. II postać tensora jest taka sama $\mathbf{I}^{\mathrm{II}} = \mathbf{I}^{\mathrm{I}}$



układ II

- Następnie przesuwamy równolegle układ współrzędnych do pozycji III i wyznaczamy I_A z twierdzenia Steinera . Punkt 0 ma w układzie III współrzędne $\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$



układ III

$$I_x^{III} = I_x^{II} = \rho\frac{a^5}{6}$$

$$I_y^{III} = I_y^{II} + m\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \rho\frac{a^5}{6} + \rho\frac{a^5}{2} = \frac{2}{3}\rho a^5$$

$$I_z^{III} = I_z^{II} + m\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \rho\frac{a^5}{6} + \rho\frac{a^5}{2} = \frac{2}{3}\rho a^5$$

$$I_{xy}^{III} = I_{xy}^{II} + m\cdot a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 = 0,\quad I_{xz}^{III} = I_{xz}^{II} + m\cdot a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 = 0,\quad I_{yz}^{III} = I_{yz}^{II} + m\cdot 0\cdot 0 = 0$$

$$I^{III} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\rho a^5,\qquad \overline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Kręt w układzie III

$$\overline{K}_A^{III} = \left(0,0,\frac{2}{3}\rho a^5\right)$$

Aby wyznaczć kręt w układzie wyjściowym nieruchomym (x,y,z) (którego oś z pokrywa się z osią obrotu) należy go przetransformować do tego układu.
Macierz przejścia z układu III do układu (x,y,z) ma potać

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{K}_A = Q\cdot\overline{K}_A^{III} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3}\rho a^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3}\rho a^5 \end{pmatrix}$$

Ponieważ oś z_3 układu związanego z poruszającym się ciałem pokrywa się z osią obrotu, więc wektor krętu ma tą samą postać w oby układach.

Kręt w układzie nieruchomym związanym ze środkiem masy.

$$\overline{K}_o = \overline{K}_A + \overline{p}\times\overline{r}_o = (0,0,\frac{1}{6}\rho a^5\omega)$$

Energia kinetyczna układu

$$E_k = \frac{1}{2} I_{zA} \omega^2 = \frac{1}{3} \rho a^5 \omega^2$$