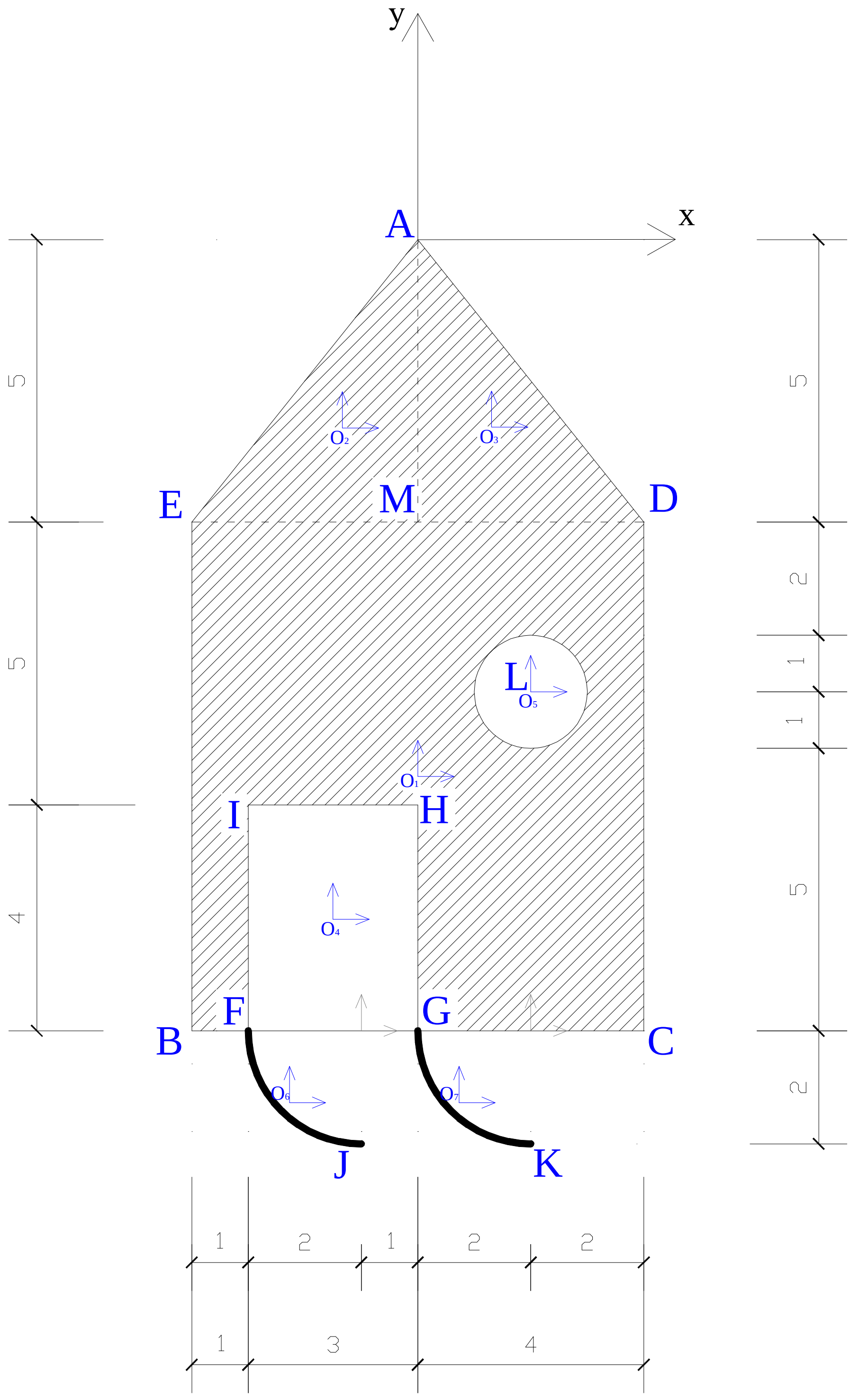
Dla zadanej figury płaskiej o gęstości $\rho = 1$ wyznaczyć główne osie i momenty bezwładności w punkcie A.



Podział na obszary:

Prostokąt *BCDE* + Trójkąt *EMA* + Trójkąt *MDA* – Prostokąt *FGHI* – Koło *L* + Łuk *FJ* + Łuk *GK*
(Łuk FJ , Łuk GK – ćwiartka okręgu)

$$I_x = \overset{BCDE}{\left[\frac{9^3 \cdot 8}{12} + 9 \cdot 8 \cdot (9{,}5)^2\right]} + 2 \cdot \overset{EMA,\ MDA}{\left[\frac{5^3 \cdot 4}{36} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5\right)^2\right]} - \overset{FGHI}{\left[\frac{4^3 \cdot 3}{12} + 4 \cdot 3 \cdot (12)^2\right]} - \overset{L}{\left[\frac{\pi \cdot 1^4}{4} + \pi \cdot 1^2 \cdot (8)^2\right]} +$$

$$+ 2 \cdot \overset{FJ\ ,\ GK}{\left[\frac{\pi \cdot 2^3}{4} - \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)^2 + \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(14 + \frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)^2\right]} \qquad I_x = 6756{,}223$$

$$I_y = \overset{BCDE}{\left[\frac{8^3 \cdot 9}{12}\right]} + 2 \cdot \overset{EMA,\ MDA}{\left[\frac{4^3 \cdot 5}{12}\right]} - \overset{FGHI}{\left[\frac{3^3 \cdot 4}{3}\right]} - \overset{L}{\left[\frac{\pi \cdot 1^4}{4} + \pi \cdot 1^2 \cdot (2)^2\right]} + \overset{FJ}{\left[\frac{\pi \cdot 2^3}{4} - \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)^2 + \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)^2\right]} +$$

$$+ \overset{GK}{\left[\frac{\pi \cdot 2^3}{4} - \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)^2 + \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(2 - \frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)^2\right]} \qquad I_y = 408{,}256$$

$$D_z = \overset{BCDE}{0} + \overset{EMA,\ MDA}{0} - \overset{FGHI}{\left[0 + 4 \cdot 3 \cdot (-1{,}5) \cdot (-12)\right]} - \overset{L}{\left[0 + \pi \cdot 1^2 \cdot (-8)(2)\right]} +$$

$$+ \overset{FJ}{\left[\frac{2^3}{2} - \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(-\frac{2 \cdot 2}{\pi}\right) \cdot \left(-\frac{2 \cdot 2}{\pi}\right) + \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(-\left(1 + \frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)\right) \cdot \left(-\left(14 + \frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)\right)\right]} +$$

$$+ \overset{GK}{\left[\frac{2^3}{2} - \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(-\frac{2 \cdot 2}{\pi}\right) \cdot \left(-\frac{2 \cdot 2}{\pi}\right) + \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot \left(2 - \frac{2 \cdot 2}{\pi}\right) \cdot \left(-\left(14 + \frac{2 \cdot 2}{\pi}\right)\right)\right]} \qquad D_z = -93{,}717$$

Główne momenty bezwładności w punkcie A:

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {D_z}^2}$$

$$I_1 = \frac{6756{,}223 + 408{,}256}{2} + \sqrt{\left(\frac{6756{,}223 - 408{,}256}{2}\right)^2 + (-93{,}717)^2} \qquad I_1 = 6757{,}606$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {D_z}^2}$$

$$I_2 = \frac{6756{,}223 + 408{,}256}{2} - \sqrt{\left(\frac{6756{,}223 - 408{,}256}{2}\right)^2 + (-93{,}717)^2} \qquad I_2 = 406{,}873$$

Sprawdzenie:

$I_x + I_y = I_1 + I_2$

$I_x \cdot I_y - D_z{}^2 = I_1 \cdot I_2$

Główne osie bezwładności w punkcie A:

$$\tan\alpha_1 = \frac{D_z}{I_y - I_1}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{-93{,}717}{408{,}256 - 6757{,}606} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0{,}85°$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{D_z}{I_y - I_2}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{-93{,}717}{408{,}256 - 406{,}873} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -89{,}15°$$

Sprawdzenie:

$|\alpha|_1 + |\alpha_2| = 90°$