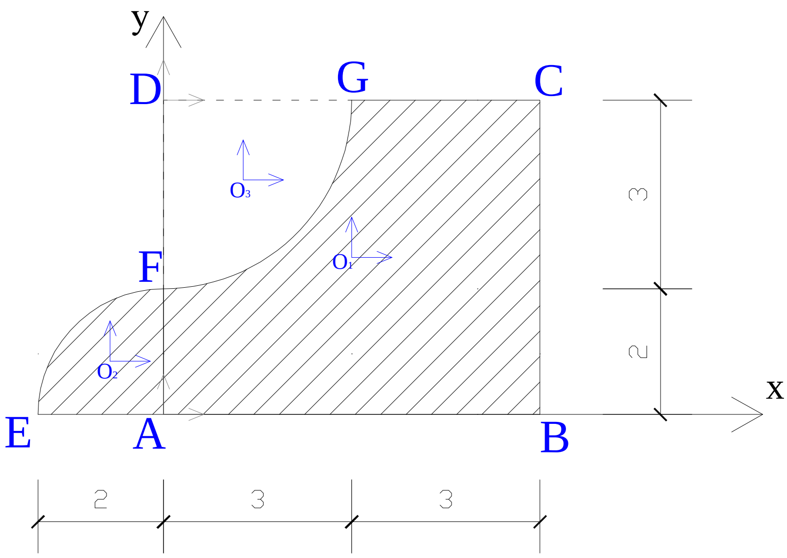
Dla zadanej figury płaskiej o gęstości $\rho = 1$ wyznaczyć główne centralne osie i momenty bezwładności.



Podział na obszary:
Prostokąt *ABCD* **+** ćwiartka koła *EAF* **-** ćwiartka koła *FGD*

Położenia środka masy:

$$M = 5 \cdot 6 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \qquad M = 26{,}073$$

$$S_{xz} = 5 \cdot 6 \cdot 2{,}5 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot \pi} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left(5 - \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi}\right) \qquad S_{xz} = 51{,}324$$

$$S_{yz} = 5 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(-\frac{4 \cdot 2}{3 \cdot \pi}\right) - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi}\right) \qquad S_{yz} = 78{,}334$$

$$x_0 = \frac{S_{yz}}{M} \qquad x_0 = 3{,}004$$

$$y_0 = \frac{S_{xz}}{M} \qquad y_0 = 1{,}968$$

Momenty w punkcie A:

$$I_x = \overset{ABCD}{\frac{5^3 \cdot 6}{3}} + \overset{EAF}{\frac{\pi \cdot 2^4}{16}} - \overset{FGD}{\left[\frac{\pi \cdot 3^4}{16} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi}\right)^2 + \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left(5 - \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi}\right)^2\right]} \qquad I_x = 150{,}523$$

$$I_y = \overset{ABCD}{\frac{6^3 \cdot 5}{3}} + \overset{EAF}{\frac{\pi \cdot 2^4}{16}} - \overset{FGD}{\frac{\pi \cdot 3^4}{16}} \qquad I_y = 347{,}237$$

$$D_z = \overset{ABCD}{\frac{5^2 \cdot 6^2}{4}} - \overset{EAF}{\frac{2^4}{8}} - \overset{FGD}{\left[-\frac{3^4}{8} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi}\right) \cdot \left(-\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi}\right) + \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left(5 - \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi}\right) \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi}\right) \right]} \qquad D_z = 188{,}125$$

Momenty w środku masy:

$$I_{x0} = I_x - M \cdot y_0^{\ 2}$$
$$I_{x0} = 150{,}523 - 26{,}073 \cdot (1{,}968)^2 \qquad I_{x0} = 49{,}542$$

$$I_{y0} = I_y - M \cdot x_0^{\ 2}$$
$$I_{y0} = 347{,}237 - 26{,}073 \cdot (3{,}004)^2 \qquad I_{y0} = 111{,}954$$

$$D_{z0} = D_z - M \cdot x_0 \cdot y_0$$
$$D_{z0} = 188{,}125 - 26{,}073 \cdot 3{,}004 \cdot 1{,}968 \qquad D_{z0} = 33{,}985$$

Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_1 = \frac{I_{x0} + I_{y0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{x0} - I_{y0}}{2}\right)^2 + D_{z0}^{\ 2}}$$
$$I_2 = \frac{49{,}542 + 111{,}954}{2} + \sqrt{\left(\frac{49{,}542 - 111{,}954}{2}\right)^2 + (33{,}985)^2} \qquad I_1 = 126{,}887$$

$$I_2 = \frac{I_{x0} + I_{y0}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{x0} - I_{y0}}{2}\right)^2 + D_{z0}^{\ 2}}$$
$$I_2 = \frac{49{,}542 + 111{,}954}{2} - \sqrt{\left(\frac{49{,}542 - 111{,}954}{2}\right)^2 + (33{,}985)^2} \qquad I_2 = 34{,}609$$

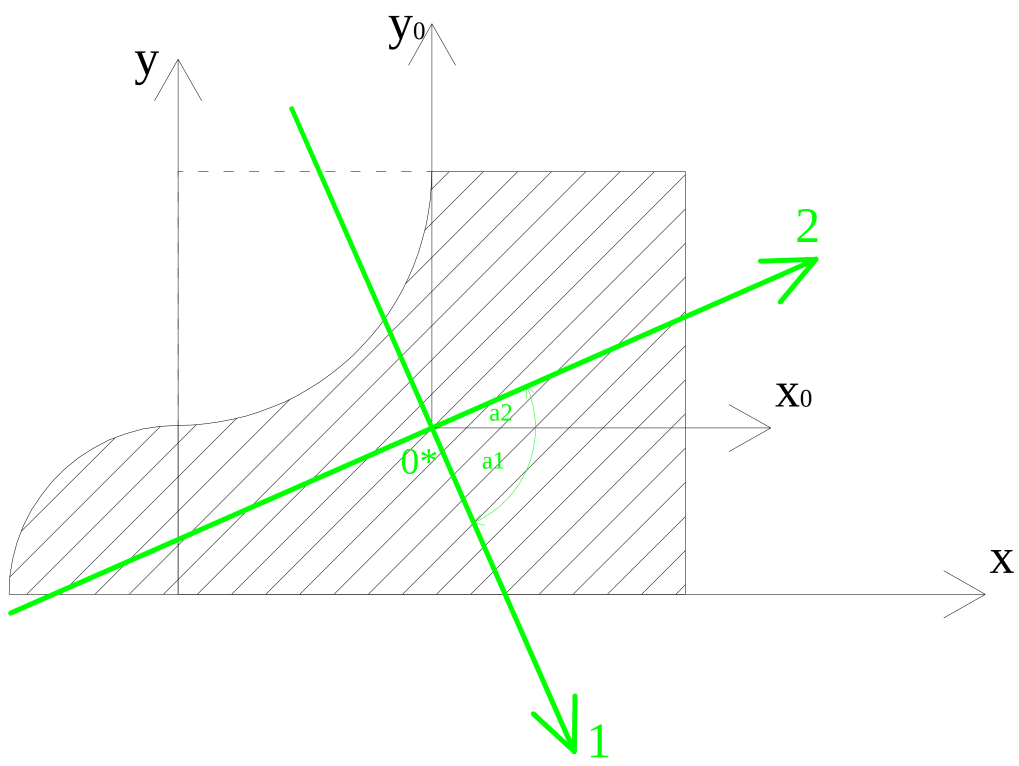
Sprawdzenie:

$$I_{x0} + I_{y0} = I_1 + I_2$$
$$I_{x0} \cdot I_{y0} - D_{z0}^{\ 2} = I_1 \cdot I_2$$

Główne centralne osie bezwładności:

$$\tan \alpha_1 = \frac{D_{z0}}{I_{y0} - I_1}$$
$$\tan \alpha_1 = \frac{33{,}985}{111{,}954 - 126{,}887} \quad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = -66{,}28°$$
$$\tan \alpha_2 = \frac{D_{z0}}{I_{y0} - I_2}$$
$$\tan \alpha_2 = \frac{33{,}985}{111{,}954 - 34{,}609} \quad \Rightarrow \qquad \alpha_2 = 23{,}72°$$

Sprawdzenie: $|\alpha|_1 + |\alpha_2| = 90°$



y
y0
x0
x
2
1
a2
a1
0*