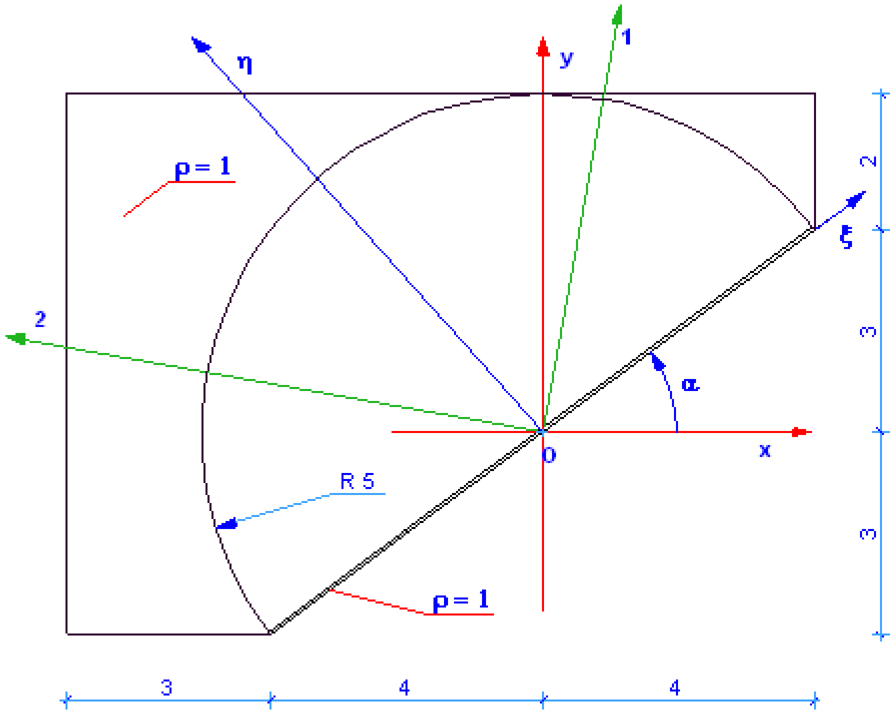
Wyznaczyć: 1. Tensor bezwładności w układzie Oxy
2. Główne osie i mementy bezwładności w punkcie O
3. Tensor bezwładności w układzie O$\xi\eta$
4. Główne centralne osie i momenty bezwładności



Elementy tensora bezwładności w układzie Oxy

$$I_x := \frac{11\cdot 8^3}{12} + 11\cdot 8\cdot 1^2 - \left[\frac{8\cdot 6^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot(-1)^2\right] - \frac{\pi\cdot 5^4}{8} + \frac{10^3}{12}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 \qquad I_x = 269.896$$

$$I_y := \frac{8\cdot 11^3}{12} + 8\cdot 11\cdot(-1.5)^2 - \left[\frac{6\cdot 8^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\left(4 - \frac{8}{3}\right)^2\right] - \frac{\pi\cdot 5^4}{8} + \frac{10^3}{12}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 \qquad I_y = 765.230$$

$$I_{xy} := 8\cdot 11\cdot 1\cdot(-1.5) - \left[\frac{6^2\cdot 8^2}{72} + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot(-1)\cdot\left(4 - \frac{8}{3}\right)\right] + \frac{10^3}{12}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} \qquad I_{xy} = -92.000$$

Momenty główne w punkcie O

$$I_1 := \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\,2}} \qquad I_2 := \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\,2}}$$

$$\alpha_1 := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_1}\right)\cdot\frac{180}{\pi} \qquad \alpha_2 := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_2}\right)\cdot\frac{180}{\pi}$$

$I_1 = 781.765$ $I_2 = 253.361$ $\alpha_1 = 79.811$ $\alpha_2 = -10.189$ $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 90.000$

Elementy tensora bezwładności w układzie O $\xi\eta$

$\sin(\alpha) := \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\alpha := \mathrm{asin}\left(\frac{3}{5}\right)$ $\qquad$ $\alpha = 0.644$

$I_\xi := I_x \cdot \cos(\alpha)^2 + I_y \cdot \sin(\alpha)^2 - I_{xy} \cdot \sin(2\alpha)$ $\qquad$ $I_\xi = 503.416$

$I_\eta := I_x \cdot \sin(\alpha)^2 + I_y \cdot \cos(\alpha)^2 + I_{xy} \cdot \sin(2\alpha)$ $\qquad$ $I_\eta = 531.710$

$I_{\xi\eta} := \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2\cdot\alpha) + I_{xy} \cdot \cos(2\cdot\alpha)$ $\qquad$ $I_{\xi\eta} = -174.360$

Środek masy

$A := 8\cdot 11 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 - \frac{\pi\cdot 5^2}{2} + 10$ $\qquad$ $A = 34.730$

$S_x := 8\cdot 11\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot(-1) - \frac{\pi\cdot 5^2}{2}\cdot\frac{4\cdot 5}{3\cdot\pi}\cdot\frac{4}{5}$ $\qquad$ $S_y := 8\cdot 11\cdot(-1.5) - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\left(4 - \frac{8}{3}\right) - \frac{\pi\cdot 5^2}{2}\cdot\left(-\frac{4\cdot 5}{3\cdot\pi}\cdot\frac{3}{5}\right)$

$x_c := \frac{S_y}{A}$ $\qquad$ $y_c := \frac{S_x}{A}$ $\qquad$ $x_c = -3.282$ $\qquad$ $y_c = 1.305$

Momenty centralne

$I_{xc} := I_x - A\cdot y_c^2$ $\qquad$ $I_{xc} = 210.723$

$I_{yc} := I_y - A\cdot x_c^2$ $\qquad$ $I_{yc} = 391.030$

$I_{xcyc} := I_{xy} - A\cdot x_c\cdot y_c$ $\qquad$ $I_{xcyc} = 56.805$

Główne centralne osie i momenty bezwładności

$I_{1c} := \frac{I_{xc} + I_{yc}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + I_{xcyc}^2}$ $\qquad$ $I_{1c} = 407.433$

$I_{2c} := \frac{I_{xc} + I_{yc}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + I_{xcyc}^2}$ $\qquad$ $I_{2c} = 194.319$

$\alpha_{1c} := \mathrm{atan}\left(\frac{I_{xcyc}}{I_{yc} - I_{1c}}\right)\cdot\frac{180}{\pi}$ $\qquad$ $\alpha_{1c} = -73.893$

$\alpha_{2c} := \mathrm{atan}\left(\frac{I_{xcyc}}{I_{yc} - I_{2c}}\right)\cdot\frac{180}{\pi}$ $\qquad$ $\alpha_{2c} = 16.107$ $\qquad$ $|\alpha_{1c}| + |\alpha_{2c}| = 90.000$

W celu sprawdzenia poprzwności obliczeń momenty centralne wyznaczono jak sumę momentów centralnych poszczególnych obszarów:

$$x_1 := -1.5 - x_c \qquad y_1 := 1 - y_c \qquad x_1 = 1.782 \qquad y_1 = -0.305$$

$$x_2 := 4 - \frac{8}{3} - x_c \qquad y_2 := -1 - y_c \qquad x_2 = 4.616 \qquad y_2 = -2.305$$

$$x_3 := -\frac{4\cdot 5}{3\cdot\pi}\cdot\frac{3}{5} - x_c \qquad y_3 := \frac{4\cdot 5}{3\cdot\pi}\cdot\frac{4}{5} - y_c \qquad x_3 = 2.009 \qquad y_3 = 0.392$$

$$x_4 := -x_c \qquad y_4 := -y_c \qquad x_4 = 3.282 \qquad y_4 = -1.305$$

$$I_{x0} := \frac{11\cdot 8^3}{12} + 11\cdot 8\cdot y_1{}^2 - \left(\frac{8\cdot 6^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot y_2{}^2\right) - \left[\frac{\pi\cdot 5^4}{8} - \frac{\pi\cdot 5^2}{2}\cdot\left(\frac{4\cdot 5}{3\cdot\pi}\cdot\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 5^2}{2}\cdot y_3{}^2\right] \ldots$$
$$+ \frac{10^3}{12}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 10\cdot y_4{}^2 \qquad I_{x0} = 210.723$$

$$I_{y0} := \left[\frac{8\cdot 11^3}{12} + 11\cdot 8\cdot x_1{}^2 - \left(\frac{6\cdot 8^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot x_2{}^2\right) - \left[\frac{\pi\cdot 5^4}{8} - \frac{\pi\cdot 5^2}{2}\cdot\left(\frac{4\cdot 5}{3\cdot\pi}\cdot\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 5^2}{2}\cdot x_3{}^2\right]\right] \ldots$$
$$+ \frac{10^3}{12}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 10\cdot x_4{}^2 \qquad I_{y0} = 391.030$$

$$I_{x0y0} := 11\cdot 8\cdot x_1\cdot y_1 - \left(\frac{6^2\cdot 8^2}{72} + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot x_2\cdot y_2\right) - \left[-\frac{\pi\cdot 5^2}{2}\cdot\left(-\frac{4\cdot 5}{3\cdot\pi}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{4\cdot 5}{3\cdot\pi}\cdot\frac{4}{5}\right) + \frac{\pi\cdot 5^2}{2}\cdot x_3\cdot y_3\right] \ldots$$
$$+ \frac{10^3}{12}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + 10\cdot x_4\cdot y_4 \qquad I_{x0y0} = 56.805$$