Leszek MIKULSKI
Katedra Podstaw Mechaniki Ośrodków Ciągłych,
Instytut Mechaniki Budowli, Politechnika Krakowska
e–mail: ps@pk.edu.pl

# Optymalizacja belki wspornikowej

## 1. Wprowadzenie

Rozważamy zadanie optymalnego kształtowania belki wspornikowej obciążonej znanym obciążeniem zewnętrznym w postaci siły skupionej przyłożonej na końcu wspornika. Przekrój poprzeczny belki założono jako prostokątny o stałej wysokości $h_0$ i zmiennej szerokości $b$ (Rys. 1).


*Rys. 1. Schemat podparcia i obciążenia belki. Przekrój poprzeczny belki.*

Ugięcie belki wspornikowej o zmiennym przekroju poprzecznym opisuje następujące równanie różniczkowe:

$$\left(EI_y w''\right)'' = -q \tag{1}$$

gdzie:
$w$ – przemieszczenie w kierunku osi $z$,
$E$ – moduł Younga,
$q$ – obciążenie ciągłe,
$I_y$ – moment bezwładności względem osi $y$:

$$I_y = \frac{b h_0^3}{12}\,[m^4] \tag{2}$$

Uwzględniając znane zależności pomiędzy ugięciem a siłami przekrojowymi, równanie opisane wzorem (1) zapiszemy w postaci:

$$\left(EI_y w''\right) = M \text{ , gdzie: } M'' = -q \tag{3}$$

Wykorzystując dalej zależności:

$$w' = \varphi\,,\;\; M' = Q \tag{4}$$

gdzie:
$\varphi$ – kąt ugięcia,
$Q$ – siła poprzeczna,
$M$ – moment zginający,

związek (3) zapiszemy jako układ czterech równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$w' = \varphi$$
$$\varphi' = \frac{M}{E \cdot I_y}$$
$$M' = Q$$
$$Q' = -q \tag{5}$$

Dodatkowo wprowadzimy jeszcze kolejne, piąte równanie opisujące objętość rozważanej belki oraz założymy, że nie uwzględniamy w obliczeniach ciężaru własnego belki ani obciążenia ciągłego. Ostatecznie, możemy przedstawić komplet równań różniczkowych opisujących rozważany problem:

$$w' = \varphi$$
$$\varphi' = \frac{12M}{Ebh_0^3}$$
$$M' = Q$$
$$Q' = 0$$
$$V' = bh_0 \tag{6}$$

Układowi równań różniczkowych (6) towarzyszą warunki brzegowe, które dla wspornika na lewym końcu utwierdzonego a na prawym swobodnego, przy zadanej wartości ugięcia na końcu swobodnym, przybierają postać:

$$\begin{aligned} &w(0) = 0 \qquad && w(l) = w_0 \\ &\varphi(0) = 0 \qquad && M(l) = 0 \\ & && Q(l) = P \end{aligned} \tag{7}$$

Równanie (6) nazywane jest równaniem stanu, a występujące zmienne o znanym sensie fizycznym $(w, \varphi, M, Q, V)$ są zmiennymi stanu. Prawe strony równań stanu zależą od zmiennych stanu i wymiarów przekroju porzecznego, a także od stałych materiałowych $(E)$. Kluczowe znaczenie w tym sformułowaniu posiadają warunki brzegowe, które są sformułowane w punkcie początkowym $(x = 0)$ i punkcie końcowym $(x = l)$. Równanie (6) z warunkami (7) jest nazywane dwupunktowym problemem brzegowym, którego rozwiązanie numeryczne sprawia na ogół wiele kłopotów.
Procedury numeryczne służące do rozwiązania równania różniczkowego wymagają znajomości wszystkich zmiennych stanu w punkcie początkowym $(x = 0)$.

## 2. Optymalne kształtowanie

Zadanie optymalnego kształtowania polega na takim doborze szerokości $b$ przekroju poprzecznego, zmiennego wzdłuż osi belki, która minimalizuje wybraną funkcję celu i spełnia jednocześnie równania stanu (6) oraz wszystkie dodatkowe ograniczenia.
Jako funkcję celu przyjęto ciężar belki (objętość):

$$G = \int_0^l \gamma b h_0 \, dx \tag{8}$$

Dodatkowymi ograniczeniami w zadaniu optymalnego kształtowania są warunki poboczne wynikające z przesłanek fizycznych:

$$b_1 \geq b \geq b_0 \tag{9}$$

Ostatecznie w zadaniu optymalnego kształtowania minimalizacji podlega funkcja celu G przy warunkach (6), (7), (9).

## Metoda rozwiązania

Stosując formalizm zasady maksimum zestawimy warunki konieczne, które pozwolą nam wyznaczyć rozwiązanie optymalne [1].

Definiujemy funkcję Hamiltona, która dla rozważanego przypadku ma postać:

$$H = \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \frac{12M}{Ebh_0^{\ 3}} + \lambda_3 Q + \lambda_5 bh_0 \tag{10}$$

gdzie:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ są funkcjami sprzężonymi spełniającymi układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}
\lambda_1' &= -\frac{\partial H}{\partial w} = 0 \\
\lambda_2' &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\lambda_1 \\
\lambda_3' &= -\frac{\partial H}{\partial M} = -\frac{12\lambda_2}{Ebh_0^{\ 3}} \\
\lambda_4' &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\lambda_3 \\
\lambda_5' &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Rozwiązanie optymalne wynika z konieczności spełnienia związku:

$$\frac{\partial H}{\partial b} = 0 \tag{12}$$

$$-\frac{\lambda_2 12M}{Eh_0^{\ 3} b^2} + \lambda_5 h_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{12\lambda_2 M}{Eh_0^{\ 4} \lambda_5}$$

Stąd rozwiązanie optymalne:

$$b(x) = \sqrt{\frac{12\lambda_2 M}{Eh_0^{\ 4} \lambda_5}} \qquad b_1 \geq b \geq b_0 \tag{13}$$

Warunki brzegowe dla funkcji $\lambda_i(0)$, $\lambda_i(l)$ wynikają z odpowiednich warunków transwersalności. Zestawiając macierz stanu w punkcie $x = 0$:

$$\overline{y_i}(w(0), \varphi(0), M(0), Q(0), V(0))$$

$$\overline{y_i}(\ 0\ ,\ 0\ ,\ M_0\ ,\ Q_0\ ,\ 0\ )$$

z warunku $\lambda_i(0) \cdot y_i(0) = 0$ otrzymujemy:

$$\lambda_3(0) = 0, \quad \lambda_4(0) = 0 \tag{14}$$

Podobnie możemy zestawić macierz stanu w punkcie $x = l$ :

$$\overline{y_i}(w(l), \varphi(l), M(l), Q(l), V(l))$$

$$\overline{y_i}(\ w_0\ ,\ \varphi\ ,\ 0\ ,\ P\ ,\ V\ )$$

z warunku transwersalności otrzymujemy:

$$\lambda_2(l) = 0 \tag{15}$$

$$w_0 \cdot \lambda_1(l) + P \cdot \lambda_4(l) = 0 \tag{16}$$

Minimalizujemy objętość $V$ : $\min_b V$ ; modyfikacji podlega końcowy warunek na $\lambda_5(l)$ który ma postać: $\lambda_5(l) = 1$.

Ostatecznie zadanie optymalnego kształtowania opisane jest równaniami (6), (11) z warunkami brzegowymi (7), (14), (15), (16) i warunkiem ograniczającymi (9).

Można zauważyć, że dla $x \to l$ :

$$\lim_{x \to l} b = 0 \tag{17}$$

Widać więc, że warunek $b \geq b_0$ wynika z przesłanek fizycznych. Można zatem przewidzieć strukturę rozwiązania optymalnego:

$$b(x) = \begin{cases} b(x) & x \in \left(0, x_2\right) \\ b_0 & x \in (x_2, l) \end{cases} \tag{18}$$

Rozważając ograniczenia $b_1 \geq b \geq b_0$ nie można wykluczyć rozwiązania o następującej strukturze:

$$b(x) = \begin{cases} b_1 & x \in (0, x_1) \\ b(x) & x \in \left(x_1, x_2\right) \\ b_0 & x \in (x_2, l) \end{cases} \tag{19}$$

Punkty $x_1, x_2$ nie są znane a priori.

## 3. Rozwiązanie numeryczne

Do numerycznego rozwiązania rozważanego zadania zastosowano program Dircol-2.1 (A Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Problems), którego autorem jest Prof. Oskar von Stryk z TU Darmstadt [2]. Program ten jest skutecznym i dobrym narzędziem do rozwiązywania zadań optymalnego sterowania z ograniczeniami. W programie tym istnieją określone procedury numeryczne, które służą do opisu sformułowanego zadania. Zasadnicza komunikacja pomiędzy użytkownikiem, a blokiem obliczeniowym jest możliwa przez trzy podstawowe podprogramy: user.f, DATDIM i DATLIM, które muszą być zajęte przez użytkownika.

*Tab. 1. Podprogramy programu Dircol-2.1 .*

| **Nazwa podprogramu** | **Treść** |
|---|---|
| | **Zbiory wejściowe, niezbędne** |
| DATDIM | Wymiary zadania, dyskretyzacja, żądana dokładność |
| DATLIM | Warunki brzegowe w punkcie początkowym, końcowym, wartości ograniczające dla $y, U, p, x_s$ |
| | **Zbiory wejściowe, opcjonalne** |
| GDATX | Zmienne stanu (zbiór wyjściowy programu Dircol) |
| GDATU | Sterowanie i parametry sterowania (zbiór wyjściowy programu Dircol) |

Zasadnicze procedury (subroutines), za pomocą których opisany jest model matematyczny optymalizowanej belki zamieszczone są w podprogramie user.f.

*Tab. 2. Podprogram user.f*

| **Nazwa procedury** | **Treść** |
|---|---|
| DIRCOM | Definiuje dane (common) |
| USRSTV | Podaje wartości startowe dla $y, U, p$ oraz granice faz |
| USROBJ | Definiuje funkcję celu |
| USRDEQ | Określa prawe strony równań stanu |
| USRNBC | Opisuje nieliniowe warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe |
| USRNIC | Nierównościowe warunki ograniczające |
| USRNEC | Równościowe warunki ograniczające |

## 4. Wyniki

Obliczenia wykonano dla następujących danych:

$l = 2m$

$P = 2kN$

$E = 205 \cdot 10^6 kPa$

$h_0 = 0.1m$

$b \in (0.05, 0.20)$

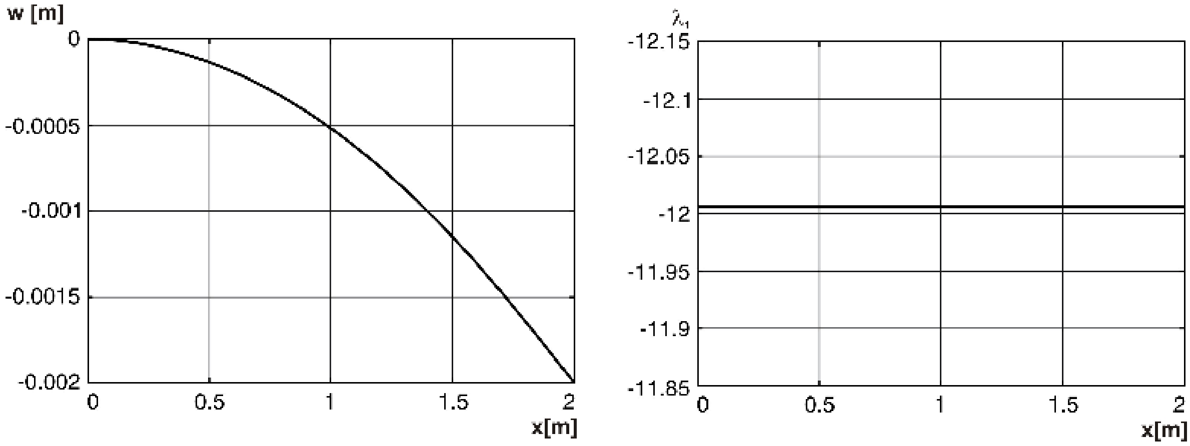
$w_0 = 0.002m$

Na wykresach zostały przedstawione rozwiązania numeryczne – rozkłady zmiennych stanu $(w, \varphi, M, Q, V)$, funkcji sprzężonych $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ oraz optymalny rozkład szerokości przekroju prostokątnego belki $(b(x) = U(x))$.

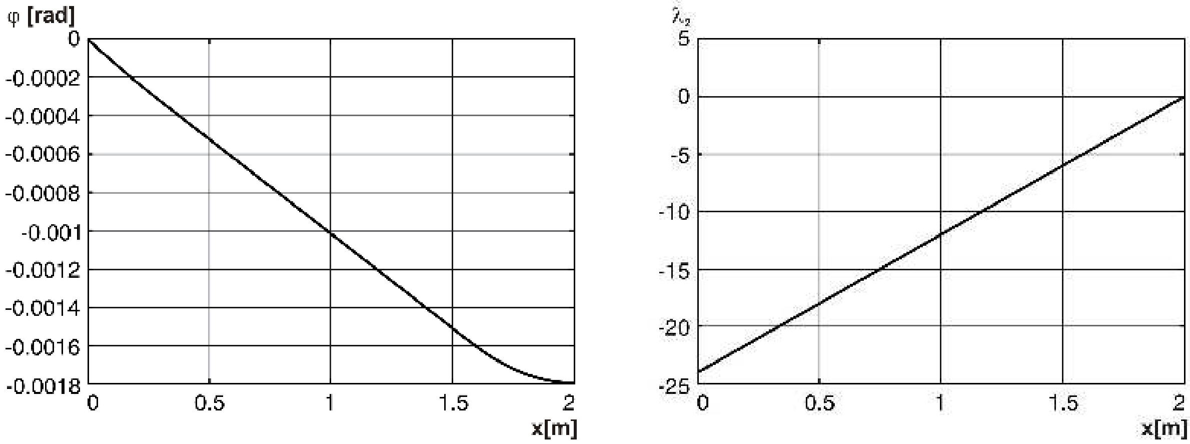
Dla rozważanego zadania następująca struktura sterowania jest optymalna:

$$U(x) = \begin{cases} 0.2m & x \in (0, 0.4m) \\ U_{opt} & x \in (0.4m,\ 1.6m) \\ 0.05m & x \in (1.6m, 2m) \end{cases}$$

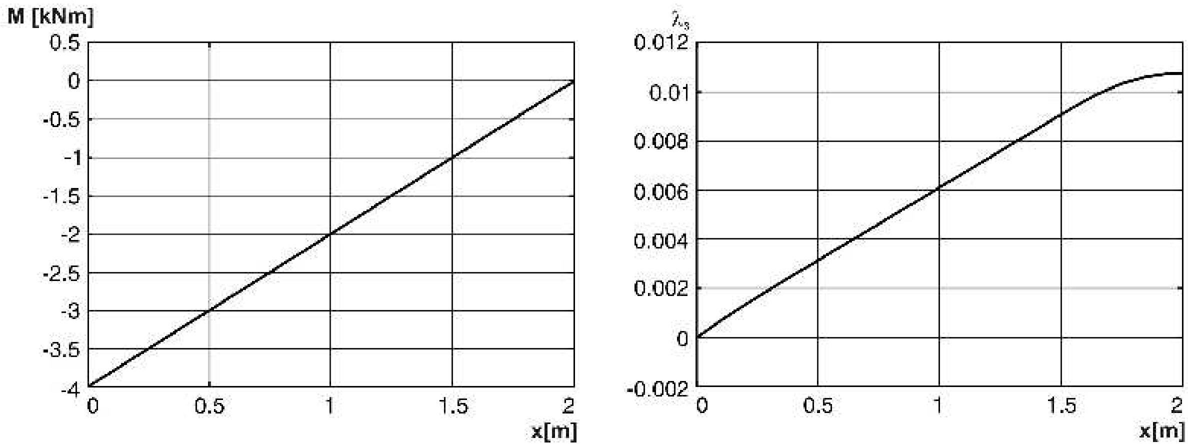
Wartość funkcji celu (8) wynosi: $V = 0{,}2418 \cdot 10^{-1}\ m^3$. Funkcja Hamiltona dla analizowanego zadania jest stała, co świadczy o poprawności uzyskanych wyników.



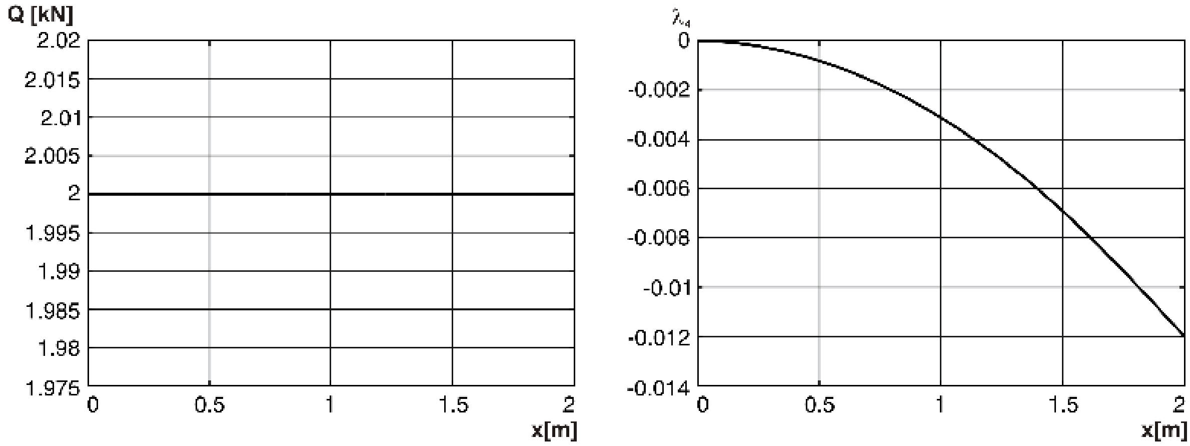

*Rys. 2. Zmienna stanu $w$ i odpowiadająca jej zmienna sprzężona*



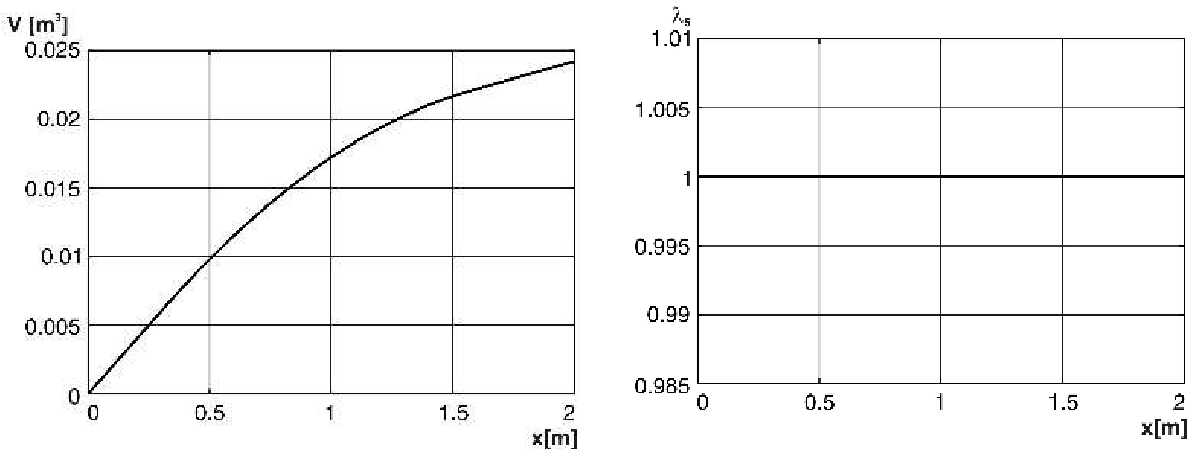

*Rys. 3. Zmienna stanu $\varphi$ i odpowiadająca jej zmienna sprzężona*



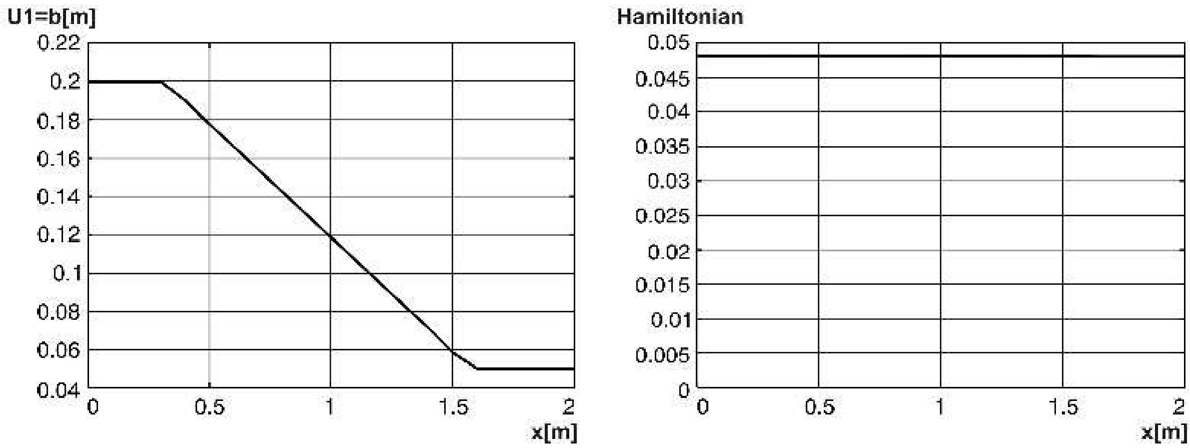

*Rys. 4. Zmienna stanu $M$ i odpowiadająca jej zmienna sprzężona*




*Rys. 5. Zmienna stanu $Q$ i odpowiadająca jej zmienna sprzężona*

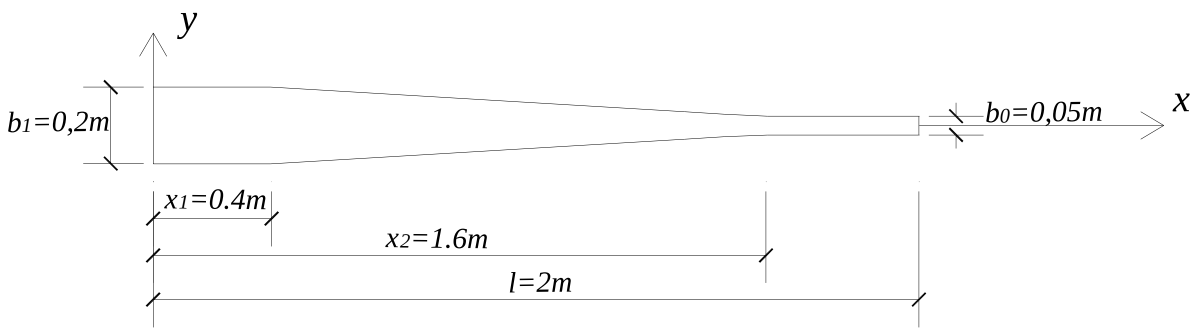



*Rys. 6. Zmienna stanu $V$ i odpowiadająca jej zmienna sprzężona*




*Rys. 7. Zmienna decyzyjna $U_1 = b$. Funkcja Hamiltona*

Na rysunku 8 przedstawiono optymalną szerokość rozważanej belki wspornikowej, z uwagi na minimalizację objętości, przy zadanym ugięciu na końcu swobodnym.




*Rys. 8. Optymalna szerokość belki wspornikowej*

## 5. Literatura

1. Mikulski L., *Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, ISBN 978-83-7242-440-2, s. 1-194, Kraków 2007.
2. von Stryk O., *User’s Guide for Dircol. A Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problems*, Technische Universität Darmstadt 2002.