

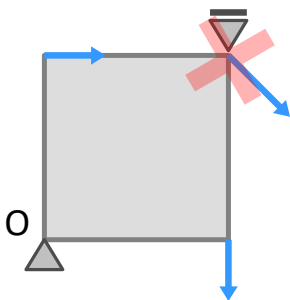
ANALIZA KINEMATYCZNA UKŁADU MECHANICZNEGO

Celem **analizy kinematycznej** układu konstrukcyjnego jest uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy układ ten jest mechanizmem (może się poruszać, ma przynajmniej jeden stopień swobody), czy nie.

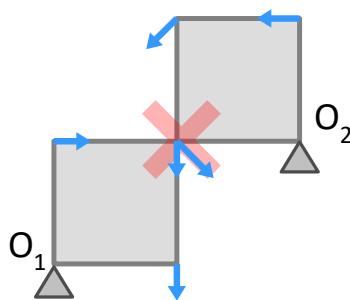
W szczególności, w przypadku układów, dla których wstępne oszacowanie liczby stopni swobody sugeruje, że są one układami statecznymi, analiza kinematyczna ma **wykazać, że rzeczywiście układ ten nie może się w żaden sposób poruszać**. Wykazać to można **zakładając ruch zgodny z nałożonymi więziami a następnie wykazując sprzeczność**, np.:

- Wykazanie, że założony ruch **wymaga w punkcie podparcia prędkości, która nie jest dopuszczalna** przez tą podporę (Rys. 1, Rys. 3).
- Wykazanie, że założony ruch dwóch tarcz **wymaga w ich punkcie wspólnym (przegubie) dwóch różnych kierunków prędkości** (Rys. 2).
- Wykazanie, że założony ruch przewiduje **niezerową prędkość w jedynym możliwym położeniu środka chwilowego obrotu** (Rys. 3).

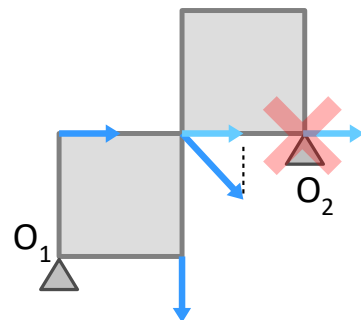
Rys. 1



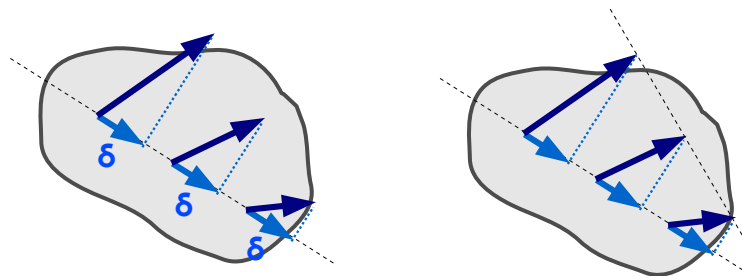
Rys. 2



Rys. 3



- Wykazanie, że założony ruch prowadzi do **rozkładu prędkości, który nie jest zgodny z twierdzeniami o rozkładzie prędkości w bryle sztywnej**, mianowicie:
 - *Rzuty prędkości punktów leżących na jednej prostej na tą prostą są sobie równe.*
 - *Końcówki wektorów prędkości punktów leżących na jednej prostej leżą na prostej.*



LICZBA STOPNI SWOBODY

Wstępną informację dotyczącą liczby stopni swobody daje nam poniższy wzór. Dla punktów na płaszczyźnie mamy:

$$LSS = 3 \cdot B - 2 \cdot P - R$$

gdzie:

- B – liczba płaskich tarcz sztywnych.** Każda tarcza sztywna na płaszczyźnie ma 3 stopnie swobody – ruch poziomy, ruch pionowy i obrót. Za tarczę sztywną uważamy każdy pręt (prosty lub zakrzywiony) i każde 3 takie pręty połączone trzema niewspółliniowymi przegubami (w szczególności kratownice zbudowane z pól trójkątnych).
- P – liczba przegubów pojedynczych.** Każdy przegub pojedynczy nakłada 2 więzi na jedną z łączonych w niem tarcz – przemieszczenie pionowe i poziome w przegubie musi być takie samo, jak drugiej tarczy. Przegub, w którym łączy się N+1 tarcz sztywnych nazywamy przegubem N-krotnym i jest on równoważny N przegubom pojedynczym. W przypadku przegubów wchodzących w skład tarczy sztywnej należy zmniejszyć krotność przegubu odpowiednio do liczby, która odpowiada liczbie *różnych* tarcz sztywnych (nie wchodzących w skład jednej tarczy), łączących się w tym przegubie
- R – liczba więzi** nałożonych na układ (w szczególności: **liczba reakcji podporowych**).

SCHEMAT ANALIZY KINEMATYCZNEJ

1. **Określamy liczbę tarcz sztywnych.** Dla każdej z nich konieczne jest określenie potencjalnego położenia środka chwilowego obrotu (w ogólności dla każdej tarczy będzie on inny) i odpowiadającego mu rozkładu prędkości. Docelowo będziemy chcieli wykazać, że rozkład ten jest niedopuszczalny.
2. **Analizę zaczynamy od tarczy, do której przyłożonych jest najwięcej więzi** (podpór o największej liczbie reakcji). Jeśli tarcz o tej samej liczbie więzi jest kilka, wybieramy dowolną z nich.
3. **Wyznaczamy środek chwilowego obrotu dla tej pierwszej tarczy oraz odpowiadający mu rozkład prędkości – zwrot i wielkość prędkości** zakładamy w sposób **dowolny** i uzależniamy od pewnego parametru v .
4. **Wybieramy kolejną tarczę, wyznaczamy jej środek chwilowego obrotu i odpowiadający mu rozkład prędkości** w zależności od sytuacji:
 - **Jeśli wcześniej analizowana tarcza jest nieruchoma**, to kolejną tarczą będzie **dowolna tarcza sąsiednia** (połączona przegubem z tarczą analizowaną wcześniej).
 - **Środkiem chwilowego obrotu kolejnej tarczy będzie przegub łączący ją z tarczą nieruchomą** (o ile sama może się poruszać).
 - Zwrot i wielkość ruchu zakładamy w sposób dowolny.
 - **Jeśli wcześniej analizowana tarcza może się poruszać**, to kolejną tarczą będzie **tarcza sąsiednia, do której również przyłożone są jakieś więzi**.
 - **Środek chwilowego obrotu kolejnej tarczy będzie punkt przecięcia się prostych prostopadłych do kierunku dopuszczalnego przez więzi oraz do kierunku założonej prędkości w przegubie** łączącym ją z wcześniej analizowaną tarczą (kierunek ten przechodzi przez przegub i środek chwilowego obrotu wcześniej analizowanej tarczy).
 - Zwrot i wielkość ruchu wyznaczamy na podstawie wyznaczonego położenia środka chwilowego obrotu oraz prędkości w przegubie łączącym tę tarczę z tarczą analizowaną wcześniej, tak aby również i dla tej kolejnej tarczy dało się wyznaczyć składowe prędkości w zależności od przyjętego wcześniej parametru v .
 - **Jeśli wcześniej analizowana tarcza może się poruszać, a do tarcz sąsiednich nie są przyłożone żadne więzi**, to kolejną tarczą będzie **tarcza, do której przyłożono kolejną największą liczbę więzi** a nie będąca tarczą sąsiednią, tj. pomiędzy tą kolejną tarczą a

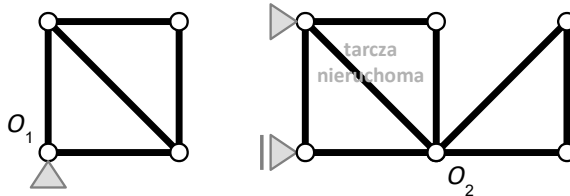
tarczą analizowaną wcześniej znajdują się inne tarcze sztywne połączone przegubami.

- Zwrot i wielkość ruchu zakładamy w sposób dowolny, ale uzależniając do odmiennego parametru u .
5. Powtarzamy krok 4 dla każdego ciągu tarcz sztywnych, w których rozkład prędkości zależy od różnych parametrów, aż do chwili gdy **rozkłady prędkości zależne od tych odmiennych parametrów będą wyznaczone w tarczach sztywnych rozdzielonych tylko jedną tarczą**. Wyznaczamy prędkości w przegubach, za pomocą których tarcza ta jest połączona, i stosujemy **twierdzenie o równości rzutów prędkości na prostą łączącą punkty** w ciele sztywnym – twierdzenie to **stosujemy dla prostej łączącej wspomniane przeguby**. W ten sposób znajdujemy związek między v i u .
 6. **Powtarzamy kroki 4 i 5 aż do wykazania wymaganej sprzeczności** dowodzącej, że założony ruch jest niedopuszczalny.
 7. Po wykazaniu sprzeczności rezygnujemy z pierwszego założenia, które doprowadziło nas do sprzeczności – tj. z założonego ruchu tarczy pierwszej – i **przyjmujemy, że tarcza pierwsza jest nieruchoma**. Przy tym założeniu **wykonujemy nową analizę kinematyczną** – zakładając jakiś ruch tarczy sąsiedniej, która będzie mogła obracać się wokół nieruchomego przegubu łączącego ją z tarczą pierwszą – aż do wykazania kolejnej sprzeczności. Wtedy zakładamy, że również i ta sąsiednia tarcza nie może się poruszać i przeprowadzamy przy tym założeniu kolejną analizę kinematyczną. **Powtarzamy ten schemat aż do wykluczenia ruchu wszystkich tarcz.**

WYZNACZANIE ŚRODKA CHWILOWEGO OBROTU

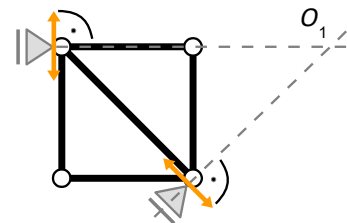
Środek chwilowego obrotu jest punktem, w którym pole prędkości przyjmuje wartość zerową. Istnieje tylko jeden taki punkt, to znaczy, że **jeżeli dla pewnej tarczy sztywnej znajdziemy punkt, o którym wiemy, że jest nieruchomy, to punkt ten jest środkiem chwilowego obrotu, albo też tarcza w ogóle się nie porusza.**

- Jeśli do tarczy przyłożona jest **podpora przegubowa nieprzesuwana**, to punkt podparcia jest jedynym możliwym położeniem środka chwilowego obrotu.
- Jeśli pewna tarcza jest **połączona przegubowo z tarczą nieruchomą**, to przegub ten jest jedynym możliwym położeniem środka chwilowego obrotu.

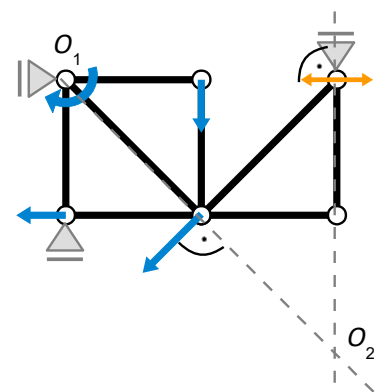


W każdym innym przypadku **środek chwilowego obrotu leży w punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do dopuszczalnych kierunków prędkości**. Wystarczy zatem znać **dwa takie kierunki**.

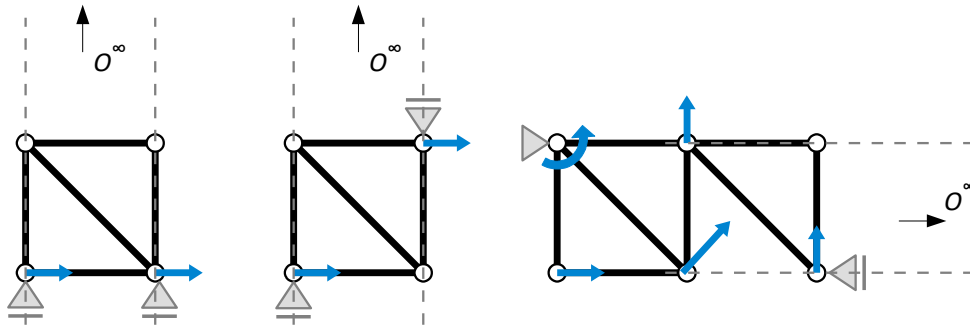
- dopuszczalne kierunki prędkości mogą być wyznaczone są przez podpory



- dopuszczalne kierunki prędkości mogą być wyznaczone przez podporę i kierunek dopuszczalny w przegubie (kierunek prędkości wynikający z ruchu tarczy sąsiedniej). Ponieważ kierunek prędkości w przegubie musi być prostopadły do prostej łączącej przegub ze środkiem chwilowego obrotu (zarówno dla tarczy pierwszej jak i drugiej) zatem **środek chwilowego obrotu tarczy drugiej musi leżeć na prostej łączącej środek chwilowego obrotu tarczy pierwszej oraz przegub.**

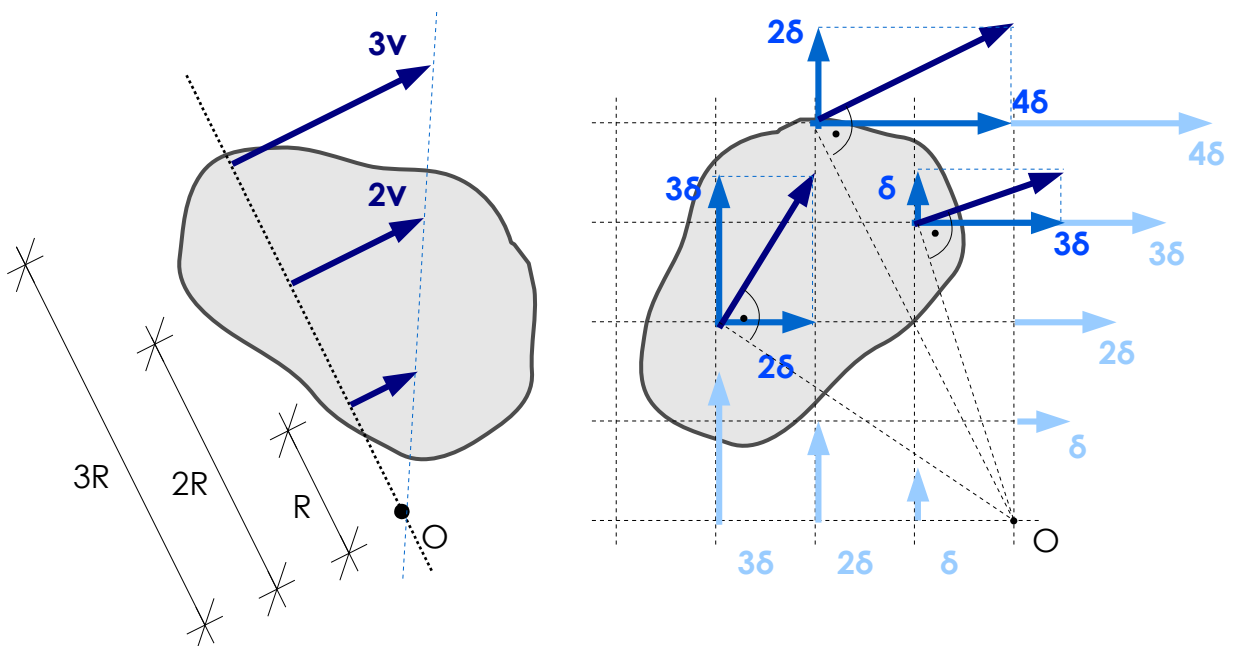


- jeśli proste prostopadłe do dopuszczalnych kierunków prędkości są równoległe, to środek chwilowego obrotu jest punktem niewłaściwym w nieskończoności – tarcza doznaje wtedy jedynie **translacji**, tj. **przesunięcia równoległego bez obrotu**. W takiej sytuacji **wszystkie punkty takiej tarczy mają taki sam wektor prędkości**.



WYZNACZANIE ROZKŁADU PRĘDKOŚCI

- Wektor prędkości** w danym punkcie rozważanej tarczy **jest zawsze prostopadły do prostej łączącej ten punkt ze środkiem chwilowego obrotu** tej tarczy.
- Prędkości punktów** leżących na jednej prostej łączącej je ze środkiem chwilowego obrotu są **proporcjonalne do odległości od środka chwilowego obrotu**.
- Zgodnie z twierdzeniem o równości rzutów prędkości na kierunek łączący dwa punkty, **w obrębie jednej tarczy sztywnej rzuty poziome musimy przenosić w poziomie, rzuty pionowe musimy przenosić w pionie**.

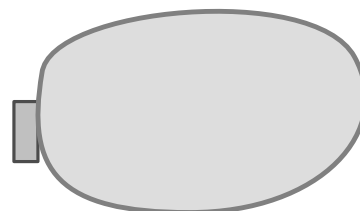


TARCE NIERUCHOME

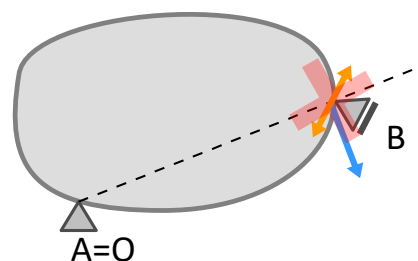
Poniżej przedstawiona zostanie analiza kinematyczna pojedynczych tarcz w kilku schematach podparcia. W kolejnych analizach nie będziemy wykazywać stateczności tego typu tarcz, tylko z góry określać je będziemy jako tarcze nieruchome.

UTWIERDZENIE

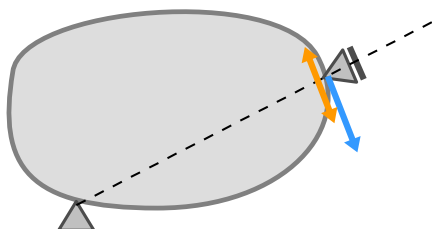
1. Utwierdzenie odbiera tarczy 3 stopnie swobody, zatem tarcza jest nieruchoma.

**DWIE PODPORY PRZEGUBOWE – PRZESUWNA I NIEPRZESUWNA**

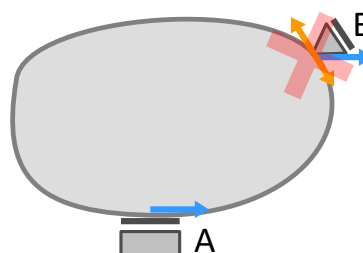
1. Punkt A jest nieruchomy, zatem – o ile tarcza w ogóle może się ruszać – jest on jedynym dopuszczalnym miejscem jej środka chwilowego obrotu O.
2. Prędkość w punkcie B musi być prostopadła do prostej łączącej punkt B ze środkiem chwilowego obrotu.
3. Jest to kierunek niedopuszczalny przez podporę w punkcie B. Ruch taki jest niemożliwy.
4. Jest to jedyny ruch dopuszczalny przez podporę w punkcie A, zatem tarcza jest nieruchoma.



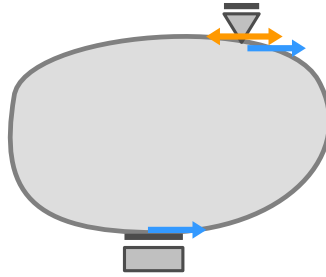
WNIOSEK: Tarcza byłaby ruchoma, jeśli kierunek dopuszczalny na podporze przegubowej przesuwnej będzie prostopadły do prostej łączącej tę podporę i podporę przegubową nieprzesuwную.

**UTWIERDZENIE Z PRZESUWEM**

1. Podpora w punkcie A pozwala jedynie na przesunięcie równoległe, zatem wszystkie punkty tarczy muszą mieć prędkość zgodną z kierunkiem dopuszczalnym przez tę podporę.
2. Prędkość taka jest niezgodna z kierunkiem dopuszczalnym przez podporę w punkcie B. Ruch taki jest niemożliwy.
3. Jest to jedyny ruch dopuszczalny przez podporę w punkcie A, zatem tarcza jest nieruchoma.

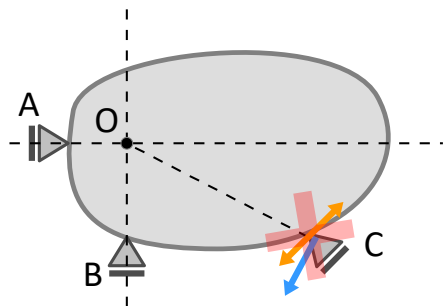


WNIOSEK: Tarcza byłaby ruchoma, jeśli kierunek dopuszczalny na podporze przegubowej przesuwnej będzie zgodny z kierunkiem przesuwu w utwierdzeniu.

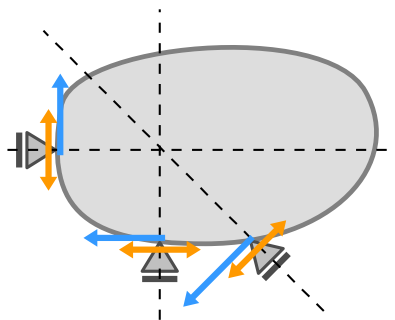


TRZY PODPORY PRZEGUBOWE PRZESUWNE

1. Potencjalne położenie środka chwilowego obrotu znajdujemy w punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do dopuszczalnych kierunków prędkości dla podpór A i B.
2. Prędkość w punkcie C musi być prostopadła do prostej łączącej punkt C ze środkiem chwilowego obrotu.
3. Jest to kierunek niedopuszczalny przez podporę w punkcie C. Ruch taki jest niemożliwy.
4. W analogiczny sposób wykluczamy obroty wokół potencjalnych środków chwilowego obrotu wyznaczanych dla pozostałych par podpór. Ponieważ są to jedyne możliwe ruchy dopuszczalne przez te podpory, zatem tarcza jest nieruchoma.



WNIOSEK: Tarcza byłaby ruchoma jeśli proste prostopadłe do kierunków dopuszczalnych przez podpory przetną się w jednym punkcie.



PRZYKŁAD 1.

Sklassyfikować poniższy układ mechaniczny:

**ROZWIĄZANIE:**

Liczba brył sztywnych: $B=1$

Liczba przegubów pojedynczych: $P=0$

Liczba reakcji podporowych: $R=3$

Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = 0$

Analiza kinematyczna:

1. Układ złożony jest z jednej tarczy sztywnej.



2. Podpora w punkcie A wymusza położenie środka chwilowego obrotu w punkcie A. Odpowiadający obrotowi wokół punktu A kierunek prędkości w punkcie B jest niezgodny z podporą w punkcie B.



3. Układ jest nieruchomy.
4. $LSS = 0 \rightarrow$ **Układ jest statycznie wyznaczalny.**

PRZYKŁAD 2.

Sklassyfikować poniższy układ mechaniczny:

**ROZWIĄZANIE:**

Liczba brył sztywnych: $B=1$

Liczba przegubów pojedynczych: $P=0$

Liczba reakcji podporowych: $R=3$

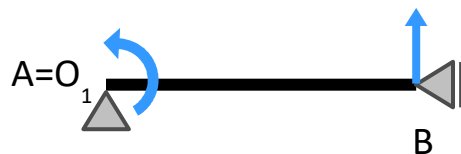
Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = 0$

Analiza kinematyczna:

1. Układ złożony jest z jednej tarczy sztywnej.



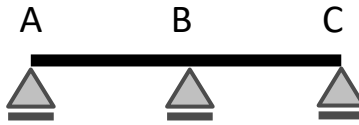
2. Podpora w punkcie A wymusza położenie środka chwilowego obrotu w punkcie A. Odpowiadający obrotowi wokół punktu A kierunek prędkości w punkcie B jest zgodny z podporą w punkcie B.



3. Układ jest chwiejny.

PRZYKŁAD 3.

Sklassyfikować poniższy układ mechaniczny:

**ROZWIĄZANIE:**

Liczba brył sztywnych: $B=1$

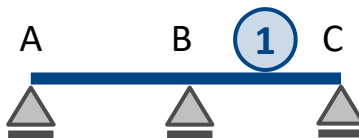
Liczba przegubów pojedynczych: $P=0$

Liczba reakcji podporowych: $R=3$

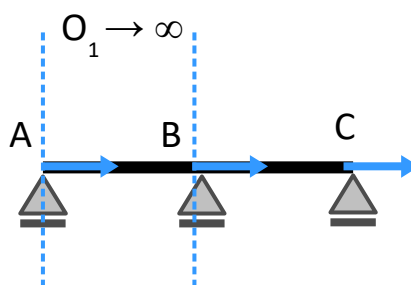
Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = 0$

Analiza kinematyczna:

1. Układ złożony jest z jednej tarczy sztywnej.



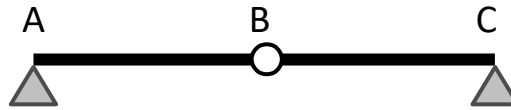
2. Na podstawie kierunków dopuszczalnych na podporach A i B wyznaczamy środek chwilowego obrotu – jest to punkt niewłaściwy w nieskończoności, któremu odpowiada pozioma translacja układu. Prędkość wynikająca z tej translacji jest zgodna z podporą w punkcie C.



3. Układ jest chwiejny.

PRZYKŁAD 4.

Sklasyfikować poniższy układ mechaniczny:

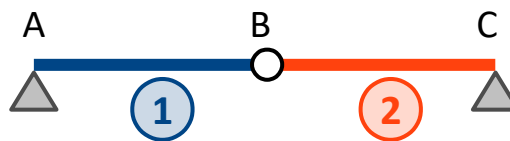
**ROZWIĄZANIE:**

Liczba brył sztywnych: $B=2$
 Liczba przegubów pojedynczych: $P=1$
 Liczba reakcji podporowych: $R=4$

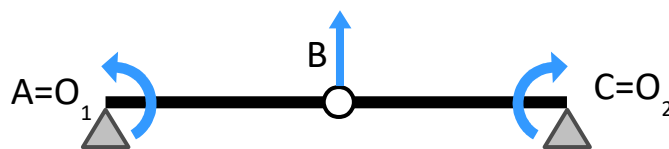
Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = 0$

Analiza kinematyczna:

1. Układ złożony jest z dwóch tarcz sztywnych.



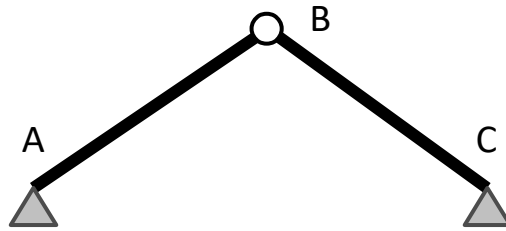
2. Podpora w punkcie A wymusza położenie chwilowego środka obrotu dla tarczy (1) w punkcie A. Podpora w punkcie C wymusza położenie chwilowego środka obrotu dla tarczy (2) w punkcie C. Prędkość w punkcie B wynikająca z obrotu tarczy (1) wokół A jest zgodna z prędkością w punkcie B wynikającą z obrotu tarczy (2) wokół C.



3. Układ jest chwiejny.

PRZYKŁAD 5.

Skłasyfikować poniższy układ mechaniczny:

**ROZWIĄZANIE:**

Liczba brył sztywnych: $B=2$

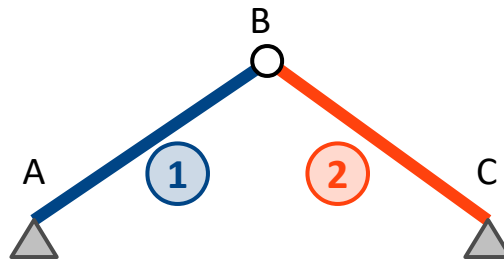
Liczba przegubów pojedynczych: $P=1$

Liczba reakcji podporowych: $R=4$

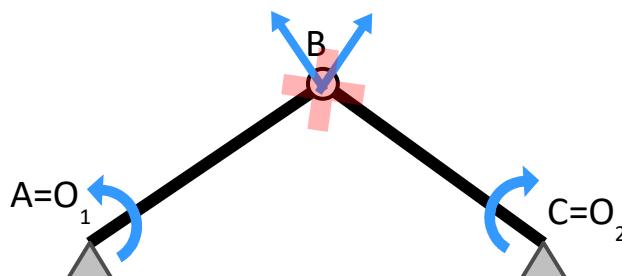
Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = 0$

Analiza kinematyczna:

1. Układ złożony jest z dwóch tarcz sztywnych.



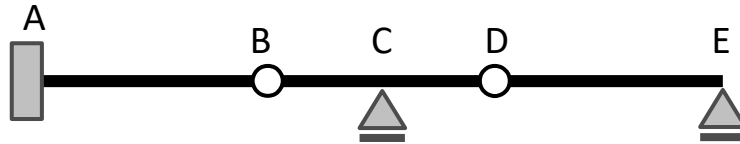
2. Podpora w punkcie A wymusza położenie chwilowego środka obrotu dla tarczy (1) w punkcie A. Podpora w punkcie C wymusza położenie chwilowego środka obrotu dla tarczy (2) w punkcie C. Prędkość w punkcie B wynikająca z obrotu tarczy (1) wokół A jest niezgodna z prędkością w punkcie B wynikającą z obrotu tarczy (2) wokół C.



3. Układ jest nieruchomy.
4. $LSS=0 \rightarrow$ **Układ jest statycznie wyznaczalny.**

PRZYKŁAD 6.

Skłasyfikować poniższy układ mechaniczny:

**ROZWIĄZANIE:**

Liczba brył sztywnych: $B=3$

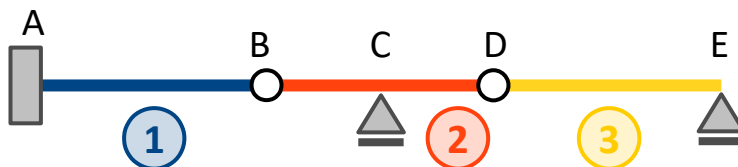
Liczba przegubów pojedynczych: $P=2$

Liczba reakcji podporowych: $R=5$

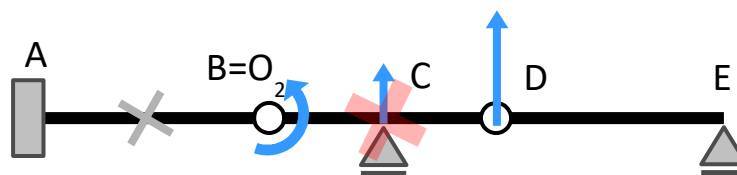
Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = 0$

Analiza kinematyczna:

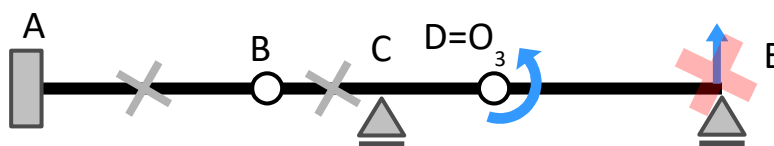
1. Układ złożony jest z trzech tarcz sztywnych.



2. Tarcza (1) jest utwierdzona, jest zatem nieruchoma. Punkt B jest punktem wspólnym tarczy (1) i (2). Skoro punkt B jest nieruchomy, to musi on być chwilowym środkiem obrotu tarczy (2). Prędkość w punkcie C wynikająca z obrotu tarczy (2) wokół B jest niezgodna z podporą w punkcie C. Tarcza jest nieruchoma.



3. Punkt D jest punktem wspólnym tarczy (1) i (2). Skoro punkt D jest nieruchomy, to musi on być chwilowym środkiem obrotu tarczy (3). Prędkość w punkcie E wynikająca z obrotu tarczy (3) wokół D jest niezgodna z podporą w punkcie E. Tarcza jest nieruchoma.



4. Układ jest nieruchomy.
5. $LSS=0 \rightarrow$ **Układ jest statycznie wyznaczalny.**

PRZYKŁAD 7.

Skłasyfikować poniższy układ mechaniczny:

**ROZWIĄZANIE:**

Liczba brył sztywnych: $B=3$

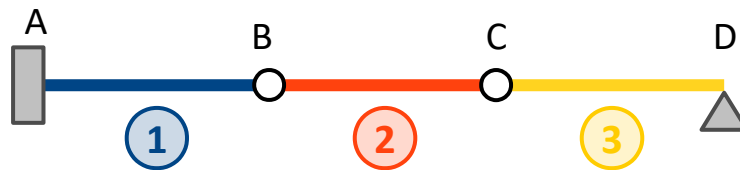
Liczba przegubów pojedynczych: $P=2$

Liczba reakcji podporowych: $R=5$

Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = 0$

Analiza kinematyczna:

1. Układ złożony jest z trzech tarcz sztywnych.



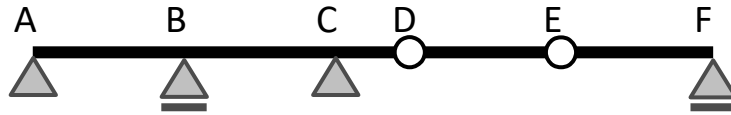
2. Tarcza (1) jest utwierdzona, jest zatem nieruchoma. Punkt B jest punktem wspólnym tarczy (1) i (2). Skoro punkt B jest nieruchomy, to musi on być chwilowym środkiem obrotu tarczy (2). Podpora w punkcie D wymusza położenie chwilowego środka obrotu dla tarczy (3) w punkcie D. Prędkość w punkcie C wynikająca z obrotu tarczy (2) wokół B jest zgodna z prędkością w punkcie C wynikającą z obrotu tarczy (3) wokół D.



3. Układ jest chwiejny.

PRZYKŁAD 8.

Sklassyfikować poniższy układ mechaniczny:

**ROZWIĄZANIE:**

Liczba brył sztywnych: $B=3$

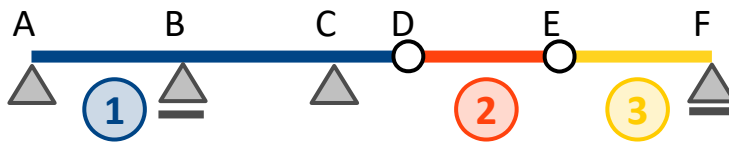
Liczba przegubów pojedynczych: $P=2$

Liczba reakcji podporowych: $R=6$

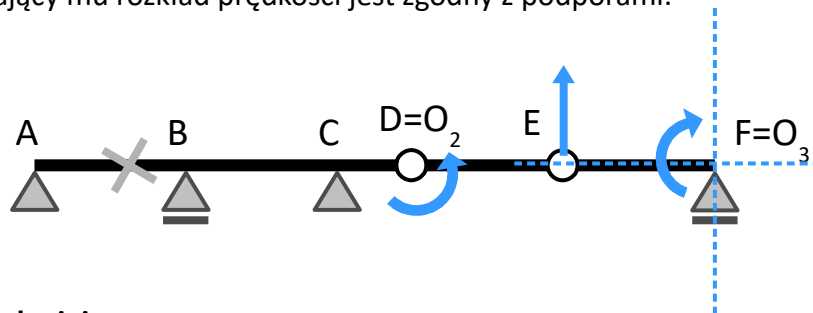
Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = -1$

Analiza kinematyczna:

1. Układ złożony jest z trzech tarcz sztywnych.



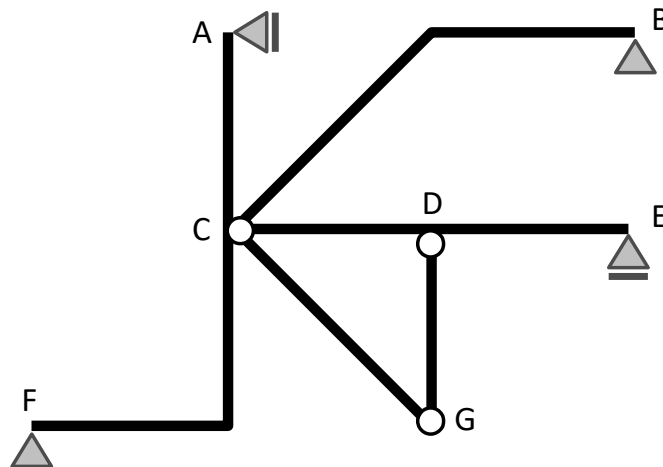
2. Tarcza (1) jest utwierdzona ma dwa punkty nieruchome – jest zatem cała nieruchoma. Punkt D jest punktem wspólnym tarczy (1) i (2). Skoro punkt D jest nieruchomy, to musi on być chwilowym środkiem obrotu tarczy (2). Obrót tarczy (2) wokół D wymaga pionowej prędkości w przegubie E. Środek chwilowego obrotu dla tarczy (3) wyznaczamy w punkcie przecięcia się prostej prostopadłej do prędkości w E oraz prostej prostopadłej do prędkości dopuszczalnej na podporze w F. Położenie tego środka chwilowego obrotu oraz odpowiadający mu rozkład prędkości jest zgodny z podporami.



3. Układ jest chwiejny.

PRZYKŁAD 9.

Skłasyfikować poniższy układ mechaniczny:

**ROZWIĄZANIE:**

Przegub C jest przegubem potrójnym (schodzą się tam 4 tarcze sztywne)

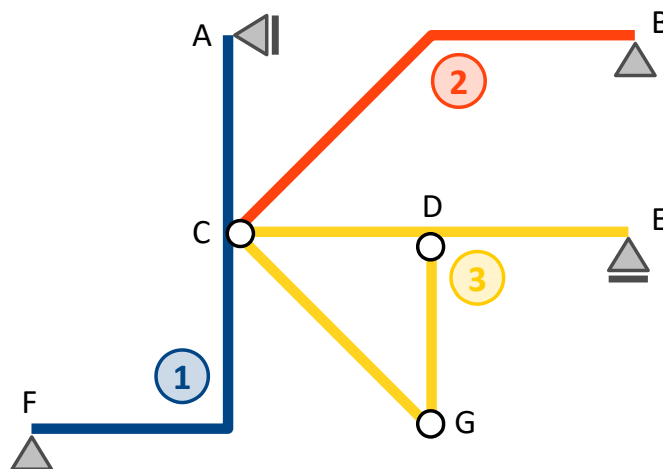
Liczba brył sztywnych: $B=5$

Liczba przegubów pojedynczych: $P=5$

Liczba reakcji podporowych: $R=6$

Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = -1$

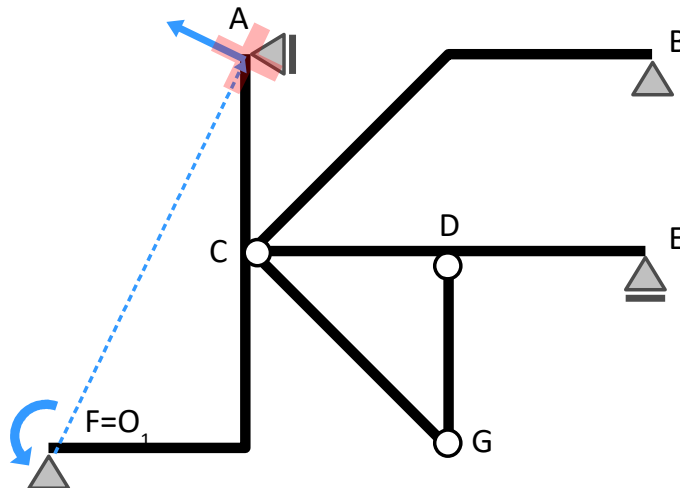
Jeśli wykorzystamy fakt, że każde trzy tarcze sztywne połączone trzema niewspółliniowymi przegubami tworzą tarczę sztywną, wtedy zauważymy, że układ składa się z trzech tarcz. Przeguby w D i G nie umożliwiają obrotów i wchodzą w skład jednej tarczy sztywnej, przegub C staje się przegubem podwójnym (schodzą się w nim 3 tarcze sztywne):



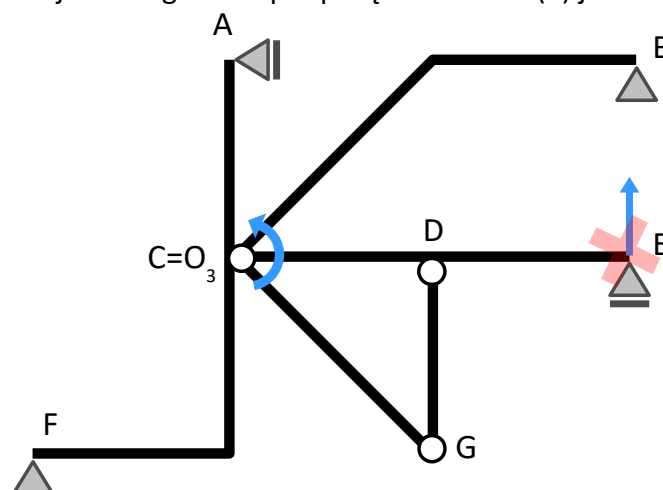
Liczba brył sztywnych: $B=3$
 Liczba przegubów pojedynczych: $P=2$
 Liczba reakcji podporowych: $R=6$

Liczba stopni swobody: $LSS = 3B - 2P - R = -1$

1. Podpora w punkcie F wymusza położenie środka chwilowego obrotu tarczy (1) w punkcie F. Odpowiadający obrotowi tarczy (1) wokół punktu F kierunek prędkości w punkcie A jest niezgodny z podporą w punkcie A. Tarcza (1) jest nieruchoma.



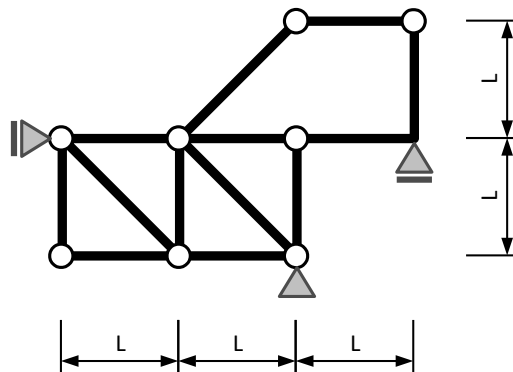
2. Punkt C jest punktem wspólnym tarczy (1) i (2) i jest punktem nieruchomym. Tarcza (2) jest unieruchomiona w dwóch punktach – jest zatem cała nieruchoma.
3. Punkt C jest punktem wspólnym tarczy (1) i (3). Skoro punkt C jest nieruchomy, to musi on być chwilowym środkiem obrotu tarczy (3). Prędkość w punkcie E wynikająca z obrotu tarczy (3) wokół C jest niezgodna z podporą w E. Tarcza (3) jest nieruchoma.



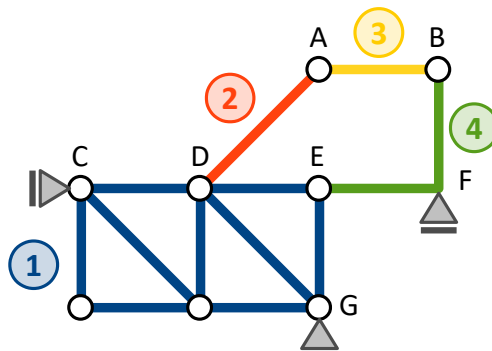
4. Cały układ jest nieruchomy.
5. $LSS < 0 \rightarrow$ układ jest statycznie niewyznaczalny.

PRZYKŁAD 10.

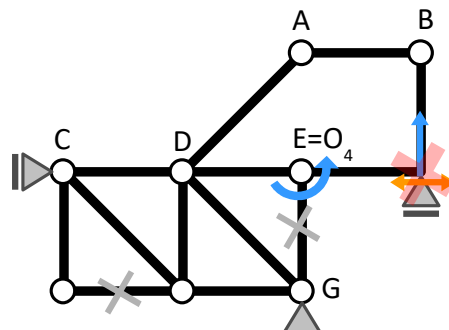
Wykazać, że poniższy układ jest układem nieruchomym.

**ROZWIĄZANIE:**

1. Układ złożony jest z 4 tarcz sztywnych

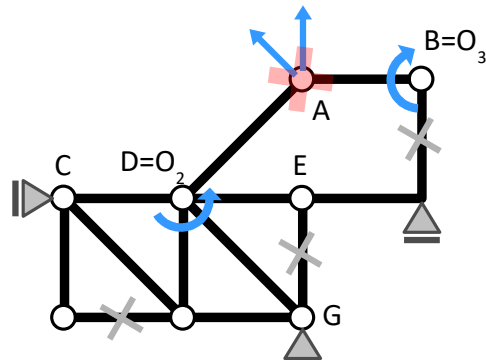


2. Tarcza (1) jest nieruchoma.
3. Nieruchomy jest punkt E – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (4).
4. Wynikający z obrotu wokół E kierunek prędkości w punkcie F jest niezgodny z kierunkiem dopuszczalnym przez podporę w F. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcza (4) jest nieruchoma.



5. Nieruchomy jest punkt D – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (2).
6. Nieruchomy jest punkt B – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (3).

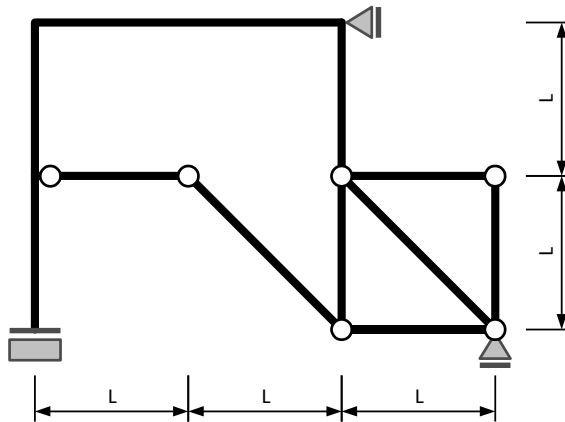
7. Wynikający z obrotu tarczy (2) wokół D kierunek prędkości w A jest niezgodny z kierunkiem prędkości w A wynikającym z obrotu tarczy (3) wokół B. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (2) i (3) są nieruchome.



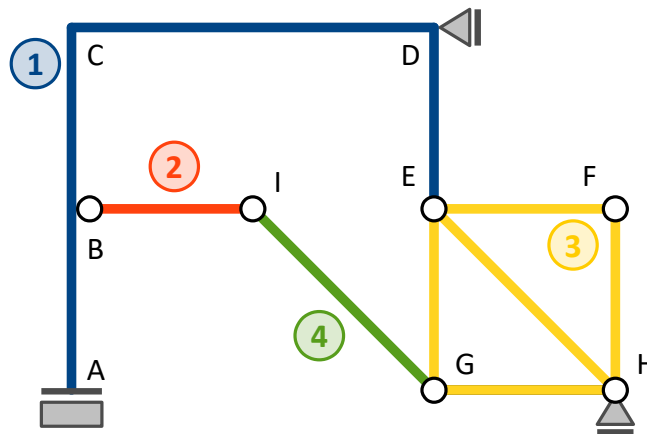
8. Cały układ jest nieruchomy.

PRZYKŁAD 11.

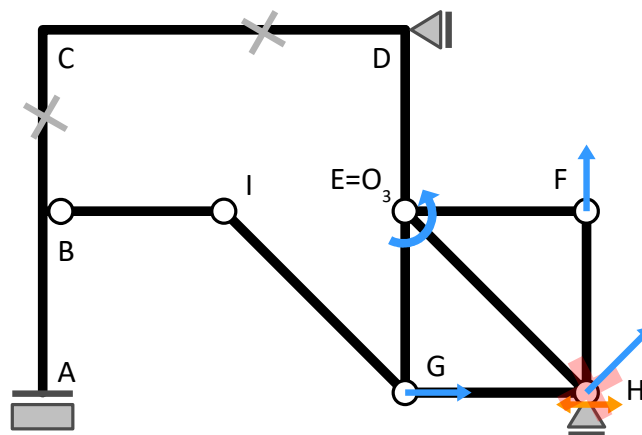
Wykazać, że poniższy układ jest układem nieruchomym.

**ROZWIĄZANIE:**

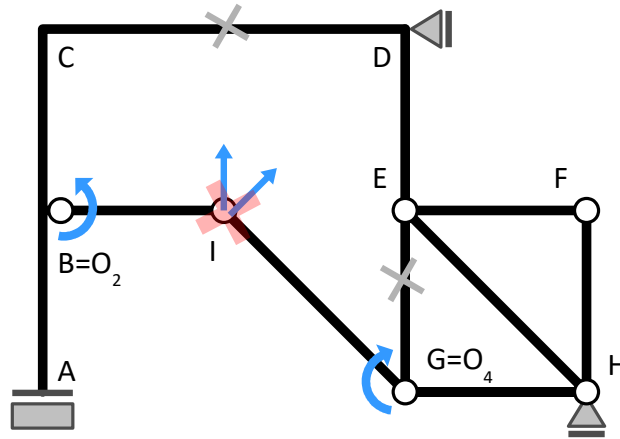
1. Układ złożony jest z 4 tarcz sztywnych.



2. Tarcza (1) jest nieruchoma.
3. Nieruchomy jest punkt E – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (3).
4. Wynikający z obrotu wokół E kierunek prędkości w punkcie H jest niezgodny z kierunkiem dopuszczalnym przez podporę w H. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcza (3) jest nieruchoma.



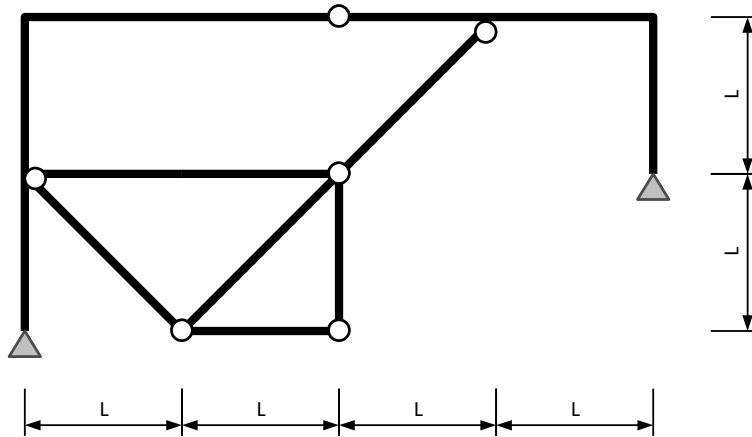
5. Nieruchomy jest punkt B – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (2).
6. Nieruchomy jest punkt G – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (4).
7. Wynikający z obrotu tarczy (2) wokół B kierunek prędkości w I jest niezgodny z kierunkiem prędkości w I wynikającym z obrotu tarczy (4) wokół G. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (2) i (4) są nieruchome.



8. Cały układ jest nieruchomy.

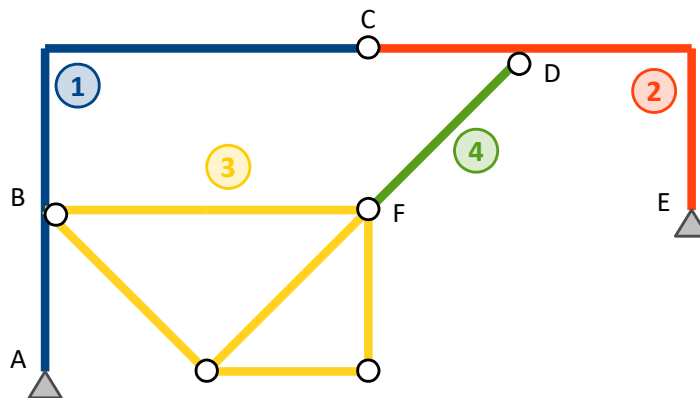
PRZYKŁAD 12.

Wykazać, że poniższy układ jest układem nieruchomym.

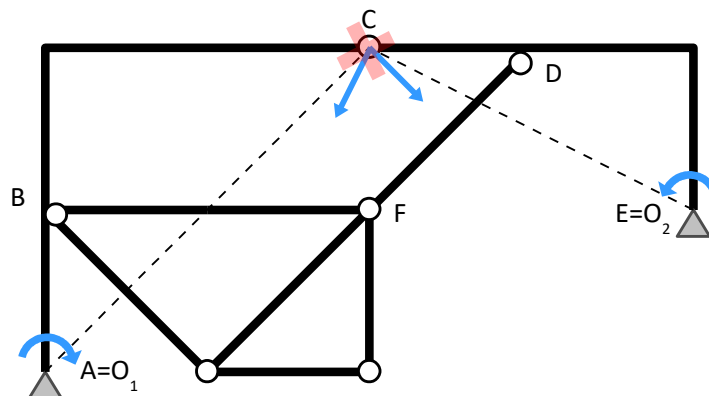


ROZWIĄZANIE:

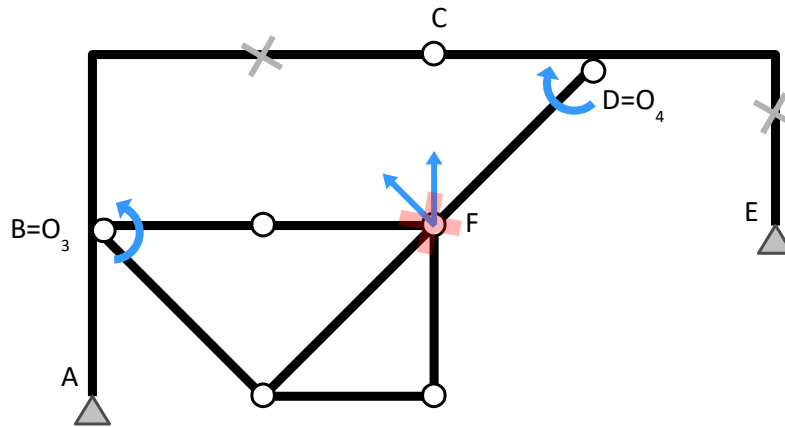
1. Układ złożony jest z 4 tarcz sztywnych



2. Tarcza (1) może obracać się wokół podpory w A.
3. Tarcza (2) może obracać się wokół podpory w E.
4. Wynikający z obrotu tarczy (1) wokół A kierunek prędkości w C jest niezgodny z kierunkiem prędkości w C wynikającym z obrotu tarczy (2) wokół E. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (1) i (2) są nieruchome.

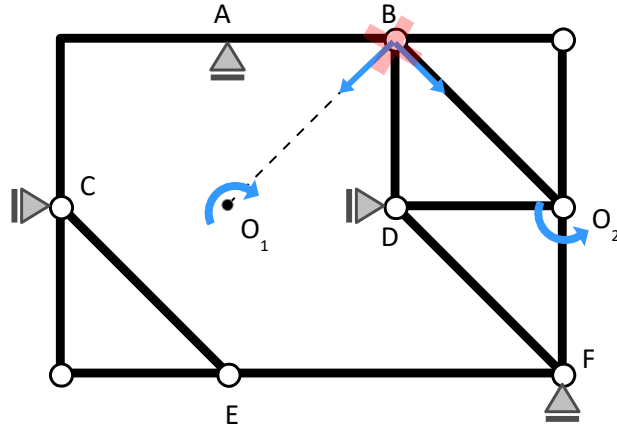


5. Nieruchomy jest punkt B – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (3).
6. Nieruchomy jest punkt D – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (4).
7. Wynikający z obrotu tarczy (3) wokół B kierunek prędkości w F jest niezgodny z kierunkiem prędkości w F wynikającym z obrotu tarczy (4) wokół D. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (3) i (4) są nieruchome.

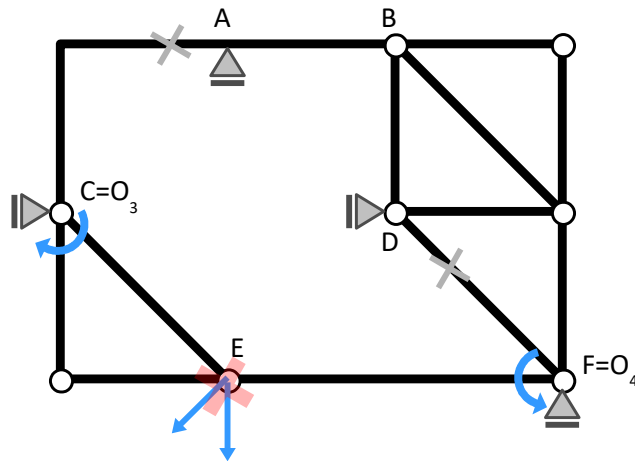


8. Cały układ jest nieruchomy.

4. Wynikający z obrotu tarczy (1) kierunek prędkości w B jest niezgodny z kierunkiem prędkości w B wynikającym z obrotu tarczy (2). Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (1) i (2) są nieruchome.



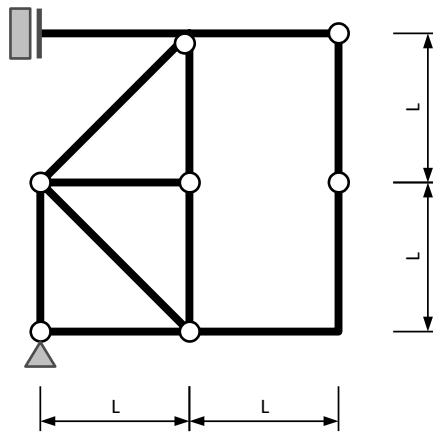
5. Nieruchomy jest punkt C – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (3).
 6. Nieruchomy jest punkt F – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (4).
 7. Wynikający z obrotu tarczy (3) wokół C kierunek prędkości w E jest niezgodny z kierunkiem prędkości w E wynikającym z obrotu tarczy (4) wokół F. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (3) i (4) są nieruchome.



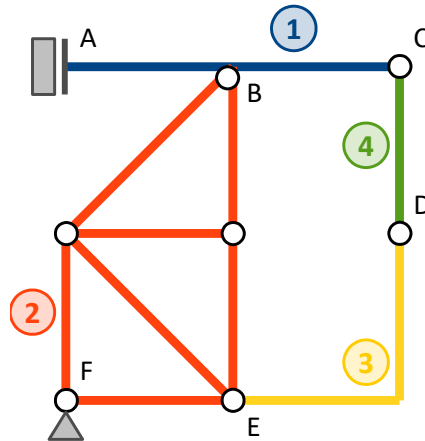
8. Cały układ jest nieruchomy

PRZYKŁAD 14.

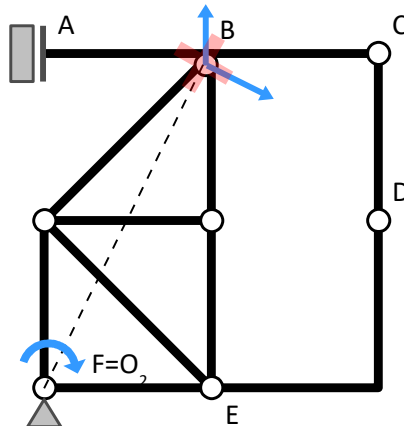
Wykazać, że poniższy układ jest układem nieruchomym.

**ROZWIĄZANIE:**

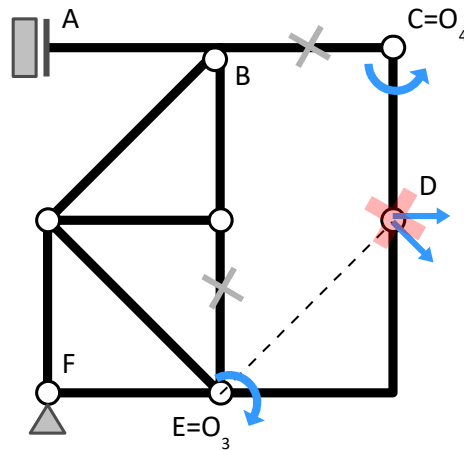
1. Układ złożony jest z 4 tarcz sztywnych.



2. Tarcza (1) może wykonywać jedynie translację w kierunku pionowym.
3. Tarcza (2) może jedynie obracać się wokół punktu F.
4. Wynikający z translacji tarczy (1) kierunek prędkości w B jest niezgodny z kierunkiem prędkości w B wynikającym z obrotu tarczy (2) wokół F. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (1) i (2) są nieruchome.



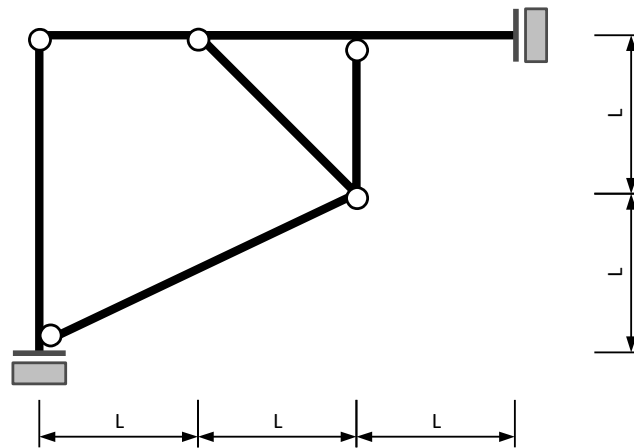
5. Nieruchomy jest punkt C – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (4).
6. Nieruchomy jest punkt E – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (3).
7. Wynikający z obrotu tarczy (3) wokół E kierunek prędkości w D jest niezgodny z kierunkiem prędkości w D wynikającym z obrotu tarczy (4) wokół C. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (3) i (4) są nieruchome.



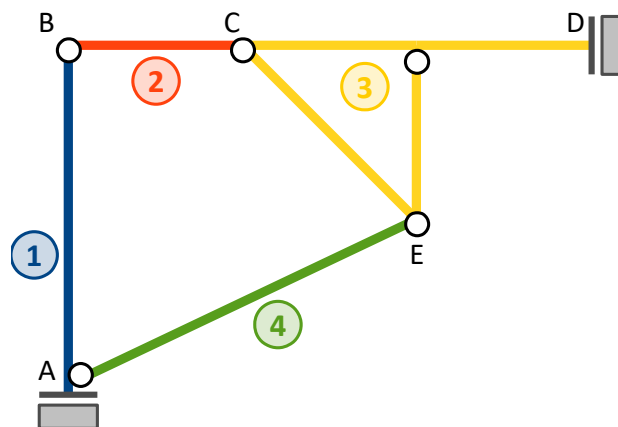
8. Cały układ jest nieruchomy.

PRZYKŁAD 15.

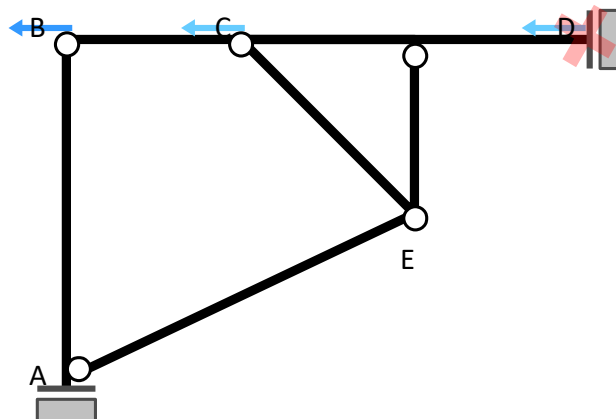
Wykazać, że poniższy układ jest układem nieruchomym.

**ROZWIĄZANIE:**

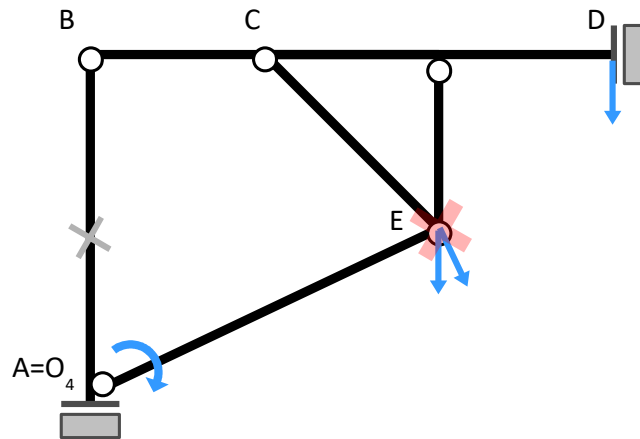
1. Układ złożony jest z 4 tarcz sztywnych.



2. Tarcza (1) może wykonać jedynie translację w kierunku poziomym.
3. Rzut prędkości w B na kierunek poziomy musimy przesunąć w poziomie do punktu C i D. Pozioma translacja (1) wymaga obecności prędkości poziomej w punkcie D, co jest niedopuszczalne przez podporę w D. Ruch ten jest niemożliwy. Tarcza (1) jest nieruchoma.



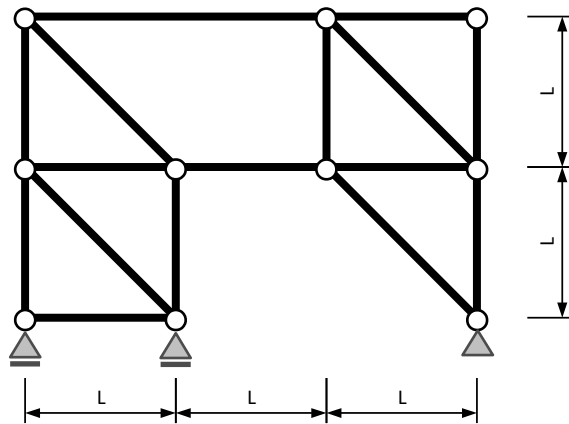
4. Punkt A jest nieruchomy – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (4).
5. Tarcza (3) może wykonać jedynie translację w kierunku pionowym.
6. Wynikający z obrotu tarczy (4) wokół A kierunek prędkości w E jest niezgodny z kierunkiem prędkości w E wynikającym z translacji tarczy (3). Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcze (3) i (4) są nieruchome.



7. Punkt B oraz punkt C są nieruchome. Tarcza (2) jest unieruchomiona w dwóch punktach, zatem cała jest nieruchoma.
8. Cały układ jest nieruchomy.

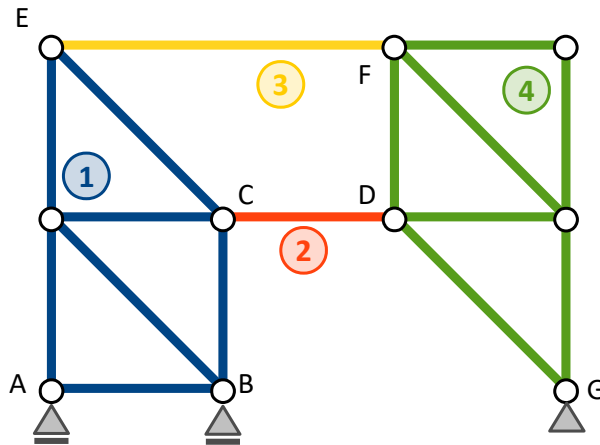
PRZYKŁAD 16.

Wykazać, że poniższy układ jest układem nieruchomym.

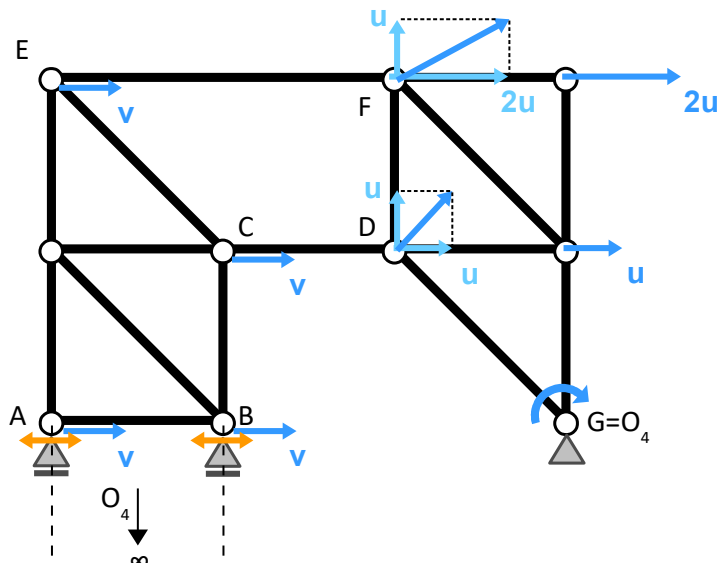


ROZWIĄZANIE:

1. Układ złożony jest z 4 tarcz sztywnych.



2. Tarcza (1) może wykonywać jedynie translację w kierunku poziomym.
3. Tarcza (4) może jedynie obracać się wokół punktu G.



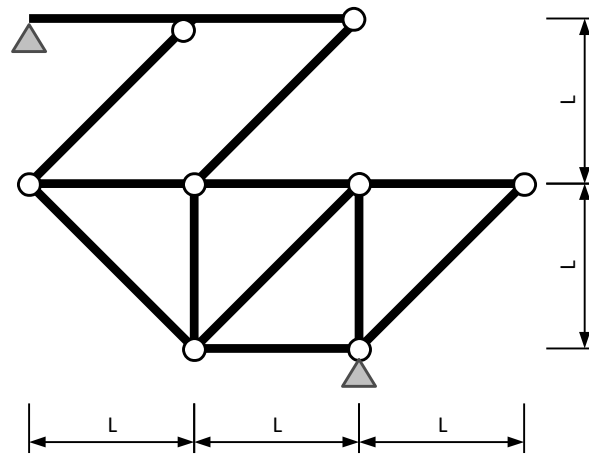
4. Rzuty prędkości w C i D na kierunek poziomy muszą być takie same na prostej poziomej CD.
5. Rzuty prędkości w E i F na kierunek poziomy muszą być takie same na prostej poziomej EF.
6. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} v = 2u \\ v = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

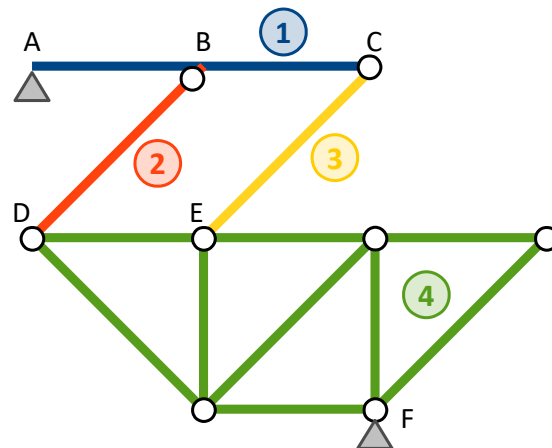
7. Tarcze (1) i (4) są zatem nieruchome.
8. Tarcze (2) i (3) są unieruchomione każda w dwóch punktach – obie są zatem nieruchome.
9. Cały układ jest nieruchomy.

PRZYKŁAD 17.

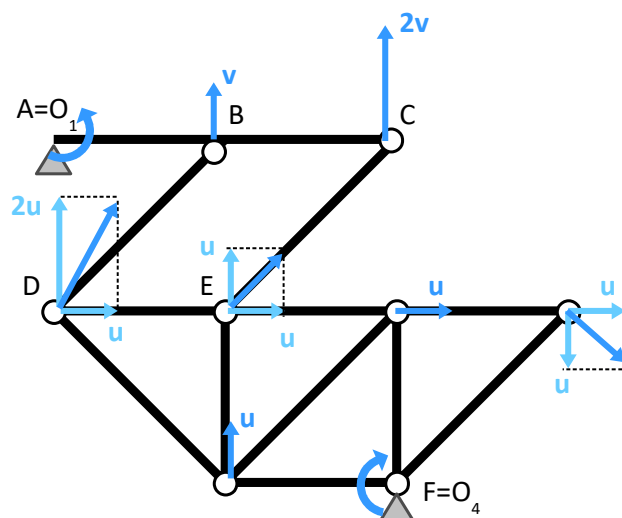
Wykazać, że poniższy układ jest układem nieruchomym.

**ROZWIĄZANIE:**

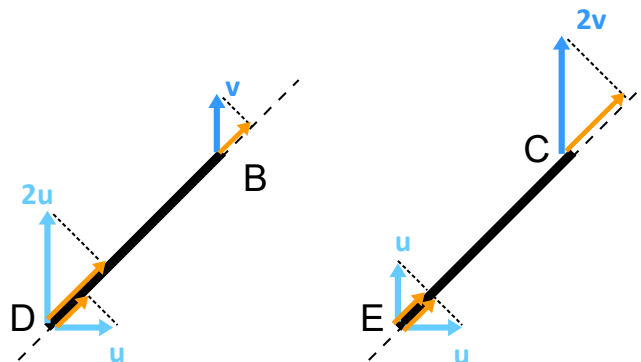
1. Układ złożony jest z 4 tarcz sztywnych.



2. Tarcza (1) może jedynie obracać się wokół punktu A.
3. Tarcza (4) może jedynie obracać się wokół punktu F.



4. Rzuty prędkości w B i D na kierunek DB muszą być takie same.
5. Rzuty prędkości w C i E na kierunek CE muszą być takie same.



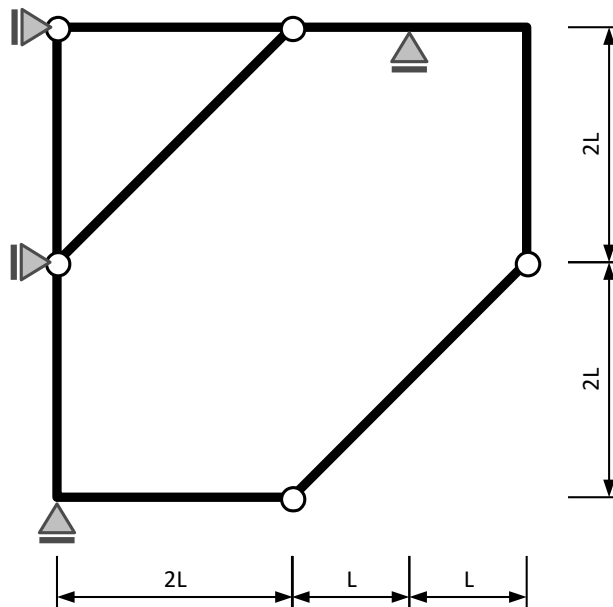
6. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{2u}{\sqrt{2}} + \frac{u}{\sqrt{2}} \\ \frac{2v}{\sqrt{2}} = \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{u}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

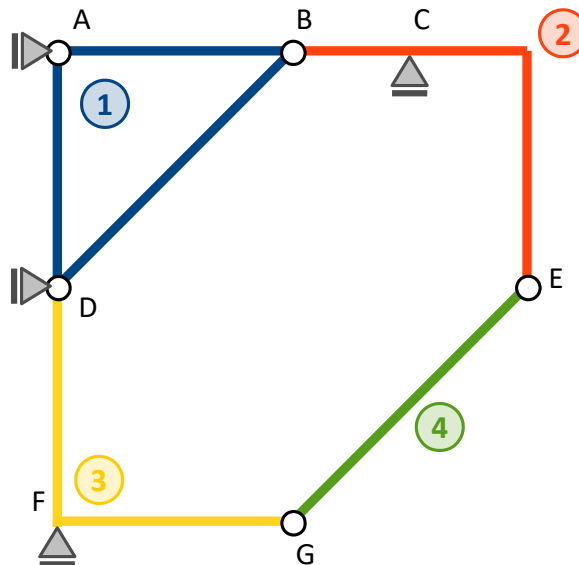
7. Tarcze (1) i (4) są zatem nieruchome.
8. Tarcze (2) i (3) są unieruchomione każda w dwóch punktach – obie są zatem nieruchome.
9. Cały układ jest nieruchomy.

PRZYKŁAD 18.

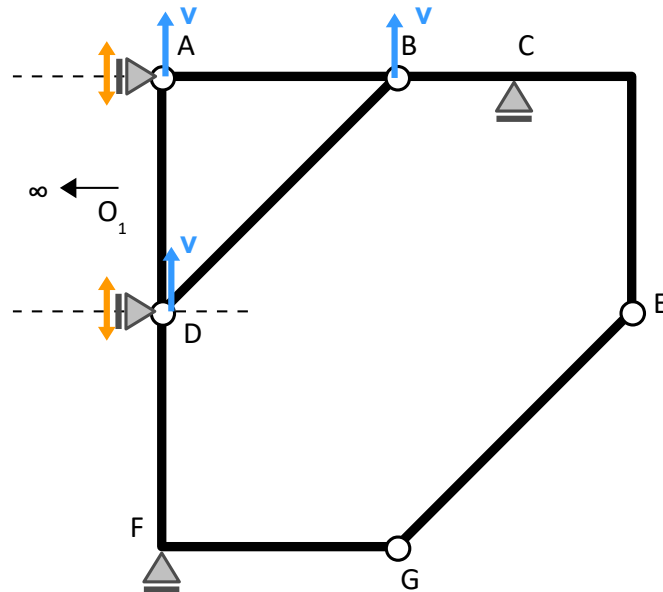
Wykazać, że poniższy układ jest układem nieruchomym.

**ROZWIĄZANIE:**

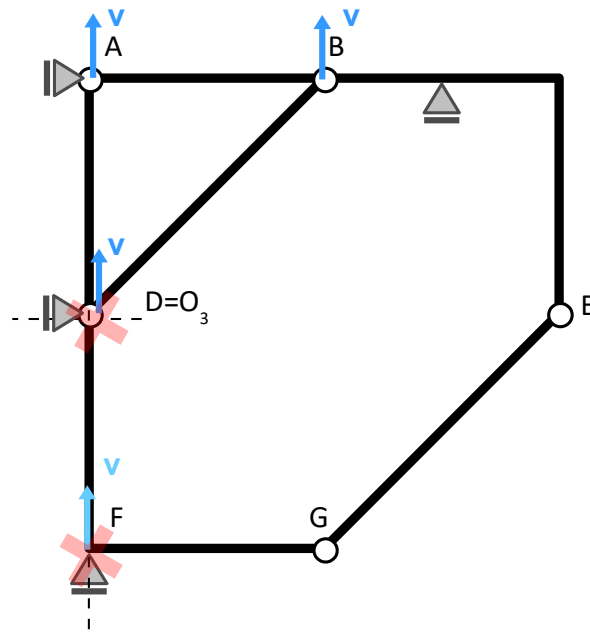
1. Układ złożony jest z 4 tarcz sztywnych.



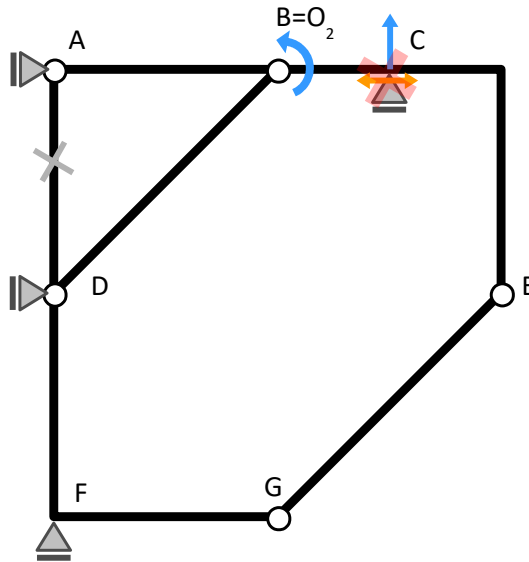
2. Tarcza (1) może wykonać jedynie translację w kierunku pionowym.



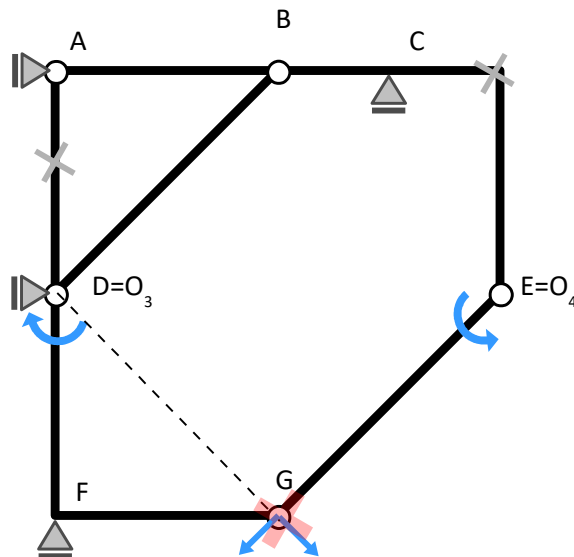
3. Środek chwilowego obrotu tarczy (3) znajdujemy w punkcie przecięcia się prostej prostopadłej do kierunku dopuszczalnego na podporze oraz kierunku prędkości w przegubie.
4. Potencjalny środek chwilowego obrotu dla tarczy (3) ma niezerową prędkość, zatem ruch taki jest niedopuszczalny. Ponadto prędkość pionową musimy przenieść wzdłuż prostej pionowej, co wymaga prędkości pionowej w punkcie F, a to jest niedopuszczalne przez podporę. A zatem ruch tarczy (1) nie jest możliwy. Tarcza (1) jest nieruchoma.



5. Nieruchomy jest punkt B – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (2).
6. Wynikający z obrotu wokół B kierunek prędkości w punkcie C jest niezgodny z kierunkiem dopuszczalnym przez podporę w C. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcza (2) jest nieruchoma.



7. Nieruchomy jest punkt D – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (3).
8. Nieruchomy jest punkt E – jest on możliwym środkiem chwilowego obrotu dla tarczy (4).
9. Wynikający z obrotu tarczy (3) wokół D kierunek prędkości w punkcie G jest niezgodny z kierunkiem w punkcie G, wynikającym z obrotu tarczy (4) wokół E. Ruch ten jest niemożliwy, zatem tarcza (3) i tarcza (4) są nieruchome.



10. Cały układ jest nieruchomy.