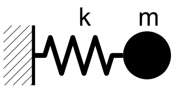
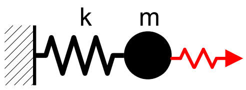
DRGANIA UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

- **DRGANIA NIETŁUMIONE**
  - **DRGANIA SWOBODNE**



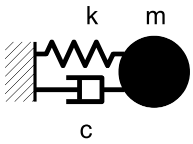
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

  - **DRGANIA WYMUSZONE**



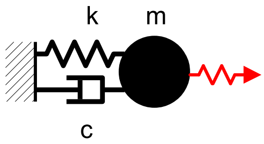
$$m\ddot{x} + kx = P(t)$$

- **DRGANIA TŁUMIONE**
  - **DRGANIA SWOBODNE**



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

  - **DRGANIA WYMUSZONE**



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$$

DRGANIA SWOBODNE NIETŁUMIONE:

Równanie ruchu: $\boxed{m\ddot{x}+kx = 0} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x = 0}$

Warunki początkowe:
$$x(t=0) = x_0$$
$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

Parametry:

masa	m	$[m] = \mathrm{kg}$
sztywność	k	$[k] = \mathrm{N/m}$
częstość drgań własnych	ω_0	$[\omega] = \mathrm{rad/s}$
częstotliwość drgań własnych	$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T}$	$[f_0] = \mathrm{Hz}$
okres drgań własnych	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$	$[T_0] = \mathrm{s}$
wychylenie początkowe	x_0	$[x_0] = \mathrm{m}$
prędkość początkowa	v_0	$[v_0] = \mathrm{m/s}$

Rozwiązanie:

$$\boxed{x(t) = A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\sin(\omega_0 t) = A\sin(\omega_0 t+\phi)}$$

gdzie:

$$A_1 = x_0$$
$$A_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$$
$$A = \sqrt{A_1^2+A_2^2}$$
$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{A_1}{A_2}, \quad \phi\in(-\pi,\pi)$$

DRGANIA NIETŁUMIONE WYMUSZONE HARMONICZNIE:

Równanie ruchu: $\boxed{m\ddot{x}+kx = P(t)}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x = \frac{P(t)}{m}}$

Warunki początkowe:
$$x(t=0) = x_0$$
$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

Parametry:
- Wymuszenie harmoniczne: $P(t) = P_0 \sin(\lambda t)$
- Częstość wymuszenia: λ $\quad [\lambda] = \text{rad/s}$
- Amplituda wymuszenia: P_0 $\quad [P_0] = \text{N}$

Rozwiązanie:

$$\boxed{x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) + A \sin(\lambda t)}$$

gdzie:
$$A_1 = x_0$$
$$A_2 = \frac{v_0 \omega_0}{\omega_0^2-\lambda^2} - \frac{v_0 \lambda^2}{\omega_0(\omega_0^2-\lambda^2)} - \frac{P_0 \lambda}{m\omega_0(\omega_0^2-\lambda^2)}$$
$$A = \frac{P_0}{m(\omega^2-\lambda^2)}$$

Jeśli $x_0=0$ oraz $v_0 = \frac{P_0 \lambda}{m(\omega_0^2-\lambda^2)}$, wtedy:

$$x(t) = A \sin(\lambda t)$$

Maksymalna amplituda drgań: $x_{max} = |A| = \eta x_{stat}$

gdzie:

- wychylenie statyczne: $x_{stat} = \frac{P_0}{k}$
- współczynnik dynamiczny: $\eta = \frac{x_{max}}{x_{st}} = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2-\lambda^2|}$

DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE:

Równanie ruchu: $\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\omega_0\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

Warunki początkowe:
$$x(t=0) = x_0$$
$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

Parametry:

- współczynnik tłumienia c $\quad [c] = \mathrm{N{\cdot}s/m}$
- współczynnik tłumienia $\beta = \dfrac{c}{2m} = \omega_0\gamma$ $\quad [\beta] = \mathrm{rad/s}$
- współczynnik tłumienia krytycznego $c_{kr} = 2\sqrt{km}$ $\quad [c_{kr}] = \mathrm{N{\cdot}s/m}$
- ułamek tłumienia krytycznego $\gamma = \dfrac{c}{c_{kr}}$ $\quad [\gamma] = 1$
- logarytmiczny dekrement tłumienia $\delta = \ln\dfrac{A_n}{A_{n+1}} = \dfrac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ $\quad [\delta] = 1$
- częstość drgań własnych tłumionych $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\gamma^2}$ $\quad [\omega_d] = \mathrm{rad/s}$

Rozwiązanie:

TŁUMIENIE PODKRYTYCZNE $(\gamma < 1)$: $\boxed{x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1\cos(\omega_d t) + A_2\sin(\omega_d t)\right]}$

gdzie:
$$A_1 = x_0$$
$$A_2 = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_d}$$

TŁUMIENIE KRYTYCZNE $(\gamma = 1)$: $\boxed{x(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\beta t}}$

gdzie:
$$A_1 = v_0 + \omega_0 x_0$$
$$A_2 = x_0$$

TŁUMIENIE NDDKRYTYCZNE $(\gamma > 1)$: $\boxed{x(t) = A_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})} + A_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})}}$

gdzie:
$$A_1 = \frac{x_0\omega_0\left[\gamma\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}\right) - 1\right] + v_0\sqrt{\gamma^2-1}}{2\omega_0(\gamma^2-1)}$$
$$A_2 = \frac{x_0\omega_0\left[\gamma\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2-1}\right) - 1\right] - v_0\sqrt{\gamma^2-1}}{2\omega_0(\gamma^2-1)}$$

DRGANIA TŁUMIONE WYMUSZONE HARMONICZNIE:

Równanie ruchu:
$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\omega_0\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P(t)}{m}}$$

Warunki początkowe:
$$x(t=0) = x_0$$
$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

Rozwiązanie tego równania jest sumą **całki ogólnej równania jednorodnego** (CORJ – rozwiązanie dla drgań swobodnych, tłumionych) oraz dowolnej całki szczególnej równania niejednorodnego (CSRN):

CSRN:
$$x(t) = B_1\cos(\lambda t) + B_2\sin(\lambda t)$$

gdzie:
$$B_1 = \frac{-2P_0\gamma\omega_0\lambda}{m\left[(\omega_0^2-\lambda^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2\right]} \quad , \quad B_2 = \frac{P(\omega_0^2-\lambda^2)}{m\left[(\omega_0^2-\lambda^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2\right]}$$

Amplituda drgań ustalonych:
$$A = \sqrt{B_1^2+B_2^2} = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\lambda^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2}}$$

Maksymalna amplituda drgań:
$$x_{max} = |A| = \eta x_{stat}$$

gdzie:

- wychylenie statyczne: $$x_{stat} = \frac{P_0}{k}$$
- współczynnik dynamiczny: $$\eta = \frac{x_{max}}{x_{st}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\lambda^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2}}$$

Maksymalny przyrost amplitudy w stanie rezonansu:

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_e = \omega_0\sqrt{1-2\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \eta_{max} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}}$$