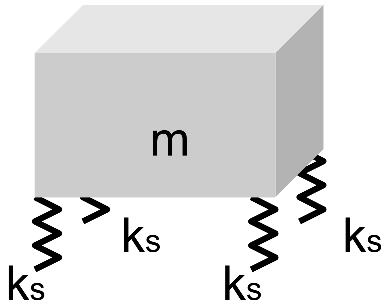
ZADANIE 1



Skomplikowana aparatura pomiarowa, która ma polecieć w kosmos ;) ma masę 1000 kg i spoczywa na czterech jednakowych sprężynach ułożonych obok siebie (równolegle). Sztywność sprężyn sprawdzono w ziemskim laboratorium w Houston – pod wpływem ciężaru własnego tego ciała sprężyny uginają się 2cm. Skomplikowaną aparaturę pomiarową wsadzono następnie do satelity, który został wyniesiony na orbitę za pomocą rakiety Ariane. Będąc już w stanie nieważkości (brak siły ciężkości) urządzenie zostało wychylone z położenia równowagi o 5cm. Wyznacz częstość, częstotliwość oraz okres drgań własnych oraz wyznacz i rozwiąż równanie ruchu (drgań swobodnych) tego układu, gdy jedynym czynnikiem wymuszającym drgania jest wychylenie z położenia równowagi.

ROZWIĄZANIE:

- Aby wyznaczyć częstość drgań własnych oraz równanie ruchu, trzeba określić sztywność układu.
- Zgodnie z prawem Hooke'a, sztywność *k* zdefiniowana jest jako współczynnik proporcjonalności między działającą siłą a spowodowanym przez nią wydłużeniem

$$F = k\,x \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{F}{x} = const. \quad [k] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

- W analizie dynamicznej i tak posługujemy się zastępczą sztywnością całego układu, więc informacja o tym, że podparcie składa się z czterech sprężyn połączonych równolegle jest nam zbędna.

Działająca siła: $F = mg \approx 10000\ \mathrm{N}$

Przemieszczenie: $x = 0{,}02\ \mathrm{m}$

Sztywność zastępcza: $k = F/x = 500000\ \mathrm{N/m}$

Gdyby z innych względów sztywność pojedynczej sprężyny była nam potrzebna obliczylibyśmy ją w następujący sposób:

Sztywność zastępcza: $k = 4\,k_s$

Sztywność pojedynczej sprężyny: $k_s = k/4 = 125000\ \mathrm{N/m}$

- **Charakterystyki dynamiczne układu**

Częstość drgań własnych: $\omega_0 = \sqrt{k/m} \approx 22{,}36\ \mathrm{rad/s}$

Częstotliwość drgań własnych: $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \approx 3{,}58\ \mathrm{Hz}$

Okres drgań własnych: $T_0 = \dfrac{1}{f_0} \approx 0{,}28\ \mathrm{s}$

- **Równanie ruchu i jego rozwiązanie** – w równaniu ruchu po prawej stronie mamy 0, ponieważ ciało jest już na orbicie i nie działa na niego siła grawitacji.

Równanie: $m\ddot{x} + k\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1000\,\ddot{x} + 500000\,x = 0$

z warunkami początkowymi: $x(t=0) = x_0 = 0{,}05\ \mathrm{m}$ - wychylenie początkowe

$\dot{x}(t=0) = v_0 = 0\ \mathrm{m/s}$ - prędkość początkowa

Rozwiązanie ogólne: $x = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad x(0) = B \quad \Rightarrow \quad B = 0{,}05$$

$$\dot{x} = A\,\omega_0\cos(\omega_0 t) - B\,\omega_0\sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = A \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

Rozwiązanie szczególne: $x = 0{,}05\cdot\sin(22{,}36\,t)$

ZADANIE 2

Ciężarek o masie 5 kg, przymocowany do sprężyny o sztywności 180 N/m może wykonywać drgania poziome. Jaka będzie amplituda drgań swobodnych, jeśli w chwili początkowej ciężarek wychylony jest o 10 cm od położenia równowagi i nadano mu prędkość 3 m/s w kierunku oddalającym go od położenia równowagi? Jakie będzie maksymalne wychylenie ciężarka, jeśli do układu dołączony zostanie tłumik o stałej $c=30\ \mathrm{N\,s/m}$?

ROZWIĄZANIE:

DRGANIA SWOBODNE

Częstość drgań własnych: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{180}{5}}=6\ \mathrm{rad/s}$

Rozwiązanie równania ruchu dla drgań swobodnych:

przemieszczenie: $x(t)=A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t)$

prędkość: $\dot{x}(t)=A_1\omega\cos(\omega_0 t)-A_2\omega\sin(\omega_0 t)$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych:

przemieszczenie początkowe: $x(0)=A_2=x_0=0{,}1\ \mathrm{m}$

prędkość początkowa: $\dot{x}(0)=A_1\omega_0=v_0 \quad\Rightarrow\quad A_1=\frac{v_0}{\omega_0}=\frac{3}{6}=0{,}5\ \mathrm{m}$

Drgania swobodne nietłumione mają ustalony przebieg w czasie – ich amplituda jest stała:

Amplituda drgań nietłumionych: $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\approx 0{,}51\ \mathrm{m}$

DRGANIA TŁUMIONE

Tłumienie krytyczne: $c_{kr}=2\sqrt{km}=60\ \mathrm{Ns/m}$

Ułamek tłumienia krytycznego: $\gamma=\frac{c}{c_{kr}}=0{,}5$

Częstość drgań własnych tłumionych: $\omega_d=\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}\approx 5{,}196\ \mathrm{rad/s}$

Rozwiązanie równania ruchu dla drgań swobodnych:

przemieszczenie: $x(t)=e^{-\gamma\omega_0 t}\left[A_1\sin(\omega_d t)+A_2\cos(\omega_d t)\right]$

prędkość: $\dot{x}(t)=e^{-\gamma\omega_0 t}\left[(A_1\omega_d-A_2\gamma\omega_0)\cos(\omega_d t)-(A_2\omega_d+A_1\gamma\omega_0)\sin(\omega_d t)\right]$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych:

przemieszczenie początkowe: $x(0) = A_2 = x_0 = 0{,}1\ \text{m}$

prędkość początkowa: $\dot{x}(0) = A_1\omega_d - A_2\gamma\omega_0 = v_0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \dfrac{v_0 + \gamma\omega_0 x_0}{\omega_d} \approx 0{,}6635\ \text{m}$

Amplituda drgań swobodnych tłumionych maleje z czasem – maksymalną amplitudę należy wyznaczyć jako ekstremum lokalne funkcji przemieszczenia względem czasu. Punkt stacjonarny odpowiada miejscowi zerowemu pochodnej, tj. prędkości:

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma\omega_0 t}\left[(A_1\omega_d - A_2\gamma\omega_0)\cos(\omega_d t) - (A_2\omega_d + A_1\gamma\omega_0)\sin(\omega_d t)\right] = 0$$

$$\operatorname{tg}(\omega_d t) = \frac{A_1\omega_d - A_2\gamma\omega_0}{A_2\omega_d + A_1\gamma\omega_0}$$

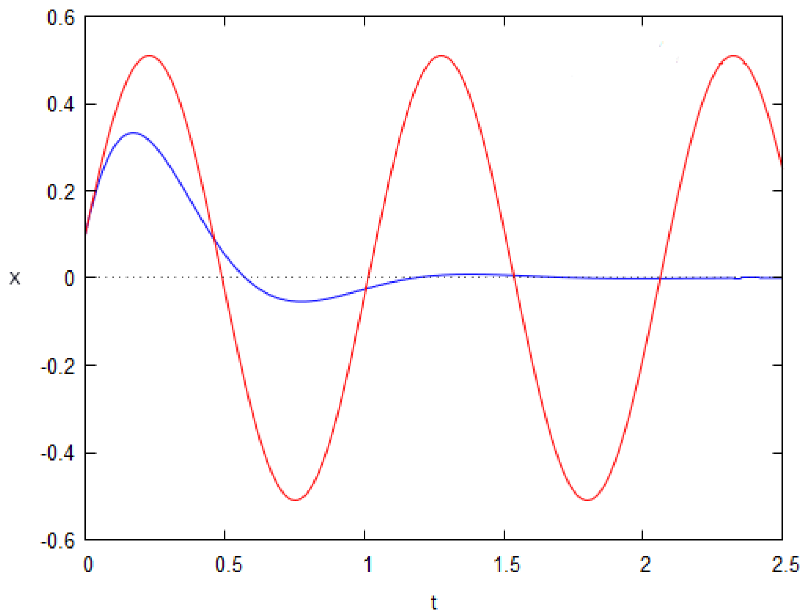
$$t = \frac{1}{\omega_d}\operatorname{arctg}\frac{A_1\omega_d - A_2\gamma\omega_0}{A_2\omega_d + A_1\gamma\omega_0} + k\frac{\pi}{\omega_d}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi jest pierwsze z serii wychyleń:

$$t_e = \frac{1}{\omega_d}\operatorname{arctg}\frac{A_1\omega_d - A_2\gamma\omega_0}{A_2\omega_d + A_1\gamma\omega_0} \approx 0{,}1715\ \text{s}$$

$$x(t_e) \approx 0{,}3329\ \text{m}$$

Poniżej zilustrowany jest przebieg drgań nietłumionych (linia czerwona) oraz tłumionych (linia niebieska)



ZADANIE 3

Człowiek o masie 80 kg zeskakuje z wysokości 45cm na trampolinę o długości 1,5 m i prostokątnym przekroju poprzecznym o wymiarach b x h = 50cm x 6cm. Trampolina wykonana jest z materiału o module Younga E=10 GPa. Pomijając ciężar trampoliny oraz tłumienie, wyznacz jakie będzie maksymalne ugięcie trampoliny oraz maksymalny moment w jej utwierdzeniu?

UWAGA: Sztywność trampoliny wyraża się wzorem $k=\dfrac{3EI}{L^3}$, zaś moment bezwładności jej przekroju poprzecznego to $I=\dfrac{bh^3}{12}$

ROZWIĄZANIE:

Masa drgająca: $m=80\ \mathrm{kg}$

Moment bezwładności przekroju: $I=\dfrac{bh^3}{12}=\dfrac{0{,}5\cdot 0{,}06^3}{12}=900\cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^4$

Sztywność trampoliny na zginanie: $k=\dfrac{3EI}{L^3}=\dfrac{3\cdot 10\cdot 10^9\cdot 900\cdot 10^{-8}}{1{,}5^3}=80000\ \mathrm{N/m}$

Częstość drgań własnych: $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{80000}{80}}=31{,}62\ \mathrm{rad/s}$

Musimy teraz ułożyć równanie ruchu i określić jego warunki początkowe:

Równanie ruchu: $m\ddot{x}+kx=mg$

Początkowe wychylenie jest równe 0. Prędkość początkową, jaką lądujący człowiek nadaje całemu układowi wyznaczymy z zasady zachowania pędu. Najpierw jednak musimy wyznaczyć prędkość człowieka lądującego na trampolinie – możemy to zrobić np. z zasady zachowania energii:

Energia potencjalna w najwyższym punkcie skoku: $E_p=m_c g h$

Energia kinetyczna w chwili lądowania: $E_k=\dfrac{m_c v_c^2}{2}$

Prędkość przy lądowaniu: $E_p=E_k \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2gh}=3\ \mathrm{m/s}$

Rozwiązanie równania ruchu:

CORJ: $x_{OG}=A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t)$

CSRN: **Z metody przewidywania:** $x_{SZ}=A_3 \qquad A_3=\dfrac{mg}{k}=0{,}01\ \mathrm{m}$

CORN: $x=x_{OG}+x_{SZ}=A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t)+A_3$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych:

Początkowe wychylenie: $x(0)=A_2+A_3=0 \quad\Rightarrow\quad A_2=-A_3=-0{,}01\ \mathrm{m}$

Początkowa prędkość: $\dot{x}(0)=\omega_0 A_1=v_0 \quad\Rightarrow\quad A_1=\dfrac{v_0}{\omega_0}\approx 0{,}095\ \mathrm{m}$

Rozwiązanie: $x(t) = 0{,}095\sin(31{,}62t) - 0{,}01\cos(31{,}62t) + 0{,}01$

Amplituda drgań: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0{,}096\ \mathrm{m}$

Maksymalne wychylenie: $x_{max} = A + A_3 = 0{,}106\ \mathrm{m}$

Maksymalna siła w zamocowaniu: $F_{max} = k\,x_{max} = 8480\ \mathrm{N}$

Maksymalny moment utwierdzenia: $M_{max} = F_{max} L = 12720\ \mathrm{N}$

ZADANIE 4

Drewniany klocek w kształcie sześcianu o boku 20cm zanurzono w wodzie na głębokość 14cm a następnie puszczono. Klocek wykonany jest z drewna o gęstości 500 kg/m^3. Pomijając opór wody, wyznacz maksymalne i minimalne zanurzenie klocka oraz częstotliwość jego drgań. Jak zmienią się te wielkości, jeśli w momencie puszczenia klocka nadamy mu prędkość 0,3 m/s w dół? Przyjmij gęstość wody równą 1000 kg/m^3.

ROZWIĄZANIE:

Całkowita masa drgająca: $m=\rho_d \cdot a^3 = 500\cdot 0{,}2^3 = 4\ \mathrm{kg}$

Sztywność układu określana jest przez wypór wody. Wiemy, że siła wyporu jest równa ciężarowi cieczy wypartej przez zanurzone ciało. Jeśli zanurzymy nasz klocek na głębokość *x*, to wyprze on wodę o objętości $V=a^2x$, której ciężar jest równy $F=g\rho_{H_2O}a^2x$. Widzimy zatem, że siła działająca na klocek jest proporcjonalna do zanurzenia. Współczynnik proporcjonalności jest sztywnością układu:

Sztywność układu: $k=g\rho_{H_2O}a^2 = 10\cdot 1000\cdot 0{,}2^2 = 400\ \mathrm{N/m}$

Częstość drgań własnych: $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{400}{4}}=10\ \mathrm{rad/s}$

Częstotliwość drgań własnych: $\nu_0=\dfrac{\omega_0}{2\pi}\approx 1{,}59\ \mathrm{Hz}$

Aby wyznaczyć maksymalne i minimalne zanurzenie musimy rozwiązać równanie ruchu:

$$m\ddot{x}+kx=mg$$

Rozwiązanie równania ruchu:

CORJ: $x_{OG}=A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t)$

CSRN: **Z metody przewidywania:** $x_{SZ}=A_3 \qquad A_3=\dfrac{mg}{k}=0{,}1\ \mathrm{m}$

CORN: $x=x_{OG}+x_{SZ}=A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t)+A_3$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych:

wychylenie początkowe: $x(0)=A_2+A_3=x_0 \quad\Rightarrow\quad A_2=x_0-A_3=0{,}14-0{,}1=0{,}04\ \mathrm{m}$

prędkość początkowa: $\dot{x}(0)=A_1\omega_0=v_0 \quad\Rightarrow\quad A_1=\dfrac{v_0}{\omega_0}=\dfrac{0}{10}=0\ \mathrm{m}$

Amplituda drgań: $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=0{,}04\ \mathrm{m}$

Minimalne zanurzenie: $x_{max}=A_3+A=0{,}14\ \mathrm{m}$

Maksymalne zanurzenie $x_{max}=A_3-A=0{,}06\ \mathrm{m}$

Zauważmy, że położeniem równowagi jest zanurzenie $x=0{,}1\,\mathrm{m}$. Jest to zanurzenie wynikające z działania siły ciężkości i jest to po prostu sytuacja równowagi ciężaru klocka i siły wyporu:

Ciężar klocka: $mg=40\ \mathrm{N}$ Siła wyporu: $F=gxa^2\rho_{H_2O}=40\ \mathrm{N}$

Jeśli w chwili początkowej nadamy klockowi dodatkowo prędkość początkową to częstość drgań własnych układu się nie zmieni – zależy ona jedynie od jego parametrów (sztywność i masa) nie zaś od warunków początkowych. Minimalne i maksymalne zanurzenie będą zaś następujące:

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych:

wychylenie początkowe: $x(0) = A_2 + A_3 = x_0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = x_0 - A_3 = 0{,}14 - 0{,}1 = 0{,}04 \text{ m}$

prędkość początkowa: $\dot{x}(0) = A_1 \omega_0 = v_0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{0{,}3}{10} = 0{,}03 \text{ m}$

Amplituda drgań: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0{,}05 \text{ m}$

Minimalne zanurzenie: $x_{max} = A_3 + A = 0{,}15 \text{ m}$

Maksymalne zanurzenie $x_{max} = A_3 - A = 0{,}05 \text{ m}$

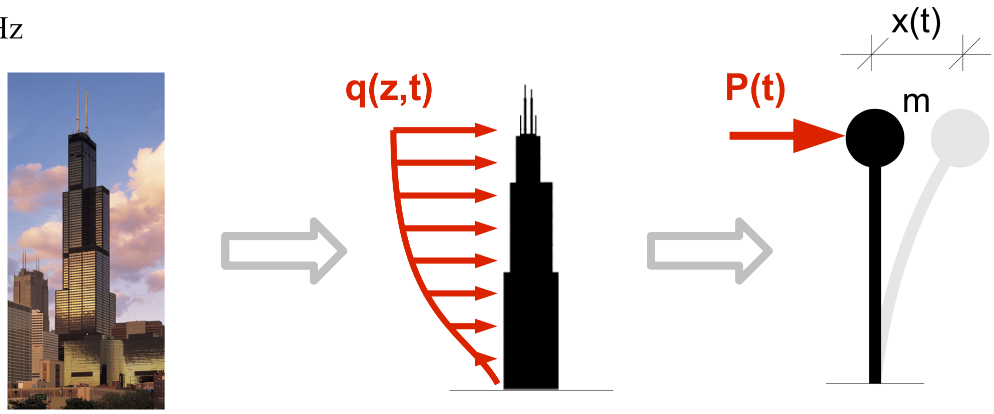
Jak widzimy, położenie równowagi się nie zmienia. Oczywiście, gdyby w toku naszej analizy okazało się, że minimalne zanurzenie jest ujemne lub maksymalne jest większe niż 20cm, wtedy uzyskane wyniki byłyby błędne, ponieważ w takich sytuacjach zmienia się układ sił działających na ciało.

ZADANIE 5

Znajdująca się w Chicago Willis Tower (znana wcześniej jako Sears Tower) to wieżowiec o wysokości (do ostatniego stropu) 412,7m – jest obecnie (2015r.) 13 najwyższym budynkiem świata. Jego sumaryczna masa, to ok. 200000 ton. W największym uproszczeniu, budynek ten może zostać zamodelowany jako masa skupiona na sprężystym wsporniku. Obciążenie wiatrem redukuje się do wypadkowej przyłożonej do masy skupionej i opisane jest funkcją:

$$P(t) = P_0 \sin(\lambda t)$$

gdzie: $P_0 = 90000\,\mathrm{kN}$
$\lambda = 0{,}2\ \mathrm{Hz}$



Pomijając tłumienie oraz zakładając, że przy maksymalnych podmuchach wiatru budynek wychyla się od pionu o 15cm, wyznacz jego częstotliwość drgań własnych.

ROZWIĄZANIE:
Sztywność budynku znajdziemy dzieląc wartość przyłożonej siły przez odpowiadające jej przemieszczenie. Przyjmijmy więc, że dla maksymalnej działającej siły przemieszczenie przyjmuje graniczną wartość dopuszczalną.

Największe wychylenie jest równe: $x_{max} = \eta x_{st}$

gdzie:

wychylenie statyczne: $x_{st} = \dfrac{P_0}{k} = \dfrac{P_0}{m\omega_0^2}$

współczynnik dynamiczny: $\eta = \dfrac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \lambda^2|}$

Częstość wymuszenia musi być wyrażona w $\mathrm{rad/s}$, stąd: $\lambda = 0{,}2 \cdot 2\pi = 1{,}257\ \mathrm{rad/s}$

mamy zatem:

$$x_{max} = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \lambda^2|} \cdot \frac{P_0}{m\omega_0^2} = \frac{P_0}{m|\omega_0^2 - \lambda^2|} = 0{,}15\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 \approx 2{,}14\,\mathrm{rad/s}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0{,}341\ \mathrm{Hz}$$

ZADANIE 6

Na sprężynie o sztywności 2000 N/m zamocowany jest ciężarek o masie 1 kg, który może wykonywać drgania poziome. Do ciężarka przyłożono siłę harmonicznie zmienną o amplitudzie 100 N i częstotliwości 7 Hz.

- Jakie będzie maksymalne wychylenie ciężarka?
- Jak zmieni się częstość drgań własnych i maksymalne wychylenie ciężarka, jeśli uwzględnimy tłumienie? Przyjmij logarytmiczny dekrement tłumienia równy $\Delta = 0{,}1$.

ROZWIĄZANIE:
Maksymalne wychylenie wyznaczymy korzystając z pojęcia współczynnika dynamicznego η . Współczynnik ten określa ile razy większe jest maksymalne wychylenie w czasie ustalonych drgań wymuszonych siłą harmoniczną od statycznego wychylenia pod obciążeniem maksymalną wartością siły wymuszającej:

Współczynnik dynamiczny:

drgania niettłumione: $$\eta = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \lambda^2|}$$

drgania tłumione: $$\eta = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2}}$$

Wychylenie statyczne: $$x_{st} = \frac{P_0}{k} = \frac{100}{2000} = 0{,}05\,\mathrm{m}$$

Częstość drgań własnych układu: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{1}} \approx 44{,}72\ \mathrm{rad/s}$$

DRGANIA NIETŁUMIONE

W przypadku drgań nietłumionych przyjmujemy $\gamma = 0$. We wzorze na współczynnik dynamiczny musimy podstawić częstość wymuszenia w rad/s, zatem:

$$\lambda = 2\pi\cdot 7\ \mathrm{Hz} \approx 43{,}98\ \mathrm{rad/s}$$

Współczynnik dynamiczny: $$\eta = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \lambda^2|} \approx \frac{44{,}72^2}{|44{,}72^2 - 43{,}98^2|} \approx 30{,}46$$

Maksymalne wychylenie: $$x_{max} = \eta x_{st} \approx 30{,}46\cdot 0{,}05 = 1{,}523\,\mathrm{m}$$

UWAGA: Częstość wymuszenia jest bardzo bliska częstości drgań własnych, zachodzi zatem zjawisko rezonansu – stąd uzyskana wartość współczynnika dynamicznego jest bardzo duża.

DRGANIA TŁUMIONE

Na początku wyznaczymy bezwymiarowy współczynnik tłumienia (**ułamek tłumienia krytycznego**):

$$\delta = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}} \approx 0{,}0159$$

Częstość drgań własnych tłumionych podkrytycznie (tj. dla których $\gamma < 1$ - tylko dla takich drgań definiuje się logarytmiczny dekrement tłumienia) wyraża się wzorem:

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\gamma^2} \approx 44{,}72\sqrt{1-0{,}0159^2} \approx 44{,}71 \text{ rad/s}$$

Współczynnik dynamiczny:

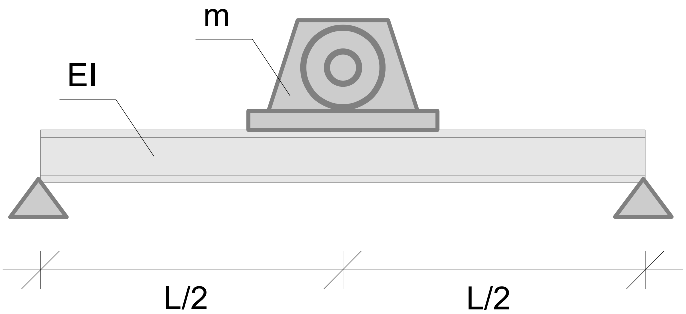
$$\eta = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\lambda^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2}} \approx \frac{44{,}72^2}{\sqrt{(44{,}72^2-43{,}98^2)^2 + 4\,0{,}0159^2\cdot 44{,}72^2\cdot 43{,}98^2}} \approx 22{,}06$$

Maksymalne wychylenie: $x_{max} = \eta x_{st} \approx 22{,}06\cdot 0{,}05 = 1{,}103\,\text{m}$

ZADANIE 7

Na podkonstrukcji stalowej o schemacie belki wolnopodpartej o rozpiętości 4m, w połowie jej rozpiętości umieszczono silnik o masie całkowitej 1250 kg pracujący z prędkością 3000 obr./min. Masa wirująca na ramieniu 5cm stanowi 5% masy całkowitej silnika.

Masa całkowita silnika: $m = 1250\,\mathrm{kg}$
Masa wirująca: $m_w = 62{,}5\,\mathrm{kg}$
Prędkość obrotowa: $n = 3000\,\mathrm{obr./min}$
Promień masy wirującej: $R = 5\ \mathrm{cm}$
Sztywność podkonstrukcji: $k = \dfrac{48\,EI}{L^3}$
Sumaryczny moment bezwładności profili: $I = 3880\,\mathrm{cm}^4$
Moduł Younga stali: $E = 210\ \mathrm{GPa}$



Należy oszacować:

- ugięcie statyczne podkonstrukcji od cieżaru własnego maszyny,
- częstość drgań własnych układu,
- amplitudę drgań ustalonych, wymuszonych pracą silnika.

ROZWIĄZANIE:

- **Ugięcie statyczne od ciężaru własnego (bez pracy maszyny)**

Sztywność podkonstrukcji: $k = \dfrac{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3880 \cdot 10^{-8}}{4^3} \approx 6111000\ \mathrm{N/m}$

Obciążenie statyczne ciężarem własnym: $P_{cw} = mg \approx 12500\ \mathrm{N}$

Ugięcie statyczne: $x_{st,cw} = \dfrac{P_{cw}}{k} \approx 0{,}00205\ \mathrm{m}$

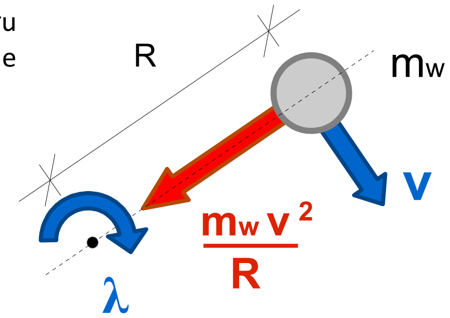
- **Częstość drgań własnych**

Częstość drgań własnych: $\omega_0 = \sqrt{k/m} \approx 69{,}91\ \mathrm{rad/s}$
Częstotliwość drgań własnych: $f_0 = \dfrac{\omega}{2\pi} \approx 11{,}13\ \mathrm{Hz}$

- **Amplituda ustalonych drgań wymuszonych**

Częstość wymuszenia: $\lambda = \dfrac{n \cdot 2\pi}{60\mathrm{s}} = 314{,}16\ \dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

Siła wymuszająca drgania, przenoszona na układ, to reakcja na osi wału utrzymującego wirującą masę. Reakcja ta jest oczywiście równa sile dośrodkowej, utrzymującej kołowy tor ruchu masy wirującej i jest równa:



$$P_0 = \frac{m_w v^2}{R}$$

Prędkość liniową *v* wyznaczamy z założenia, że masa wiruje ze stałą prędkością kątową λ . Stąd:

$$v = \lambda R \qquad \Rightarrow \qquad P_0 = m_w R \lambda^2$$

Siła wymuszająca: $P(t) = P_0 \cdot \sin(\lambda t)$

Amplituda siły wymuszającej: $P_0 = m_w R \lambda^2 = 62{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot (314{,}16)^2 \approx 308425 \text{ N}$

Ugięcie statyczne od maksymalnej siły wymuszającej: $x_{st} = \dfrac{P_0}{k} = 0{,}0505 \,\text{m}$

Współczynnik dynamiczny: $\eta = \dfrac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \lambda^2|} = 0{,}0521$

Amplituda drgań wymuszonych: $x_{max} = \eta x_{st} = 0{,}00263 \text{ m}$

UWAGA: Częstość drgań własnych jest mniejsza od częstości wymuszenia – w trakcie rozruchu, gdy prędkość obrotowa masy wirującej przyrasta, układ pracuje przez krótki czas pod obciążeniem rezonansowym. Zjawisko to nazywamy rezonansem przejściowym – wymaga ono osobnej analizy i zabezpieczenia układu przed uszkodzeniem.

ZADANIE 8

Maszyna o całkowitej masie 40 kg spoczywa na polimerowej podkładce o grubości h=10cm i wymiarach 1 x 1m. Moduł Younga materiału podkładki to 10 kPa. Silnik maszyny pracuje z prędkością 600 obr./min – masa niewyważona to 2 kg na mimośrodzie 10cm. Wyznacz amplitudę drgań ustalonych w dwóch przypadkach: przy pominięciu tłumienia oraz zakładając współczynnik tłumienia równy c = 800 Ns/m. Sztywność podkładki: k= EA/h. Jaka jest krytyczna wartość współczynnika tłumienia?

ROZWIĄZANIE:

Całkowita masa drgająca: $m = 40\ \text{kg}$

Sztywność układu: $k = \dfrac{EA}{h} = \dfrac{10\cdot 10^3 \cdot 1}{0{,}1} = 100000\ \text{N/m}$

Częstość drgań własnych: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{100000}{40}} = 50\,\text{rad/s}$

Częstość wymuszenia: $\lambda = \dfrac{n \cdot 2\pi}{60} = \dfrac{600 \cdot 2\pi}{60} \approx 62{,}83\ \text{rad/s}$

Amplituda wymuszenia: $P_0 = m_w \cdot r \cdot \lambda^2 = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 62{,}83^2 \approx 790\,\text{N}$

Wychylenie statyczne: $x_{st} = \dfrac{P_0}{k} = \dfrac{790}{100000} = 0{,}0079\ \text{m}$

1) BRAK TŁUMIENIA

Współczynnik dynamiczny: $\eta = \dfrac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \lambda^2|} = 1{,}727$

Amplituda drgań ustalonych: $x_{max} = \eta\, x_{st} = 0{,}0136\,\text{m}$

2) TŁUMIENIE

Współczynnik tłumienia: $c = 800\ \text{Ns/m}$

Krytyczny współczynnik tłumienia: $c_{kr} = 2\sqrt{k\,m} = 2\sqrt{100000 \cdot 40} = 4000\ \text{Ns/m}$

Ułamek tłumienia krytycznego: $\gamma = \dfrac{c}{c_{kr}} = \dfrac{800}{4000} = 0{,}2$

Współczynnik dynamiczny: $\eta = \dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2 \lambda^2}} = 1{,}30$

Amplituda drgań ustalonych: $x_{max} = \eta\, x_{st} = 0{,}0103\,\text{m}$

ZADANIE 9

Na środku pomieszczenia stoi maszyna pralnicza. Pomieszczenie pralni oparte jest na planie prostokąta o wymiarach L x B = 6,4 x 4 m. Podłogę w tym pomieszczeniu stanowi płyta żelbetowa grubości 20 cm, utwierdzona na krawędziach. Celem redukcji drgań przekazywanych na płytę, pod pralką ustawiono płytę ze styropianu XPS o wymiarach 1,5m x 1,5m.

Pralka o łącznej masie (wraz z wsadem) 350 kg w czasie odwirowywania pracuje w stanie ustalonym z prędkością 1000 obr./min. Masa niewyważona to 30 kg wsadu wirująca na ramieniu 10cm.

- Jaka będzie częstość drgań własnych układu jeśli podkładka styropianowa ma 2cm grubości?
- Jaka będzie amplituda drgań w momencie wirowania?
- Jaka musiałaby być grubość płyty styropianowej aby pralka w momencie wirowania wpadła w rezonans?

Sztywność giętna płyty żelbetowej: $k_1 = \dfrac{E_c t^3}{0{,}17\, B^2}$

Moduł Younga betonu: $E_c = 32\ \text{GPa}$

Współczynnik Poissona betonu: $\nu_c = 0{,}2$

Sztywność podłużna płyty styropianowej: $k_2 = \dfrac{E_s A}{h_s}$

Moduł Younga styropianu: $E_c = 10\ \text{kPa}$

Logarytmiczny dekrement tłumienia podkładki styropianowej: $\delta = 0{,}1$

ROZWIĄZANIE:

Częstość wymuszenia: $\lambda = \dfrac{n \cdot 2\pi}{60\text{s}} \approx 105\ \text{rad/s}$

Amplituda wymuszenia: $P_0 = m_w r \lambda^2 = 33075\ \text{N}$

- **Częstość drgań własnych**

Sztywność płyty: $k_1 = \dfrac{E_c t^3}{0{,}17\, B^2} = \dfrac{32 \cdot 10^9 \cdot 0{,}2^3}{0{,}17 \cdot 4^2} = 94117647\ \text{N/m}$

Sztywność podkładki: $k_2 = \dfrac{E_s A}{h_s} = \dfrac{10 \cdot 10^3 \cdot (1{,}5)^2}{0{,}02} = 1125000\ \text{N/m}$

Ponieważ płyta styropianowa leży na płycie, jest to zatem szeregowe połączenie sprężyn. Sztywność zastępcza jest równa:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \approx 1111712\ \text{N/m}$$

Ułamek tłumienia krytycznego : $\gamma = \dfrac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \approx 0{,}0159$

Częstość drgań własnych nietłumionych: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 56{,}243 \ \mathrm{rad/s}$

Częstość drgań własnych tłumionych: $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\gamma^2} \approx 56{,}236 \ \mathrm{rad/s}$

- **Amplituda w czasie wirowania**

Ugięcie statyczne: $x_{st} = \frac{P_0}{k} = \frac{33075}{1111712} = 0{,}03\,\mathrm{m}$

Współczynnik dynamiczny: $\eta = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\lambda^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2}} \approx 0{,}402$

Amplituda drgań: $x_{max} = \eta x_{st} = 0{,}012\,\mathrm{m}$

- **Praca pralki w stanie rezonansu**

Współczynnik dynamiczny przyjmuje maksymalną wartość, gdy częstość drgań własnych jest bliska częstości wymuszenia – dokładnie, gdy $\omega_0\sqrt{1-2\gamma^2} = \lambda$. Stąd:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\gamma^2}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\lambda^2 m}{\sqrt{1-2\gamma^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} = \frac{\lambda^2 m}{\sqrt{1-2\gamma^2}} \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{\lambda^2 m k_1}{(k_1-\lambda^2 m)\sqrt{1-2\gamma^2}}$$

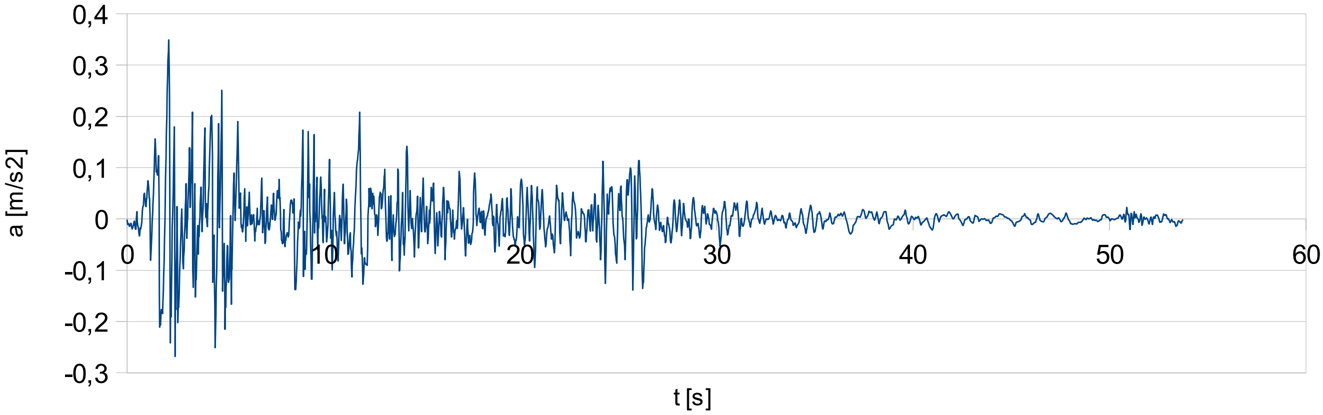
Ostatecznie:

$$h_s = \frac{E_s A(k_1-\lambda^2 m)\sqrt{1-2\gamma^2}}{\lambda^2 m k_1} = \frac{10\cdot10^3\cdot(1{,}5)^2\cdot(94117647-105^2\cdot350)\sqrt{1-2\cdot0{,}0159^2}}{105^2\cdot350\cdot94117647} \approx 0{,}0055\,\mathrm{m}$$

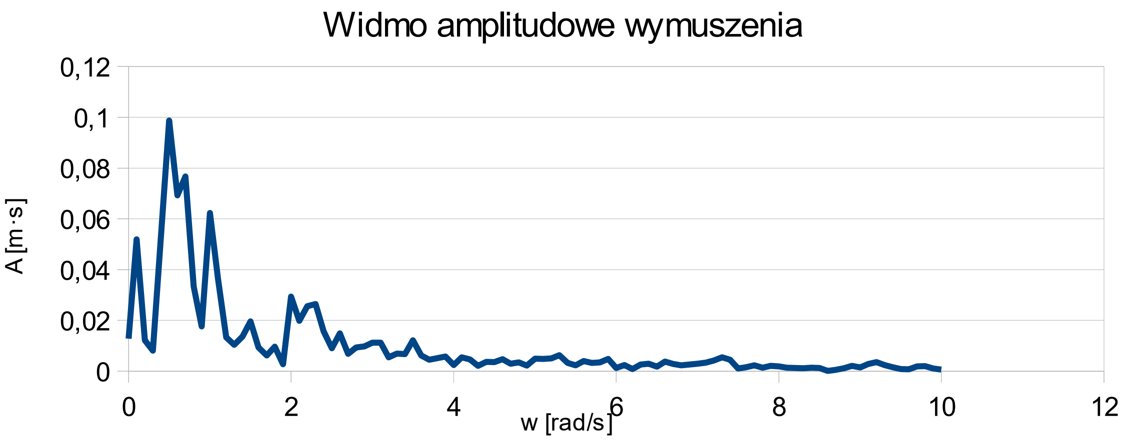
Pralka będzie w czasie wirowania wpadnie w rezonans, jeśli podkładka będzie miała 5,5 mm grubości.

ZADANIE 10

18 maja 1940, ok. godz. 21:35 w Imperial Valley w południowej Kalifornii, tuż przy granicy USA z Meksykiem doszło do silnego trzęsienia ziemi. Jego przebieg został zarejestrowany – poniżej znajduje się akcelerogram tego wymuszenia:



Analiza widmowa tego wymuszenia wskazuje, że największy udział w tym przebiegu ma harmoniczna o częstości 0,5 rad/s.



Sprawdź jaka będzie amplituda drgań wymuszonych drganiami podłoża opisanymi funkcją

$$u(t) = U \cdot \sin(\lambda t) \quad \text{gdzie} \quad U = 2\,\text{cm} \qquad \lambda = 0{,}5\ \text{rad/s}$$

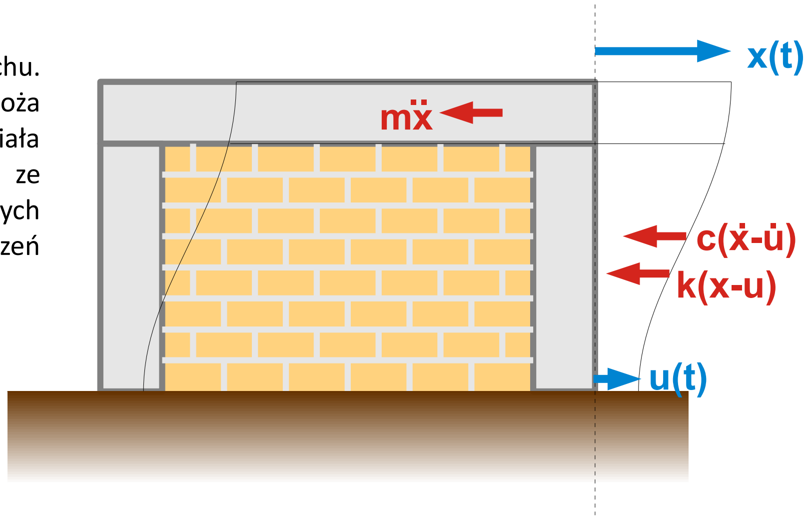
na garaż o wymiarach B x L = 3 x 5 m w formie ramy żelbetowej opartej na czterech słupkach stalowych o wysokości H = 4m. Wypełniające ściany ceramiczne nie pełnią funkcji nośnej a jedynie zapewniają logarytmiczny dekrement tłumienia na poziomie 0,3. Masę drgającą stanowi żelbetowy strop grubości 20cm.

Sztywność giętną słupa określa wzór: $k_s = \dfrac{12\,EI}{H^3}$

Moment bezwładności przekroju słupka: $I = 142\ \text{cm}^4$
Moduł Younga żelbetu: $E = 200\ \text{GPa}$
Gęstość żelbetu $\rho = 2500\ \text{kg/m}^3$

ROZWIĄZANIE:

Na początku wyznaczymy równanie ruchu. Drgania spowodowane są ruchem podłoża opisanym funkcją u(t). Na masę drgającą działa siła bezwładności zaś siły związane ze sztywnością i tłumieniem nie zależą od samych przemieszczeń układu, ale od jego przemieszczeń względem ruchomego podłoża.



Porównanie układu sił daje nam: $m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{u}) + k(x-u) = 0$

Po przekształceniach: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{u} + ku$

Ruch podłoża może być interpretowany jako siła wymuszająca:

$$P(t) = U[c\lambda\cos(\lambda t) + k\sin(\lambda t)] \approx 2181{,}12\sin(0{,}5t) + 27{,}28\cos(0{,}5t)$$

Masa drgająca: $m = BLt\rho = 3\cdot 5\cdot 0{,}2\cdot 2500 = 7500 \text{ kg}$

Sztywność słupa: $k_s = \dfrac{12EI}{H^3} = \dfrac{12\cdot 200\cdot 10^9\cdot 142\cdot 10^{-8}}{4^3} = 27264 \text{ N/m}$

Sztywność układu: $k = 4\cdot k_s = 109056 \text{ N/s}$

Częstość drgań własnych nietłumionych: $\omega_0 = 3{,}813 \text{ rad/s}$

Logarytmiczny dekrement tłumienia: $\delta = 0{,}3$

Ułamek tłumienia krytycznego: $\gamma = \dfrac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} = 0{,}0477$

Współczynnik tłumienia: $c = 2\gamma\sqrt{km} = 2728 \text{ Ns/m}$

Częstość drgań własnych tłumionych: $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\gamma^2} = 3{,}809 \text{ rad/s}$

Drgania ustalone układu opisywać będzie całka szczególna równania niejednorodnego, którą znajdziemy metodą przewidywania. Ponieważ człon niejednorodny jest w postaci funkcji trygonometrycznej o okresie λ ,stąd postulujemy, że rozwiązanie również będzie w tej postaci:

przemieszczenie: $x = A_1\sin(\lambda t) + A_2\cos(\lambda t)$

prędkość: $\dot{x} = A_1\lambda\cos(\lambda t) - \lambda A_2\sin(\lambda t)$

przyspieszenie: $\ddot{x} = -A_1\lambda^2\sin(\lambda t) - A_2\lambda^2\cos(\lambda t)$

Po podstawieniu do równania ruchu, otrzymujemy:

$$\sin(\lambda t)(kA_1 - cA_2\lambda - mA_1\lambda^2) + \cos(\lambda t)(kA_2 + cA_1\lambda - mA_2\lambda^2) = cU\lambda\cos(\lambda t) + kU\sin(\lambda t)$$

Lewa strona równać się będzie prawej, gdy współczynniki przy odpowiednich funkcjach będą sobie równe:

$$\begin{cases} (k-m\lambda^2)A_1 - c\lambda A_2 = kU \\ c\lambda A_1 + (k-m\lambda^2)A_2 = cU\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{U[k^2-(km-c^2)\lambda^2]}{(k-m\lambda^2)^2+c^2\lambda^2} \approx 0{,}0203 \text{ m} \\ A_2 = -\dfrac{cm\lambda^3 U}{(k-m\lambda^2)^2+c^2\lambda^2} \approx -4{,}452\cdot 10^{-6} \text{ m} \end{cases}$$

Zarówno w przypadku wahań pozornej siły wymuszającej jak i drgań układu składowa cosinusowa jest pomijalnie mała w porównaniu ze składową sinusową. Możemy więc porównać amplitudę drgań układu z amplitudą wymuszenia (przemieszczenia) zakładając, że przesunięcie w fazie z uwagi na składową cosinusową jest bliskie zeru.

Amplituda drgań układu: $A_1 = 20{,}3 \text{ mm}$

Amplituda drgań gruntu: $U = 20{,}0 \text{ mm}$

Siły wewnętrzne jakie pojawiają się w konstrukcji związane są przede wszystkim z jego sztywnością i są proporcjonalne do względnego przemieszczenia masy drgającej względem gruntu. Porównując amplitudy obydwu drgań i zakładając zgodność faz, maksymalną różnicę przemieszczeń można oszacować, jako równą:

$$A_{max} \approx 0{,}3 \text{ mm}$$

Takie przemieszczenie skutkuje powstaniem momentu utwierdzenia w zamocowaniu każdego ze słupków:

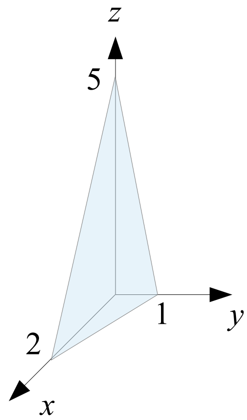
$$M = \frac{6EI}{L^2}\cdot A_{max} = 23{,}84 \text{ Nm}$$

Tymczasem maksymalny moment przenoszony na słupki jest równy:

$$M_{max} = W_z f_{yd} = 28{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 200\cdot 10^6 = 5700 \text{ Nm}$$

ZADANIE 11

Punkt materialny o masie m może poruszać się po płaszczyźnie jak na rysunku. Znajduje się on w polu sił grawitacyjnych. Wyznacz trajektorię tego punktu wiedząc, że w chwili początkowej znajduje się on w punkcie (4,-2,5) i ma zerową prędkość.



ROZWIĄZANIE:

Równanie powierzchni w postaci odcinkowej: $f: \ \frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{5}=1$

Równanie powierzchni w postaci kanonicznej: $f: \ 5x+10y+2z-10=0$

Siła reakcji więzów, utrzymująca punkt na płaszczyźnie, jest zawsze skierowana prostopadle do tej płaszczyzny. Wektor sił jest zatem proporcjonalny do gradientu funkcji opisującej tę płaszczyznę:

Wektor sił reakcji więzów: $\mathbf{R}=\alpha\cdot\operatorname{grad} f=\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right]=[5\alpha,10\alpha,2\alpha]$

Wektor sił ciężkości $\mathbf{G}=[0,0,-mg]$

Całkowita siła: $\mathbf{F}=\mathbf{R}+\mathbf{G}$

Równania ruchu wyznaczamy z II zasady dynamiki Newtona:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\mathbf{r}})=\mathbf{F} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} m\ddot{x}=5\alpha\\ m\ddot{y}=10\alpha\\ m\ddot{z}=2\alpha-mg\end{cases}$$

Nieznaną wartość parametru α wyznaczymy dwukrotnie różniczkując równanie powierzchni względem czasu i wyrażając uzyskane przyspieszenia przez odpowiednie siły zależne od α :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}: \ 5\dot{x}+10\dot{y}+2\dot{z}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}: \ 5\ddot{x}+10\ddot{y}+2\ddot{z}=0 \quad\Rightarrow\quad 25\alpha+100\alpha+4\alpha-2mg=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{2mg}{129}$$

Uzyskaną zależność podstawiamy do równań ruchu, które następnie całkujemy:

$$\begin{cases}\ddot{x}=\frac{10g}{129}\\ \ddot{y}=\frac{20g}{129}\\ \ddot{z}=\frac{4g}{129}-g=-\frac{125}{129}g\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dot{x}=\frac{10}{129}gt+A_1\\ \dot{y}=\frac{20}{129}gt+B_1\\ \dot{z}=-\frac{125}{129}gt+C_1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=\frac{5}{129}gt^2+A_1t+A_2\\ y=\frac{10}{129}gt^2+B_1t+B_2\\ z=-\frac{125}{258}gt^2+C_1t+C_2\end{cases}$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych:

$$\mathbf{r}(t{=}0)=[4,-2,5] \quad\Rightarrow\quad A_2=4,\quad B_2=-2,\quad C_2=5$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t{=}0)=[0,0,0] \quad\Rightarrow\quad A_1=0,\quad B_1=0,\quad C_1=0$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{129} g t^2 + 4 \\ y = \dfrac{10}{129} g t^2 - 2 \\ z = -\dfrac{125}{258} g t^2 + 5 \end{cases}$$

ZADANIE 12

Punkt o masie *m* znajduje się w polu sił grawitacyjnych. W chwili początkowej znajduje się na wysokości H_1 i porusza się w dół z prędkością v_1. Korzystając z zasady zachowania energii wyznacz prędkość punktu w chwili, w której punkt osiąga wysokość $H_2 < H_1$.

ROZWIĄZANIE:

Energia całkowita w chwili początkowej: $E = m g H_1 + \dfrac{m v_1^2}{2}$

Energia całkowita w chwili końcowej: $E = m g H_2 + \dfrac{m v_2^2}{2}$

Z zasady zachowania energii:

$$m g H_1 + \frac{m v_1^2}{2} = m g H_2 + \frac{m v_2^2}{2}$$

$$2 g H_1 + v_1^2 = 2 g H_2 + v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 g (H_1 - H_2)}$$

ZADANIE 13

Punkt o masie m porusza się pod wpływem grawitacyjnego pola sił po krzywej danej równaniem:

a) $y=4x^3+5$

b) $y=2x^3-3x^2-36x$

Znajdź położenia równowagi dla tego punktu oraz określ ich charakter.

ROZWIĄZANIE:

a) **Współrzędna uogólniona**: $q = x$

Energia potencjalna: $E_P = mgy = mg(4q^3+5)$

Minimum energii potencjalnej: $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q} = mg(12q^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = 0$

Charakter punktu równowagi: $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q_0} = mg(24q)\big|_{q_0} = 0 \quad \Rightarrow$ **równowaga obojętna**

b) **Współrzędna uogólniona**: $q = x$

Energia potencjalna: $E_P = mgy = mg(2q^3-3q^2-36q)$

Minimum energii potencjalnej: $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q} = 6mg(q^2-q-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = -2 \ \vee \ q_0 = 3$

Charakter punktów równowagi:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=-2} = 6mg(2q-1)\big|_{q=-2} = -30\,mg < 0 \quad \Rightarrow$$ **równowaga chwiejna**

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=3} = 6mg(2q-1)\big|_{q=3} = 30\,mg > 0 \quad \Rightarrow$$ **równowaga stabilna**