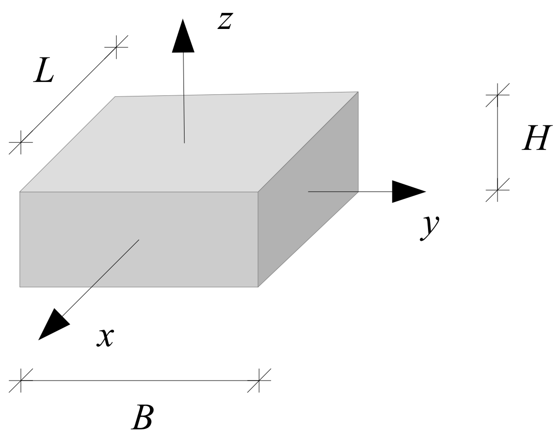
## ZADANIE 1

Wyznacz tensor momentu bezwładności prostopadłościanu w układzie osi przechodzących przez jego środek ciężkości i równoległych do jego boków.




**ROZWIĄZANIE:**

Moment bezwładności względem osi *x*:

$$I_x = \iiint\limits_V \rho\left(y^2+z^2\right)dV =$$

$$= \int\limits_{-L/2}^{L/2}\left[\int\limits_{-B/2}^{B/2}\left[\int\limits_{-H/2}^{H/2}\rho\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}\,z\right]\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x =$$

$$= \rho\int\limits_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}\,x\left[\int\limits_{-B/2}^{B/2}\left[y^2 z+\frac{z^3}{3}\right]_{-H/2}^{H/2}\mathrm{d}\,y\right] = \rho\left[x\right]_{-L/2}^{L/2}\cdot\int\limits_{-B/2}^{B/2}\left(H\,y^2+\frac{H^3}{12}\right)\mathrm{d}\,y = \rho\,L\left[H\frac{y^3}{3}+\frac{H^3}{12}y\right]_{-B/2}^{B/2} =$$

$$= \rho\,L\left(\frac{HB^3}{12}+\frac{BH^3}{12}\right) = \frac{\rho\,LBH}{12}\left(B^2+H^2\right) = \frac{m}{12}\left(B^2+H^2\right)$$

Analogicznie: $I_y = \dfrac{m}{12}\left(L^2+H^2\right)$ $\quad I_z = \dfrac{m}{12}\left(L^2+B^2\right)$

Moment dewiacji względem osi *x* i *y*:

$$D_{yz} = \iiint\limits_V \rho\,yz\,dV = \int\limits_{-L/2}^{L/2}\left[\int\limits_{-B/2}^{B/2}\left[\int\limits_{-H/2}^{H/2}\rho\,yz\,\mathrm{d}\,z\right]\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x = \rho\int\limits_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}\,x\int\limits_{-B/2}^{B/2}\left[\frac{yz^2}{2}\right]_{-H/2}^{H/2}\mathrm{d}\,y = 0$$

Analogicznie: $D_{zx} = 0$ $\quad D_{xy} = 0$

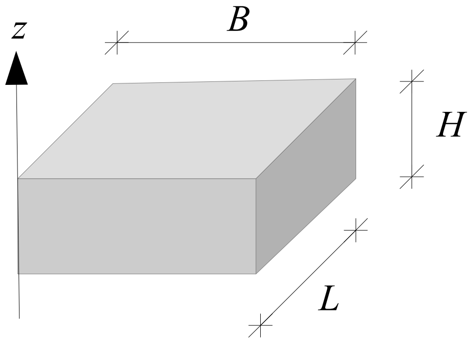
Wynika to z faktu, że momenty dewiacji liczone są względem osi, które są osiami symetrii bryły.

Tensor bezwładności:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{zx} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} \left(B^2+H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(L^2+H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(L^2+B^2\right) \end{bmatrix}$$

## ZADANIE 2

Wyznacz moment bezwładności prostopadłościanu wirującego wokół osi zawierającej jeden z jego boków.



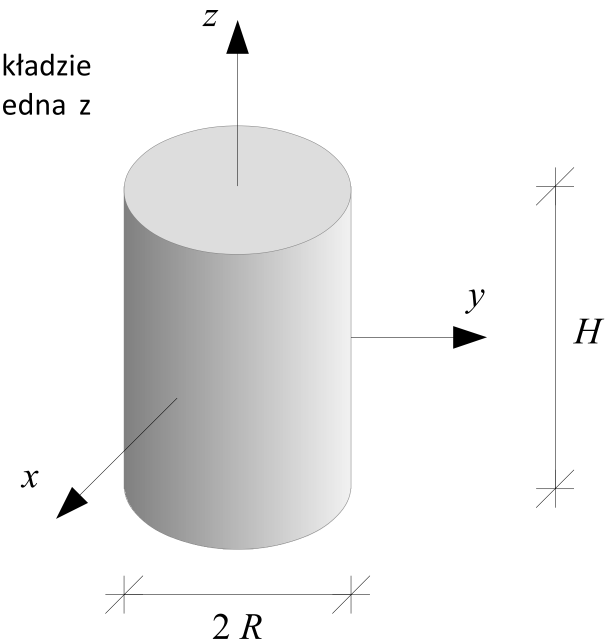

**ROZWIĄZANIE:**

Zajmiemy się przypadkiem, gdy oś obrotu jest równoległa do osi z. Moment bezwładności wyznaczymy na podstawie składowej $I_z$ uzyskanej uprzednio i na podstawie twierdzenia Steinera.

$$I' = I + m d^2 = \frac{m}{12}(L^2+B^2) + m\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2\right] = \frac{m}{3}(L^2+B^2)$$

## ZADANIE 3

Wyznacz tensor momentu bezwładności dla walca w układzie współrzędnych o początku w środku ciężkości walca. Jedna z osi układu współrzędnych pokrywa się z osią walca.




**ROZWIĄZANIE:**

Ponieważ układ współrzędnych jest układem głównym (zawiera osie symetrii walca), stąd wszystkie momenty dewiacji są równe 0. Potrzeba jedynie wyznaczyć moment bezwładności względem osi walca, oraz względem dowolnej osi prostopadłej. Przyjmijmy, że oś walca pokrywa się z osią *z*:

Moment bezwładności względem osi walca:

$$I_z = \iiint_V \rho(x^2+y^2)dV = \rho\iiint (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\iiint\left[(x^2+y^2)J\right]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \rho\int_{r=0}^{R}\left[\int_{\phi=0}^{2\pi}\left[\int_{z=-H/2}^{H/2}\left[(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)r\right]\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}r = \rho\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\,\mathrm{d}\phi\int_{-H/2}^{H/2}\mathrm{d}z =$$

$$= \rho\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\cdot[\phi]_0^{2\pi}\cdot[z]_{-H/2}^{H/2} = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 H = \frac{1}{2}m R^2$$

Moment bezwładności względem osi prostopadłej do osi walca

$$I_x = \iiint\limits_V \rho(y^2+z^2)\,dV = \rho\iiint (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\iiint \left[(y^2+z^2)J\right]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \rho\int\limits_{r=0}^{R}\left[\int\limits_{\phi=0}^{2\pi}\left[\int\limits_{z=-H/2}^{H/2}\left[(r^2\sin^2\phi+z^2)r\right]\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}r = \rho\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\left[z\,r^3\sin^2\phi + r\frac{z^3}{3}\right]_{-H/2}^{H/2}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \rho\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\left[H\,r^3\sin^2\phi + r\frac{H^3}{12}\right]\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = \rho\int\limits_0^R\left[H\,r^3\left(\frac{\phi}{2}-\frac{1}{4}\cos 2\phi\right)+r\,\phi\frac{H^3}{12}\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}r =$$

$$= \rho\int\limits_0^R\left[\pi H\,r^3 + r\,\pi\frac{H^3}{6}\right]\mathrm{d}r = \rho\pi H\left[\frac{r^4}{4}+r^2\frac{H^2}{12}\right]_0^R = \rho\pi R^2 H\left[\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right] = \frac{m}{12}\left[3R^2+H^2\right]$$

Tensor bezwładności:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{zx} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} (3R^2+H^2) & 0 & 0 \\ 0 & (3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{bmatrix}$$

## ZADANIE 4

Wyznacz tensor momentu bezwładności kuli w dowolnym centralnym układzie współrzędnych.

**ROZWIĄZANIE:**

Z uwagi na symetrię kuli, każdy układ centralny jest układem głównym, więc momenty dewiacji zawsze będą równe 0. Podobnie, moment bezwładności względem dowolnej prostej przechodzącej zawierającej środek kuli będą zawsze takie same:

$$I_z = \iiint\limits_V \rho(x^2+y^2)\,dV = \rho\iiint (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\iiint\left[(x^2+y^2)J\right]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi =$$

$$= \rho\int\limits_{r=0}^{R}\left[\int\limits_{\phi=0}^{2\pi}\left[\int\limits_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2}\left[(r^2\cos^2\phi\sin^2\psi + r^2\sin^2\phi\sin^2\psi)r^2\sin\psi\right]\mathrm{d}\psi\right]\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}r =$$

$$= \rho\int\limits_0^R r^4\,\mathrm{d}r\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\,\mathrm{d}\phi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^3\psi\,\mathrm{d}\psi = 2\rho\int\limits_0^R r^4\,\mathrm{d}r\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\,\mathrm{d}\phi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\psi\,\mathrm{d}\psi =$$

$$= 2\rho\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R\cdot[\phi]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{3}\cos^3\psi-\cos\psi\right]_0^{\pi/2} = \frac{8\pi R^5\rho}{15} = \frac{2}{5}mR^2$$

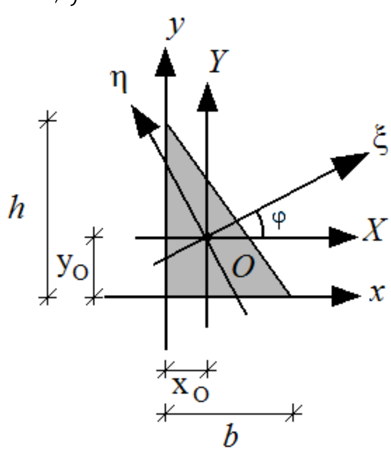
 

## ZADANIE 5

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $b$ i $h$. Obliczyć położenie jego środka ciężkości, momenty bezwładności i moment dewiacji oraz wyznaczyć orientacje głównych centralnych osi bezwładności i wartości głównych centralnych momentów bezwładności.

**ROZWIĄZANIE:**

Obszar figury opisać następująco: $$A=\left\{x,y:\ x\in(0,b),\ y\in\left(0,h-\frac{h}{b}x\right)\right\}$$




Pole powierzchni:

$$A=\iint_A \mathrm{d}A=\int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{b}[y]_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}\mathrm{d}x=\int_0^b\left(h-\frac{h}{b}x\right)\mathrm{d}x=$$
$$=h\left[x-\frac{1}{2b}x^2\right]_0^b=\frac{1}{2}bh$$

Momenty statyczne i położenie środka ciężkości:

$$S_x=\iint_A y\,\mathrm{d}A=\int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{b}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^b\left(h-\frac{h}{b}x\right)^2\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^b\left[h^2-2\frac{h^2}{b}x+\frac{h^2}{b^2}x^2\right]\mathrm{d}x=\frac{h^2}{2}\left[x-\frac{1}{b}x^2+\frac{1}{3b^2}x^3\right]_0^b=\frac{bh^2}{6}$$

$$S_y=\iint_A x\,\mathrm{d}A=\int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{b}x[y]_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}\mathrm{d}x=\int_0^b\left[hx-\frac{h}{b}x^2\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\left[\frac{h}{2}x^2-\frac{h}{3b}x^3\right]_0^b=\frac{hb^2}{6}$$

$$x_O=\frac{S_y}{A}=\frac{b}{3}\qquad\qquad y_O=\frac{S_x}{A}=\frac{h}{3}$$

Momenty bezwładności w układzie globalnym:

$$I_x=\iint_A y^2\mathrm{d}A=\int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}y^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{b}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^b\left(h-\frac{h}{b}x\right)^3\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^b\left[h^3-3\frac{h^3}{b}x+3\frac{h^3}{b^2}x^2-\frac{h^3}{b^3}x^3\right]\mathrm{d}x=\frac{h^3}{3}\left[x-\frac{3}{2b}x^2+\frac{1}{b^2}x^3-\frac{1}{4b^3}x^4\right]_0^b=\frac{bh^3}{12}$$

$$I_y=\iint_A x^2\mathrm{d}A=\int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}x^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{b}x^2[y]_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x}\mathrm{d}x=\int_0^b\left[hx^2-\frac{h}{b}x^3\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\left[\frac{h}{3}x^3-\frac{h}{4b}x^4\right]_0^b=\frac{hb^3}{12}$$

$$D_{xy} = \iint_A xy \,\mathrm{d}\, A = \int_{x=0}^{b} \int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x} xy \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x = \int_{x=0}^{b} x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x} \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} \int_{0}^{b} x \left( h - \frac{h}{b} x \right)^2 \mathrm{d}\, x =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \left[ h^2 x - 2 \frac{h^2}{b} x^2 + \frac{h^2}{b^2} x^3 \right] \mathrm{d}\, x = \frac{h^2}{2} \left[ \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3b} x^3 + \frac{1}{4b^2} x^4 \right]_0^b = \frac{b^2 h^2}{24}$$

Centralne momenty bezwładności:

$$I_X = I_x - A \cdot y_O^2 = \frac{b h^3}{12} - \frac{1}{2} b h \cdot \left( \frac{h}{3} \right)^2 = \frac{b h^3}{36}$$

$$I_Y = I_y - A \cdot x_O^2 = \frac{h b^3}{12} - \frac{1}{2} b h \cdot \left( \frac{b}{3} \right)^2 = \frac{h b^3}{36}$$

$$D_{XY} = D_{xy} - A \cdot x_O \, y_O = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{1}{2} b h \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

Biegunowy moment bezwładności:

$$I_0 = \iint_A (X^2 + Y^2) \,\mathrm{d}\, A = I_X + I_Y = \frac{b h}{36} (h^2 + b^2)$$

Tensor bezwładności:
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_X & -D_{XY} \\ -D_{XY} & I_Y \end{bmatrix} = \frac{b h}{72} \begin{bmatrix} 2 h^2 & b h \\ b h & 2 b^2 \end{bmatrix}$$

Niezmienniki tensora bezwładności:
$$\alpha = \mathrm{tr}(\mathbf{I}) = I_X + I_Y = \frac{b h}{36} (h^2 + b^2)$$

$$\beta = \det(\mathbf{I}) = I_X I_Y - D_{XY}^2 = \frac{b^4 h^4}{1728}$$

Równanie wiekowe:
$$I^2 - \alpha I + \beta = 0$$

Główne momenty bezwładności – rozwiązania równania wiekowego:

$$I_\xi = I_{max} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \sqrt{\left( \frac{I_X - I_Y}{2} \right)^2 + D_{XY}^2} = \frac{bh}{72} \left[ b^2 + h^2 + \sqrt{b^4 - b^2 h^2 + h^4} \right]$$

$$I_\eta = I_{min} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \sqrt{\left( \frac{I_X - I_Y}{2} \right)^2 + D_{XY}^2} = \frac{bh}{72} \left[ b^2 + h^2 - \sqrt{b^4 - b^2 h^2 + h^4} \right]$$

Kąt między osią *X* centralnego układu współrzędnych a osią maksymalnego centralnego momentu bezwładności:

$$\mathrm{tg}\, \varphi = \frac{D_{XY}}{I_Y - I_{max}} = \frac{bh}{h^2 - b^2 + \sqrt{h^4 - h^2 b^2 + b^4}}$$

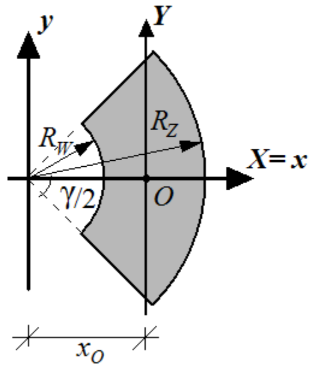
## ZADANIE 6

Dany jest wycinek pierścienia o promieniu wewnętrznym $R_W$ i promieniu zewnętrznym $R_Z$ odpowiadający kątowi środkowemu $\gamma$. Obliczyć położenie jego środka ciężkości oraz główne centralne momenty bezwładności.

**ROZWIĄZANIE:**

Globalny układ współrzędnych dobieramy w ten sposób, aby jego oś *x* była osią symetrii figury. Środek ciężkości leży zatem na tej osi. Jest ona ponadto jedną z głównych centralnych osi bezwładności. Druga główna centralna oś bezwładności musi być do niej prostopadła. Stosując współrzędne biegunowe obszar figury opisać następująco:

$$A=\left\{r,\psi:\ r\in(R_W,R_Z),\psi\in\left(-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}\right)\right\}$$




Pole powierzchni:

$$A=\iint_A \mathrm{d}A=\int_{r=R_w}^{R_z}\int_{\psi=-\gamma/2}^{\gamma/2} J\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}r=\int_{R_W}^{R_Z} r\,\mathrm{d}r\int_{-\gamma/2}^{\gamma/2}\mathrm{d}\psi=$$
$$=\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_W}^{R_Z}[\psi]_{-\gamma/2}^{\gamma/2}=\frac{\gamma}{2}(R_Z^2-R_W^2)$$

Momenty statyczne i położenie środka ciężkości:

$$S_y=\iint_A x\,\mathrm{d}A=\int_{r=R_w}^{R_z}\int_{\psi=-\gamma/2}^{\gamma/2} r\cos\psi\,J\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}r=\int_{R_W}^{R_Z} r^2\,\mathrm{d}r\int_{-\gamma/2}^{\gamma/2}\cos\psi\,\mathrm{d}\psi=\left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_W}^{R_Z}[\sin\psi]_{-\gamma/2}^{\gamma/2}=$$
$$=\frac{2}{3}(R_Z^3-R_W^3)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$x_O=\frac{S_y}{A}=\frac{4}{3\gamma}\frac{(R_Z^3-R_W^3)}{(R_Z^2-R_W^2)}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\qquad y_O=0$$

Momenty bezwładności w układzie globalnym:

$$I_x=I_X=\iint_A y^2\,\mathrm{d}A=\int_{r=R_w}^{R_z}\int_{\psi=-\gamma/2}^{\gamma/2}(r\sin\psi)^2 J\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}r=\int_{R_W}^{R_Z} r^3\,\mathrm{d}r\int_{-\gamma/2}^{\gamma/2}\sin^2\psi\,\mathrm{d}\psi=$$
$$\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_W}^{R_Z}\left[\frac{1}{2}(x-\sin\psi\cos\psi)\right]_{-\gamma/2}^{\gamma/2}=\frac{1}{8}(R_Z^4-R_W^4)[\gamma-\sin\gamma]$$

$$I_y=\iint_A x^2\,\mathrm{d}A=\int_{r=R_w}^{R_z}\int_{\psi=-\gamma/2}^{\gamma/2}(r\cos\psi)^2 J\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}r=\int_{R_W}^{R_Z} r^3\,\mathrm{d}r\int_{-\gamma/2}^{\gamma/2}\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi=$$
$$\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_W}^{R_Z}\left[\frac{1}{2}(x+\sin\psi\cos\psi)\right]_{-\gamma/2}^{\gamma/2}=\frac{1}{8}(R_Z^4-R_W^4)[\gamma+\sin\gamma]$$

Centralne momenty bezwładności:

$$I_X = I_x - A\cdot y_O^2 = \frac{1}{8}(R_Z^4 - R_W^4)[\gamma - \sin\gamma]$$

$$I_Y = I_y - A\cdot x_O^2 = \frac{1}{8}(R_Z^4 - R_W^4)[\gamma + \sin\gamma] - \frac{8}{9\gamma}\frac{(R_Z^3 - R_W^3)^2}{(R_Z^2 - R_W^2)}\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Biegunowy moment bezwładności:

$$I_0 = I_X + I_Y = \frac{\gamma}{4}(R_Z^4 - R_W^4) - \frac{8}{9\gamma}\frac{(R_Z^3 - R_W^3)^2}{(R_Z^2 - R_W^2)}\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

**Przypadki szczególne**:

Wycinki koła $R_Z = R,\quad R_W = 0$

- Koło $(\gamma = 2\pi)$ :

$$A = \pi R^2 \qquad x_O = 0 \qquad I_X = I_Y = \frac{\pi R^4}{4}$$

- Półkole $(\gamma = \pi)$ :

$$A = \frac{\pi R^2}{2} \qquad x_O = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \qquad I_X = \frac{\pi R^4}{8} \qquad I_Y = R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$$

- Ćwiartka koła $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$ :

$$A = \frac{\pi R^2}{4} \qquad x_O = \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{R}{\pi} \qquad I_X = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{(\pi - 2)}{16}R^4 \qquad I_Y = \frac{(9\pi^2 + 18\pi - 128)}{144}R^4$$

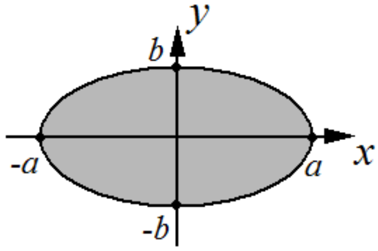
Profil rurowy $R_Z = R,\quad R_W = r,\quad (\gamma = 2\pi)$ :

$$A = \pi(R^2 - r^2) \qquad x_O = 0 \qquad I_X = I_Y = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$$

## ZADANIE 7

Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności elipsy o półosiach o długości *a* i *b* (*a* > *b*). Wyznaczyć centralne momenty bezwładności i dewiacji tej elipsy w układzie współrzędnych, którego osie obrócone są względem półosi elipsy o kąt $\alpha$.




**ROZWIĄZANIE:**

Obszar elipsy można opisać jako: $A=\left\{x, y: \; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$

Z uwagi na symetrię obszaru całkowania oraz parzystość funkcji podcałkowej, w celu wyznaczenia momentów bezwładności wystarczy scałkować stosowne funkcje tylko w jednej ćwiartce układu współrzędnych – dla której łatwo określić granice całkowania – i przemnożyć wynik przez 4.

Moment bezwładności względem osi *x*:

$$I_x = \iint_A y^2\, dA = 4 \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y^2\, dy\, dx = 4 \int_0^a \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx = \frac{4 b^3}{3} \int_0^a \left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{3/2} dx = \left| \begin{matrix} u=\frac{x}{a} \\ dx=a\cdot du \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{4 a b^3}{3} \int_0^1 (1-u^2)^{3/2}\, du = \frac{4 a b^3}{3} \int \frac{u^4-2u^2+1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

Uzyskaną całkę obliczamy poprzez założenie rozwiązania postaci:

$$\int \frac{u^4-2u^2+1}{\sqrt{1-u^2}}\, du \equiv (a u^3+b u^2+c u+d)\sqrt{1-u^2} + A \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu, sprowadzeniu wyrażeń z prawej strony do wspólnego mianownika i przyrównaniu do siebie współczynników wielomianów w licznikach ułamków uzyskanych po obu stronach powyższej zależności, otrzymujemy:

$$\int_0^1 (1-u^2)^{3/2}\, du = \left[\frac{1}{8} u (5-2u^2)\sqrt{1-u^2} + \frac{3}{8} \arcsin(u)\right]_0^1 = \frac{3\pi}{16} \qquad \Rightarrow \qquad I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$$

Postępując analogicznie dla drugiej osi, otrzymujemy: $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$

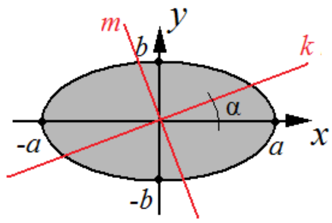
Moment dewiacji w rozpatrywanym układzie współrzędnych jest równy: $D_{xy}=0$ .

Moment bezwładności względem dowolnej prostej przechodzącej przez środek elipsy i nachylonej do jej dłuższej półosi pod kątem $\alpha$ jest równy:

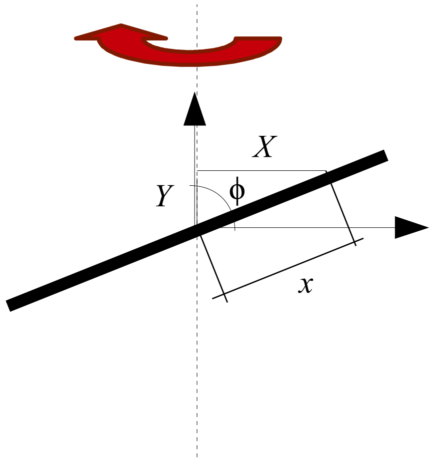
$$I_k = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - 2 D_{xy} \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\pi a b}{4}\left(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha\right)$$

$$I_m = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + 2 D_{xy} \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\pi a b}{4}\left(b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha\right)$$

$$D_{km} = \frac{I_y - I_x}{2} \sin 2\alpha - D_{xy}\cos 2\alpha = \frac{\pi a b}{8}\left(a^2-b^2\right)\sin 2\alpha$$



## ZADANIE 8




Wyznacz moment bezwładności i moment dewiacji cienkiego pręta wirującego wokół osi przechodzącej przez jego środek ciężkości i nachylonej do osi tego pręta pod kątem $\phi$

**ROZWIĄZANIE:**

Przez „pręt cienki” rozumiemy taki pręt, którego wymiary poprzeczne są tak małe w porównaniu do jego długości, że przyjąć możemy, że współrzędne punktów każdego ustalonego przekroju poprzecznego są takie same, tj.:

$$I_Y = \iiint\limits_V \rho X^2 \,\mathrm{d}V = \rho A \int\limits_{-L/2}^{L/2} X^2 \,\mathrm{d}x = \rho A \int\limits_{-L/2}^{L/2} (x \sin\phi)^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \rho A \sin^2\phi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} \rho A L^3 \sin^2\phi = \frac{mL^2}{12} \sin^2\phi = \frac{\mu L^3}{12} \sin^2\phi$$

gdzie $\mu$ jest gęstością liniową [kg/m]. Dla pręta wirującego wokół osi prostopadłej do osi tego pręta, tj. dla $\phi = 90^\circ$ :

$$I = \frac{mL^2}{12} = \frac{\mu L^3}{12}$$

Konsekwencją założenia o małych wymiarach poprzecznych pręta jest to, że jego moment bezwładności przy obrocie wokół swojej własnej osi jest zerowy $(\phi = 0)$ . W rzeczywistości, walec wirujący wokół swojej własnej osi symetrii ma niezerowy moment bezwładności wynikający z jego niezerowych wymiarów poprzecznych (zadanie 3).

Moment dewiacji:

$$D_{XY} = \iiint\limits_V \rho XY \,\mathrm{d}V = \rho A \int\limits_{-L/2}^{L/2} XY \,\mathrm{d}x = \rho A \int\limits_{-L/2}^{L/2} (x \sin\phi)(x \cos\phi) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \rho A \sin\phi \cos\phi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{mL^2}{12} \sin\phi \cos\phi = \frac{\mu L^3}{12} \sin\phi \cos\phi$$

## ZADANIE 9

Wyznacz moment bezwładności pręta jak w zadaniu 8, wirującego wokół osi prostopadłej do osi tego pręta i przechodzącej przez jeden z jego końców.

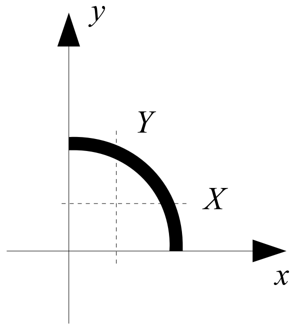
**ROZWIĄZANIE:**

Tę wielkość wyznaczymy na podstawie wyniku uzyskanego uprzednio i twierdzenia Steinera:

$$I' = I + m d^2 = \frac{mL^2}{12} + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

## ZADANIE 10

Wyznacz położenie środka ciężkości oraz moment bezwładności i moment dewiacji ćwiartki pręta kołowego o masie *m* względem osi przyjętego układu współrzędnych.




**ROZWIĄZANIE:**

Najpierw wyznaczymy moment bezwładności względem osi *y* układu globalnego, a następnie wyznaczymy położenie środka ciężkości i korzystając z twierdzenia Steinera obliczymy centralny moment bezwładności.

Całkowita długość pręta: $V = A\,L = \dfrac{A\pi r}{2}$ $\qquad [V] = \mathrm{m}^3$

Gęstość materiału: $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{A\,L} = \dfrac{2\,m}{A\pi r}$ $\qquad [\rho] = \mathrm{kg/m^3}$

Gęstość liniowa materiału: $\mu = \rho\,A$ $\qquad [\mu] = \mathrm{kg/m^3}$

Moment statyczny względem osi *y* układu globalnego:

$$S_y = \iiint_V \rho\,x\,\mathrm{d}V = \rho\,A \int_{\phi=0}^{\pi/2} r\,x\,\mathrm{d}\phi = \rho\,A\,r^2 \int_0^{\pi/2} \cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \rho\,A\,r^2 = \mu\,r^2$$

Położenie środka ciężkości: $x_O = \dfrac{S_y}{m} = \dfrac{2\,r}{\pi}$

Moment bezwładności względem osi *y* układu globalnego:

$$I_y = \iiint_V \rho\,x^2\,\mathrm{d}V = \rho\,A \int_{\phi=0}^{\pi/2} r\,x^2\,\mathrm{d}\phi = \rho\,A\,r^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{\rho\,A\pi\,r^3}{4} = \mu\frac{\pi\,r^3}{4}$$

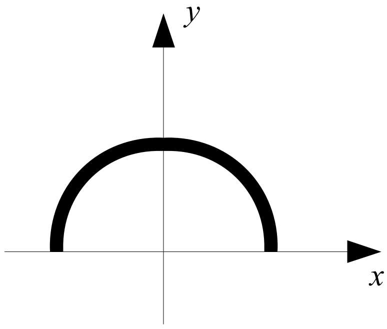
$$D_{xy} = \iiint_V \rho\,x\,y\,\mathrm{d}V = \rho\,A \int_{\phi=0}^{\pi/2} r\,x\,y\,\mathrm{d}\phi = \rho\,A\,r^3 \int_0^{\pi/2} \cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{\rho\,A\,r^3}{2} = \mu\frac{r^3}{2}$$

Moment bezwładności względem osi centralnej *Y*:

$$I_Y = I_y - m\,x_O^2 = \mu\frac{\pi\,r^3}{4} - \frac{\mu\pi\,r}{2}\cdot\left(\frac{2\,r}{\pi}\right)^2 = \mu\,r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)$$

## ZADANIE 11

Wyznacz moment bezwładności i moment dewiacji pręta półkolistego względem przyjętych osi układu współrzędnych.




**ROZWIĄZANIE:**

Korzystając z rezultatów poprzedniego zadania:

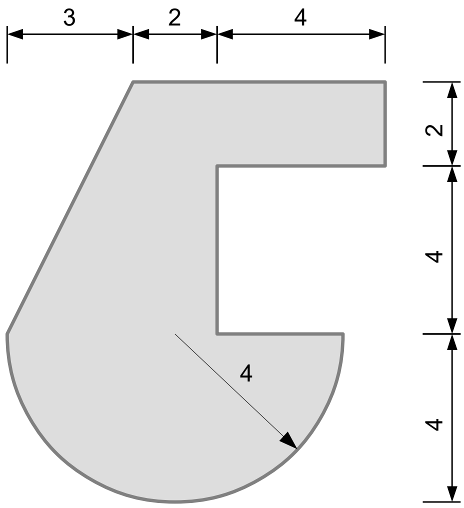
$$I_x = I_y = \mu\frac{\pi\,r^3}{2}$$

$$D_{xy} = 0$$

**ZADANIE 12**

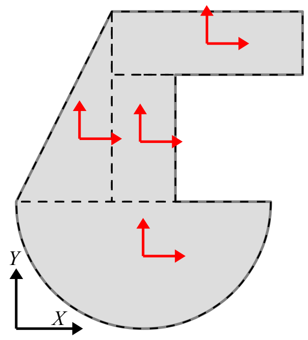
Wyznacz:

1) środek ciężkości figury jak na rysunku.
2) moment statyczny względem osi pionowej i poziomej, przechodzących przez środek ciężkości.
3) moment statyczny względem poziomej osi przechodzącej przez wyznaczony środek ciężkości od tej części figury, która znajduje się powyżej tej osi.




**ROZWIĄZANIE:**

Dzielimy figurę na proste figury składowe
i wprowadzamy pomocniczy układ współrzędnych:




Pole powierzchni figury:

$$A = [2\cdot 6] + [2\cdot 4] + \left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\right] + \left[\frac{\pi\cdot 4^2}{2}\right] = 54{,}133$$

Momenty statyczne względem przyjętego układu współrzędnych:

$$S_X = \left[2\cdot 6\cdot\left(8+\frac{2}{2}\right)\right] + \left[2\cdot 4\cdot\left(4+\frac{4}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\left(4+\frac{6}{3}\right)\right] + \left[\frac{\pi\cdot 4^2}{2}\cdot\left(4-\frac{4}{3}\frac{4}{\pi}\right)\right] = 267{,}864$$

$$S_Y = \left[2\cdot 6\cdot\left(3+\frac{6}{2}\right)\right] + \left[2\cdot 4\cdot\left(3+\frac{2}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right)\right] + \left[\frac{\pi\cdot 4^2}{2}\cdot(4)\right] = 222{,}531$$

Położenie środka ciężkości:

$$X_O = \frac{S_Y}{A} = 4{,}1108\ , \qquad Y_O = \frac{S_X}{A} = 4{,}9483$$

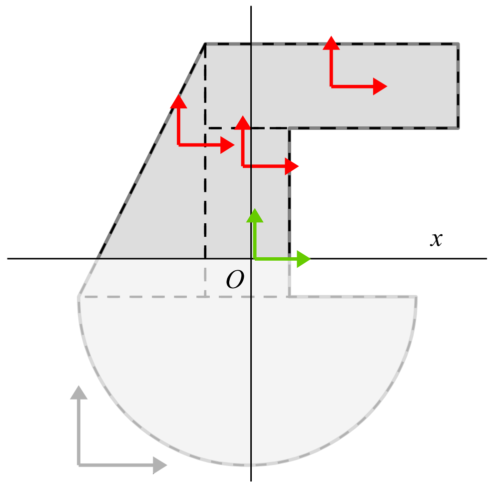
 

Przez środek ciężkości przeprowadzamy oś pionową i poziomą i wyznaczamy moment statyczny względem tych osi.

$$S_X=\left[2\cdot 6\cdot\left(8+\frac{2}{2}-4{,}9483\right)\right]+\left[2\cdot 4\cdot\left(4+\frac{4}{2}-4{,}9483\right)\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\left(4+\frac{6}{3}-4{,}9483\right)\right]+\left[\frac{\pi\cdot 4^2}{2}\cdot\left(4-\frac{4}{3}\frac{4}{\pi}-4{,}9483\right)\right]\approx 0$$
$$S_Y=\left[2\cdot 6\cdot\left(3+\frac{6}{2}-4{,}1108\right)\right]+\left[2\cdot 4\cdot\left(3+\frac{2}{2}-4{,}1108\right)\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 3-4{,}1108\right)\right]+\left[\frac{\pi\cdot 4^2}{2}\cdot(4-4{,}1108)\right]\approx 0$$

Moment statyczny względem dowolnej osi przechodzącej przez środek ciężkości musi być zawsze równy 0.

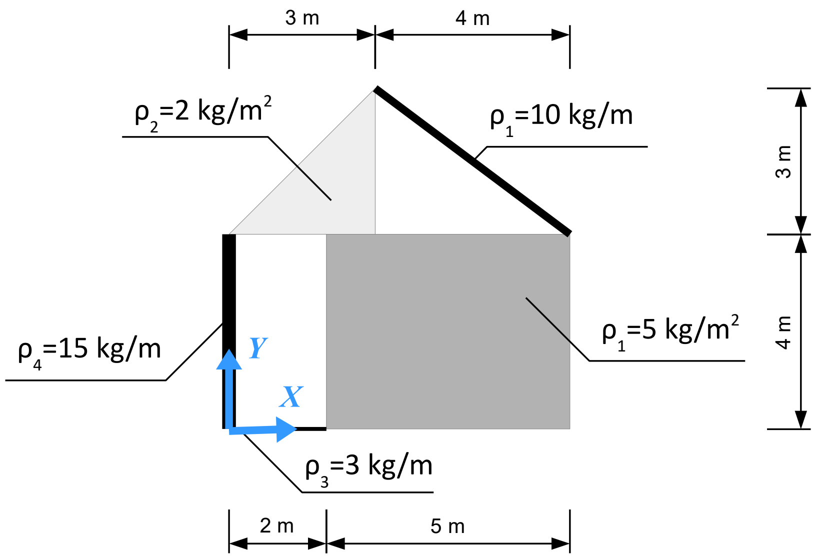
Wyznaczamy moment statyczny tej części figury, która znajduje się powyżej tej prostej poziomej przechodzącej przez środek ciężkości, względem tej prostej.




$$S_x^{\uparrow}=\left[2\cdot 6\cdot(9-4{,}9483)\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[2\cdot(8-4{,}9483)\cdot\frac{(8-4{,}9483)}{2}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[(10-4{,}9483)\cdot\left(\frac{3}{6}\cdot(10-4{,}9483)\right)\cdot\frac{(10-4{,}9483)}{3}\right]=$$
$$=68{,}6768$$

## ZADANIE 13

Wyznacz środek ciężkości figury jak na rysunku.



**ROZWIĄZANIE:**
W przypadku układu składającego się z materiałów o różnych gęstościach udział geometrii każdej z tych części powinien być uwzględniony poprzez przemnożenie każdego wyrażenia przez odpowiadającą mu wartość gęstości.

Całkowita masa układu: $m = 5\cdot[5\cdot4]+2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\right]+3\cdot[2]+15\cdot[4]+10\cdot\left[\sqrt{3^2+4^2}\right]=225\ \text{kg}$

Momenty statyczne:

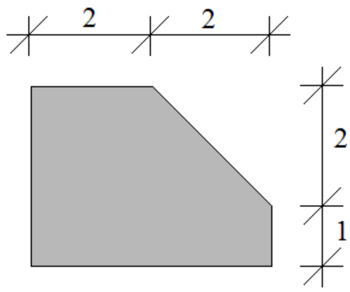
$$S_X = 5\cdot[20\cdot2]+2\cdot\left[4{,}5\cdot\left(4+\frac{1}{3}\cdot3\right)\right]+3\cdot[2\cdot0]+15\cdot[4\cdot2]+10\cdot\left[5\cdot\left(4+\frac{3}{2}\right)\right]=640\ \text{kg}\cdot\text{m}$$

$$S_Y = 5\cdot\left[20\cdot\left(2+\frac{5}{2}\right)\right]+2\cdot\left[4{,}5\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot3\right)\right]+3\cdot[2\cdot1]+15\cdot[4\cdot0]+10\cdot\left[5\cdot\left(3+\frac{4}{2}\right)\right]=724\ \text{kg}\cdot\text{m}$$

Położenie środka ciężkości: $X_O = \frac{S_Y}{m} = 3{,}2178\ \text{m}$ , $Y_O = \frac{S_X}{m} = 3{,}8444\ \text{m}$

## ZADANIE 14

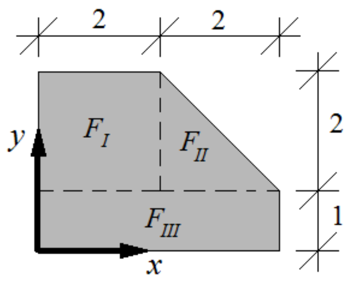
Obliczyć główne centralne momenty bezwładności oraz orientację głównych centralnych osi bezwładności figury jak na rysunku. Wyznacz następnie składowe tensora momentu bezwładności względem osi nachylonych pod kątem 60° do osi poziomej i pionowej, przechodzącej przez środek ciężkości przekroju.




**ROZWIĄZANIE:**
Uproszczony schemat rozwiązania zadania jest następujący:

1. Przedstawiamy figurę jako sumę lub różnicę najmniejszej możliwej liczby figur prostych (prostokątów, trójkątów prostokątnych, kół oraz ich ćwiartek i połówek).
2. Obliczamy pole całej figury jako sumę pól figur składowych a także – a analogiczny sposób – momenty statyczne względem osi przyjętego układu współrzędnych. Wyznaczamy współrzędne środka ciężkości.
3. Wyznaczmy charakterystyki geometryczne każdej z figur składowych w jej własnym centralnym układzie współrzędnych oraz sumujemy charakterystyki wszystkich figur składowych sprowadziwszy je uprzednio do środka ciężkości całej figury za pomocą twierdzenia Steinera.
4. Wyznaczamy główne centralne momenty bezwładności oraz orientację osi maksymalnej bezwładności.

Podział figury i przyjęcie globalnego układu współrzędnych:




**Pole powierzchni** figury:

$$A = A_I+A_{II}+A_{III} = [2\cdot2]+\left[\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\right]+[1\cdot4] = 4+2+4=10$$

**Momenty statyczne** figur składowych względem osi *x* i *y* przyjętego układu współrzędnych obliczamy jako iloczyn ich pola oraz współrzędnej odpowiednio *y* oraz *x* położenia ich lokalnego centralnego układu współrzędnych. Środek ciężkości prostokątów znajduje się w połowie ich szerokości i wysokości, zaś w przypadku trójkątów prostokątnych w 1/3 ich wysokości i szerokości licząc od kąta prostego:

$$S_x = \left[(2\cdot 2)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot 2\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot 2\right)\right]+\left[(1\cdot 4)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)\right] = 13{,}333$$

$$S_y = \left[(2\cdot 2)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot\left(2+\frac{1}{3}\cdot 2\right)\right]+\left[(1\cdot 4)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right)\right] = 17{,}333$$

**Położenie środka ciężkości**: $x_O = \dfrac{S_y}{A} = 1{,}733$ $\quad y_O=\dfrac{S_x}{A} = 1{,}333$

Momenty bezwładności oraz momenty dewiacji dla całej figury obliczamy jako sumę odpowiednich momentów figur składowych, sprowadzonych do środka ciężkości całej figury zgodnie z twierdzeniem Steinera.

$$I_X = \left[\frac{2\cdot 2^3}{12}+(2\cdot 2)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot 2-1{,}333\right)^2\right]+\left[\frac{2\cdot 2^3}{36}+\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot 2-1{,}333\right)^2\right] + \ldots$$
$$\ldots + \left[\frac{4\cdot 1^3}{12}+(4\cdot 1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1-1{,}333\right)^2\right] = 3{,}113 + 0{,}667 + 3{,}109 = 6{,}889$$

$$I_Y = \left[\frac{2^3\cdot 2}{12}+(2\cdot 2)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2-1{,}733\right)^2\right]+\left[\frac{2^3\cdot 2}{36}+\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot\left(2+\frac{1}{3}\cdot 2-1{,}733\right)^2\right] + \ldots$$
$$\ldots + \left[\frac{4^3\cdot 1}{12}+(4\cdot 1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4-1{,}733\right)^2\right] = 3{,}482 + 2{,}188 + 5{,}618 = 11{,}288$$

$$D_{XY} = \left[0+(2\cdot 2)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot 2-1{,}333\right)\left(\frac{1}{2}\cdot 2-1{,}733\right)\right] + \ldots$$
$$\ldots + \left[-\frac{2^2\cdot 2^2}{72}+\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot 2-1{,}333\right)\left(2+\frac{1}{3}\cdot 2-1{,}733\right)\right]+ \ldots$$
$$\ldots +\left[0+(4\cdot 1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1-1{,}333\right)\left(\frac{1}{2}\cdot 4-1{,}733\right)\right] = -1{,}956 + 0{,}401 - 0{,}890 = -2{,}445$$

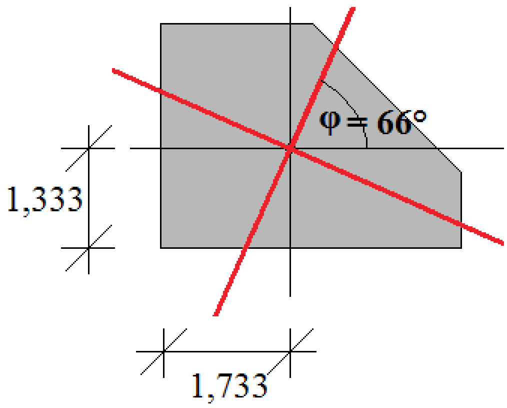
 

Główne centralne momenty bezwładności i orientacja osi maksymalnej bezwładności:

$$I_{max} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{XY}^2} = 12,377$$

$$I_{min} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{XY}^2} = 5,800$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{D_{XY}}{I_y - I_{max}} = 66^\circ$$




Wartości składowych tensora momentu bezwładności względem osi nachylonych do poziomej i pionowej osi centralnej pod kątem 60° obliczamy ze wzorów:

$$I_{x'} = I_X \cos^2\alpha + I_Y \sin^2\alpha - 2 D_{XY} \sin\alpha \cos\alpha$$
$$I_{y'} = I_X \sin^2\alpha + I_Y \cos^2\alpha + 2 D_{XY} \sin\alpha \cos\alpha$$
$$D_{x'y'} = \frac{I_X - I_\eta}{2} \sin 2\alpha + D_{XY} \cos 2\alpha$$

gdzie:

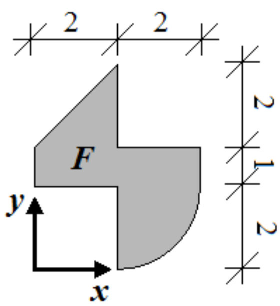
$$\alpha = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$I_{x'} = 6,889 \cdot \frac{1}{4} + 11,288 \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot (-2,445) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 12,306$$
$$I_{y'} = 6,889 \cdot \frac{3}{4} + 11,288 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot (-2,445) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 5,871$$
$$D_{x'y'} = \frac{6,889 - 11,288}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-2,445) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -0,682$$

## ZADANIE 15

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności oraz orientację głównych centralnych osi bezwładności figury jak na rysunku. Wyznacz następnie składowe tensora momentu bezwładności względem osi obróconych o kąt 45° względem osi głównych centralnych.




**ROZWIĄZANIE:**

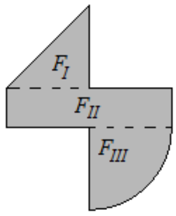
Figurę można określić jako sumę trzech figur:

$F = F_I + F_{II} + F_{III}$

$F_I$ - prostokąt

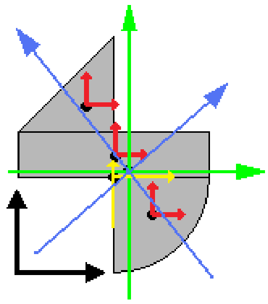
$F_{II}$ - trójkąt

$F_{III}$ - ćwiartka koła




Wszystkie zadania tego typu można rozwiązywać z wykorzystaniem następującego schematu obliczeniowego. W tym celu wprowadź szereg pomocniczych układów współrzędnych:

- ***globalny*** u.w. (**czarny**)
- ***lokalne centralne*** u.w. figur składowych (**czerwone**)
- dla figur składowych będących wycinkami koła:
  u.w. w ***środku koła*** (**żółty**)
- ***centralny*** u.w. całej figury (**zielony**)
- ***główny centralny*** u.w. całej figury (**niebieski**)



Schemat postępowania jest następujący:

1. Obliczamy pole całkowite figury będące sumą pól figur składowych.

   $A = \Sigma A_i$

2. Wyznaczamy środki ciężkości każdej z figur składowych.

3. Obliczamy momenty statyczne $S_x, S_y$ całej figury względem osi *globalnego u.w.* (**czarnego**) – każdy z nich jest sumą momentów statycznych figur składowych, które z kolei są równe odpowiednim polom przemnożonym przez właściwą współrzędną środka ciężkości danej figury w *globalnym u.w.* (**czarnym**).

   $$S_x = \Sigma S_{xi} \qquad S_{xi} = A_i \cdot y_{Oi}$$
   $$S_y = \Sigma S_{yi} \qquad S_{yi} = A_i \cdot x_{Oi}$$

4. Wyznaczamy położenie środka ciężkości całej figury w *globalnym* (**czarnym**) *u.w.*:

   $$x_O = \frac{S_y}{A} \qquad y_O = \frac{S_x}{A}$$

   W punkcie tym określony jest *centralny u.w.* (**zielony**), którego osie są równoległe do osi *globalnego u.w.* (**czarnego**).

5. Dla każdej figury składowej wyznaczamy jej momenty bezwładności $I_{xi}, I_{yi}, D_{xyi}$ w jej *lokalnym centralnym u.w.* (**czerwonym**). W przypadku figur będących wycinkami koła najpierw określamy momenty bezwładności w *pomocniczym* (**żółtym**) *u.w.* a następnie wykorzystując tw. Steinera przechodzimy do *lokalnego centralnego u.w.* (**czerwonego**) dla wycinka.

6. Obliczamy momenty bezwładności całej figury w *centralnym u.w.* (**zielonym**) – są one sumą momentów bezwładności figur składowych $I_{Xi}, I_{Yi}, D_{XYi}$ względem *centralnego u.w.* (**zielonego**), obliczonych zgodnie z tw. Steinera

$$I_X = \Sigma I_{Xi} \qquad I_{Xi} = I_{xi} + A\cdot(y_{Oi} - y_O)^2$$
$$I_Y = \Sigma I_{Yi} \qquad I_{Xi} = I_{yi} + A\cdot(x_{Oi} - x_O)^2$$
$$D_{XY} = \Sigma D_{XYi} \qquad D_{XYi} = D_{xyi} + A\cdot(y_{Oi} - y_O)(x_{Oi} - x_O)$$

Nie wolno zmieniać kolejności odejmowania współrzędnych środków ciężkości – w przypadku momentów dewiacji, zamiana kolejności w jednym tylko nawiasie prowadzi do błędów! Uwaga: niektóre współrzędne mogą być ujemne – znak należy uwzględnić w obliczeniach.

7. Konstruujemy tensor bezwładności i wyznaczamy jego wartości własne i orientację osi głównych - osi *głównego centralnego u.w.* (**niebieskiego**).

$$I_{max} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + D_{XY}^2}, \quad I_{min} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + D_{XY}^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{D_{XY}}{I_Y - I_{max}}$$

**Rozwiązanie**:

Pole powierzchni całej figury:

$$A = \left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right] + [4\cdot 1] + \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\right] \approx 9{,}1416$$

Momenty statyczne całej figury względem osi globalnego u.w.:

$$S_x = \left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(3 + \frac{1}{3}\cdot 2\right)\right] + \left[4\cdot 1\cdot\left(2 + \frac{1}{2}\cdot 1\right)\right] + \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2 - \frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\right] \approx 20{,}9499$$

$$S_y = \left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right)\right] + [4\cdot 1\cdot 2] + \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2 + \frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\right] \approx 19{,}6165$$

Środek ciężkości całej figury: $x_O = \dfrac{S_y}{A} = 2{,}1458 \qquad y_O = \dfrac{S_x}{A} = 2{,}2917$

Centralne momenty bezwładności:

$$I_X = \left[\frac{2\cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(3 + \frac{1}{3}\cdot 2 - 2{,}2917\right)^2\right] + \left[\frac{4\cdot 1^3}{12} + 4\cdot 1\cdot\left(2 + \frac{1}{2}\cdot 1 - 2{,}2917\right)^2\right] +$$
$$+ \left[\frac{\pi\cdot 2^4}{16} - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2 - \frac{4}{3}\frac{2}{\pi} - 2{,}2917\right)^2\right] \approx 9{,}6970$$

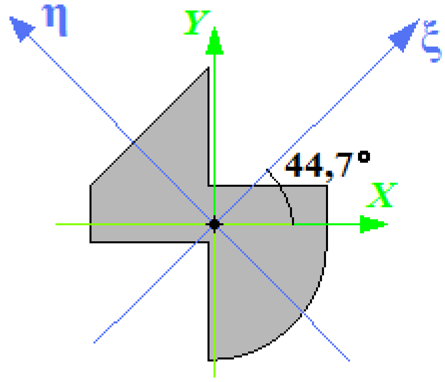
$$I_Y = \left[\frac{2\cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2 - 2{,}1458\right)^2\right] + \left[\frac{1\cdot 4^3}{12} + 4\cdot 1\cdot(2 - 2{,}1458)^2\right] +$$
$$+ \left[\frac{\pi\cdot 2^4}{16} - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2 + \frac{4}{3}\frac{2}{\pi} - 2{,}1458\right)^2\right] \approx 9{,}6138$$

$$D_{XY}=\left[+\frac{2^2\cdot 2^2}{72}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2-2{,}1458\right)\left(3+\frac{1}{3}\cdot 2-2{,}2917\right)\right]+$$
$$+\left[0+4\cdot 1\cdot(2-2{,}1458)\left(2+\frac{1}{2}\cdot 1-2{,}2917\right)\right]+$$
$$+\left[-\frac{2^4}{8}-\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\left(-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)+\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2+\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}-2{,}1458\right)\left(2-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}-2{,}2917\right)\right]\approx -4{,}3889$$

Główne momenty bezwładności:

$$I_\xi = I_{max}=\frac{I_X+I_Y}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_X-I_Y}{2}\right)^2+D_{XY}^2} = 14{,}045$$

$$I_\eta = I_{min}=\frac{I_X+I_Y}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_X-I_Y}{2}\right)^2+D_{XY}^2} = 5{,}2663$$




Orientacja osi maksymalnej bezwładności:

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{D_{XY}}{I_Y-I_{max}} = \operatorname{arctg}(0{,}9903)=44{,}728^\circ$$

Wartości składowych tensora momentu bezwładności względem osi nachylonych do osi głównych pod kątem 45° obliczamy ze wzorów:

$$I_{x'}=I_\xi\cos^2\alpha + I_\eta\sin^2\alpha-2D_{\xi\eta}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$I_{y'}=I_\xi\sin^2\alpha + I_\eta\cos^2\alpha+2D_{\xi\eta}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$D_{x'y'}=\frac{I_\xi-I_\eta}{2}\sin 2\alpha+D_{\xi\eta}\cos 2\alpha$$

gdzie:

$$\alpha = 45^\circ \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin 2\alpha=1 \quad \cos 2\alpha = 0$$

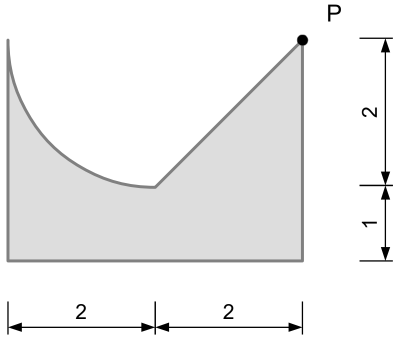
$$I_{x'}=14{,}045\cdot\frac{1}{2}+5{,}2663\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=9{,}6557$$
$$I_{y'}=14{,}045\cdot\frac{1}{2}+5{,}2663\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=9{,}6557$$
$$D_{x'y'}=\frac{14{,}045-5{,}2663}{2}\cdot 1+0\cdot 0 = 4{,}3894$$

Orientacja pod kątem 45° w stosunku do osi głównych jest taką orientacją, w której:

- momenty bezwładności względem obydwu osi są sobie równe i są równe średniej arytmetycznej momentów głównych.
- moment dewiacji przyjmuje wartość ekstremalną (maksymalną lub minimalną)

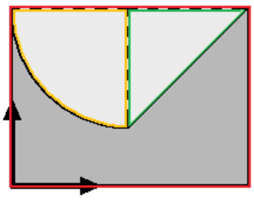
## ZADANIE 16

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności oraz orientację głównych centralnych osi bezwładności figury jak na rysunku. Następnie wyznacz moment bezwładności względem prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do poziomu pod kątem 50° (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara)




**ROZWIĄZANIE:**

Podział na figury składowe i przyjęcie globalnego u.w.:



Pole powierzchni:

$$A = \left[4\cdot 3\right]_{pr} - \left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right]_{tr} - \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\right]_{ck} = 10-\pi = 6{,}8584$$

Momenty statyczne i współrzędne środka ciężkości

$$S_x = \left[4\cdot 3\cdot\frac{3}{2}\right]_{pr} - \left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(1+\frac{2}{3}\cdot 2\right)\right]_{tr} - \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(3-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\right]_{ck} = 6{,}5752 \qquad y_O = \frac{S_x}{A} = 0{,}9587$$

$$S_y = \left[4\cdot 3\cdot 2\right]_{pr} - \left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(2+\frac{1}{3}\cdot 2\right)\right]_{tr} - \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\right]_{ck} = 15{,}0501 \qquad x_O = \frac{S_y}{A} = 2{,}1944$$

Centralne momenty bezwładności:

$$I_X = \left[\frac{4\cdot 3^3}{12} + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{2}-0{,}9587\right)^2\right]_{pr} - \left[\frac{2\cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(1+\frac{2}{3}\cdot 2-0{,}9587\right)^2\right]_{tr} -$$
$$-\left[\frac{\pi\cdot 2^4}{16} - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(3-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}-0{,}9587\right)^2\right]_{ck} = 2{,}9425$$

$$I_Y = \left[\frac{4^3\cdot 3}{12} + 4\cdot 3\cdot\left(2-2{,}1944\right)^2\right]_{pr} - \left[\frac{2^3\cdot 2}{36} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(2+\frac{1}{3}\cdot 2-2{,}1944\right)^2\right]_{tr} -$$
$$-\left[\frac{\pi\cdot 2^4}{16} - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}-2{,}1944\right)^2\right]_{ck} = 11{,}2659$$

$$D_{XY} = \left[0+4\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{2}-0{,}9587\right)\left(2-2{,}1944\right)\right]_{pr} - \left[\frac{2^2\cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(1+\frac{2}{3}\cdot 2-0{,}9587\right)\left(2+\frac{1}{3}\cdot 2-2{,}1944\right)\right]_{tr} -$$
$$-\left[\frac{2^4}{8} - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\left(-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right) + \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(3-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}-0{,}9587\right)\left(2-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}-2{,}1944\right)\right]_{ck} = 1{,}3884$$

Centralne momenty bezwładności można równoważnie wyznaczyć w inny sposób mianowicie:

- Wyznaczyć składowe tensora momentu bezwładności względem osi dowolnie przyjętego globalnego układu współrzędnych od każdej z figur składowych, korzystając z twierdzenia Steinera.
- Wyznaczyć składowe tensora momentu bezwładności w układzie centralnym, korzystając z twierdzenia Steinera.

Momenty bezwładności względem osi globalnego układu współrzędnych:

$$I_{X'} = \left[\frac{4\cdot 3^3}{12} + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - \left[\frac{2\cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(1 + \frac{2}{3}\cdot 2\right)^2\right] - \dots$$
$$\dots - \left[\frac{\pi\, 2^4}{16} - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(3 - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\right)^2\right] = 9{,}251$$

$$I_{Y'} = \left[\frac{4^3\cdot 3}{12} + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - \left[\frac{2^3\cdot 2}{36} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(2 + \frac{1}{3}\cdot 2\right)^2\right] - \dots$$
$$\dots - \left[\frac{\pi\, 2^4}{16} - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\right)^2\right] = 44{,}2920$$

$$D_{X'Y'} = \left[0 + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\right] - \left[\frac{2^2\cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(2 + \frac{1}{3}\cdot 2\right)\left(1 + \frac{2}{3}\cdot 2\right)\right] - \dots$$
$$\dots - \left[\frac{2^4}{8} - \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\cdot\left(2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\right)\left(3 - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\right)\right] = 15{,}8171$$

Centralne momenty bezwładności:

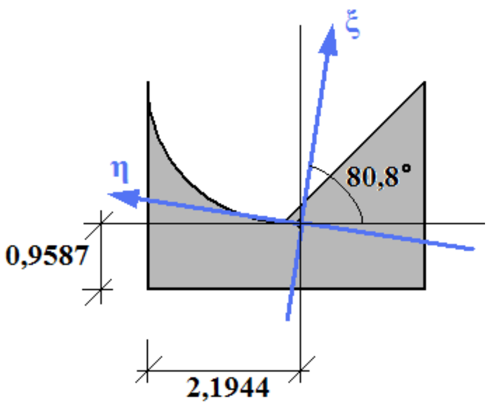
$$I_X = I_{X'} - A\, y_O^2 = 9{,}2507 - 6{,}8584\cdot(0{,}9587)^2 = 2{,}9471$$
$$I_Y = I_{Y'} - A\, x_O^2 = 44{,}2920 - 6{,}8584\cdot(2{,}1944)^2 = 11{,}2662$$
$$D_{XY} = D_{X'Y'} - A\, x_O\, y_O = 15{,}8171 - 6{,}8584\cdot(2{,}1944\cdot 0{,}9587) = 1{,}3886$$

Główne momenty bezwładności:

$$I_\xi = I_{max} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + D_{XY}^2} = 11{,}4914$$
$$I_\eta = I_{min} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + D_{XY}^2} = 2{,}7170$$

Orientacja osi maksymalnej bezwładności:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{D_{XY}}{I_Y - I_{max}} = \mathrm{arctg}(6{,}1570) = 80{,}775^\circ$$



Składowe tensora momentu bezwładności względem osi poziomej i pionowej przechodzącej przez punkt P znajdujemy z twierdzenia Steinera:

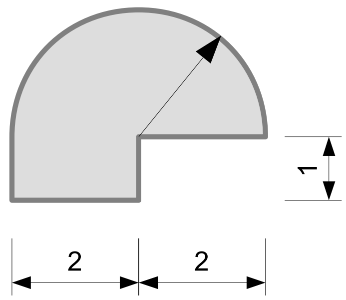
$$I_{x,P} = I_X + A\cdot(y_P - y_O)^2 = 2{,}9425 + 6{,}8584\cdot(3-0{,}9587)^2 = 31{,}5208$$
$$I_{y,P} = I_Y + A\cdot(x_P - x_O)^2 = 11{,}2659 + 6{,}8584\cdot(4-2{,}1944)^2 = 33{,}6256$$
$$D_{xy,P} = D_{XY} + A\cdot(x_P - x_O)(y_P - y_O) = 1{,}3884 + 6{,}8584\cdot(4-2{,}1944)\cdot(3-0{,}9587) = 26{,}6669$$

Moment bezwładności względem prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do poziomu pod kątem 50°:

$$I_L = I_{x,P}\cos^2(50^\circ) + I_{y,P}\sin^2(50^\circ) - D_{xy,P}\sin(100^\circ) = 6{,}4942$$

## ZADANIE 17

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności oraz orientację głównych centralnych osi bezwładności figury jak na rysunku. Następnie wyznacz moment bezwładności danej figury względem prostej przechodzącej przez środek ciężkości tej figury i nachylonej pod kątem 30° do osi poziomej.

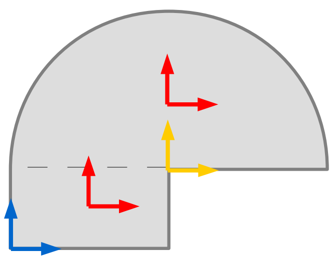



**ROZWIĄZANIE:**

Pole powierzchni:

$$A = [2\cdot 1] + \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{2}\right] \approx 8{,}2832$$

Momenty statyczne:



$$S_x = \left[2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)\right] + \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{2}\cdot\left(1+\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\right] \approx 12{,}6165$$
$$S_y = \left[2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)\right] + \left[\frac{\pi\cdot 2^2}{2}\cdot 2\right] \approx 14{,}5664$$

Położenie środka ciężkości: $x_O = \dfrac{S_y}{A} \approx 1{,}7585 \qquad y_O = \dfrac{S_x}{A} \approx 1{,}5231$

Momenty bezwładności:

$$I_X = \left[\frac{2\cdot 1^3}{12} + 1\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1 - 1{,}5231\right)^2\right] + \left[\frac{\pi\cdot 2^4}{8} - \frac{\pi\cdot 2^2}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi\cdot 2^2}{2}\cdot\left(1+\frac{4}{3}\frac{2}{\pi} - 1{,}5231\right)^2\right] \approx 4{,}6829$$

UWAGA: Oś Y pomocniczego u.w. (żółtego) pokrywa się z osią centralną dla połówki koła, dlatego nie musimy dwukrotnie korzystać z tw. Steinera przy wyznaczaniu $I_Y$ :

$$I_Y = \left[\frac{1\cdot 2^3}{12} + 1\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2 - 1{,}7585\right)^2\right] + \left[\frac{\pi\cdot 2^4}{8} + \frac{\pi\cdot 2^2}{2}\cdot(2-1{,}7585)^2\right] \approx 8{,}4669$$

UWAGA: Oś Y pomocniczego u.w. (żółtego) pokrywa się z osią centralną dla połówki koła, dlatego przy wyznaczaniu centralnego momentu dewiacji dla połówki koła jedna ze składowych wektora, łączącego stary i nowy układ współrzędnych (żółty i czerwony), która występuje w twierdzeniu Steinera jest równa 0. Stąd moment dewiacji względem układu centralnego (czerwonego) jest taki sam jak względem układu pomocniczego (żółtego) i nie musimy dwukrotnie korzystać z tw. Steinera przy wyznaczaniu $D_{XY}$ :

$$D_{XY} = \left[0 + 1\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1 - 1{,}5231\right)\left(\frac{1}{2}\cdot 2 - 1{,}7585\right)\right] + \left[0 + \frac{\pi\cdot 2^2}{2}\cdot\left(1+\frac{4}{3}\frac{2}{\pi} - 1{,}5231\right)(2-1{,}7585)\right] \approx 2{,}0463$$

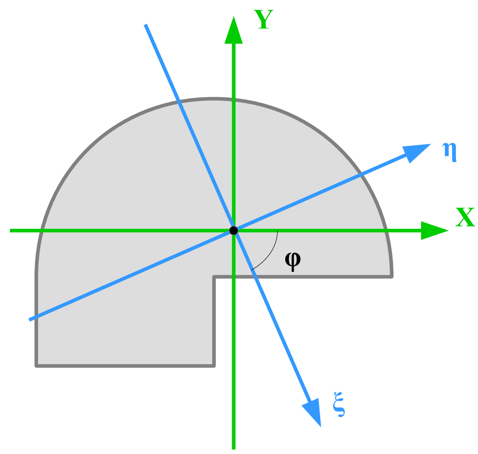
Główne momenty bezwładności:

$$I_\xi = I_{max} = \frac{I_X+I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_X-I_Y}{2}\right)^2 + D_{XY}^2} = 9{,}3619$$

$$I_\eta = I_{min} = \frac{I_X+I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_X-I_Y}{2}\right)^2 + D_{XY}^2} = 3{,}7880$$

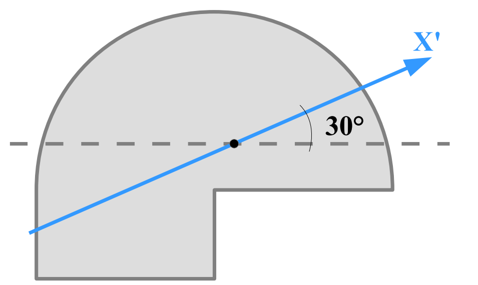
Orientacja osi maksymalnej bezwładności:

$$\phi = \mathrm{arctg}\frac{D_{XY}}{I_Y - I_{max}} = \mathrm{arctg}(-2{,}2866) = -66{,}3785^\circ$$




Moment bezwładności względem osi centralnej nachylonej do poziomu pod kątem 30° jest równy:

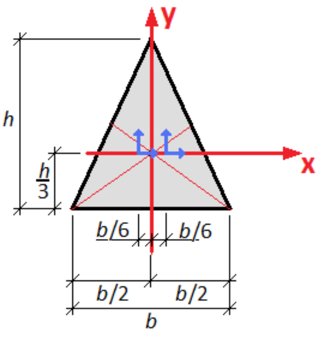
$$I_{X'} = I_X\cos^2\alpha + I_Y\sin^2\alpha - 2D_{XY}\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= 4{,}6829\cdot\frac{3}{4} + 8{,}4669\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot 2{,}0463\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 3{,}857$$



## ZADANIE 18

Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności dla trójkąta równoramiennego o podstawie *b* i wysokości *h*. Rozważyć szczególny przypadek trójkąta równoramiennego.




**ROZWIĄZANIE:**

Trójkąt równoramienny posiada oś symetrii – jest ona zatem jedną z głównych centralnych osi bezwładności. Druga z nich musi być do niej prostopadła i przechodzić musi przez środek ciężkości. Środek ciężkości leży na osi symetrii trójkąta i jest w 1/3 jego wysokości.

Główne centralne momenty bezwładności:

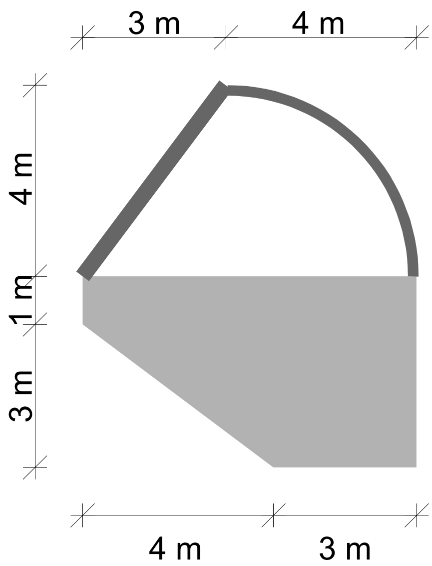
$$I_x=\left[\frac{(b/2)\cdot h^3}{36}\right]+\left[\frac{(b/2)\cdot h^3}{36}\right]=\frac{b\cdot h^3}{36}$$

$$I_y=\left[\frac{(b/2)^3\cdot h}{36}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{2}\right)^2\right]+\left[\frac{(b/2)^3\cdot h}{36}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{2}\right)^2\right]=\frac{b^3 h}{48}$$

Dla trójkąta równobocznego mamy $b=a,\ h=\frac{a\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad I_x=I_y=\frac{a^4\sqrt{3}}{96}$

## ZADANIE 19

Wyznacz główne centralne momenty bezwładności dla figury jak na rysunku obok. Przyjmij gęstość powierzchniową $\rho=3\,\mathrm{kg/m^2}$ oraz gęstość liniową $\mu=5\,\mathrm{kg/m^3}$ .




**ROZWIĄZANIE:**

Przyjmujemy początek globalnego układu współrzędnych w lewym dolnym rogu układu.

Figury i ich charakterystyki:

| L.P. | FIGURA | GĘSTOŚĆ | POLE / DŁUGOŚĆ | $x_O$ | $y_O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Prostokąt | 3 | 4·7=28 | 3,5 | 2 |
| 2 | Trójkąt (odejmowany) | 3 | 0,5·3·4=6 | 4 : 3 = 1,333 | 1 |
| 3 | Pręt prosty | 5 | 5 | 1,5 | 6 |
| 4 | Pręt kołowy | 5 | 0,25·2·π·4=6,283 | 3+2·4:π=5,546 | 4+2·4:π=6,546 |

Pręt prosty nachylony jest do poziomu pod kątem: $\psi = \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} \approx 0{,}9273 \approx 53{,}13^\circ$

Pręt prosty nachylony jest do pionu pod kątem: $90^\circ - \psi \approx 36{,}87^\circ$

| L.P. | $I_x$ | $I_y$ | $D_{xy}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{7\cdot 4^3}{12} = 37{,}333$ | $\frac{4\cdot 7^3}{12} = 114{,}333$ | 0 |
| 2 | $\frac{4\cdot 3^3}{36} = 3$ | $\frac{3\cdot 4^3}{36} = 5{,}333$ | $-\frac{4^2\cdot 3^2}{72} = -2$ |
| 3 | $\frac{5^3}{12}\sin^2(53{,}13^\circ) = 6{,}667$ | $\frac{5^3}{12}\sin^2(36{,}87^\circ) = 3{,}750$ | $\frac{+5^3}{12}\sin(53{,}13^\circ)\cos(53{,}13^\circ) = +5$ |
| 4 | $\frac{\pi 4^3}{4} = 50{,}265$ | $\frac{\pi 4^3}{4} = 50{,}265$ | $+\frac{4^3}{2} = +32$ |

Masa całkowita układu: $m = 3\cdot[28] - 3\cdot[6] + 5\cdot[5] + 5\cdot[6{,}283] = 122{,}415$

Momenty statyczne: 
$$S_x = 3\cdot[28\cdot 2] - 3\cdot[6\cdot 1] + 5\cdot[5\cdot 6] + 5\cdot[6{,}283\cdot 6{,}546] = 505{,}643$$
$$S_y = 3\cdot[28\cdot 3{,}5] - 3\cdot[6\cdot 1{,}333] + 5\cdot[5\cdot 1{,}5] + 5\cdot[6{,}283\cdot 5{,}546] = 481{,}734$$

Położenie środka ciężkości: $x_O = 3{,}935 \qquad y_O = 4{,}131$

Momenty bezwładności:
$$I_x = 3\cdot\left[37{,}333+28\cdot(2-4{,}131)^2\right] - 3\cdot\left[3+6\cdot(1-4{,}131)^2\right] + 5\cdot\left[6{,}667+5\cdot(6-4{,}131)^2\right] +$$
$$+ 5\cdot\left[50{,}265-6{,}283\cdot\left(\frac{2\cdot 4}{\pi}\right)^2+6{,}283\cdot(6{,}546-4{,}131)^2\right] =$$
$$= 493{,}457-185{,}457+120{,}664+230{,}832 = 659{,}496$$

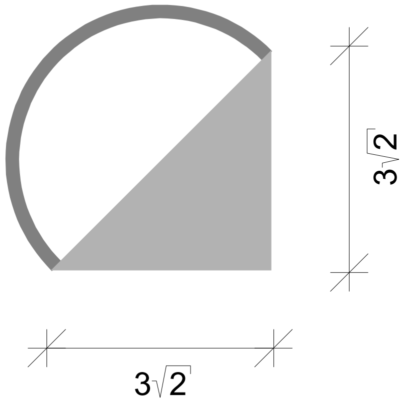
$$I_y = 3\cdot\left[114{,}333+28\cdot(3{,}5-3{,}935)^2\right] - 3\cdot\left[5{,}333+6\cdot(1{,}333-3{,}935)^2\right] +$$
$$+ 5\cdot\left[3{,}750+5\cdot(1{,}5-3{,}935)^2\right] + 5\cdot\left[50{,}265-6{,}283\cdot\left(\frac{2\cdot 4}{\pi}\right)^2+6{,}283\cdot(5{,}546-3{,}935)^2\right] =$$
$$= 358{,}893-137{,}866+166{,}981+129{,}145 = 517{,}153$$

$$D_{xy} = 3\cdot\left[0+28\cdot(2-4{,}131)(3{,}5-3{,}935)\right] - 3\cdot\left[-2+6\cdot(1-4{,}131)(1{,}333-3{,}935)\right] +$$
$$+ 5\cdot\left[+5+5\cdot(6-4{,}131)(1{,}5-3{,}935)\right] +$$
$$+ 5\cdot\left[+32-6{,}283\cdot\left(\frac{2\cdot 4}{\pi}\right)\left(\frac{2\cdot 4}{\pi}\right)+6{,}283\cdot(6{,}546-4{,}131)(5{,}546-3{,}935)\right] =$$
$$= 77{,}867-140{,}644-88{,}775+78{,}889 = -72{,}662$$

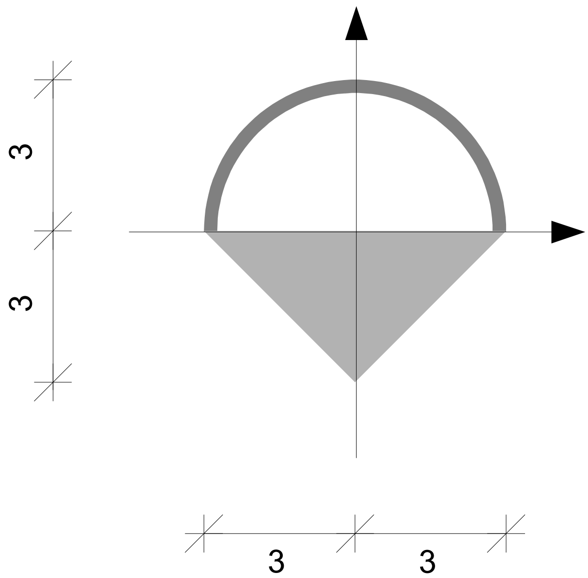
Momenty główne centralna i orientacja głównych centralnych osi bezwładności:
$$I_{max} = \frac{I_x+I_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+D_{xy}^2} = 588{,}325+101{,}711 = 690{,}036$$
$$I_{min} = \frac{I_x+I_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+D_{xy}^2} = 588{,}325-101{,}711 = 486{,}614$$
$$\phi = \mathrm{arctg}\,\frac{D_{xy}}{I_y-I_{max}} \approx 22{,}80^\circ$$

## ZADANIE 20

Wyznacz główne centralne momenty bezwładności figury jak na rysunku obok. Przyjmij gęstość powierzchniową $\rho = 1\ \mathrm{kg/m^2}$ i gęstość liniową $\mu = 3\ \mathrm{kg/m^2}$ .




Zadanie znacznie się uprości, jeśli zauważymy, że rozpatrywana figura ma oś symetrii – jest więc ona jedną z osi głównych centralnych. Obróćmy zatem całą figurę tak, aby oś ta byłą np. osią pionową. Następnie wprowadzimy pomocniczą oś poziomą, względem której znajdziemy moment statyczny i wyznaczymy środek ciężkości.




Pole całkowite: $$A = 3\left[\frac{2\cdot\pi\cdot 3}{2}\right] + 2\cdot 1\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right] = 37{,}27$$

Moment statyczny względem osi pomocniczej:

$$S_X = 3\cdot\left[\frac{2\cdot\pi\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 3}{\pi}\right] + 2\cdot 1\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\cdot(-1)\right] = 45$$

Położenie środka ciężkości względem osi pomocniczej: $$y = \frac{S_X}{A} = 1{,}20$$

Główne centralne momenty bezwładności:

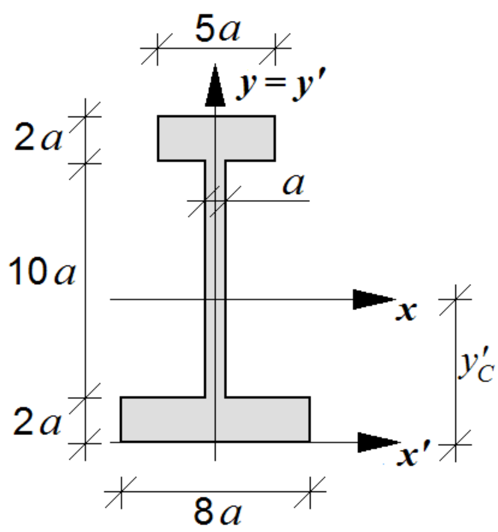
$$I_X = 3\cdot\left[\frac{\pi\cdot 3^3}{2} - 3\pi\cdot\left(\frac{2\cdot 3}{\pi}\right)^2 + 3\pi\cdot\left(\frac{2\cdot 3}{\pi} - 1{,}20\right)^2\right] + 2\cdot 1\cdot\left[\frac{3\cdot 3^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot(-1-1{,}20)^2\right] = 86{,}41$$

$$I_Y = 3\cdot\left[\frac{\pi\cdot 3^3}{2}\right] + 2\cdot 1\cdot\left[\frac{3\cdot 3^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot(1)^2\right] = 140{,}73$$

Ponieważ są to osie główne centralne, zatem moment dewiacji jest równy 0.

## ZADANIE 21

Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności dla przekroju dwuteowego jak na rysunku.




**ROZWIĄZANIE:**

Ponieważ przekrój jest symetryczny, środek ciężkości musi leżeć na osi symetrii, która jest jedną z centralnych głównych osi bezwładności – druga musi zaś być do niej prostopadła i przecinać ją w środku ciężkości, który leży na osi symetrii. Wystarczy zatem wyznaczyć składową *y'* środka ciężkości w pewnym układzie współrzędnych (*x', y'*)– np. o początku na dolnej krawędzi przekroju. Następnie obliczymy momenty bezwładności względem wyznaczonych osi centralnych – są te jednocześnie momenty główne. Z definicji, w głównym układzie współrzędnych momenty dewiacji są równe 0.

Pole powierzchni przekroju: $A=[8a\cdot 2a]+[10a\cdot a]+[2a\cdot 5a] = 36a^2$

Moment statyczny przekroju względem osi poziomej *x'* zawierającej jego dolną krawędź:

$$S_{x'}=[8a\cdot 2a\cdot a]+[10a\cdot a\cdot 7a]+[2a\cdot 5a\cdot 13a]=216a^3$$

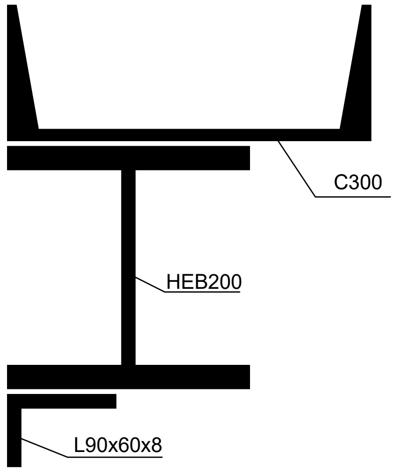
Odległość środka ciężkości przekroju od dolnej krawędzi: $y_C{}' = \dfrac{S_{x'}}{A}=6a$

Momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności:

$$I_x=\left[\frac{8a\cdot(2a)^3}{12}+8a\cdot 2a\cdot(a-6a)^2\right]+\left[\frac{a\cdot(10a)^3}{12}+10a\cdot a\cdot(7a-6a)^2\right]+\left[\frac{5a\cdot(2a)^3}{12}+5a\cdot 2a\cdot(13a-6a)^2\right] = 992a^4$$

$$I_y=\left[\frac{2a\cdot(8a)^3}{12}\right]+\left[\frac{10a\cdot a^3}{12}\right]+\left[\frac{2a\cdot(5a)^3}{12}\right] = 107a^4$$

## ZADANIE 22




Obliczyć główne centralne momenty bezwładności przekroju zbudowanego z kształtowników walcowanych jak na rysunku poniżej.

**ROZWIĄZANIE:**

***UWAGA**: Odczytując dane z tablic profilów walcowanych, koniecznie trzeba zwrócić uwagę na orientację osi bezwładności przyjętych w tablicach – rzecz dotyczy w sposób szczególny kątowników nierównoramiennych.*

Z tablic odczytujemy:

HEB200:

$b = 200\ \text{mm}$

$h = 200\ \text{mm}$

$A = 78{,}1\,\text{cm}^2$

$I_x = 5700\,\text{cm}^4$

$I_y = 2000\,\text{cm}^4$

C300:

$b = 100\,\text{mm}$

$h = 300\,\text{mm}$

$e = 27\ \text{mm}$

$A = 58{,}8\,\text{cm}^2$

$I_x = 8030\ \text{cm}^4$

$I_y = 493\ \text{cm}^4$

L90x60x8:

$b = 60\,\text{mm}$

$h = 90\,\text{mm}$

$e_x = 14{,}8\ \text{mm}$

$e_y = 29{,}6\ \text{mm}$

$A = 11{,}4\,\text{cm}^2$

$I_x = 92{,}30\ \text{cm}^4$

$I_y = 32{,}80\ \text{cm}^4$

$I_{max} = 106{,}0\ \text{cm}^4$

$I_{min} = 19{,}20\ \text{cm}^4$

Pole powierzchni: $A = [78{,}1]+[58{,}8]+[11{,}4] = 148{,}3$

Momenty statyczne:

$$S_x = [78{,}1\cdot 10]+[58{,}8\cdot(20+2{,}7)]+[11{,}4\cdot(-1{,}48)] = 2098{,}89$$
$$S_y = [78{,}1\cdot 10]+[58{,}8\cdot 15]+[11{,}4\cdot 2{,}96] = 1696{,}74$$

Położenie środka ciężkości:

$$x = S_y / A = 11{,}44$$
$$y = S_z / A = 14{,}15$$

Momenty bezwładności:

$$I_x = \left[5700+78{,}1\cdot(10-14{,}15)^2\right]+\left[493+58{,}8\cdot(22{,}7-14{,}15)^2\right]+\left[32{,}80+11{,}4\cdot(-1{,}48-14{,}15)^2\right] = \\ = 14654{,}29$$

$$I_y = \left[2000+78{,}1\cdot(10-11{,}44)^2\right]+\left[8030+58{,}8\cdot(15-11{,}44)^2\right]+\left[92{,}30+11{,}4\cdot(2{,}96-11{,}44)^2\right] = \\ = 11849{,}23$$

**UWAGA**: Często dla kątowników nie podaje się w tablicach jego momentu dewiacji w jego centralnym układzie współrzędnych o osiach równoległych do ramion kątownika. Wtedy wartość tę można wyznaczyć na podstawie wartości momentów bezwładności $I_x, I_y$ względem tych osi oraz głównych centralnych momentów bezwładności $I_{max}, I_{min}$:

$$D_{xy} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_x+I_y}{2}-I_{min}\right)^2-\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_x+I_y}{2}-I_{max}\right)^2-\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{Ix\,I_y-I_{max}I_{min}}$$

Znak „+” lub „–” określamy w sposób analogiczny, jak w przypadku trójkąta – jeśli ramiona kątownika znajdują się w I i III ćwiartce lokalnego układu współrzędnych o osiach równoległych do tych ramion (tj. naroże kątownika jest w II lub IV ćwiartce), przyjmujemy wtedy znak „+”. W przeciwnym wypadku bierzemy wartość ujemną.

Dla kątownika:

$$D_{xy} = +\sqrt{92{,}30\cdot 32{,}80-106{,}0\cdot 19{,}20} = +31{,}500$$

Dla całego przekroju:

$$D_{xy} = \left[0+78{,}1\cdot(10-14{,}15)\cdot(10-11{,}44)\right]+\left[0+58{,}8\cdot(22{,}7-14{,}15)\cdot(15-11{,}44)\right]+$$
$$+\left[31{,}5+11{,}4\cdot(-1{,}48-14{,}15)\cdot(2{,}96-11{,}44)\right] = 3798{,}96$$

Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_{max} = \frac{I_x+I_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+D_{xy}^2} = 15648{,}20$$
$$I_{min} = \frac{I_x+I_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+D_{xy}^2} = 8050{,}27$$

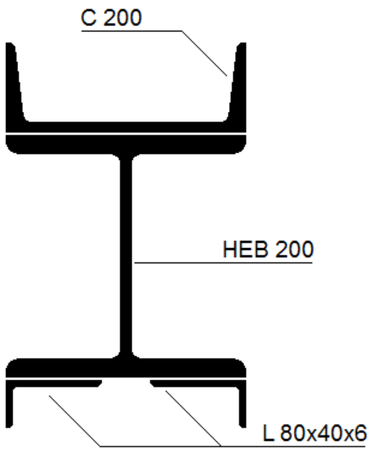
Orientacja osi głównych:

$$\phi = \mathrm{arctg}\,\frac{D_{xy}}{I_y-I_{max}} \approx -45^\circ$$

## ZADANIE 23

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności przekroju symetrycznego zbudowanego z kształtowników walcowanych jak na rysunku obok.




**ROZWIĄZANIE:**

Ponieważ przekrój jest symetryczny, środek ciężkości musi leżeć na osi symetrii, która jest jedną z centralnych głównych osi bezwładności - druga musi zaś być do niej prostopadła.

Charakterystyki geometryczne profilów składowych

| | HEB 200 | C 200 | L 80x40x6 |
|---|---|---|---|
| Pole powierzchni | $A=78{,}1\ \mathrm{cm}^2$ | $A=32{,}2\,\mathrm{cm}^2$ | $A=6{,}89\,\mathrm{cm}^2$ |
| Momenty bezwładności | $I_x=5700\,\mathrm{cm}^4$ | $I_x=148\,\mathrm{cm}^4$ | $I_x=7{,}59\,\mathrm{cm}^4$ |
| | $I_y=2000\,\mathrm{cm}^4$ | $I_y=1910\,\mathrm{cm}^4$ | $I_y=44{,}9\,\mathrm{cm}^4$ |

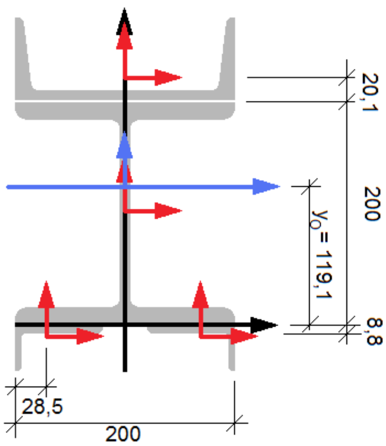
Położenie środków ciężkości w przyjętym układzie współrzędnych:

HEB 200 $\quad x_O=0\,\mathrm{mm} \qquad y_O=\frac{1}{2}h_{HEB}=100\,\mathrm{mm}$

C 200 $\quad x_O=0\,\mathrm{mm} \qquad y_O=h_{HEB}+e_C=220{,}1\,\mathrm{mm}$

L 80x40x6 $\quad x_O=\pm\left(\frac{b_{HEB}}{2}-e_{Lx}\right)=\pm(200-28{,}5)=\pm171{,}5\,\mathrm{mm}$

$$y_O=-e_{Ly}=-8{,}8\,\mathrm{mm}$$




Pole powierzchni przekroju:

$$A=78{,}1+32{,}2+2\cdot 6{,}89=124{,}08\quad[\mathrm{cm}^2]$$

Moment statyczny:

$$S_x=[78{,}1\cdot 10]+[32{,}2\cdot 22{,}01]+2\cdot[6{,}89\cdot(-0{,}88)]=1477{,}60\quad[\mathrm{cm}^3]$$

Położenie środka ciężkości: $x_O=0 \qquad y_O=\frac{S_x}{A}=11{,}91\quad[\mathrm{cm}]$

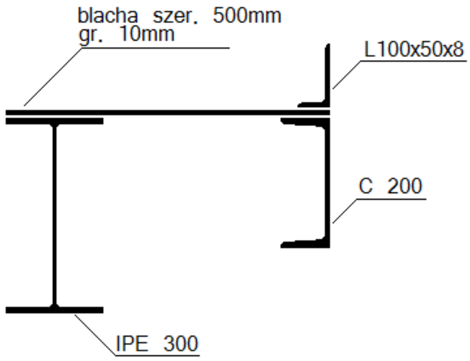
Momenty bezwładności:

$$I_x=\left[5700+78{,}1\cdot(10-11{,}91)^2\right]+\left[148+32{,}2\cdot(22{,}01-11{,}91)^2\right]+2\cdot\left[7{,}59+6{,}89\cdot(-0{,}88-11{,}91)^2\right]=$$
$$=5984{,}92+3432{,}72+2269{,}37=11687{,}01\quad[\mathrm{cm}^4]$$

$$I_y=[2000]+[1910]+2\cdot\left[44{,}9+6{,}89\cdot(10-2{,}85)^2\right]=4704{,}27\quad[\mathrm{cm}^4]$$

## ZADANIE 24

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności oraz orientację głównych centralnych osi bezwładności przekroju niesymetrycznego zbudowanego z kształtowników walcowanych jak na rysunku.




**ROZWIĄZANIE:**

Charakterystyki geometryczne:

<u>Dwuteownik ekonomiczny IPE 300</u>

Wysokość: $h_I = 300\ \text{mm}$

Szerokość: $b_I = 150\ \text{mm}$

<u>Ceownik C 200</u>

Wysokość: $h_C = 200\ \text{mm}$

Szerokość: $b_C = 75\ \text{mm}$

Odległość środka ciężkości od zewnętrznej powierzchni środnika: $e_C = 2{,}01\ \text{cm}$

<u>Blacha</u>

Szerokość: $b_b = 500\ \text{mm}$

Grubość: $t_b = 10\ \text{mm}$

<u>Kątownik nierównoramienny L100x50x8</u>

Długość dłuższego ramienia: $a_L = 100\ \text{mm}$

Długość krótszego ramienia: $b_L = 50\ \text{mm}$

Odległość środka ciężkości od zewnętrznej powierzchni dłuższego ramienia: $e_a = 1{,}13\ \text{cm}$

Odległość środka ciężkości od zewnętrznej powierzchni krótszego ramienia: $e_b = 3{,}59\ \text{cm}$

$$D_{xy} = \left[0+78{,}1(10-15{,}45)(10-12{,}15)\right] + \left[0+58{,}8(22{,}7-15{,}45)(15-12{,}15)\right] = 2130{,}09$$

Charakterystyki geometryczne:

| Profil | $A$ [cm$^2$] | $I_x$ [cm$^4$] | $I_y$ [cm$^4$] | $D_{xy}$ [cm$^4$] |
|---|---|---|---|---|
| IPE 300 | 53,8 | 8360 | 604 | 0 |
| C 200 | 32,2 | 1910 | 148 | 0 |
| blacha | 50 | 4,167 | 10417 | 0 |
| L 100x50x8 | 11,5 | 116 | 19,5 | 26,5 |

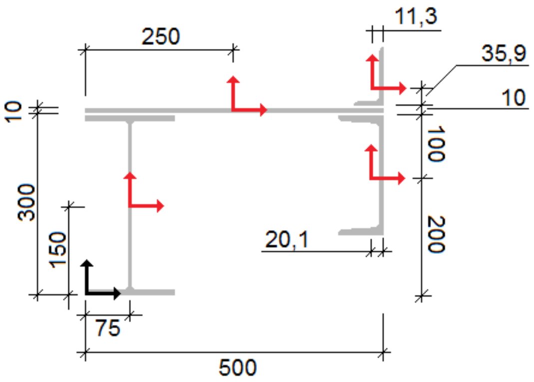
 

Całkowite pole powierzchni przekroju:

$$A = 53{,}8 + 32{,}2 + 50 + 11{,}5 = 147{,}5$$

Momenty statyczne względem przyjętego globalnego układu współrzędnych:

$$S_x = [53{,}8\cdot 15]+[32{,}2\cdot 20]+[50\cdot(30+0{,}5)]+[11{,}5\cdot(30+1+3{,}59)] =$$
$$= 3373{,}785\,[\mathrm{cm}^3]$$
$$S_y = [53{,}8\cdot 7{,}5]+[32{,}2\cdot(50-2{,}01)]+[50\cdot 25]+[11{,}5\cdot(50-1{,}13)] =$$
$$= 3760{,}783\,[\mathrm{cm}^3]$$




Współrzędne środka ciężkości przekroju:

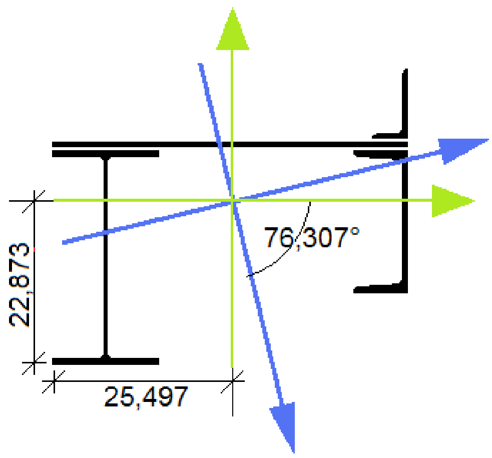
$$x_O = \frac{S_y}{A} = 25{,}497\,\mathrm{cm} \qquad y_O = \frac{S_x}{A} = 22{,}873\,\mathrm{cm}$$

Momenty bezwładności

$$I_x = [8360+53{,}8\cdot(15-22{,}873)^2] + [1910+32{,}2\cdot(20-22{,}873)^2] + [4{,}167+50\cdot(30+0{,}5-22{,}873)^2] +$$
$$+ [116+11{,}5\cdot(30+1+3{,}59-22{,}873)^2] = 11694{,}746+2175{,}783+2912{,}723+1694{,}813 =$$
$$= 18478{,}065\,[\mathrm{cm}^4]$$
$$I_y = [604+53{,}8\cdot(7{,}5-25{,}497)^2] + [148+32{,}2\cdot(50-2{,}01-25{,}497)^2] + [10417+50\cdot(25-25{,}497)^2] +$$
$$+ [19{,}5+11{,}5\cdot(50-1{,}13-25{,}497)^2] = 18029{,}390+16439{,}109+10429{,}350+6301{,}917 =$$
$$= 51199{,}766\,[\mathrm{cm}^4]$$
$$D_{xy} = [0+53{,}8\cdot(15-22{,}873)\cdot(7{,}5-25{,}497)] + [0+32{,}2\cdot(20-22{,}873)\cdot(50-2{,}01-25{,}497)] +$$
$$+[0+50\cdot(30+0{,}5-22{,}873)\cdot(25-25{,}497)] + [26{,}5+11{,}5\cdot(30+1+3{,}59-22{,}873)\cdot(50-1{,}13-25{,}497)]$$
$$= 7622{,}942-2080{,}841-189{,}531+3122{,}567 = 8475{,}137\,[\mathrm{cm}^4]$$

Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_{max} = \frac{Ix+I_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_x-I-y}{2}\right)^2+D_{xy}^2} = 53264{,}587\ \mathrm{cm}^4$$
$$I_{min} = \frac{Ix+I_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_x-I-y}{2}\right)^2+D_{xy}^2} = 16413{,}244\ \mathrm{cm}^4$$

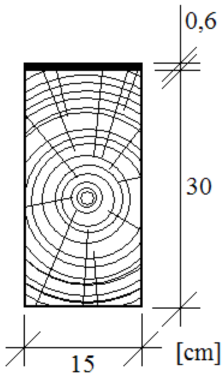



Orientacja osi maksymalnej bezwładności:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{D_{xy}}{I_y-I_{max}} = \mathrm{arctg}(-4{,}104) = -76{,}307^\circ$$

## ZADANIE 25

Wyznaczyć ważone charakterystyki geometryczne przekroju drewnianego wzmocnionego blachą stalową, jak na rysunku. Moduł Younga drewna $E_d = 10\ \mathrm{GPa}$, moduł Younga stali $E_s = 205\ \mathrm{GPa}$.




**ROZWIĄZANIE:**

Porównawczy moduł Younga: $E_0 = E_d = 10\ \mathrm{GPa}$

Współczynnik wagowy dla stali: $\alpha = \dfrac{E_s}{E_0} = 20{,}5$

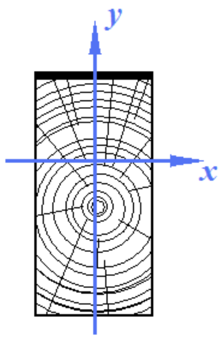
Przekrój jest symetryczny – jedna z osi symetrii jest osią główną centralną.

Ważone pole powierzchni:

$$A = A_d + \alpha A_s = [15\cdot 30] + 20{,}5\cdot[15\cdot 0{,}6] = 634{,}5\ \ [\mathrm{cm}^2]$$

Ważony moment statyczny względem dolnej krawędzi przekroju:

$$S_{x'} = S_{x'd} + \alpha S_{x's} =$$
$$= \left[15\cdot 30\cdot\frac{30}{2}\right] + 20{,}5\left[15\cdot 0{,}6\cdot\left(30+\frac{0{,}6}{2}\right)\right] = 12340{,}35\quad [\mathrm{cm}^3]$$




Położenie ważonego środka ciężkości:

$$y'_C = \frac{S_{x'}}{A} = 19{,}45\quad [\mathrm{cm}]$$

Ważone momenty bezwładności:

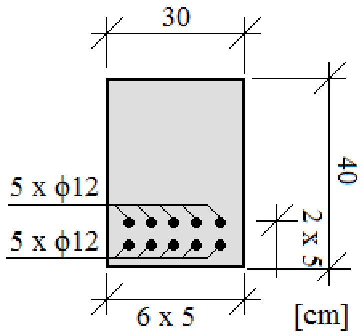
$$I_x = I_{xd} + \alpha I_{xs} =$$
$$= \left[\frac{15\cdot 30^3}{12} + 15\cdot 30\cdot(15-19{,}45)^2\right] + 20{,}5\left[\frac{15\cdot 0{,}6^3}{12} + 15\cdot 0{,}6\cdot(30{,}3-19{,}45)^2\right] = 64386{,}47\quad [\mathrm{cm}^4]$$

$$I_y = I_{yd} + \alpha I_{ys} = \left[\frac{15^3\cdot 30}{12}\right] + 20{,}5\left[\frac{15^3\cdot 0{,}6}{12}\right] = 11896{,}88\quad [\mathrm{cm}^4]$$

## ZADANIE 26

Wyznaczyć ważone charakterystyki geometryczne przekroju żelbetowego jak na rysunku. Moduł Younga betonu $E_c = 32\ \mathrm{GPa}$, moduł Younga stali $E_s = 210\ \mathrm{GPa}$. Średnica prętów zbrojeniowych $\phi = 12\,\mathrm{mm}$. Rozstaw prętów zbrojeniowych $a = 5\,\mathrm{cm}$. Otulina: $c = 5\,\mathrm{cm} - 0{,}5\,\phi = 4{,}4\,\mathrm{cm}$. Porównać uzyskane wyniki z charakterystykami przekroju złożonego tylko z betonu.




**ROZWIĄZANIE:**

**Charakterystyki przekroju betonowego:**

$$A = 30\cdot 40 = 1200 \quad [\mathrm{cm}^2]$$

$$I_x = \frac{30\cdot 40^3}{12} = 160000 \quad [\mathrm{cm}^4] \qquad I_y = \frac{30^3\cdot 40}{12} = 90000 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

**Charakterystyki ważone przekroju zespolonego (żelbetowego):**

Porównawczy moduł Younga: $E_0 = E_c = 32\ \mathrm{GPa}$

Współczynnik wagowy dla stali: $\alpha = \dfrac{E_s}{E_0} = 6{,}563$

Przekrój jest symetryczny – jedna z osi symetrii jest osią główną centralną.

Ważone pole powierzchni:

$$A = A_c + \alpha A_s = [30\cdot 40] + 6{,}563\cdot\left[10\cdot\frac{\pi\cdot 1{,}2^2}{4}\right] = 1274{,}226\ [\mathrm{cm}^2]$$

Ważony moment statyczny względem dolnej krawędzi przekroju:

$$S_{x'} = S_{x'c} + \alpha S_{x's} = \left[30\cdot 40\cdot\frac{40}{2}\right] + 6{,}563\left[5\cdot\frac{\pi\cdot 1{,}2^2}{4}\cdot 5 + 5\cdot\frac{\pi\cdot 1{,}2^2}{4}\cdot 10\right] = 24556{,}693 \quad [\mathrm{cm}^3]$$

Położenie ważonego środka ciężkości: $y'_C = \dfrac{S_{x'}}{A} = 19{,}272 \quad [\mathrm{cm}]$

Ważone momenty bezwładności:

$$I_x = I_{xc} + \alpha I_{xs} = \left[\frac{30\cdot 40^3}{12} + 30\cdot 40\cdot(20-19{,}272)^2\right] +$$
$$+\ 6{,}563\left[10\cdot\frac{\pi\cdot 1.2^4}{64} + 5\cdot\frac{\pi\cdot 1{,}2^2}{4}\cdot(5-19{,}272)^2 + 5\cdot\frac{\pi\cdot 1{,}2^2}{4}\cdot(10-19{,}272)^2\right] = 171392{,}653 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

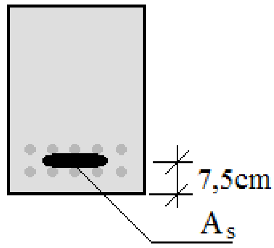
$$I_y = I_{yc} + \alpha I_{ys} = \left[\frac{30^3\cdot 40}{12}\right] + 6{,}563\left[10\cdot\frac{\pi\cdot 1{,}2^4}{64} + 4\cdot\frac{\pi\cdot 1{,}2^2}{4}\cdot 5^2 + 4\cdot\frac{\pi\cdot 1{,}2^2}{4}\cdot 10^2\right] = 93717{,}969 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

W praktycznych obliczeniach często zastępuje się wszystkie pręty zbrojeniowe pewnym zastępczym obszarem o polu równym sumarycznemu polu wszystkich prętów i środku ciężkości w środku ciężkości układu prętów – jednocześnie nie określa się jakiego kształtu jest ten obszar a w obliczeniach momentów bezwładności pomija się w twierdzeniu Steinera pierwszy człon dla stali (związany z momentem bezwładności obszaru względem swoich własnych osi centralnych) jako pomijalnie mały.

Można więc zastąpić układ prętów pewnym obszarem o środku ciężkości leżącym na osi symetrii przekroju, w odległości 7,5 cm od dolnej krawędzi, o polu:

$$A_s = 10 \cdot \frac{\pi \cdot 1{,}2^2}{4} = 11{,}310 \quad [\mathrm{cm}^2]$$




Ważone pole powierzchni:

$$A = A_c + \alpha A_s = [30 \cdot 40] + 6{,}563 \cdot \left[10 \cdot \frac{\pi \cdot 1{,}2^2}{4}\right] = 1274{,}226 \ [\mathrm{cm}^2]$$

Ważony moment statyczny:

$$S_{x'} = S_{x'c} + \alpha S_{x's} = \left[30 \cdot 40 \cdot \frac{40}{2}\right] + 6{,}563 [11{,}310 \cdot 7{,}5] = 24556{,}706 \quad [\mathrm{cm}^3]$$

Położenie ważonego środka ciężkości:

$$y'_C = \frac{S_{x'}}{A} = 19{,}272 \quad [\mathrm{cm}]$$

Ważone momenty bezwładności:

$$I_x = I_{xc} + \alpha I_{xs} =$$

$$\left[\frac{30 \cdot 40^3}{12} + 30 \cdot 40 \cdot (20 - 19{,}272)^2\right] + 6{,}563 \cdot \left[0 + 11{,}310 (7{,}5 - 19{,}272)^2\right] = 170922{,}431 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

$$I_y = I_{yc} + \alpha I_{ys} = \left[\frac{30^3 \cdot 40}{12}\right] + 6{,}563 \cdot [0] = 90000 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

Tak uzyskane wyniki w nie bardzo dużym stopniu odbiegają od wyników ścisłych, szczególnie tych dotyczących płaszczyzny zginania, dla której dedykowany jest taki przekrój $(I_x)$.