Charakterystyki geometryczne przekrojów poprzecznych prętów

Zgodnie z założeniami mechaniki układów prętowych rzeczywiste trójwymiarowe ciało odkształcalne modelować będziemy układem jednowymiarowym, w którym informacje dotyczące wymiarów prostopadłych do tego wyróżnionego (osi pręta) zawarte będą w układzie charakterystycznych dla danego przekroju parametrów, zależnych od kształtu tego przekroju. Wielkościami tymi będą: **pole powierzchni, położenie środka ciężkości, momenty statyczne i momenty bezwładności**. Ściśle rzecz biorąc nazwy te dotyczą miar bezwładności w ruchu obrotowym bryły sztywnej, ale przyjęło się powszechnie używać tych określeń również odnośnie wielkości czysto geometrycznych (bez odniesienia do masy i gęstości), w szczególności do geometrycznej charakterystyki przekroju poprzecznego prętów zginanych.

MOMENT STATYCZNY I ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY

$A=\iint_A dx\,dy$ - **pole powierzchni** [m²]

$S_x=\iint_A y\,dx\,dy$ - **moment statyczny** względem płaszczyzny XZ [m³]

$S_y=\iint_A x\,dx\,dy$ - **moment statyczny** względem płaszczyzny YZ [m³]

Ponieważ rozpatrujemy figury płaskie leżące w płaszczyźnie XY, więc moment statyczny względem płaszczyzny XZ lub YZ nazywać będziemy w uproszczony sposób „momentem statycznym względem osi” odpowiednio *x* i *y*.

Położenie **środka ciężkości** *O*: $\boxed{x_O=\frac{S_y}{A} \qquad y_O=\frac{S_x}{A}}$, stąd: $\boxed{S_x=A\,y_O \qquad S_y=A\,x_O}$

- **Jeśli figura ma jedną oś symetrii to środek ciężkości leży na tej osi**
- **Jeśli figura ma więcej niż jedną oś symetrii to środek ciężkości wyznaczony jest przez punkt przecięcia się tych osi**
- **Moment statyczny względem osi przechodzących przez środek ciężkości jest równy 0**

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

$I_x=\iint_A y^2\,dx\,dy$ - **moment bezwładności** względem osi X [m⁴]

$I_y=\iint_A x^2\,dx\,dy$ - **moment bezwładności** względem osi Y [m⁴]

$D_{xy}=\iint_A xy\,dx\,dy$ - **moment dewiacji** (**zboczenia**) względem płaszczyzn XZ i YZ [m⁴]

$I_0=\iint_A r^2\,dA=\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy=I_x+I_y$ - **biegunowy moment bezwładności** [m⁴]

$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$ - **promienie bezwładności** względem osi *x* i *y* [m]

- **Moment bezwładności jest zawsze dodatni.**
- **Moment dewiacji może być ujemny albo dodatni.**

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Powyższe wartości są zdefiniowane z wykorzystaniem współrzędnych punktów przekroju w pewnym przyjętym układzie współrzędnych. Zmiana układu współrzędnych pociąga za sobą zmianę wartości charakterystyk geometrycznych. Dowolna zmiana układu w przypadku płaskim może być interpretowana jako złożenie dwóch elementarnych przekształceń – **przesunięcia równoległego (translacji)** i **obrotu**.

Charakterystyki geometryczne w układzie równoległych, przesuniętych osi.

Wyznaczaniu wartości momentów bezwładności względem osi **równoległych** do osi układu wyjściowego, jednak **przesuniętych** względem niego służą **twierdzenia Steinera,** nazywane też **twierdzeniami Steinera-Hugensa**. Przyjmijmy, że wyznaczyliśmy momenty bezwładności względem osi *X*, *Y* zawierających środek ciężkości przekroju. Interesują nas teraz momenty bezwładności względem osi *x*, *y* równoległych ale, przesuniętych o pewną odległość *d*. Dla momentu I_X :

$$I_x = \iint_A (y+d)^2 \mathrm{d}A = \underbrace{\iint_A y^2 \mathrm{d}A}_{I_X} + d \underbrace{\iint_A y \,\mathrm{d}A}_{S_X=0} + d^2 \underbrace{\iint_A \mathrm{d}A}_{A} = I_X + A d^2$$

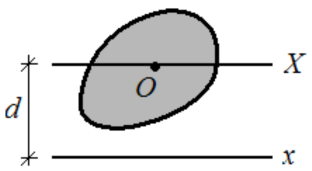
Zerowanie się drugiej całki wynika z faktu, że oś *X* przechodzi przez środek ciężkości, a zatem moment statyczny względem tej osi musi być zerowy. Dla momentów dewiacji mamy:

$$D_{xy} = \iint_A (x+d_x)(y+d_y)\mathrm{d}A = \underbrace{\iint_A xy \,\mathrm{d}A}_{D_{XY}} + d_x \underbrace{\iint_A y\,\mathrm{d}A}_{S_X=0} + d_y \underbrace{\iint_A x\,\mathrm{d}A}_{S_Y=0} + d_x d_y \underbrace{\iint_A \mathrm{d}A}_{A} = D_{XY} + A d_x d_y$$

Ostatecznie możemy napisać:

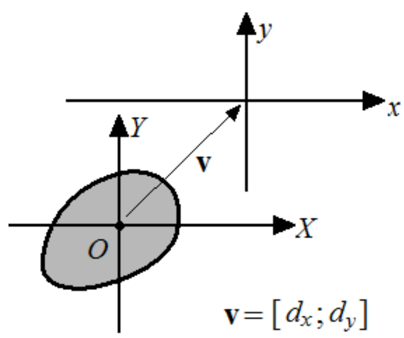
TWIERDZENIE STEINERA

Moment bezwładności względem dowolnej prostej jest równy momentowi bezwładności względem prostej do niej równoległej przechodzącej przez środek ciężkości figury powiększonemu o iloczyn jej pola i kwadratu odległości między tymi prostymi:



$$I_x = I_X + A d^2$$

Moment dewiacji względem dwóch płaszczyzn jest równy momentowi dewiacji względem równoległych płaszczyzn przechodzących przez środek ciężkości figury powiększonemu o iloczyn jej pola oraz miar odległości między odpowiednimi płaszczyznami:



$$D_{xy} = D_{XY} + A d_x d_y$$

UWAGA: d_x, d_y mogą być ujemne! O ile w przypadku momentów bezwładności nie ma to znaczenia, bo i tak podnosimy d do kwadratu, o tyle w twierdzeniach **dla momentów dewiacji uwzględnienie znaku d_x, d_y jest konieczne**. Liczby d_x, d_y są składowymi wektora przesunięcia osi układu współrzędnych, przy czym nie ma znaczenia czy jest to wektor od starego układu do nowego czy przeciwnie.

Obowiązują również **twierdzenia odwrotne**, pozwalające wyznaczyć centralne momenty bezwładności na podstawie momentów bezwładności względem osi równoległych, ale nie przechodzących przez środek ciężkości:

$$I_X = I_x - A d^2 \qquad D_{XY} = D_{xy} - A\, d_x d_y$$

WNIOSEK: Ponieważ wszystkie wielkości I_X, I_x, A, d^2 są dodatnie, stąd płynie wniosek, że spośród **wszystkich równoległych prostych** prosta przechodząca przez **środek ciężkości** jest tą, dla której **moment bezwładności jest minimalny**.

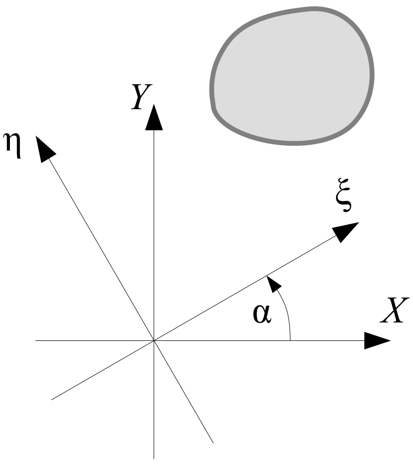
UWAGA: **Twierdzenie Steinera pozwala na przekształcanie wartości momentów bezwładności tylko w przypadku, gdy jeden z nich dotyczy osi zawierającej środek ciężkości figury**. Jeśli chcemy chcemy wyznaczać wartości momentów bezwładności w układach, w których żadne osie nie przechodzą przez środek ciężkości figury, wtedy wyznaczamy je w dwóch krokach dwukrotnie stosując twierdzenie Steinera: najpierw sprowadzamy te wielkości do środka ciężkości a następnie stosujemy ponownie twierdzenia Steinera, aby sprowadzić poszukiwane wielkości do docelowego układu współrzędnych.

Charakterystyki geometryczne w układzie obróconym

Znając charakterystyki geometryczne figury w danym układzie współrzędnych, momenty bezwładności i momenty dewiacji względem układu **obróconego** o kąt α (jednak o **początku w tym samym punkcie**) możemy wyznaczyć następująco:

Nowe współrzędne (ξ, η) przy obrocie starych osi X, Y o kat α wyrażają się wzorami:

$$\begin{cases} \xi = X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\ \eta = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$



Nowy moment bezwładności:

$$\begin{aligned} I_\xi &= \iint_A \eta^2 \,\mathrm{d}A = \iint_A (-X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 \,\mathrm{d}A = \\ &= \sin^2\alpha \underbrace{\iint_A X^2 \,\mathrm{d}A}_{I_Y} + \cos^2\alpha \underbrace{\iint_A Y^2 \,\mathrm{d}A}_{I_X} - 2\sin\alpha\cos\alpha \underbrace{\iint_A XY \,\mathrm{d}A}_{D_{XY}} = \\ &= I_X\cos^2\alpha + I_Y\sin^2\alpha - 2D_{XY}\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

Analogicznie wyznaczamy pozostałe momenty:

$$\boxed{\begin{aligned} I_\xi &= I_X\cos^2\alpha + I_Y\sin^2\alpha - 2D_{XY}\sin\alpha\cos\alpha \\ I_\eta &= I_X\sin^2\alpha + I_Y\cos^2\alpha + 2D_{XY}\sin\alpha\cos\alpha \\ D_{\xi\eta} &= \frac{I_X - I_Y}{2}\sin 2\alpha + D_{XY}\cos 2\alpha \end{aligned}}$$

TENSOR BEZWAŁDNOŚCI – GŁÓWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGURY

Wprowadza się wielkość nazywaną **tensorem momentu bezwładności**: $\mathbf{I}=\begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} \\ -D_{xy} & I_y \end{bmatrix}$

Tensor ten scharakteryzowany może być przez układ liczb, których wartość nie zmienia się wraz ze zmianą orientacji osi układu współrzędnych (tj. przy obrocie układu współrzędnych) – są to tzw. **niezmienniki tensora**. Wśród nich wyróżniamy:

- **ślad tensora** $a=\mathrm{tr}(\mathbf{I})=I_x+I_y$
- **wyznacznik tensora** $b=\det(\mathbf{I})=I_x I_y-D_{xy}^2$
- **wartości własne tensora – główne momenty bezwładności**

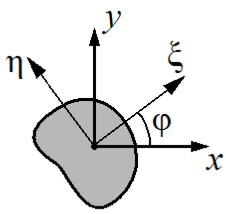
Główne momenty bezwładności – będące jednocześnie największymi i najmniejszymi możliwymi wartościami momentów bezwładności spośród tych odpowiadających wszystkim możliwym orientacjom układu współrzędnych o środku w ustalonym punkcie – są rozwiązaniami **równania wiekowego**:

$$\boxed{I^2-a\,I+b=0}$$

$$\boxed{I_{max/min}=\frac{I_x+I_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+D_{xy}^2}}$$

Kąt między kierunkiem osi *x* a kierunkiem osi maksymalnego momentu bezwładności ξ :

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{D_{xy}}{I_y-I_{max}}=\frac{I_x-I_{max}}{D_{xy}}=\frac{D_{xy}}{I_{min}-I_x}=\frac{I_{min}-I_y}{D_{xy}}}$$



Osie maksymalnej i minimalnej bezwładności nazywamy **osiami (kierunkami) własnymi** lub **głównymi** tensora.

- **Osie główne tensora bezwładności są zawsze prostopadłe.**
- **W układzie osi głównych tensor bezwładności ma postać diagonalną z głównymi momentami bezwładności na przekątnej głównej i momenami dewiacji równymi 0.**
- **W układzie osi nachylonym do osi głównych pod kątem 45° momenty dewiacji przyjmują wartości ekstremalne (maksymalne lub minimalne).**
- **Jeśli figura posiada oś symetrii to jest ona kierunkiem głównym bezwładności, drugi kierunek główny zaś jest do niego prostopadły.**
- **Jeśli figura posiada więcej niż dwie osie symetrii (koło, kwadrat, *n*-kąty foremne, *n* > 2, itp.) to dowolne kierunki są kierunkami głownymi bezwładności.**

Charakterystyki geometryczne wybranych figur płaskich

x y – **osie przyjętego układu współrzędnych**
X Y – **osie centralne** - osie równoległe do *x* i *y*, przechodzące przez środek ciężkości przekroju
ξ η – **główne centralne osie bezwładności** – jeśli nie zaznaczono inaczej, pokrywają się z *X Y*

I_x, I_y, D_z **- momenty bezwładności w przyjętym układzie *x y***
I_X, I_Y, D_Z **- centralne momenty bezwładności**
I_{max}, I_{min}, I_0 **- centralne główne momenty bezwładności**

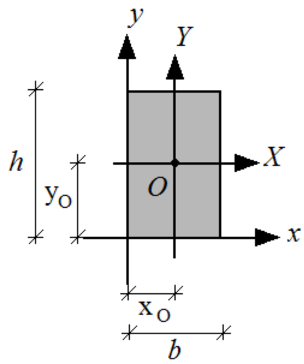
UWAGA: Jeśli figura (prostokąt, trójkąt prostokątny, ćwiartka koła) znajduje się w II lub IV ćwiartce podstawowego układu współrzędnych (*x, y*), którego osie zawierają krawędzie tej figury, to momenty dewiacji względem tych osi mają znaki przeciwne do podanych poniżej.

Prostokąt

$$A=bh \qquad D_z=\frac{b^2h^2}{4} \qquad I_0=\frac{bh}{12}(b^2+h^2)$$

$$x_O=\frac{b}{2} \qquad I_x=\frac{bh^3}{3} \qquad I_{max}=\frac{bh^3}{12}$$

$$y_O=\frac{h}{2} \qquad I_y=\frac{b^3h}{3} \qquad I_{min}=\frac{b^3h}{12}$$



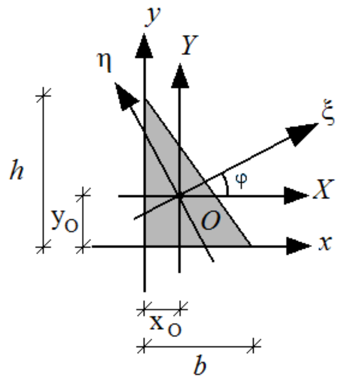
Trójkąt

$$A=\frac{1}{2}bh \qquad D_z=\frac{b^2h^2}{24} \qquad D_Z=\mp\frac{b^2h^2}{72} \qquad I_0=\frac{bh}{36}(b^2+h^2)$$

$$x_O=\frac{b}{3} \qquad I_x=\frac{bh^3}{12} \qquad I_X=\frac{bh^3}{36} \qquad I_{max}=\frac{bh}{72}\left[b^2+h^2+\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}\right]$$

$$y_O=\frac{h}{3} \qquad I_y=\frac{b^3h}{12} \qquad I_Y=\frac{b^3h}{36} \qquad I_{min}=\frac{bh}{72}\left[b^2+h^2-\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}\right]$$

$$\phi=\operatorname{arctg}\left(\frac{\pm bh}{h^2-b^2+\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\mp\frac{h^2-b^2-\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}}{bh}\right)$$



UWAGA: Jeśli trójkąt zorientowany jest w układzie osi centralnych w ten sposób, że trapezy odcięte przez jego osie znajdują się w II i IV ćwiartce układu, wtedy w powyższych wzorach moment dewiacji jest ujemny, jeśli w I i III ćwiartce – dodatni.

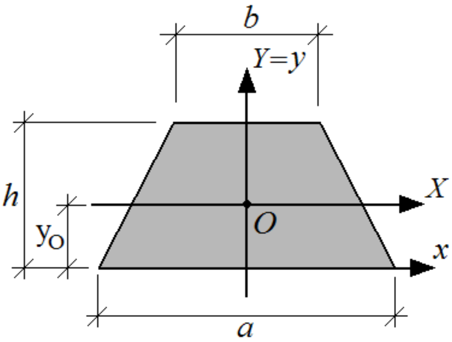
Trapez równoramienny

$$A=\frac{(a+b)h}{2} \qquad D_z=0$$

$$x_O=0 \qquad I_x=\frac{(a+3b)h^3}{12} \qquad I_{max/min}=\frac{(a^2+4ab+b^2)h^3}{36(a+b)}$$

$$y_O=\frac{(a+2b)h}{3(a+b)} \qquad I_y=\frac{(a+b)(a^2+b^2)h}{48} \qquad I_{min/max}=\frac{(a+b)(a^2+b^2)h}{48}$$

$$I_0=\frac{4h^3(a^2+4ab+b^2)+3h(a^2+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3+b^4)}{144(a+b)}$$

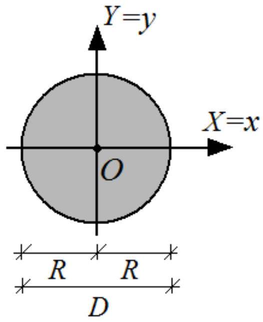


Koło

$$A=\pi R^2 \qquad I_0=\frac{\pi R^4}{2}=\frac{\pi D^4}{32}$$

$$x_O=0 \qquad I_{max}=\frac{\pi R^4}{4}=\frac{\pi D^4}{64}$$

$$y_O=0 \qquad I_{min}=\frac{\pi R^4}{4}=\frac{\pi D^4}{64}$$

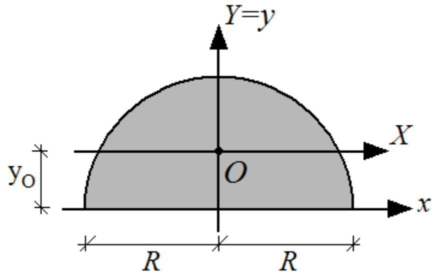


Półkole

$$A=\frac{\pi R^2}{2} \qquad D_z=0 \qquad I_0=R^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{8}{9\pi}\right)$$

$$x_O=0 \qquad I_x=\frac{\pi R^4}{8} \qquad I_{max}=I_Y=\frac{\pi R^4}{8}$$

$$y_O=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \qquad I_y=\frac{\pi R^4}{8} \qquad I_{min}=I_X=R^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$$



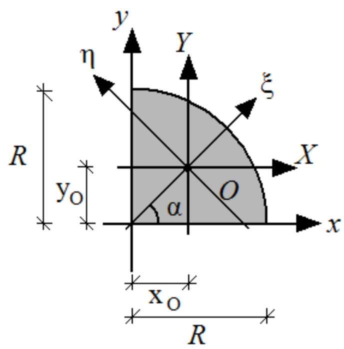
Ćwiartka koła

$$A=\frac{\pi R^2}{4} \qquad D_z=\frac{R^4}{8} \qquad D_Z=R^4\left(\frac{1}{8}-\frac{4}{9\pi}\right) \qquad I_0=R^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$$

$$x_O=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \qquad I_x=\frac{\pi R^4}{16} \qquad I_X=R^4\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right) \qquad I_{max}=R^4\frac{(\pi-2)}{16}$$

$$y_O=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \qquad I_y=\frac{\pi R^4}{16} \qquad I_Y=R^4\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right) \qquad I_{min}=R^4\frac{(9\pi^2+18\pi-1}{144\pi}$$

$$\phi=45^\circ$$



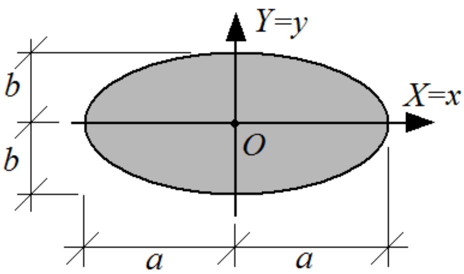
UWAGA: D_Z oraz D_z obliczone dla orientacji figury jak na rysunku.

Elipsa

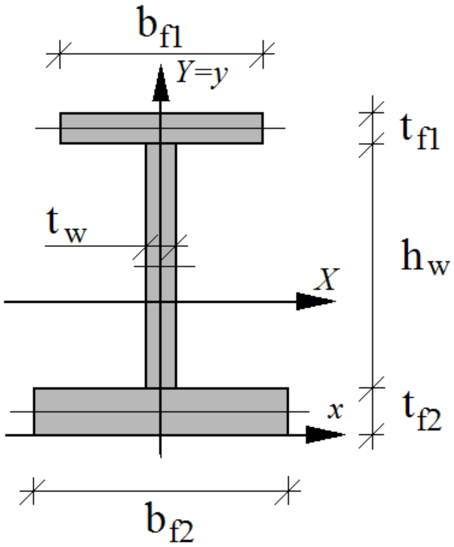
$$A=\pi a b \qquad I_0=\frac{\pi a b}{4}(a^2+b^2)$$

$$x_O=0 \qquad I_{max}=\frac{\pi a b^3}{4}$$

$$y_O=0 \qquad I_{min}=\frac{\pi a^3 b}{4}$$



Przekrój złożony – na podstawie belki dwuteowej



Półka górna:

$$A_{f1}=t_{f1}\cdot b_{f1} \qquad I_{x,f1}=\frac{b_{f1}t_{f1}^3}{12} \qquad I_{y,f1}=\frac{b_{f1}^3 t_{f1}}{12}$$

Półka dolna:

$$A_{f2}=t_{f2}\cdot b_{f2} \qquad I_{x,f2}=\frac{b_{f2}t_{f2}^3}{12} \qquad I_{y,f2}=\frac{b_{f2}^3 t_{f2}}{12}$$

Środnik:

$$A_{w}=t_{w}\cdot h_{w} \qquad I_{x,w}=\frac{t_{w}h_{w}^3}{12} \qquad I_{y,w}=\frac{b_{w}^3 h_{w}}{12}$$

Jedna z osi głównych pokrywa się z osią symetrii przekroju *y*. Druga jest prostopadła do niej.

Pole powierzchni przekroju: $A=[A_{f1}]+[A_{f2}]+[A_w]$

Moment statyczny względem osi *x*: $S_x=\left[\frac{A_{f2}\cdot t_{f2}}{2}\right]+\left[A_w\cdot\left(t_{f2}+\frac{h_w}{2}\right)\right]+\left[A_{f2}\cdot\left(t_{f2}+h_w+\frac{t_{f1}}{2}\right)\right]$

Moment statyczny względem osi *y*: $S_y=0$

Położenie środka ciężkości: $x_O=\frac{S_y}{A}=0 \qquad y_O=\frac{S_x}{A}$

Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_x=\left[I_{x,f1}+A_{f1}\cdot\left(y_O-\frac{t_{f2}}{2}\right)^2\right]+\left[I_{x,w}+A_w\cdot\left(y_O-t_{f2}-\frac{h_w}{2}\right)^2\right]+\left[I_{x,f2}+A_{f2}\cdot\left(y_O-t_{f2}-h_w-\frac{t_{f1}}{2}\right)^2\right]$$

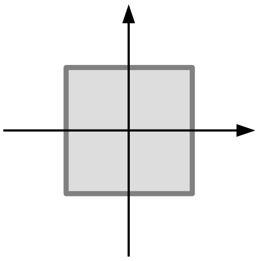
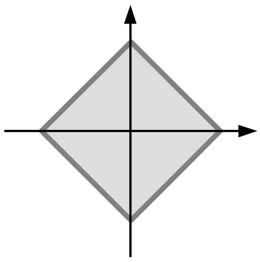
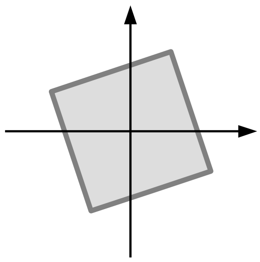
$$I_y=[I_{y,f1}]+[I_{y,f2}]+[I_{y,w}]$$

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR SYMETRYCZNYCH

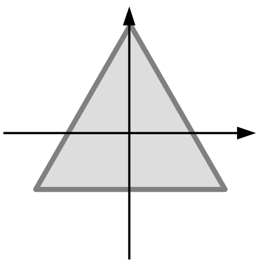
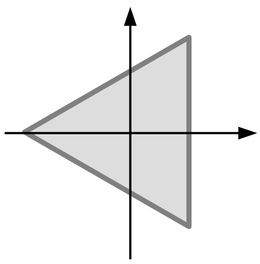
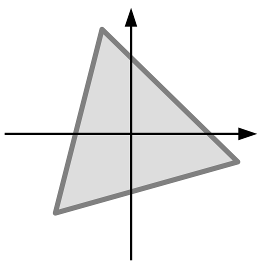
- Jeśli figura płaska posiada **jedną oś symetrii**, to **środek ciężkości leży na tej osi** a oś ta jest **jedną z głównych centralnych osi bezwładności** – druga jest do niej **prostopadła** i przecina ją w środku ciężkości
- Jeśli figura płaska posiada **dwie prostopadłe osie symetrii**, to **punkt ich przecięcia jest środkiem ciężkości** i są one **głównymi centralnymi osiami bezwładności**
- Jeśli figura płaska ma **więcej niż dwie osie symetrii**, to **punkt ich przecięcia jest środkiem ciężkości** a **dowolna prosta** zawierająca ten środek jest **główną osią centralną bezwładności.**

Jeśli w pewnym układzie współrzędnych dana figura ma takie same momenty bezwładności i zerowy moment dewiacji, wtedy – zgodnie z regułami przekształcania składowych tensora bezwładności przy obrocie układu współrzędnych – obrót tej figury (lub osi układu) o dowolny kąt nie zmieniają wartości momentów bezwładności. W szczególności dotyczy to **wszystkich figur, które mają więcej niż 2 osie symetrii**.

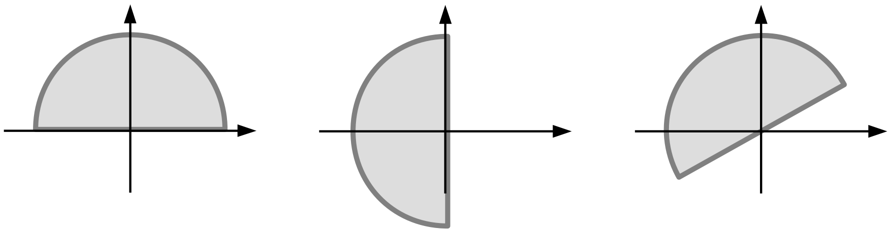
$$\begin{cases} I_X = I_Y = I \\ D_{XY} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_\xi = I_\eta = I \\ D_{XY} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{a^4}{12} & 0 \\ 0 & \frac{a^4}{12} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{a^4}{12} & 0 \\ 0 & \frac{a^4}{12} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{a^4}{12} & 0 \\ 0 & \frac{a^4}{12} \end{bmatrix}$$

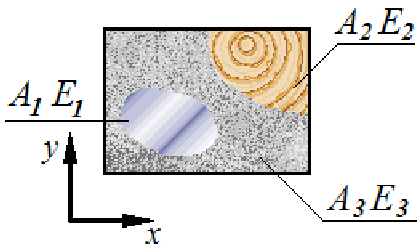
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{a^4\sqrt{3}}{96} & 0 \\ 0 & \frac{a^4\sqrt{3}}{96} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{a^4\sqrt{3}}{96} & 0 \\ 0 & \frac{a^4\sqrt{3}}{96} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{a^4\sqrt{3}}{96} & 0 \\ 0 & \frac{a^4\sqrt{3}}{96} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\pi R^4}{8} & 0 \\ 0 & \frac{\pi R^4}{8} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\pi R^4}{8} & 0 \\ 0 & \frac{\pi R^4}{8} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\pi R^4}{8} & 0 \\ 0 & \frac{\pi R^4}{8} \end{bmatrix}$$

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE PRZEKROJÓW ZESPOLONYCH

W przypadku, gdy jakiś przekrój zbudowany jest z kilku różnych materiałów, które posiadają odmienne właściwości mechaniczne (np. stal, drewno, beton), wyznacza się tzw. **ważone charakterystyki geometryczne**.



W przypadku zagadnień zginania, wyznacza się **porównawczy moduł Younga** E_0 , którym jest najczęściej najmniejszy z modułów Younga wszystkich materiałów składowych $E_0 = \min(E_1, E_2, \dots, E_n)$, a następnie dla każdego z materiałów oblicza się stosunek odpowiedniego dla niego modułu Younga oraz modułu porównawczego:

$$\alpha_i = \frac{E_i}{E_0} \quad [-]$$

Ważone charakterystyki geometryczne:

$A = \sum_i^n \alpha_i \iint_{A_i} dx\, dy$ - **ważone pole powierzchni** [m²]

$S_x = \sum_i^n \alpha_i \iint_{A_i} y\, dx\, dy$ - **ważony moment statyczny** względem płaszczyzny XZ [m³]

$S_y = \sum_i^n \alpha_i \iint_{A_i} x\, dx\, dy$ - **ważony moment statyczny** względem płaszczyzny YZ [m³]

Położenie **ważonego środka ciężkości** wyznaczamy tak jak zwykle: $x_O = \frac{S_y}{A}$ $\quad y_O = \frac{S_x}{A}$

$I_x = \sum_i^n \alpha_i \iint_{A_i} y^2\, dx\, dy$ - **ważony moment bezwładności** względem osi X [m⁴]

$I_y = \sum_i^n \alpha_i \iint_{A_i} x^2\, dx\, dy$ - **ważony moment bezwładności** względem osi Y [m⁴]

$D_{xy} = \sum_i^n \alpha_i \iint_{A_i} xy\, dx\, dy$ - **ważony moment dewiacji** względem płaszczyzn XZ i YZ [m⁴]