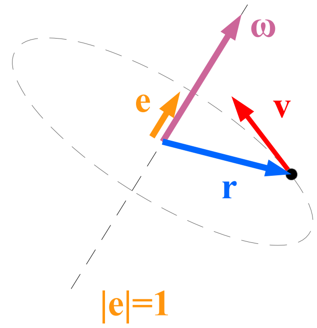
NAJWAŻNIEJSZE WZORY

MIARY RUCHU W OPISIE WEKTOROWYM

- **Wektor położenia** $\mathbf{r}(t)=[x(t)\ ;\ y(t)\ ;\ z(t)]$
- **Wektor prędkości** $\mathbf{v}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)=[\dot{x}(t)\ ;\ \dot{y}(t)\ ;\ \dot{z}(t)]$
- **Wektor przyspieszenia** $\mathbf{a}(t)=\ddot{\mathbf{r}}(t)=[\ddot{x}(t)\ ;\ \ddot{y}(t)\ ;\ \ddot{z}(t)]$

    - **Wektor przyspieszenia stycznego** $\mathbf{a}_s = \dfrac{\mathbf{a}\circ\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\cdot\mathbf{v}$
    - **Wektor przyspieszenia normalnego** $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}-\mathbf{a}_s$

Miary ruchu obrotowego



- **Droga kątowa** $\alpha(t)$
- **Prędkość kątowa (obrotowa)** $\omega(t)=\dot{\alpha}(t)$ $\quad \boldsymbol{\omega}=\omega\,\mathbf{e}$
- **Przyspieszenie kątowe** $\varepsilon(t)=\ddot{\alpha}(t)$ $\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon\,\mathbf{e}$

Pozostałe miary ruchu wyrażone przez miary ruchu obrotowego:

- **wektor prędkości** $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$
- **wektor przyspieszenia stycznego** $\mathbf{a}_s=\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}$
- **wektor przyspieszenia normalnego** $\mathbf{a}_n=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$

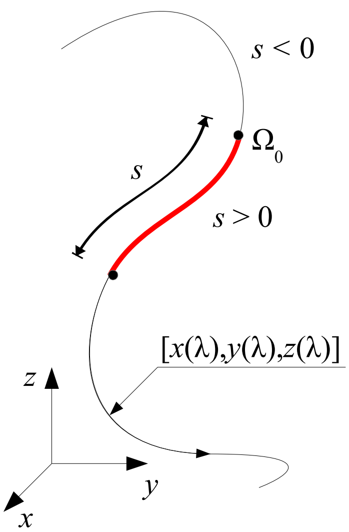
Dla ruchu po okręgu w płaszczyźnie XY $\mathbf{r}(t)=[R\cos(\alpha(t))\ ;\ R\sin(\alpha(t))\ ;\ 0]$

MIARY RUCHU W OPISIE NATURALNYM

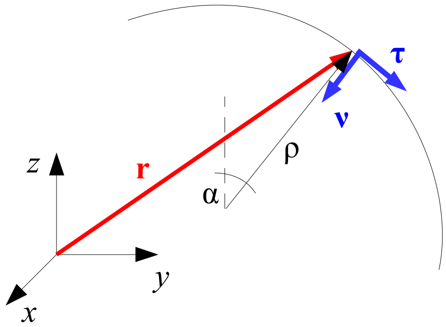
- **Parametryczne równanie toru (trajektorii)** – układ równań określających współrzędne punktów toru w zależności od wybranego parametru

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases}$$

- **Punkt początkowy** toru Ω_0
- **Orientacja toru** – umowa odnoście tego, po której stronie punktu początkowego miara długości toru przyjmowana jest jako dodatnia.
- **Równanie ruchu określające miarę pokonanej drogi w zależności od czasu:** $s=s(t)$. *Miara* drogi (a więc „miara długości”) oznacza, iż może być to wielkość zarówno dodatnia jak i ujemna, w zależności od przyjętej orientacji toru. Szczególnym przypadkiem jest sytuacja, w której tor sparametryzowany jest tzw. *parametrem naturalnym* $\lambda=s$, tj. parametrem, którego wartość bezwzględna jest równa długości wycinka toru zaczynającego się w punkcie początkowym.



MIARY RUCHU W OPISIE NATURALNYM



- **Wersor styczny do toru** $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$
- **Wersor normalny do toru** $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\alpha}$
-
- **Prędkość** $\mathbf{v} = \dot{s}\,\boldsymbol{\tau}$
- **Przyspieszenie** $\mathbf{a} = \ddot{s}\,\boldsymbol{\tau} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}$
  - **Przyspieszenie styczne** $\mathbf{a}_s = \ddot{s}\,\boldsymbol{\tau}$
  - **Przyspieszenie normalne** $\mathbf{a}_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}$

PRZEJŚCIE Z OPISU WEKTOROWEGO NA NATURALNY

1. Wektor wodzący $\mathbf{r}(t)$ dostarcza nam równań trajektorii, przy czym parametr toru można utożsamić tutaj z czasem, tj. $\lambda = t$

$$\mathbf{r}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(\lambda = t): \begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases}$$

2. Punkt początkowy Ω_0 określamy jako punkt odpowiadający chwili $t = 0$.
3. Równanie ruchu otrzymujemy całkując długość trajektorii począwszy od chwili $t = 0$:

$$s = \int ds = \int_{\lambda_0 = 0}^{\lambda = t} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda \quad \Rightarrow \quad s(t)$$

4. Orientację przyjmujemy w taki sposób, aby miara długości łuku krzywej była odmierzana ze znakiem „+” w tą stronę, w którą porusza się ciało.

PRZEJŚCIE Z OPISU NATURALNEGO NA WEKTOROWY

1. Mając krzywą sparametryzowaną przez λ , możemy wyznaczyć miarę długości wycinka trajektorii. Miara ta wyznaczana jest jako niezorientowana całka krzywoliniowa po długości trajektorii, przy czym dolną granicę całkowania stanowi ta wartość parametru krzywej, która odpowiada punktowi początkowemu.

$$s(\lambda) = \int_{\Omega_0}^{P} ds = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda$$

2. Miarę tę przyrównujemy do równania ruchu.

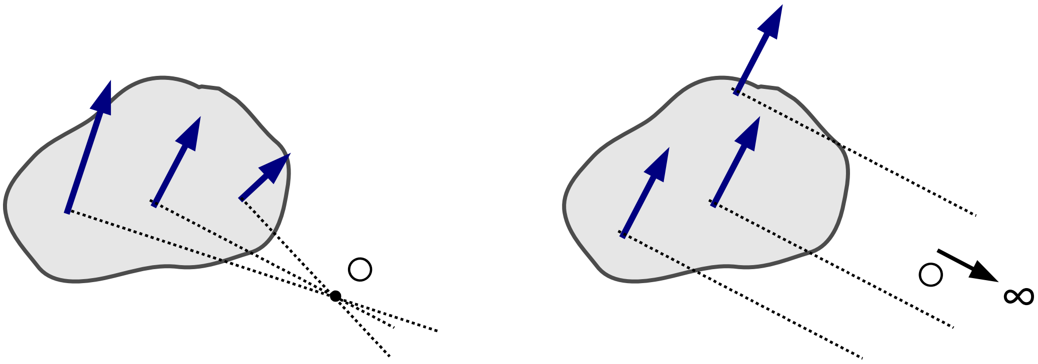
$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda = \pm s(t)$$

   Określamy przy tym znak tej miary zgodnie z przyjętą orientacją – ponieważ wyrażenie $s(\lambda)$ będzie zawsze rosło wraz ze wzrostem λ (całka z funkcji dodatniej), zatem jeśli punkt porusza się od punktu początkowego zgodnie z przyjętą orientacją trajektorii (funkcja $s(t) > 0$), wtedy w powyższym równaniu przyjmujemy znak „+”. W przeciwnym wypadku, przyjmujemy znak „-”.

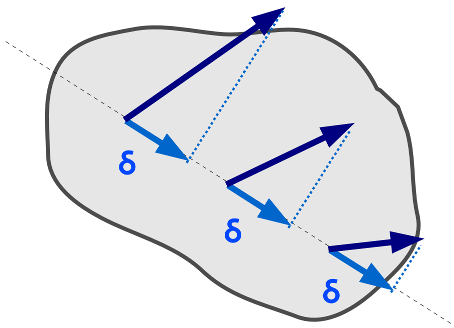
3. Otrzymujemy w ten sposób zależność $\lambda(t)$, którą możemy podstawić do równań trajektorii otrzymując tym samym wektorowy opis ruchu.

TWIERDZENIA O ROZKŁADZIE PRĘDKOŚCI

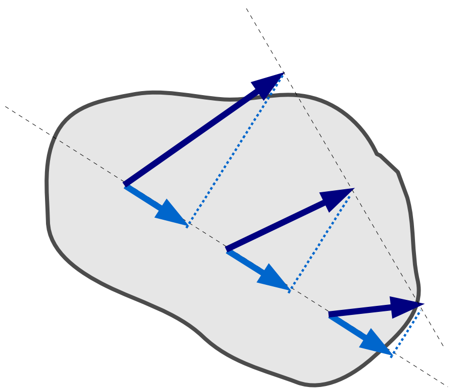
1. **Ruch płaski bryły sztywnej w każdej chwili czasu *t* można interpretować jako obrót wokół chwilowego środka obrotu.**
   - Środek ten w każdej chwili czasu *t* jest z reguły w innym miejscu.
   - Środek chwilowego obrotu może w szczególności znajdować się w nieskończoności lecz na zadanym kierunku – obrót staje się wtedy przesunięciem równoległym (translacją) w kierunku prostopadłym.



2. **Dla punktów leżących na jednej prostej rzuty ich wektorów prędkości na kierunek tej prostej są równe.**



3. **Dla punktów leżących na jednej prostej, końcówki ich wektorów prędkości również tworzą prostą.**

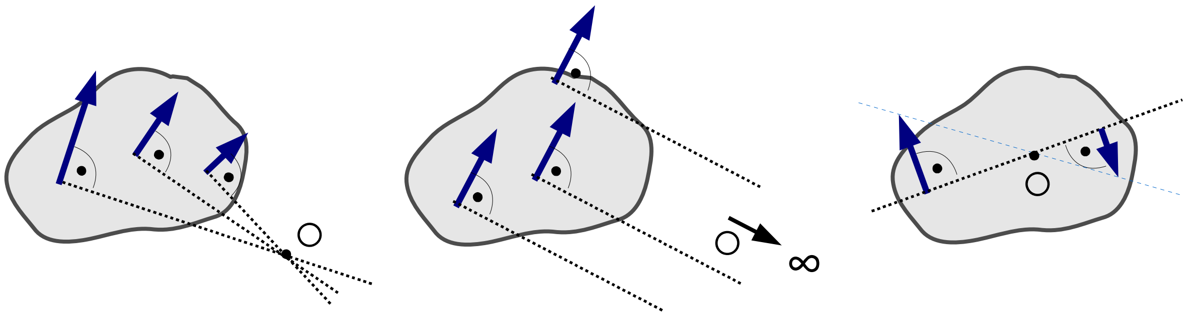


WNIOSKI DLA RUCHU PŁASKIEJ TARCZY SZTYWNEJ (2D)

1. Wektor prędkości jest zawsze prostopadły, do prostej łączącej dany punkt ze środkiem chwilowego obrotu

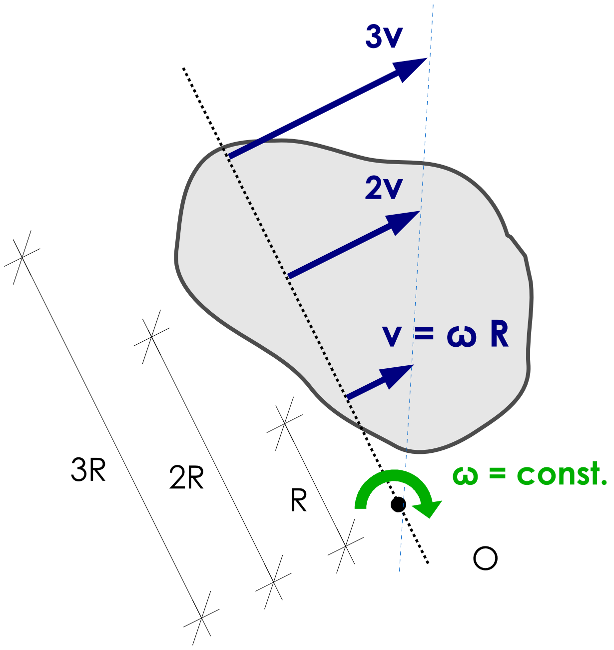
2. Jeśli znamy kierunki wektorów prędkości w dwóch punktach nie leżących na prostej prostopadłej do tych kierunków, to środek chwilowego obrotu leży na przecięciu się prostych prostopadłych do tych kierunków (w szczególności w nieskończoności).

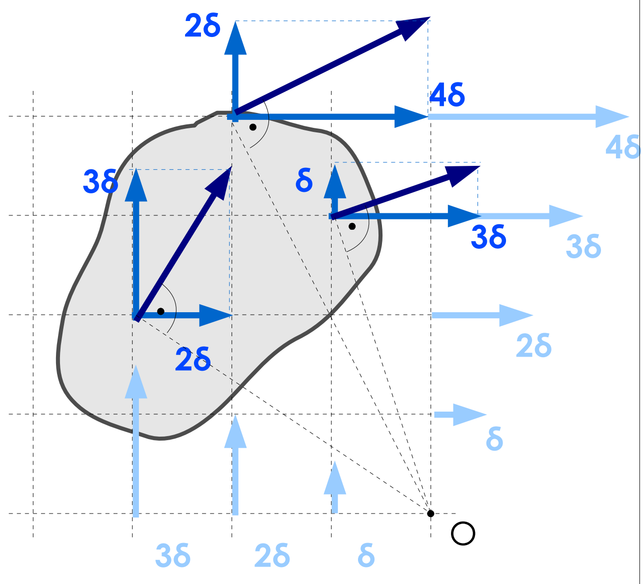
3. Jeśli znamy wektory prędkości w dwóch punktach leżących na prostej prostopadłej do kierunku tych prędkości, to środek chwilowego obrotu leży w punkcie przecięcia się tej prostej z prostą łączącą końcówki wektorów prędkości.



4. Wektory prędkości punktów leżących na jednej prostej łączącej je ze środkiem chwilowego obrotu mają długość proporcjonalną do odległości od tego środka. Współczynnikiem proporcjonalności jest prędkość kątowa.

5. Pionowe rzuty prędkości możemy przesuwać w pionie. Poziome rzuty prędkości możemy przesuwać w poziomie.





ZADANIE 1

Ruch punktu opisany jest równaniem wektorowym:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 4t^2+1 \\ y(t) = -2t \\ z(t) = 3t^2-2 \end{cases}$$

wyznacz wektor prędkości, wektor przyspieszenia stycznego i wektor przyspieszenia normalnego.

ROZWIĄZANIE:

Wektor prędkości:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,t} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 8t \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = 6t \end{cases}$$

Wektor przyspieszenia:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}}{\mathrm{d}\,t} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,t^2} = 8 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\,z}{\mathrm{d}\,t^2} = 6 \end{cases}$$

Wektor przyspieszenia stycznego otrzymujemy rzutując wektor przyspieszenia na kierunek wektora prędkości:

$$\mathbf{a}_s = \frac{\mathbf{a}\circ\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\cdot\mathbf{v} = \frac{8\cdot(8t)+0\cdot(-2)+6\cdot(6t)}{\sqrt{(8t)^2+(-2)^2+(6t)^2}}\,[8t\ ;\ -2\ ;\ 6t] = \frac{100t}{100t^2+4}\,[8t\ ;\ -2\ ;\ 6t] =$$
$$= \left[\frac{200t^2}{25t^2+1}\ ;\ -\frac{50t}{25t^2+1}\ ;\ \frac{150t^2}{25t^2+1}\right]$$

Wektor przyspieszenia normalnego:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}-\mathbf{a}_s = \left[8-\frac{200t^2}{25t^2+1}\ ;\ \frac{50t}{25t^2+1}\ ;\ 6-\frac{150t^2}{25t^2+1}\right] = \left[\frac{8}{25t^2+1}\ ;\ \frac{50t}{25t^2+1}\ ;\ \frac{6}{25t^2+1}\right]$$

ZADANIE 2

Punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu $R = 2\ \mathrm{m}$. Przyrost drogi w czasie opisuje równanie $s(t) = 2t^2$.

Wyznacz:

- Wektor prędkości oraz wektor przyspieszenia
- Prędkość kątową i przyspieszenie kątowe
- Wektor prędkości obrotowej oraz przyspieszenia obrotowego a na ich podstawie wektory prędkości oraz przyspieszenia stycznego i normalnego

ROZWIĄZANIE:

Wyznaczmy wektor położenia punktu. Przyjmijmy prostokątny układ współrzędnych, którego początek leży w środku okręgu, a punkt początkowy ruchu znajduje się na osi x . Wtedy położenie dowolnego punktu na okręgu opisują równania:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{cases}$$

Droga przebyta przez punkt poruszający się po okręgu to długość łuku kołowego $s(t) = ł$, który wiąże się z drogą kątową (wyrażoną **w radianach**!) zależnością:

$$s(t) = R \cdot \alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \frac{s(t)}{R} = t^2$$

Wektor położenia ma zatem postać: $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos t^2 \\ y(t) = R\sin t^2 \end{cases}$

Wektor prędkości: $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -2tR\sin t^2 \\ \dot{y}(t) = 2tR\cos t^2 \end{cases}$

Wektor przyspieszenia: $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} \ddot{x}(t) = -2R\sin t^2 - 4t^2 R\cos t^2 \\ \ddot{y}(t) = 2R\cos t^2 - 4t^2 R\sin t^2 \end{cases}$

Na podstawie funkcji przyrostu drogi kątowej $\alpha(t)$ wyznaczamy:

- prędkość kątową: $\omega = \dot{\alpha} = 2t$
- przyspieszenie kątowe: $\varepsilon = \ddot{\alpha} = 2$

Wektory prędkości i przyspieszenia kątowego w ruchu obrotowym są prostopadłe do płaszczyzny ruchu, zatem:

Wektor prędkości kątowej: $\boldsymbol{\omega} = [0\ ;\ 0\ ;\ \omega] = [0\ ;\ 0\ ;\ 2t]$

Wektor przyspieszenia kątowego: $\boldsymbol{\varepsilon} = [0\ ;\ 0\ ;\ \varepsilon] = [0\ ;\ 0\ ;\ 2]$

Wektory prędkości i przyspieszenia wyznaczamy z następujących zależności:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{a}_s = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_s+\mathbf{a}_n$$

Wektor **prędkości**:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = [0\ ;\ 0\ ;\ 2t]\times[R\cos t^2\ ;\ R\sin t^2\ ;\ 0] = [-2t\,R\sin t^2\ ;\ 2t\,R\cos t^2\ ;\ 0]$$

Wektor **przyspieszenia stycznego**:

$$\mathbf{a}_s = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r} = [0\ ;\ 0\ ;\ 2]\times[R\cos t^2\ ;\ R\sin t^2\ ;\ 0] = [-2R\sin t^2\ ;\ 2R\cos t^2\ ;\ 0]$$

Wektor **przyspieszenia normalnego**:

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = [0\ ;\ 0\ ;\ 2t]\times[-2t\,R\sin t^2\ ;\ 2t\,R\cos t^2\ ;\ 0] = [-4t^2R\cos t^2\ ;\ -4t^2R\sin t^2\ ;\ 0]$$

Wektor **przyspieszenia**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_s+\mathbf{a}_n = [-2R\sin t^2-4t^2R\cos t^2\ ;\ 2R\cos t^2-4t^2R\sin t^2\ ;\ 0]$$

ZADANIE 3

Punkt materialny porusza się po torze, który opisują równania parametryczne:

$$K: \quad \begin{cases} x(\lambda) = 2\lambda \\ y(\lambda) = 4-2\lambda \\ z(\lambda) = \lambda+3 \end{cases}$$

Punktem początkowym ruchu jest punkt $\Omega_0=(4\ ;\ 0\ ;\ 5)$. Tor zorientowany jest w taki sposób, że miara przebytej drogi $s>0$ dla $z<5$. Przyrost drogi w czasie opisuje funkcja $s = t^3$. Wyznacz wektor położenia w funkcji czasu (opis wektorowy).

ROZWIĄZANIE:

Musimy przejść z opisu naturalnego na opis wektorowy.

- Punktowi początkowemu Ω_0 odpowiada wartość parametru $\lambda=2$.
- Obliczamy przyrost drogi w zależności od parametru λ:

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{2}^{\lambda} \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}\,\mathrm{d}\lambda = 3\int_{2}^{\lambda} \mathrm{d}\lambda = 3(\lambda-2)$$

- Przyrównujemy uzyskany wynik do funkcji opisującej przyrost drogi w czasie:

$$\pm s(\lambda) = s(t)$$

- Znak określamy sprawdzając czy znak przyrostu drogi w wyrażeniu po lewej i po prawej stronie jest taki sam. Zgodnie z orientacją toru mamy mieć $s>0 \;\Leftrightarrow\; z<5$. W chwili początkowej, tj. dla $t=0$, w punkcie początkowym, tj. dla $\lambda=2 \quad z = 5$ dodatniemu przyrostowi parametru λ odpowiada przyrost zamiennej z:

$$\Delta z(\lambda=2) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda+3)\Big|_{\lambda=2}\Delta\lambda = \Delta\lambda$$

- A zatem znak przyrostu zmiennej z jest taki sam jak przyrostu parametru λ. To oznacza, że dla przyrostu $\Delta\lambda>0$ punkt poruszać się będzie w stronę $z>5$, tj. w stronę przeciwną niż orientacja toru. Stąd wniosek iż przyjąć należy:

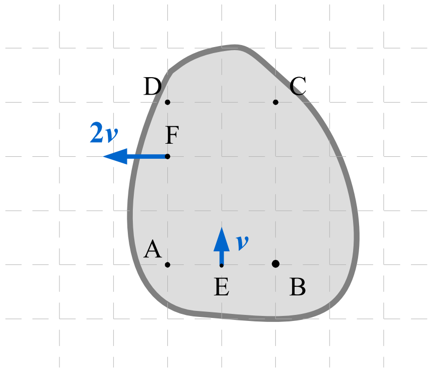
$$s(t) = -s(\lambda)$$

$$t^3 = -3(\lambda-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2-\frac{1}{3}t^3$$

- Podstawiając do równania toru otrzymujemy wektor położenia w funkcji czasu:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 4-\dfrac{2}{3}t^3 \\ y(t) = \dfrac{2}{3}t^3 \\ z(t) = 5-\dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

ZADANIE 4



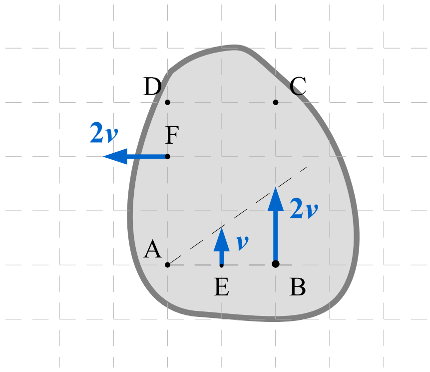
Znając wektory prędkości w dwóch punktach płaskiej tarczy sztywnej wyznacz wektory prędkości w punktach A, B, C, D. Oczko siatki ma stałą jednostkową długość.

ROZWIĄZANIE:

PUNKT A:

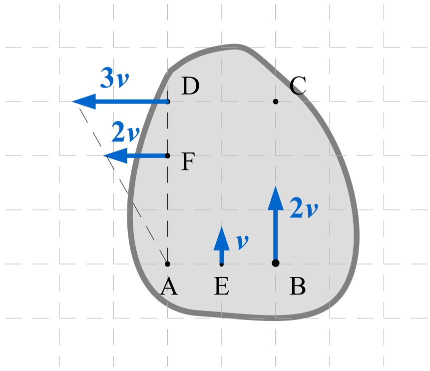
- Rzut prędkości $\mathbf{v}_E$ na kierunek prostej poziomej AE jest zerowy, zatem **rzut poziomy prędkości $\mathbf{v}_A$ jest zerowy**.
- Rzut prędkości $\mathbf{v}_F$ na kierunek prostej pionowe FA jest zerowy, zatem **rzut pionowy prędkości $\mathbf{v}_A$ jest zerowy**.
- Skoro zarówno rzut pionowy jak i poziomy prędkości $\mathbf{v}_A$ jest zerowy, zatem wektor $\mathbf{v}_A$ musi być wektorem zerowym.

PUNKT B:



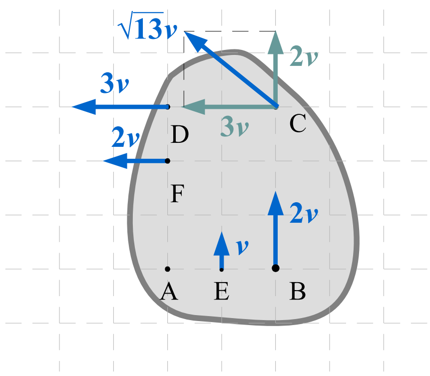
- Rzut prędkości $\mathbf{v}_E$ na kierunek prostej poziomej AB jest zerowy, zatem **rzut poziomy prędkości $\mathbf{v}_B$ jest zerowy**, tzn. $\mathbf{v}_B$ **jest wektorem pionowym**.
- Punkty A, E, B leżą na jednej prostej, zatem końcówki wektorów prędkości muszą leżeć na jednej prostej. Z podobieństwa trójkątów dostajemy $|\mathbf{v}_B| = 2v$.

PUNKT D:



- Rzut prędkości $\mathbf{v}_F$ na kierunek prostej pionowej FD jest zerowy, zatem **rzut pionowy prędkości $\mathbf{v}_D$ jest zerowy**, tzn. $\mathbf{v}_D$ **jest wektorem poziomym**.
- Punkty A, F, D leżą na jednej prostej, zatem końcówki wektorów prędkości muszą leżeć na jednej prostej. Z podobieństwa trójkątów dostajemy $|\mathbf{v}_D| = 3v$.

PUNKT C:

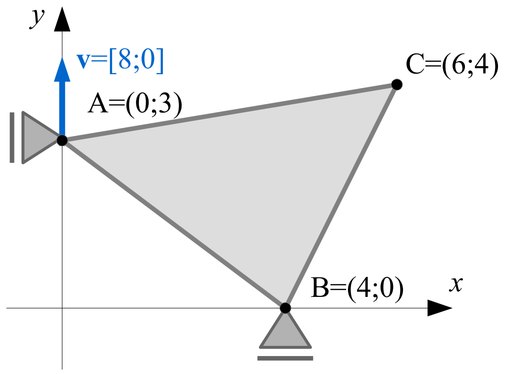


- Rzut prędkości $\mathbf{v}_D$ na kierunek prostej poziomej DC jest równy $3v$, **zatem składowa pozioma prędkości $\mathbf{v}_C$ jest równa** $3v$.
- Rzut prędkości $\mathbf{v}_B$ na kierunek prostej pionowej BC jest równy $2v$, zatem **składowa pionowa prędkości $\mathbf{v}_C$ jest równa** $2v$
- $|\mathbf{v}_C| = \sqrt{(3v)^2 + (2v)^2} = \sqrt{13}\,v$

ZADANIE 5

Wyznaczyć wektory prędkości w punktach B, C, D, wiedząc, że prędkość punktu A jest równa:

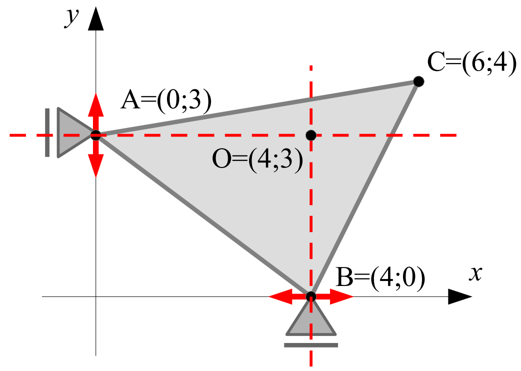
$$\mathbf{v}_A = [0{,}8]\ \mathrm{m/s}.$$



ROZWIĄZANIE:

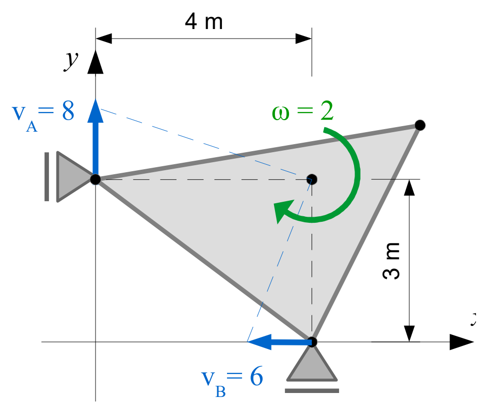
Wiemy, że ruch tarczy sztywnej możemy interpretować jako ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu. Jeśli zlokalizujemy środek chwilowego obrotu oraz wyznaczymy prędkość kątową, to będziemy mogli wyznaczyć prędkość dowolnego punktu tarczy.

Chwilowy środek obrotu znajduje się zawsze w punkcie przecięci się prostych prostopadłych do kierunków prędkości dopuszczalnych. Podpora w punkcie A dopuszcza tylko przesuw pionowy. Podpora w punkcie B dopuszcza tylko przesuw poziomy. Stąd znajdujemy lokalizację środka obrotu.

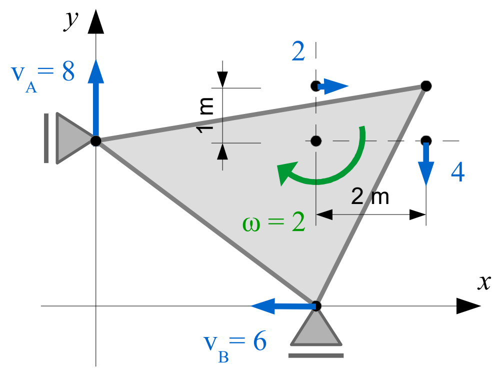


Prędkość styczna i prędkość kątowa wiążą się wzorem $v = \omega R$, gdzie *R* jest odległością od środka obrotu. Długość wektora prędkości punktu A jest równa $v_A = |\mathbf{v}| = 8\ \mathrm{m/s}$. Odległość A od O jest równa $4\,\mathrm{m}$, stąd $\omega = 2\ \mathrm{rad/s}$. Na tej podstawie wyznaczamy prędkość w punkcie B:

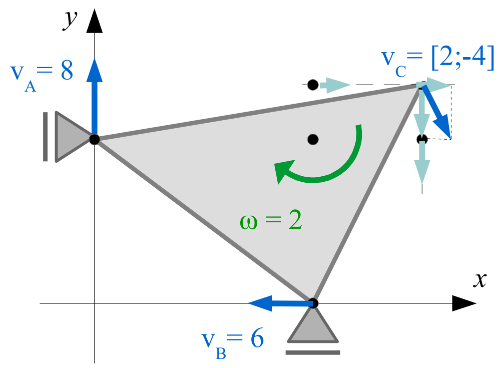
$$v_B = \omega R_B = 2\,\mathrm{rad/s}\cdot 3\ \mathrm{m} = 6\,\mathrm{m/s}\ .$$



Aby wyznaczyć składowe wektora prędkości w punkcie C, wyznaczymy najpierw prędkości w dwóch fikcyjnych punktach nienależących do tarczy, które będą miały prędkości pionową i poziomą, równe odpowiednio rzutowi pionowemu i poziomemu prędkości w punkcie C.

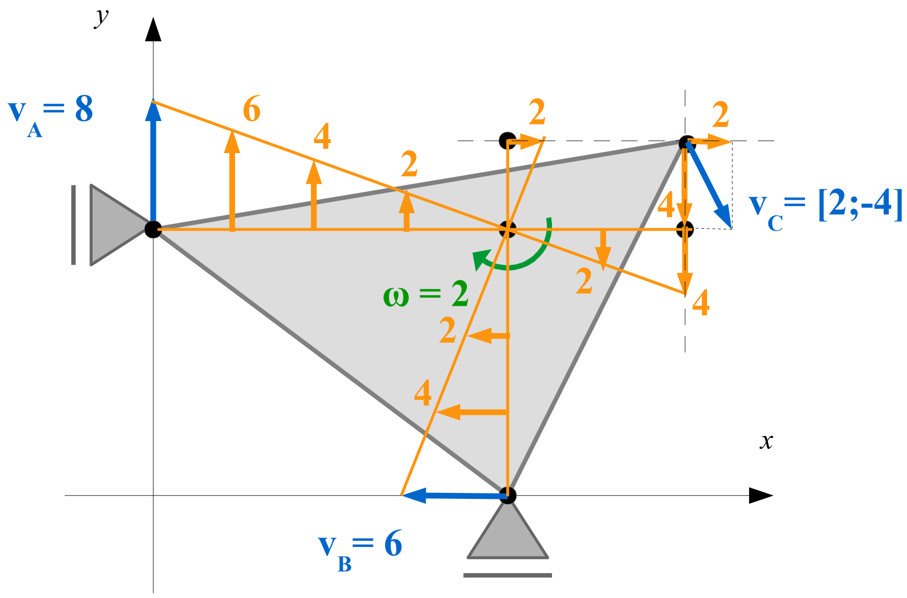


Składowe wektora prędkości punktu C wyznaczamy przesuwając odpowiednie rzuty wzdłuż prostych do nich równoległych.



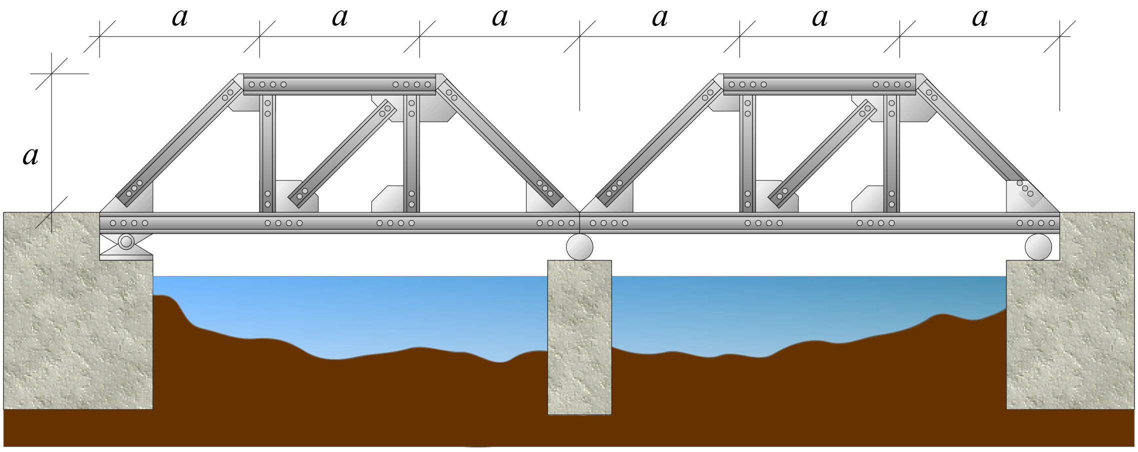
Ostatecznie:

$$\mathbf{v}_A = [0\ ;\ 8]\ \mathrm{m/s}$$
$$\mathbf{v}_B = [-6\ ;\ 0]\ \mathrm{m/s}$$
$$\mathbf{v}_C = [2\ ;\ -4]\ \mathrm{m/s}$$



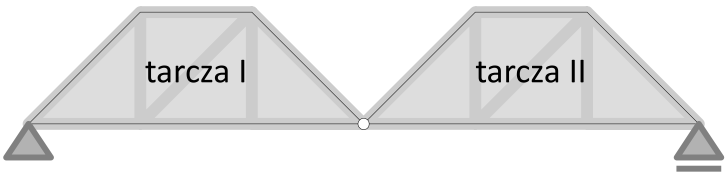
ZADANIE 6

Dany jest układ dwóch tarcz kratowych połączonych przegubem nad środkową podporą. Wyznacz pole prędkości węzłów kratownicy po usunięciu środkowej podpory.

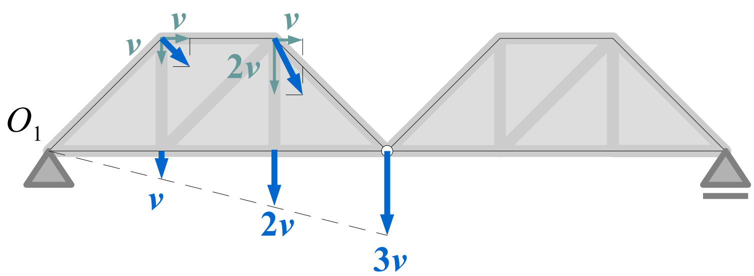


ROZWIĄZANIE:

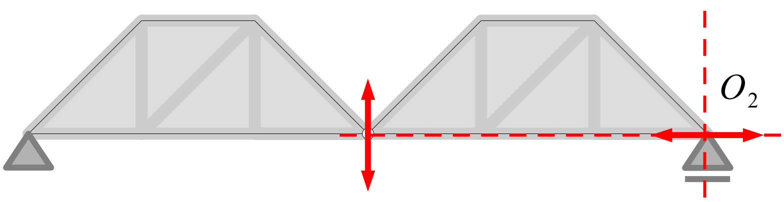
Schemat statyczny po usunięciu podpory.



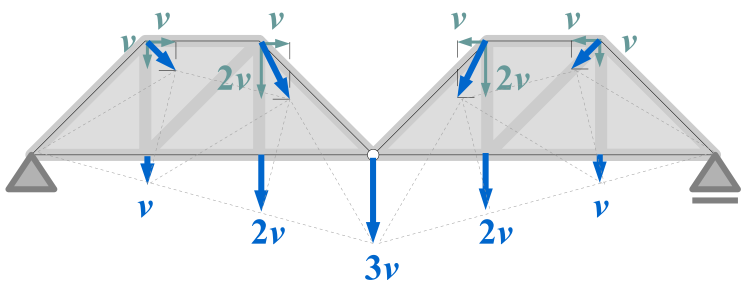
Wyznaczamy środek obrotu dla tarczy I. Ponieważ jest ona unieruchomiona w jednym punkcie, to punkt ten staje się jej chwilowym środkiem obrotu O_1. Nadajemy jej pewną prędkość obrotową $\omega = v/a$.



Punkt wspólny dla obu tarcz porusza się pionowo. Punkt podparcia drugiej tarczy może poruszać się jedynie poziomo. Wykreślamy proste prostopadłe do kierunków prędkości dopuszczalnych w tych dwóch punktach tarczy II. W punkcie przecięcia tych dwóch prostych znajduje się chwilowy środek obrotu tarczy II O_2.

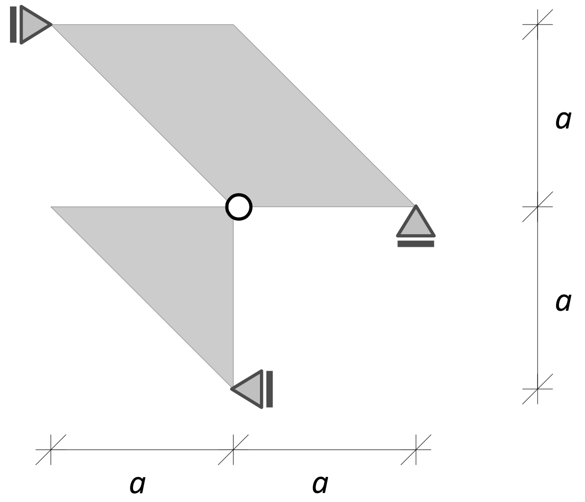


Wyznaczamy prędkości węzłów kratownicy odpowiadające prędkości obrotowej odpowiadającej prędkości liniowej w punkcie P.



ZADANIE 7

Wyznacz rozkład prędkości w układzie mechanicznym jak na rysunku.



SCHEMAT ROZWIĄZANIA

(*zadanie z układem tarcz sztywnych połączonych przegubami bez zadanych z góry prędkości punktów*)

1. Dla każdej tarczy musimy wyznaczyć środek chwilowego obrotu oraz prędkość kątową – na ich podstawie wyznaczamy wektory prędkości w wymaganych punktach.
2. Zaczynamy od tarczy, na którą nałożona najwięcej więzów ograniczających ruch. Najczęście będzie to tarcza, przy której
   - występują dwie podpory przegubowe przesuwne lub
   - występuje podpora przegubowa nieprzesuwna
3. Wyznaczamy środek chwilowego obrotu.
4. Przyjmując dowolną prędkość kątową wyznaczamy wynikające z niej prędkości we wszystkich wymaganych punktach tarczy, w szczególności w przegubie, w którym łączy się ona z kolejną tarczą.
5. Na podstawie znajomości wektora prędkości w w przegubie oraz znajomości podpór (lub prędkości w innych punktach) kolejnej tarczy, wyznaczamy jej środek chwilowego obrotu oraz prędkość kątową.
6. Powtarzamy kroki 4 i 5 aż do wyznaczenia wszystkich wektorów prędkości.

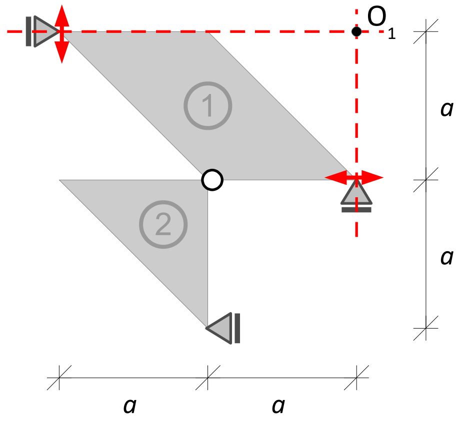
UWAGI:

- Jeśli w którymś momencie rozwiązywania zadania dochodzimy do sprzeczności (np. na podporze wymagane jest przemieszczenie niedopuszczalne przez tą podporę, środek chwilowego obrotu ma niezerową prędkość itp.), to znaczy, że założenie o ruchu pierwszej tarczy jest błędne. Przyjmujemy wtedy, że tarcza pierwsza jest nieruchoma a przegub, w którym łączy się ona z kolejną tarczą jest dla tej kolejnej tarczy środkiem chwilowego obrotu (jest bowiem nieruchomy i dopuszcza obrót). Taka konieczność zmiany założeń początkowych może pojawić się wielokrotnie.

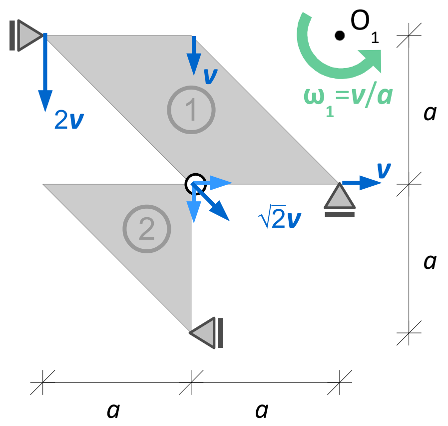
- Jeśli środek chwilowego obrotu jest punktem niewłaściwym w nieskończoności (proste prostopadłe do kierunków prędkości dopuszczalnych są równoległe), wtedy tarcza doznaje przesunięcia równoległego (translacji bez obrotu) i wektory prędkości wszystkich punktów tarczy są takie same.

ROZWIĄZANIE:

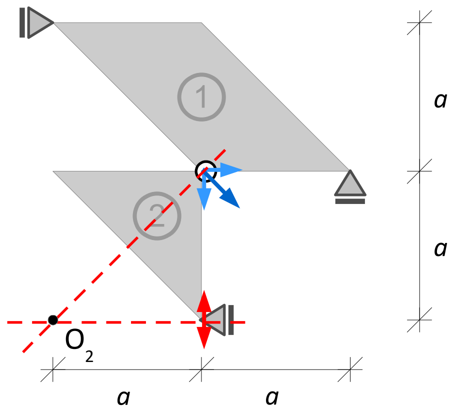
Zaczniemy od tarczy 1 (oznaczenia jak na rysunku) ponieważ występują tam dwie podpory przegubowe przesuwne. Wyznaczamy kierunki prędkości dopuszczalnych dla punktów podparcia. W punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do kierunków prędkości dopuszczalnych znajduje się środek chwilowego obrotu tarczy 1.



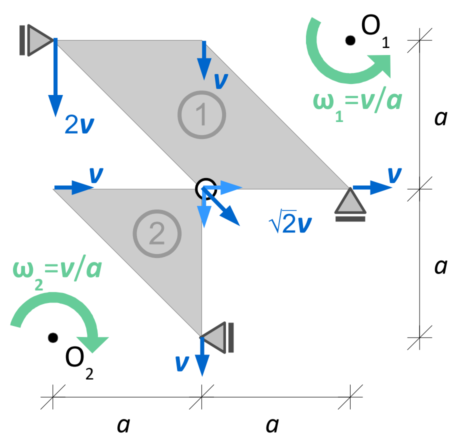
Zakładamy prędkość kątową $\omega_1 = v/a$ - zwrot możemy wybrać dowolnie. W każdym punkcie odległym o a od środka chwilowego obrotu, prędkość jest więc równa v . Kierunek prędkości jest zawsze prostopadły do prostej łączącej dany punkt ze środkiem obrotu. Zwrot wynika ze zwrotu prędkości kątowej.



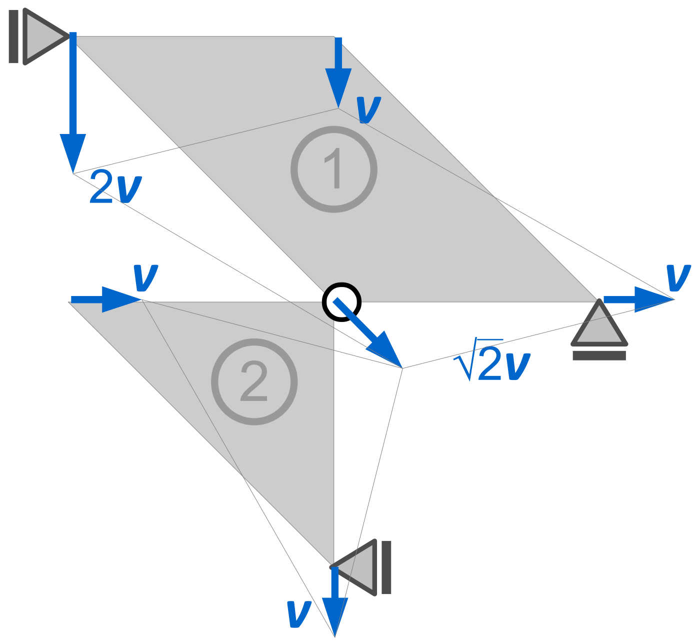
Znając kierunek prędkości w przegubie oraz kierunek prędkości punktu podparcia tarczy 2, kreślimy proste prostopadłe do tych kierunków i w punkcie ich przecięcia wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarczy 2.



Prędkość kątową dla drugiej tarczy wyznaczamy z zależności $\omega = v/r$ na podstawie znajomości prędkości przegubu. Znajduje się on w odległości $r = a\sqrt{2}$, stąd prędkość kątowa $\omega_2 = v/a$. Na tej podstawie wyznaczamy prędkości pozostałych wierzchołków tarczy 2.

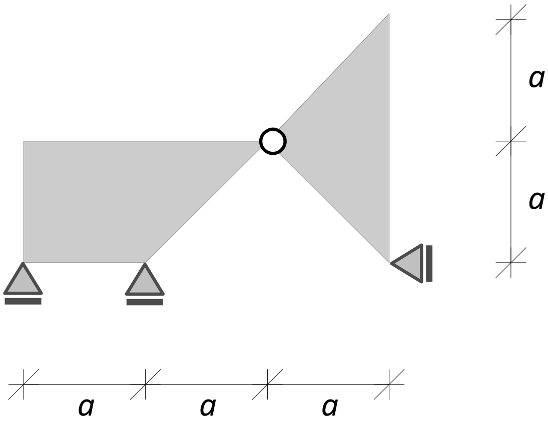


Przybliżony obraz przemieszczenia tarcz:



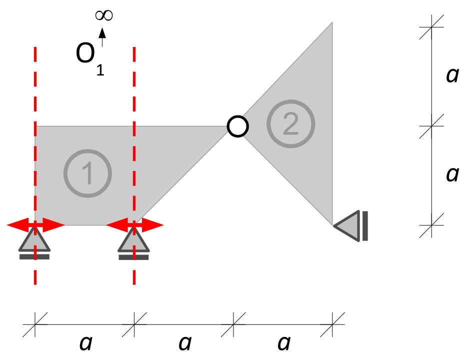
ZADANIE 8

Wyznacz rozkład prędkości w układzie mechanicznym jak na rysunku.

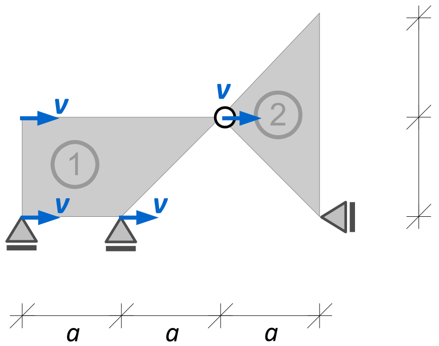


ROZWIĄZANIE:

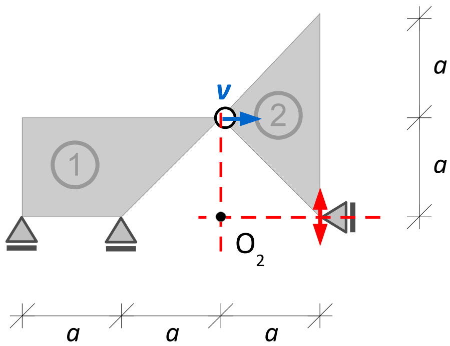
Zaczniemy od tarczy 1 (oznaczenia jak na rysunku) ponieważ występują tam dwie podpory przegubowe przesuwne. Wyznaczamy kierunki prędkości dopuszczalnych dla punktów podparcia. W punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do kierunków prędkości dopuszczalnych znajduje się środek chwilowego obrotu tarczy 1. Okazuje się, że jest to punkt niewłaściwy (leży w nieskończoności).



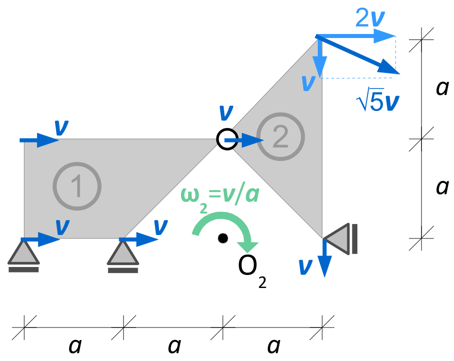
Skoro środek chwilowego obrotu jest punktem niewłaściwym, to tarcza doznaje przesunięcia równoległego (bez obrotu) – wektory prędkości wszystkich punktów tarczy są takie same. Podpory dopuszczają jedynie wektory poziome. Zwrot i wielkość prędkości przyjmujemy dowolnie. Niech będzie to v w prawo. W szczególności, tę samą prędkość ma przegub.



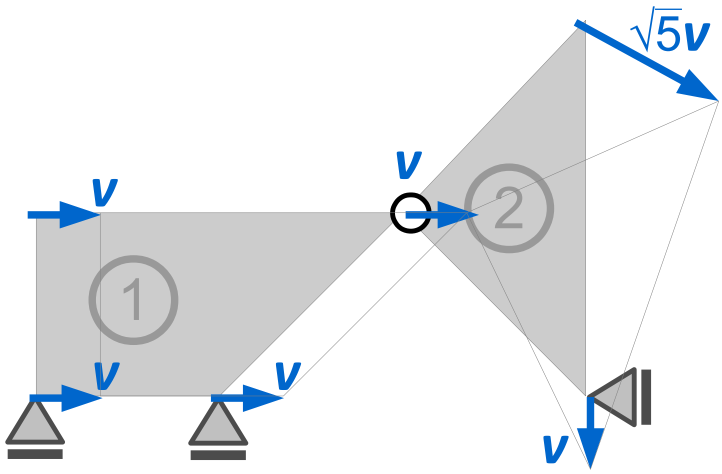
Znając kierunek prędkości w przegubie oraz kierunek prędkości punktu podparcia tarczy 2, kreślimy proste prostopadłe do tych kierunków i w punkcie ich przecięcia wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarczy 2.



Prędkość kątową dla drugiej tarczy wyznaczamy z zależności $\omega = v/r$ na podstawie znajomości prędkości przegubu. Znajduje się on w odległości $r = a$, stąd prędkość kątowa $\omega_2 = v/a$. Na tej podstawie wyznaczamy prędkości pozostałych wierzchołków tarczy 2.

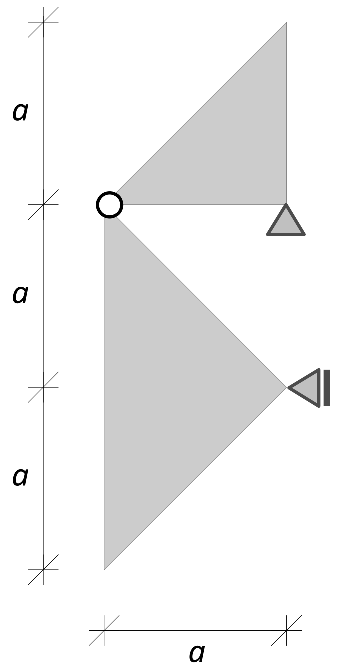


Przybliżony obraz przemieszczenia tarcz:



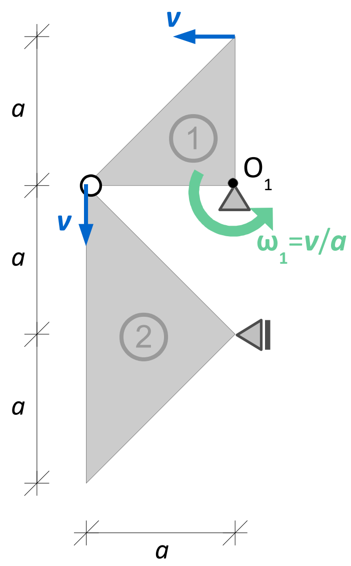
ZADANIE 9

Wyznacz rozkład prędkości w układzie mechanicznym jak na rysunku.

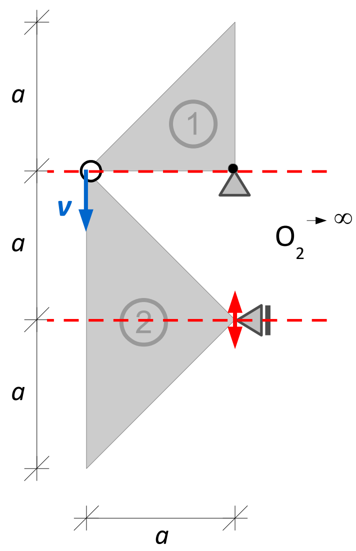


ROZWIĄZANIE:

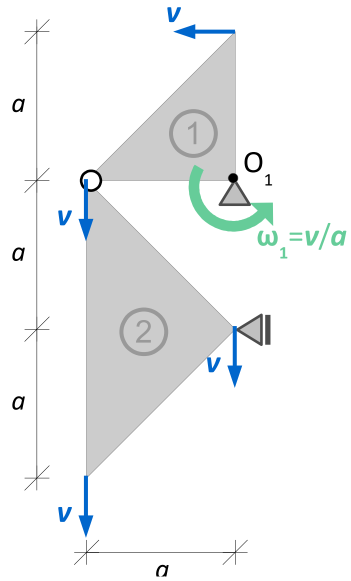
Zaczniemy od tarczy 1 (oznaczenia jak na rysunku), ponieważ występuje tam podpora przegubowa nieprzesuwna. W punkcie podparcia znajduje się środek chwilowego obrotu tarczy 1. Zakładamy prędkość kątową $\omega_1 = v/a$ - zwrot możemy wybrać dowolnie. W każdym punkcie odległym o a od środka chwilowego obrotu, prędkość jest więc równa v. Kierunek prędkości jest zawsze prostopadły do prostej łączącej dany punkt ze środkiem obrotu. Zwrot wynika ze zwrotu prędkości kątowej.



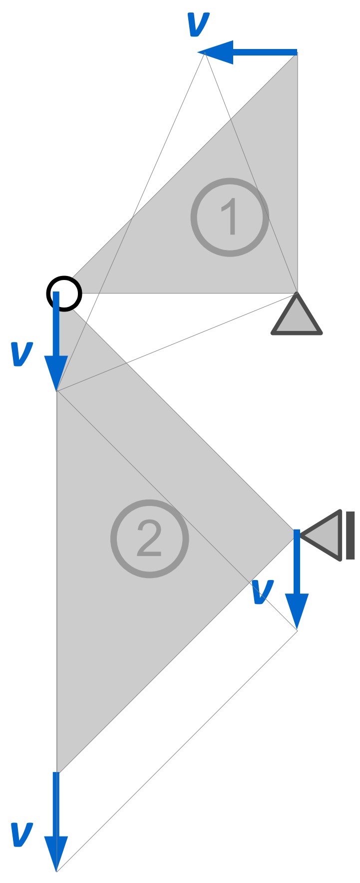
Znając kierunek prędkości w przegubie oraz kierunek prędkości punktu podparcia tarczy 2, kreślimy proste prostopadłe do tych kierunków i w punkcie ich przecięcia wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarczy 2. Okazuje się, że jest to punkt niewłaściwy (leży w nieskończoności).



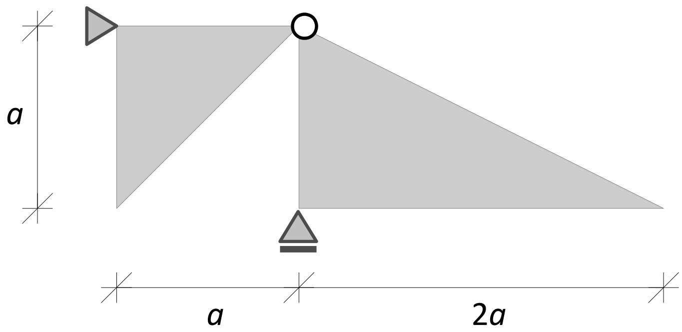
Skoro środek chwilowego obrotu jest punktem niewłaściwym, to tarcza doznaje przesunięcia równoległego (bez obrotu) – wektory prędkości wszystkich punktów tarczy są takie same. Skoro przegub przemieszcza się z prędkością pionową v, to taką samą prędkość muszą mieć wszystkie pozostałe punkty tarczy.



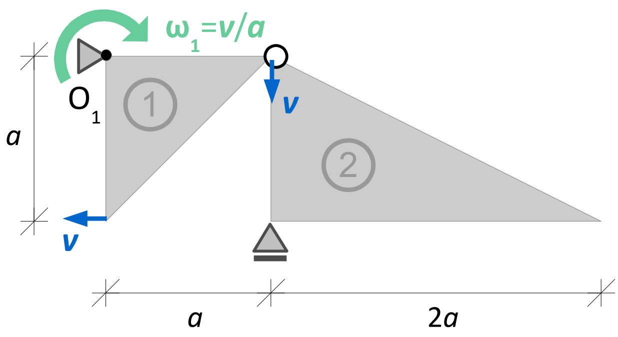
Przybliżony obraz przemieszczenia tarcz:



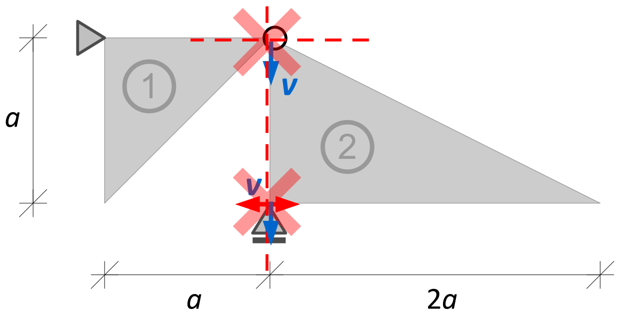
ZADANIE 10
Wyznacz rozkład prędkości w układzie mechanicznym jak na rysunku.



ROZWIĄZANIE:

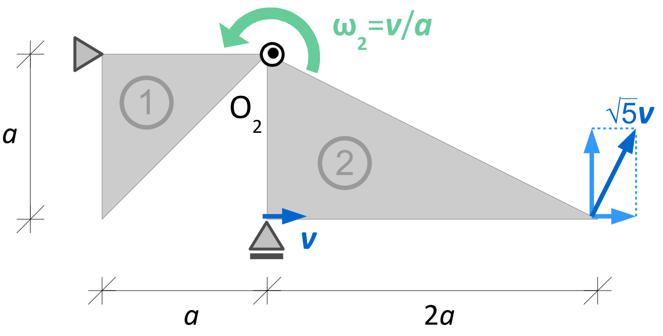


Zaczniemy od tarczy 1 (oznaczenia jak na rysunku), ponieważ występuje tam podpora przegubowa nieprzesuwna. W punkcie podparcia znajduje się środek chwilowego obrotu tarczy 1. Zakładamy prędkość kątową $\omega_1 = v/a$ - zwrot możemy wybrać dowolnie. W każdym punkcie odległym o a od środka chwilowego obrotu, prędkość jest więc równa v. Kierunek prędkości jest zawsze prostopadły do prostej łączącej dany punkt ze środkiem obrotu. Zwrot wynika ze zwrotu prędkości kątowej.

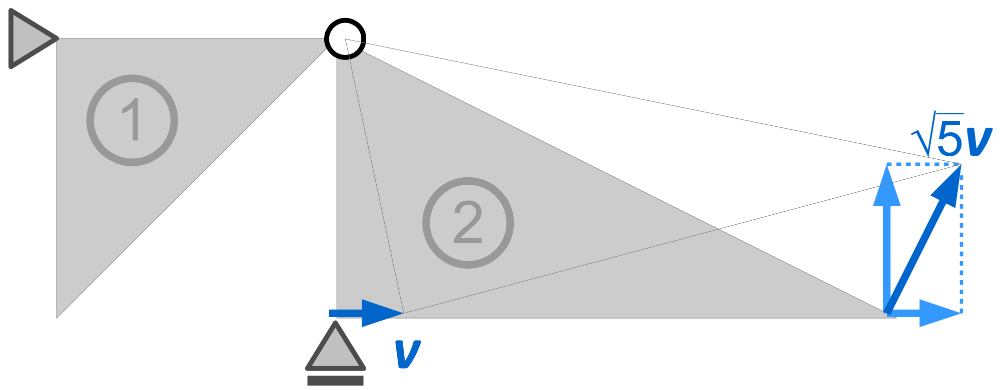


Znając kierunek prędkości w przegubie oraz kierunek prędkości punktu podparcia tarczy 2, kreślimy proste prostopadłe do tych kierunków i w punkcie ich przecięcia wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarczy 2. Okazuje się, że punkt przecięcia się tych prostych występuje w punkcie, w którym prędkość jest niezerowa – to sprzeczność, ponieważ **środek chwilowego obrotu musi być punktem, w którym prędkość ma być zerowa**. Ponadto, gdybyśmy chcieli przenieść rzut pionowy prędkości przegubu do punktu podparcia, okazałoby się, że **na podporze musiałaby pojawić się składowa prędkości niedopuszczalna przez tą podporę**. To wszystko wskazuje, że pierwotne założenie o obrocie tarczy 1 wokół podpory nieprzesuwnej było błędne. Ponieważ jest to jedyny rodzaj ruchu, jaki ta tarcza może wykonywać, stąd wniosek, że musi pozostawać nieruchoma.

Skoro tarcza 1 jest nieruchoma, zatem i przegub pozostaje w spoczynku. Jako punkt nieruchomy należący do tarczy 2 staje się jej środkiem chwilowego obrotu. Zakładamy prędkość kątową $\omega_2 = v/a$ - zwrot możemy wybrać dowolnie. W każdym punkcie odległym o a od środka chwilowego obrotu, prędkość jest więc równa v. Kierunek prędkości jest zawsze prostopadły do prostej łączącej dany punkt ze środkiem obrotu. Zwrot wynika ze zwrotu prędkości kątowej.

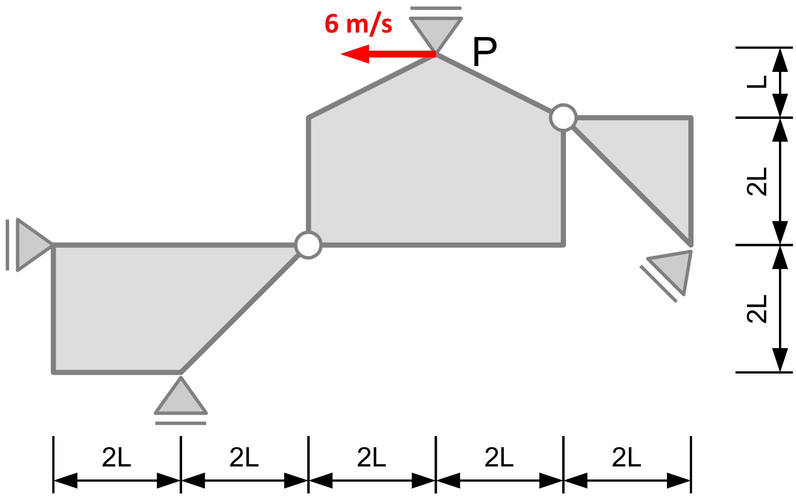


Przybliżony obraz przemieszczenia tarcz:



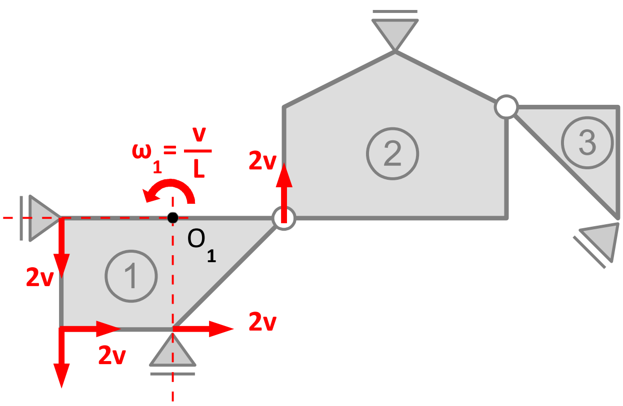
ZADANIE 11

Wyznaczyć rozkład prędkości w układzie mechanicznym przedstawionym na rysunku. Przyjąć $L = 1\,\mathrm{m}$.

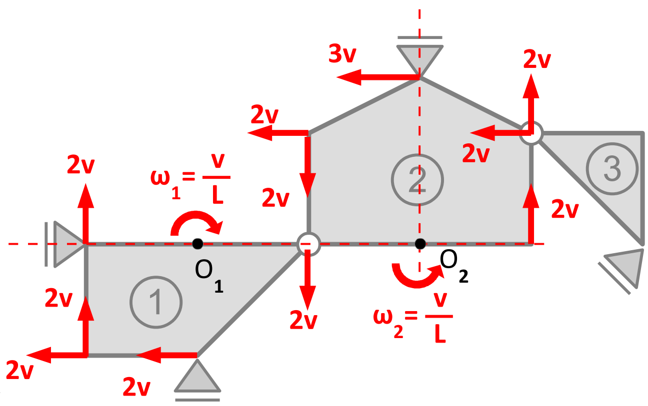


ROZWIĄZANIE:

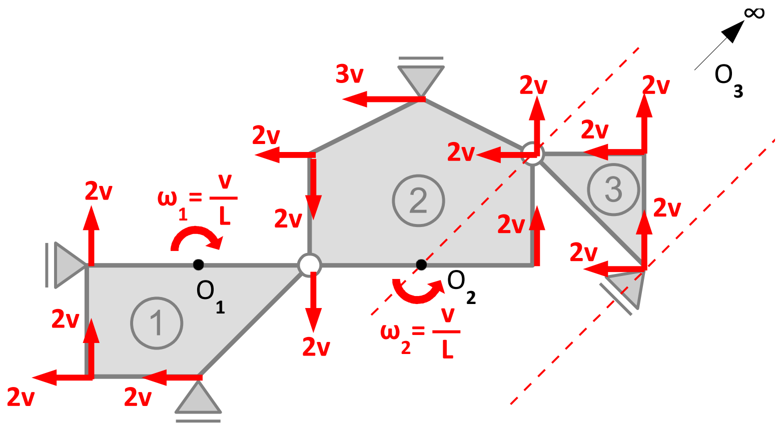
Analizę zaczynamy od tarczy, która ma największą liczbę odebranych stopni swobody. Kolejnymi tarczami będą tarcze sąsiednie. Dla pierwszej tarczy wyznaczamy środek chwilowego obrotu w punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do kierunków prędkości dopuszczalnych przez podpory. Na początku prędkości wyznaczamy z dokładnością do parametru, który wyznaczymy po przyrównaniu wektora prędkości w punkcie P do podanej w tym punkcie wartości.



Środek chwilowego obrotu tarczy drugiej znajdujemy w punkcie przecięcia się prostej prostopadłej do dopuszczalnego kierunku prędkości w przegubie (wyznaczonej w poprzednim kroku) oraz prostej prostopadłej do kierunku dopuszczalnego przesuwu na podporze. Widzimy przy tym, że prędkość w punkcie P wyznaczona dla zwrotu prędkości kątowej założonego dla tarczy pierwszej jest przeciwna do kierunku rzeczywistego. Wszystkie wyznaczone prędkości zmienimy zatem na przeciwne.



Środek chwilowego obrotu tarczy trzeciej znajdujemy w punkcie przecięcia się prostej prostopadłej do dopuszczalnego kierunku prędkości w przegubie (wyznaczonej w poprzednim kroku) oraz prostej prostopadłej do kierunku dopuszczalnego przesuwu na podporze. Jest to punkt niewłaściwy w nieskończoności, zatem tarcza trzecia doznaje jedynie przesunięcia równoległego i wektory prędkości w każdym punkcie są takie same.



Z przyrównania wektora prędkości w punkcie P do podanej wartości prędkości w tym punkcie otrzymujemy:

$$3v = 6 \text{ m/s} \qquad \Rightarrow \qquad v = 2 \text{ m/s}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{v}{L} = 2 \text{ rad/s}$$

Ostatecznie rozkład prędkości i przybliżona konfiguracja po deformacji wyglądają następująco: