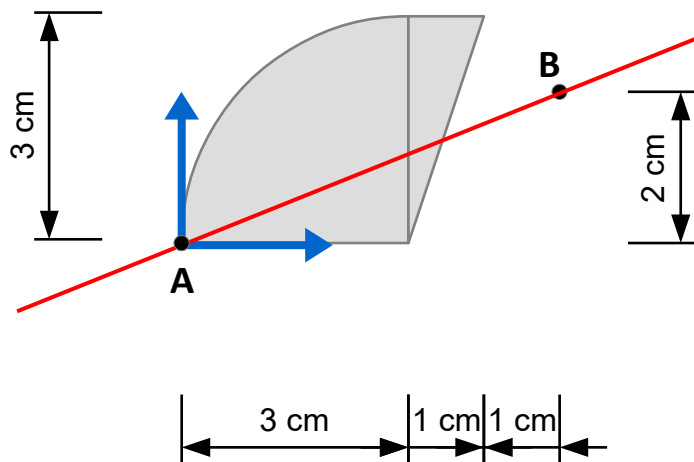


Wyznaczyć moment bezwładności względem prostej AB.



W zadaniu tego typu nie ma konieczności wyznaczania środka ciężkości figury. Można skorzystać z tw. Steinera, by wyznaczyć składowe tensora momentu bezwładności w wybranym przez nas punkcie, który niekoniecznie musi być środkiem ciężkości figury – w naszym przypadku najlepiej wybrać punkt A lub punkt B.

Punkt A jest o tyle łatwiejszy, że jego współrzędne są zerowe. Składowe tensora momentu bezwładności względem osi poziomej i pionowej w punkcie A wyrażają się następująco:

$$I_X(A) = \left[\frac{\pi 3^4}{16} - \frac{\pi 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} - 0 \right)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 3^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot (2-0)^2 \right] = 22,654 \text{ cm}^4$$

$$I_Y(A) = \left[\frac{\pi 3^4}{16} - \frac{\pi 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi 3^2}{4} \cdot \left(3 - \frac{4}{3} \frac{3}{\pi} - 0 \right)^2 \right] + \left[\frac{3 \cdot 1^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left(3 + \frac{1}{3} - 0 \right)^2 \right] = 42,272 \text{ cm}^4$$

$$D_{XY}(A) = \left[-\frac{3^4}{8} - \frac{\pi 3^2}{4} \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} \right) \left(-\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} \right) + \frac{\pi 3^2}{4} \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} - 0 \right) \left(3 - \frac{4}{3} \frac{3}{\pi} - 0 \right) \right] + \dots$$

$$\dots + \left[+ \frac{1^2 \cdot 3^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot (2-0) \left(3 + \frac{1}{3} - 0 \right) \right] = 27,000 \text{ cm}^4$$

Kąt nachylenia prostej AB do osi X: $\phi = \arctg \frac{2}{5} \approx 21,801^\circ$

Moment bezwładności względem prostej AB:

$$I_{AB}(A) = I_X(A) \cos^2 \phi + I_Y(A) \sin^2 \phi - D_{XY}(A) \sin(2\phi) = 6,739 \text{ cm}^4$$

Równie dobrze można by było wyznaczać moment bezwładności względem prostej AB na podstawie składowych tensora momentu bezwładności wyznaczonych w punkcie B:

$$I_X(B) = \left[\frac{\pi 3^4}{16} - \frac{\pi 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} - 2 \right)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 3^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot (2-2)^2 \right] = 8,929 \text{ cm}^4$$

$$I_Y(B) = \left[\frac{\pi 3^4}{16} - \frac{\pi 3^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi 3^2}{4} \cdot \left(3 - \frac{4}{3} \frac{3}{\pi} - 5 \right)^2 \right] + \left[\frac{3 \cdot 1^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left(3 + \frac{1}{3} - 5 \right)^2 \right] = 84,429 \text{ cm}^4$$

$$D_{XY}(B) = \left[-\frac{3^4}{8} - \frac{\pi 3^2}{4} \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} \right) \left(-\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} \right) + \frac{\pi 3^2}{4} \left(\frac{4}{3} \frac{3}{\pi} - 2 \right) \left(3 - \frac{4}{3} \frac{3}{\pi} - 5 \right) \right] + \dots$$

$$\dots + \left[+\frac{1^2 \cdot 3^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot (2-2) \left(3 + \frac{1}{3} - 5 \right) \right] = 18,274 \text{ cm}^4$$

Moment bezwładności względem prostej AB:

$$I_{AB}(B) = I_X(B) \cos^2 \phi + I_Y(B) \sin^2 \phi - D_{XY}(B) \sin(2\phi) = 6,739 \text{ cm}^4$$