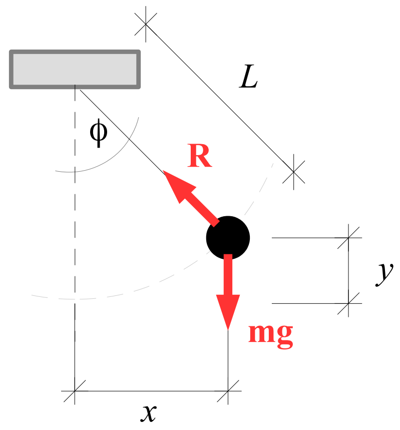
ZADANIA

II zasada dynamiki Newtona:	1, 2, 4
Zasada d'Alemberta:	1, 2, 4, 5, 12
Równania Lagrange'a I rodzaju:	2, 4
Równania Lagrange'a II rodzaju:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
Równania Hamiltona:	1, 2, 7, 11
Zasada najmniejszego działania:	2, 4
Zasada zachowania energii:	1, 4

ZADANIE 1



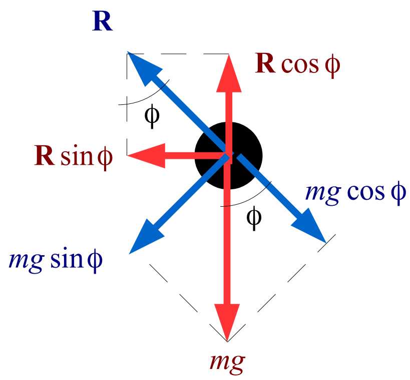
Wyznacz równanie ruchu masy *m* umieszczonej na końcu \ sztywnego wahadła o długości *L* korzystając z:

a) Zasad dynamiki Newtona
b) Zasady d'Alemberta
c) Zasady zachowania energii
d) Równań Lagrange'a II rodzaju
e) Równań Hamiltona

ROZWIĄZANIE:

Układ posiada tylko jeden stopień swobody.

AD a) – II ZASADA DYNAMIKI NEWTONA



Z geometrii układu wynika, że:

$$\begin{cases} x(t) = L\sin\phi(t) \\ y(t) = L(1-\cos\phi(t)) \end{cases}$$

Stąd:

$$\begin{cases} \dot{x} = L\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{y} = L\dot{\phi}\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = L\left[\ddot{\phi}\cos\phi - (\dot{\phi})^2\sin\phi\right] \\ \ddot{y} = L\left[\ddot{\phi}\sin\phi + (\dot{\phi})^2\cos\phi\right] \end{cases}$$

W II zasadzie dynamiki Newtona musimy uwzględnić wpływ wszystkich sił działających na ciało – w tym, **sił reakcji** $\mathbf{R}$. Ruch odbywa się po okręgu – na tej podstawie powinniśmy wyznaczyć nieznaną siłę reakcji w wahadle. Zagadnienie to nie jest jednak proste – siła **R** nie może jedynie równoważyć składowej ciężaru na kierunku wahadła, ponieważ wtedy masa musiałaby poruszać się po linii prostej. Wiemy, że w przypadku ruchu po okręgu zakrzywienie toru spowodowane jest obecnością siły dośrodkowej $\mathbf{F}_R$. Musielibyśmy mieć zatem:

$$R = mg\cos\phi + F_R$$

Nie umiemy jednak podać wartości tej siły, ponieważ znany powszechnie **wzór:**

$$F_R = \frac{mv^2}{L}$$

obowiązuje jedynie w przypadku ruchu po okręgu ze stałą prędkością kątową. W przypadku ruchu wahadła prędkość ta zmienia się w czasie. Możemy jedynie napisać, że siła dośrodkowa jest pewną funkcją czasu $F_R(t)$. Rozkładając się reakcji na składowe i uwzględniając obecność siły ciężkości, suma sił na kierunku poziomym i pionowym jest równa:

$$\sum_i (F_{ix}+R_{ix}) = -mg\cos\phi\sin\phi - F_R\sin\phi$$

$$\sum_i (F_{iy}+R_{iy}) = -mg + mg\cos^2\phi + F_R\cos\phi$$

Równania ruchu wyznaczamy z II zasady dynamiki Newtona:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg\cos\phi\sin\phi - F_R\sin\phi \\ m\ddot{y} = -mg + mg\cos^2\phi + F_R\cos\phi \end{cases}$$

Wyrażając przyspieszenia pionowe i poziome przez przyspieszenie kątowe otrzymujemy:

$$\begin{cases} L\left[\ddot{\phi}\cos\phi - (\dot{\phi})^2\sin\phi\right] = -g\cos\phi\sin\phi - \frac{F_R}{m}\sin\phi \\ L\left[\ddot{\phi}\sin\phi + (\dot{\phi})^2\cos\phi\right] = -g + g\cos^2\phi + \frac{F_R}{m}\cos\phi \end{cases}$$

Możemy zrzutować obydwie zależności na kierunek prostopadły do osi wahadła (styczny do toru) mnożąc pierwsze równanie przez $\cos\phi$ drugie zaś przez $\sin\phi$:

$$\begin{cases} \ddot{\phi}\cos^2\phi - (\dot{\phi})^2\cos\phi\sin\phi = -\frac{g}{L}\cos^2\phi\sin\phi - \frac{F_R}{mL}\sin\phi\cos\phi \\ \ddot{\phi}\sin^2\phi + (\dot{\phi})^2\cos\phi\sin\phi = -\frac{g}{L}\sin\phi + \frac{g}{L}\cos^2\phi\sin\phi + \frac{F_R}{mL}\sin\phi\cos\phi \end{cases}$$

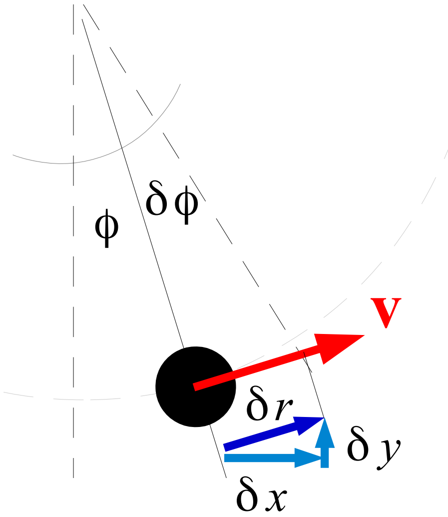
Dodając równania do siebie otrzymujemy:

$$\ddot{\phi}(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = -\frac{g}{L}\sin\phi$$

Skąd po wykorzystaniu wzoru na jedynkę trygonometryczną otrzymujemy równanie ruchu:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\sin\phi = 0$$

AD b) – ZASADA D'ALEMBERTA



Wyznaczamy siły czynne i siły bezwładności dzia
wyznaczyć siły bezwładności musimy
przyspieszenia – z geometrii układu:

$$\begin{cases} x(t) = L\sin\phi(t) \\ y(t) = L(1-\cos\phi(t)) \end{cases}$$

Stąd:

$$\begin{cases} \dot{x} = L\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{y} = L\dot{\phi}\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = L\left[\ddot{\phi}\cos\phi-(\dot{\phi})^2\sin\phi\right] \\ \ddot{y} = L\left[\ddot{\phi}\sin\phi+(\dot{\phi})^2\cos\phi\right] \end{cases}$$

Siły bezwładności rzutujemy następnie na kierunek poziomy i pionowy:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = -mg \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = -m\ddot{x} = -mL\left[\ddot{\phi}\cos\phi-(\dot{\phi})^2\sin\phi\right] \\ B_y = -m\ddot{y} = -mL\left[\ddot{\phi}\sin\phi+(\dot{\phi})^2\cos\phi\right] \end{cases}$$

Dopuszczalne przemieszczenie jest równoległe do wektora prędkości stycznej:

$$\delta r = L\,\delta\phi$$

Rzutujemy je na kierunek poziomy i pionowy:

$$\begin{cases} \delta x = \delta r\cos\phi = L\cos\phi\,\delta\phi \\ \delta y = \delta r\sin\phi = L\sin\phi\,\delta\phi \end{cases}$$

Praca wirtualna:

$$\delta L = (\mathbf{B}+\mathbf{F})\circ\delta\mathbf{r} = (B_x+F_x)\delta x+(B_y+F_y)\delta y = 0$$

$$\left[-mL\left(\ddot{\phi}\cos\phi-(\dot{\phi})^2\sin\phi\right)\right]\cdot(L\cos\phi\,\delta\phi)+\left[-mg-mL\left(\ddot{\phi}\sin\phi+(\dot{\phi})^2\cos\phi\right)\right]\cdot(L\sin\phi\,\delta\phi) = 0 \qquad \forall\,\delta\phi$$

$$\left[-mL^2\ddot{\phi}\cos^2\phi + mL^2(\dot{\phi})^2\sin\phi\cos\phi - mgL\sin\phi - mL^2\ddot{\phi}\sin^2\phi - mL^2(\dot{\phi})^2\sin\phi\cos\phi\right]\delta\phi=0 \qquad \forall\,\delta\phi$$

$$-mL^2\left[\ddot{\phi}(\sin^2\phi+\cos^2\phi) + \frac{g}{L}\sin\phi\right]\delta\phi=0 \quad \forall\,\delta\phi$$

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{L}\sin\phi = 0$$

AD c) – ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

Masa skupiona na końcu wahadła posiada prędkość liniową $\dot{r}$, którą możemy wyrazić poprzez prędkość kątową $\dot{r} = \dot{\phi} L$. **Energia kinetyczna** jest zatem równa:

$$E_k = \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 = \frac{mL^2}{2} (\dot{\phi})^2$$

Energię potencjalną stanowi energia potencjalna pola sił grawitacji:

$$E_p = mgy = mg L (1 - \cos\phi)$$

Energia całkowita jest równa:

$$E = \frac{mL^2}{2} (\dot{\phi})^2 + mg L (1 - \cos\phi)$$

Z zasady zachowania energii otrzymujemy równanie ruchu pamiętając, że droga kątowa ϕ jest funkcją czasu:

$$\frac{\mathrm{d} E}{\mathrm{d} t} = m L^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} + mg L \dot{\phi} \sin\phi = 0$$

co jest równoważne równaniu:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L} \sin\phi = 0$$

AD d) – RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

Jako **współrzędną uogólnioną** przyjmujemy kąt wychylenia wahadła: $q = \phi$

Wektor położenia: $\mathbf{r} = \begin{cases} x = L \sin q \\ y = L(1 - \cos q) \end{cases}$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \dot{x} = L \dot{q} \cos q \\ \dot{y} = L \dot{q} \sin q \end{cases}$

Energia kinetyczna: $E_k = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}})^2 = \frac{mL^2 (\dot{q})^2}{2} (\cos^2 q + \sin^2 q) = \frac{mL^2 (\dot{q})^2}{2}$

Obciążenie stanowi jedna siła czynna:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = -mg \end{cases}$$

Siła uogólniona: $Q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \circ \mathbf{F} = (L \cos q) \cdot 0 + (L \sin q) \cdot (-mg) = -mgL \sin q$

Równanie Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{mL^2(\dot{q})^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{mL^2(\dot{q})^2}{2}\right)=-mgL\sin q$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mL^2\dot{q}\right]=-mgL\sin q$$

$$mL^2\ddot{q}=-mgL\sin q$$

Podstawiając $q=\phi$:

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{L}\sin\phi=0$$

Ponieważ siła grawitacji jest **siłą potencjalną,** zatem zadanie można rozwiązać stosując szczególną postać równań Lagrange'a dla ruchu w potencjalnym polu sił. W tym celu wyznaczamy energię potencjalną:

$$E_p=mgy=mg\,L(1-\cos q)$$

Definiujemy **lagranżjan**:

$$\mathscr{L}=E_k-E_p=\frac{mL^2(\dot{q})^2}{2}-mgL(1-\cos q)$$

Równania Lagrange'a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{mL^2(\dot{q})^2}{2}-mgL(1-\cos q)\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{mL^2(\dot{q})^2}{2}-mgL(1-\cos q)\right)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mL^2\dot{q})-(-mgL\sin q)=0$$

$$mL^2\ddot{q}+mgL\sin q=0$$

Podstawiając $q=\phi$:

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{L}\sin\phi=0$$

AD e) – RÓWNANIA HAMILTONA

Jako **współrzędną uogólnioną** przyjmujemy kąt wychylenia wahadła: $q=\phi$

Wektor położenia: $\mathbf{r}=\begin{cases}x=L\sin q\\ y=L(1-\cos q)\end{cases}$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}}=\begin{cases}\dot{x}=L\dot{q}\cos q\\ \dot{y}=L\dot{q}\sin q\end{cases}$

Energia kinetyczna: $E_k=\frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2=\frac{mL^2(\dot{q})^2}{2}(\cos^2 q+\sin^2 q)=\frac{mL^2(\dot{q})^2}{2}$

Energia potencjalna: $E_p=mgy=mg\,L(1-\cos q)$

Lagranżjan: $$L = E_k - E_p = \frac{mL^2(\dot{q})^2}{2} - mgL(1-\cos q)$$

Pęd uogólniony: $$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = mL^2\dot{q}$$

Prędkość uogólniona jako funkcja pędu uogólnionego: $\dot{q} = \dfrac{p}{mL^2}$

Hamiltonian: $$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{mL^2} - \left[\frac{1}{2mL^2}p^2 - mgL(1-\cos q)\right] =$$
$$= \frac{p^2}{2mL^2} + mgL(1-\cos q)$$

Równania Hamiltona: $$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -mgL\sin q \\ \dot{q} = \dfrac{p}{mL^2} \end{cases}$$

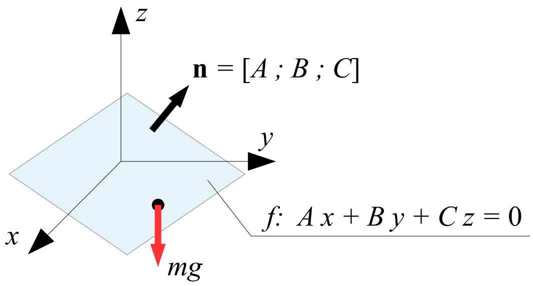
ZADANIE 2

Punkt materialny o masie *m* pod wpływem siły ciężkości może poruszać się po płaszczyźnie *f* danej równaniem:

$$f: \quad A\,x+B\,y+C\,z=0$$

Wyznaczyć równania ruchu dla tego punktu wykorzystując:

a) II zasadę dynamiki Newtona
b) Zasadę d'Alemberta
c) Równania Lagrange'a I rodzaju
d) Równania Lagrange'a II rodzaju
e) Równania Hamiltona
f) Zasadę najmniejszego działania



ROZWIĄZANIE:

Punkt materialny poruszający się po powierzchni ma 2 stopnie swobody.

AD a) – II ZASADA DYNAMIKI NEWTONA

Aby wykorzystać II zasadę dynamiki Newtona, musimy wyznaczyć wszystkie siły działające na punkt, w tym również nieznaną siłę reakcji, która utrzymuje punkt na płaszczyźnie. Siła ta, jako siła bierna, która nie wykonuje pracy na przemieszczeniu, będzie zawsze prostopadła do powierzchni, a zatem równoległa (proporcjonalna) do gradientu tej powierzchni:

Siła reakcji: $\mathbf{R}=\alpha\cdot\mathrm{grad}\,f=\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial x}\,;\,\frac{\partial f}{\partial y}\,;\,\frac{\partial f}{\partial z}\right]=[\alpha A\,;\,\alpha B\,;\,\alpha C]$

Siła czynna od pola grawitacyjnego: $\mathbf{F}=[0\,;\,0\,;\,-mg]$

Równania ruchu otrzymujemy z II zasady dynamiki Newtona:

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}+\mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}=\alpha A \\ m\ddot{y}=\alpha B \\ m\ddot{z}=\alpha C-mg \end{cases}$$

Nieznany współczynnik proporcjonalności wyznaczamy z równania powierzchni różniczkując je dwukrotnie względem czasu i wyrażając odpowiednie pochodne przez siły zgodnie z zapisaną II zasadą Newtona:

$$A\ddot{x}+B\ddot{y}+C\ddot{z}=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha A^2+\alpha B^2+\alpha C^2-Cmg=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{Cmg}{A^2+B^2+C^2}$$

Z równości powyższej wynika również, że

$$\ddot{z}=-\frac{A\ddot{x}+B\ddot{y}}{C}$$

Podstawiając obydwa wyniki do równań ruchu:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{y} = \dfrac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \\ -\dfrac{A\ddot{x}+B\ddot{y}}{C} = \dfrac{C^2 g}{A^2+B^2+C^2} - g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{y} = \dfrac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \\ A\ddot{x}+B\ddot{y} = \dfrac{C(A^2+B^2)g}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

Możemy jednak zauważyć, że równania te nie są niezależne. Mnożąc pierwsze równanie przez *A*, drugie przez *B* i dodając je do siebie otrzymujemy równanie trzecie – jeśli zatem pierwsza dwa są spełnione, to i trzecie jest spełnione. Równania ruchu przyjmują zatem postać:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{y} = \dfrac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

AD b) – ZASADA D'ALEMBERTA

Jako niezależne stopnie swobody przyjmujemy współrzędne na płaszczyźnie (*x,y*). Wektor położenia jest więc równy:

$$\mathbf{r} = \left[x \ ; \ y \ ; \ -\frac{A x + B y}{C} \right]$$

Wyznaczamy siły czynne i siły bezwładności działające na punkt materialny.

Siły czynne: $\mathbf{F} = [0 \ ; \ 0 \ ; \ -mg]$

Siły bezwładności: $\mathbf{B} = -m\ddot{\mathbf{r}} = \left[-m\ddot{x} \ ; \ -m\ddot{y} \ ; \ \dfrac{m}{C}(A\ddot{x}+B\ddot{y}) \right]$

Przemieszczenie dopuszczalne punktu jest dowolnym przemieszczeniem leżącym na płaszczyźnie *f*.

Przemieszczenie dopuszczalne: $\delta\mathbf{r} = [\delta x \ ; \ \delta y \ ; \ \delta z]$

Wyznaczyć je możemy jako dowolny wektor prostopadły do wektora prostopadłego do tej płaszczyzny – ten zaś jest gradientem funkcji:

Wektor prostopadły do *f*: $\mathbf{n} = \operatorname{grad} f = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x} \ ; \ \dfrac{\partial f}{\partial y} \ ; \ \dfrac{\partial f}{\partial z} \right] = [A \ ; \ B \ ; \ C]$

Warunek prostopadłości wektorów:

$$\delta\mathbf{r} \circ \mathbf{n} = A\delta x + B\delta y + C\delta z = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta z = -\frac{1}{C}(A\delta x + B\delta y)$$

Przemieszczenie dopuszczalne: $\delta \mathbf{r} = \left[\delta x \; ; \; \delta y \; ; \; -\frac{1}{C}(A\delta x + B\delta y)\right]$

Praca wirtualna:

$$\delta L = (\mathbf{F}+\mathbf{B})\circ\delta\mathbf{r} = \left[-m\ddot{x} \; ; \; -m\ddot{y} \; ; \; \frac{m}{C}(A\ddot{x}+B\ddot{y})-mg\right]\circ\left[\delta x \; ; \; \delta y \; ; \; -\frac{1}{C}(A\delta x+B\delta y)\right] = 0 \quad \forall \delta x, \delta y$$

$$\left[\ddot{x}+\frac{A}{C}\left(\frac{1}{C}(A\ddot{x}+B\ddot{y})\right)-g\right]\delta x + \left[\ddot{y}+\frac{B}{C}\left(\frac{1}{C}(A\ddot{x}+B\ddot{y})-g\right)\right]\delta y = 0 \quad \forall \delta x, \delta y$$

Równania ruchu:

$$\begin{cases} \left(1+\frac{A^2}{C^2}\right)\ddot{x}+\frac{AB}{C^2}\ddot{y} = \frac{A}{C}g \\ \left(1+\frac{B^2}{C^2}\right)\ddot{y}+\frac{AB}{C^2}\ddot{x} = \frac{B}{C}g \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań z uwagi na $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$ daje:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{y} = \frac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

AD c) – RÓWNANIA LAGRANGE'A I RODZAJU

Aby wyznaczyć równanie ruchu z wykorzystaniem równań Lagrange'a I rodzaju potrzebujemy znać siły czynne działające na punkt, oraz równania więzów.

Siły czynne: $\mathbf{F} = [0 \; ; \; 0 \; ; \; -mg]$
Równania więzów: $f(x,y,z) = Ax+By+Cz = 0$

Mamy tylko jedno równanie więzów – wprowadzamy zatem jeden mnożnik Lagrange'a λ

Równania Lagrange'a I rodzaju:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} = F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{A\lambda}{m} \\ \ddot{y} = \frac{B\lambda}{m} \\ \ddot{z} = -g+\frac{C\lambda}{m} \end{cases}$$

Mamy dodatkowo **równanie więzów** – po dwukrotnym jego zróżniczkowaniu:

$$A\ddot{x}+B\ddot{y}+C\ddot{z} = 0$$

Uwzględniając zależności wynikające z równań Lagrange'a:

$$\frac{1}{m}\left[A^2\lambda+B^2\lambda+C^2\lambda-C\,mg\right]=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=\frac{C\,mg}{A^2+B^2+C^2}$$

Ze zróżniczkowanego równania więzów wynika również, że

$$\ddot{z}=-\frac{A\ddot{x}+B\ddot{y}}{C}$$

Podstawiając obydwa wyniki do równań ruchu:

$$\begin{cases} \ddot{x}=\dfrac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{y}=\dfrac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \\ -\dfrac{A\ddot{x}+B\ddot{y}}{C}=\dfrac{C^2 g}{A^2+B^2+C^2}-g \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \ddot{x}=\dfrac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{y}=\dfrac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \\ A\ddot{x}+B\ddot{y}=\dfrac{C\left(A^2+B^2\right)g}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

Możemy jednak zauważyć, że równania te nie są niezależne. Mnożąc pierwsze równanie przez *A*, drugie przez *B* i dodając je do siebie otrzymujemy równanie trzecie – jeśli zatem pierwsza dwa są spełnione, to i trzecie jest spełnione. Równania ruchu przyjmują zatem postać:

$$\begin{cases} \ddot{x}=\dfrac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{y}=\dfrac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

AD d) – RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

Współrzędne uogólnione: $q_1=x\,,\quad q_2=y$

Wektor położenia punktu na płaszczyźnie *f*: $\mathbf{r}=\left[q_1\,;\,q_2\,;\,-\dfrac{A\,q_1+B\,q_2}{C}\right]$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}}=\left[\dot{q}_1\,;\,\dot{q}_2\,;\,-\dfrac{A\,\dot{q}_1+B\,\dot{q}_2}{C}\right]$

Energia kinetyczna układu: $E_k=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{r}}\right)^2=\dfrac{m}{2}\left[\left(\dot{q}_1\right)^2+\left(\dot{q}_2\right)^2+\dfrac{1}{C^2}\left(A\,\dot{q}_1+B\,\dot{q}_2\right)^2\right]$

Ruch odbywa się pod wpływem potencjalnego pola sił.

Energia potencjalna: $E_p=mgz=-\dfrac{mg}{C}\left(A\,q_1+B\,q_2\right)$

Lagnrażjan: $$\mathscr{L} = E_k - E_p = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2+(\dot{q}_2)^2+\frac{1}{C^2}(A\dot{q}_1+B\dot{q}_2)^2\right] + \frac{mg}{C}(Aq_1+Bq_2)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_1}\right)-\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_2}\right)-\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{m}{2}\left(2\dot{q}_1+\dfrac{1}{C^2}(2A^2\dot{q}_1+2AB\dot{q}_2)\right)\right]-\dfrac{A}{C}mg = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{m}{2}\left(2\dot{q}_2+\dfrac{1}{C^2}(2AB\dot{q}_1+2B^2\dot{q}_2)\right)\right]-\dfrac{B}{C}mg = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1+\dfrac{1}{C^2}(A^2\ddot{q}_1+AB\ddot{q}_2)-\dfrac{A}{C}g = 0 \\ \ddot{q}_2+\dfrac{1}{C^2}(AB\ddot{q}_1+B^2\ddot{q}_2)-\dfrac{B}{C}g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(1+\dfrac{A^2}{C^2}\right)\ddot{q}_1+\dfrac{AB}{C^2}\ddot{q}_2 = \dfrac{A}{C}g \\ \left(1+\dfrac{B^2}{C^2}\right)\ddot{q}_2+\dfrac{AB}{C^2}\ddot{q}_1 = \dfrac{B}{C}g \end{cases}$$

Podstawiając $q_1 = x\,,\ q_2 = y$ uzyskujemy takie same równania jak w poprzednio.

AD e) – RÓWNANIA HAMILTONA

Współrzędne uogólnione: $q_1 = x\,,\quad q_2 = y$

Wektor położenia punktu na płaszczyźnie *f*: $\mathbf{r} = \left[q_1\ ;\ q_2\ ;\ -\dfrac{Aq_1+Bq_2}{C}\right]$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}} = \left[\dot{q}_1\ ;\ \dot{q}_2\ ;\ -\dfrac{A\dot{q}_1+B\dot{q}_2}{C}\right]$

Energia kinetyczna układu: $$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2+(\dot{q}_2)^2+\frac{1}{C^2}(A\dot{q}_1+B\dot{q}_2)^2\right]$$

Ruch odbywa się pod wpływem potencjalnego pola sił.

Energia potencjalna: $$E_p = mgz = -\frac{mg}{C}(Aq_1+Bq_2)$$

Lagranżjan: $$L = E_k-E_p = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2+(\dot{q}_2)^2+\frac{1}{C^2}(A\dot{q}_1+B\dot{q}_2)^2\right] + \frac{mg}{C}(Aq_1+Bq_2) =$$
$$= \frac{m}{2}\left[\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right)\dot{q}_1^2+\left(1+\frac{B^2}{C^2}\right)\dot{q}_2^2+\frac{2AB}{C^2}\dot{q}_1\dot{q}_2\right] + \frac{mg}{C}(Aq_1+Bq_2)$$

Pędy uogólnione: $$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right)\dot{q}_1+m\frac{AB}{C^2}\dot{q}_2$$
$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\left(1+\frac{B^2}{C^2}\right)\dot{q}_2+m\frac{AB}{C^2}\dot{q}_1$$

Z równań powyższych wyznaczamy prędkości uogólnione:

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1(B^2+C^2)-p_2 AB}{m(A^2+B^2+C^2)} \qquad \dot{q}_2 = \frac{p_2(A^2+C^2)-p_1 AB}{m(A^2+B^2+C^2)}$$

Hamiltonian: $$H(q_1,q_2,p_1,p_2) = \sum_j^2 p_j\cdot\dot{q}_j(p_1,p_2) - L(q_1,q_2,\dot{q}_1(p_1,p_2),\dot{q}_2(p_1,p_2)) =$$
$$= \frac{(B^2+C^2)p_1^2+(A^2+C^2)p_2^2-2AB\,p_1 p_2}{2m(A^2+B^2+C^2)} - \frac{mg}{C}(Aq_1+Bq_2)$$

Równania ruchu uzyskujemy z równań Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} \\ \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = mg\cdot\dfrac{A}{C} \\ \dot{p}_2 = mg\cdot\dfrac{B}{C} \\ \dot{q}_1 = \dfrac{(B^2+C^2)p_1-AB\,p_2}{m(A^2+B^2+C^2)} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{(A^2+C^2)p_2-AB\,p_1}{m(A^2+B^2+C^2)} \end{cases}$$

AD f) – ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

Tok postępowania przy wyznaczaniu lagranżjanu jest identyczny jak w przypadku zastosowania równań Lagrange'a II rodzaju i równań Hamiltona. Mamy więc:

$$L = \frac{m}{2}\left[\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right)\dot{q}_1^2+\left(1+\frac{B^2}{C^2}\right)\dot{q}_2^2+\frac{2AB}{C^2}\dot{q}_1\dot{q}_2\right]+\frac{mg}{C}(Aq_1+Bq_2)$$

Całka działania:

$$S[q_1,q_2] = \int_{t_0}^{t}\left[\frac{m}{2}\left[\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right)\dot{q}_1^2+\left(1+\frac{B^2}{C^2}\right)\dot{q}_2^2+\frac{2AB}{C^2}\dot{q}_1\dot{q}_2\right]+\frac{mg}{C}(Aq_1+Bq_2)\right]\mathrm{d}\tau$$

Działanie przyjmie wartość najmniejszą, gdy jego wariacja będzie równa 0. Ponieważ funkcja podcałkowa zależy od dwóch funkcji będących zmiennymi niezależnymi funkcjonału oraz od ich pierwszych pochodnych, obliczymy liniową część przyrostu całego funkcjonału δS (tj. jego wariację) jako sumę wariacji związanych ze zmiennością każdej z tych zmiennych:

$$\delta S = \int_{t_0}^{0}\left[\frac{\partial L}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\frac{\partial L}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\delta\dot{q}_2\right]\mathrm{d}\tau$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{0} \left[\left(\frac{A}{C} mg \right) \delta q_1 + \left[\left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) m \dot{q}_1 + \frac{mAB}{C^2} \dot{q}_2 \right] \delta \dot{q}_1 + \left(\frac{B}{C} mg \right) \delta q_2 + \left[\left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) m \dot{q}_2 + \frac{mAB}{C^2} \dot{q}_1 \right] \delta \dot{q}_2 \right] \mathrm{d}\tau$$

Całki zawierające wariację funkcjonału względem prędkości uogólnionych obliczymy całkując przez części:

$$\int_{t_0}^{t} m \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) \dot{q}_1 \delta \dot{q}_1 \, \mathrm{d}\tau = \left| \begin{matrix} f = \dot{q}_1 & f' = \ddot{q}_1 \\ g' = \delta \dot{q}_1 & g = \delta q_1 \end{matrix} \right| = m \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) \left[\left(\dot{q}_1 \delta q_1 \right) \Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \ddot{q}_1 \delta q_1 \, \mathrm{d}\tau \right]$$

Człon zależny od wartości brzegowych jest równy 0, ponieważ wariacje δq zawsze dobierane są w taki sposób, aby $\delta q(t_0) = \delta q(t) = 0$ – chodzi bowiem o wariację funkcji pomiędzy punktami brzegowymi, które są ustalone. Mamy zatem:

$$\int_{t_0}^{t} m \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) \dot{q}_1 \delta \dot{q}_1 \, \mathrm{d}\tau = - \int_{t_0}^{t} m \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) \ddot{q}_1 \delta q_1 \, \mathrm{d}\tau$$

w taki sam sposób obliczamy pozostałe całki zależne od prędkości uogólnionych:

$$\int_{t_0}^{t} m \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) \dot{q}_2 \delta \dot{q}_2 \, \mathrm{d}\tau = - \int_{t_0}^{t} m \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) \ddot{q}_2 \delta q_2 \, \mathrm{d}\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{mAB}{C^2} \dot{q}_2 \delta \dot{q}_1 \, \mathrm{d}\tau = - \int_{t_0}^{t} \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_2 \delta q_1 \, \mathrm{d}\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{mAB}{C^2} \dot{q}_1 \delta \dot{q}_2 \, \mathrm{d}\tau = - \int_{t_0}^{t} \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_1 \delta q_2 \, \mathrm{d}\tau$$

Podstawiając to do wariacji działania i wyłączając wariacje δq_1 oraz δq_2 przed nawias otrzymujemy:

$$\delta S = \int_{t_0}^{0} \left[\left[\left(\frac{A}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_1 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_2 \right] \delta q_1 + \left[\left(\frac{B}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_2 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_1 \right] \delta q_2 \right] \mathrm{d}\tau$$

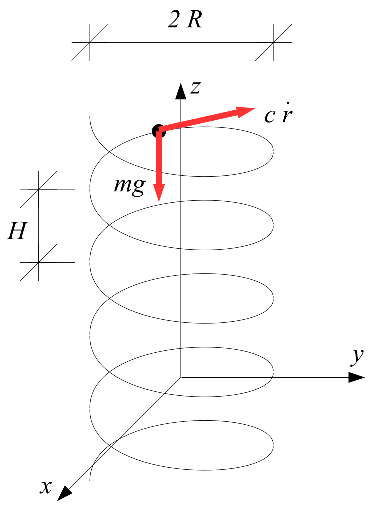
Z zasady najmniejszego działania mamy $\delta S = 0$ dla dowolnego δq_1 oraz δq_2, stąd:

$$\begin{cases} \left(\frac{A}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_1 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_2 = 0 \\ \left(\frac{B}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_2 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_1 = 0 \end{cases},$$

co jest równoważne z wynikami uzyskanymi z pozostałych metod.

ZADANIE 3

Wyznacz równania ruchu punktu materialnego o masie *m*, poruszającego się pod wpływem grawitacji po linii śrubowej o osi pionowej, o promieniu *R* i skoku *H*, przy czym na punkt działa siła oporu ośrodka, w którym się on porusza, która jest proporcjonalna do jego prędkości. Skorzystaj z równań Lagrange'a II rodzaju.



ROZWIĄZANIE:

Punkt poruszający się po krzywej ma jeden stopień swobody. **Równania parametryczne linii śrubowej**:

$$\mathbf{r}(\lambda)=\begin{cases} x = R\cos\lambda \\ y = R\sin\lambda \\ z = \lambda\cdot\dfrac{H}{2\pi}\end{cases}$$

Jest to zarazem **wektor położenia** punktu materialnego, poruszającego się po tej linii – parametr krzywej może być przyjęty jako współrzędna uogólniona $q=\lambda$. Wyznaczamy wektor **prędkości**:

$$\mathbf{r}=\begin{cases} x = R\cos q \\ y = R\sin q \\ z = q\cdot\dfrac{H}{2\pi}\end{cases} \qquad \dot{\mathbf{r}}=\begin{cases} \dot{x} = -R\dot{q}\sin q \\ \dot{y} = R\dot{q}\cos q \\ \dot{z} = \dot{q}\cdot\dfrac{H}{2\pi}\end{cases}$$

Wyznaczamy **energię kinetyczną** punktu: $$E_k=\frac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2}=\frac{m(\dot{q})^2}{2}\left[R^2+\frac{H^2}{4\pi^2}\right]$$

Siła grawitacji jest siłą zachowawczą, jednak siła oporu już nie, tj. ponieważ zależy ona od prędkości punktu a nie jedynie od jego położenia, zatem nie istnieje dla niego potencjał. Siła oporu rozprasza energię układu, więc nie jest ona zachowana. Ponieważ punkt porusza się pod wpływem sił niezachowawczych, nie możemy sformułować rozwiązania z wykorzystaniem lagranżjanu – musimy wyznaczyć siły uogólnione.

Siły działające na punkt:

- **siła ciężkości:** $\mathbf{F}_g=[0\ ;\ 0\ ;\ -mg]$
- **siła oporu:** $\mathbf{F}_o=-c\,\dot{\mathbf{r}}$
- **wypadkowa**: $\mathbf{F}=\mathbf{F}_g+\mathbf{F}_o=\left[cR\dot{q}\sin q\ ;\ -cR\dot{q}\cos q\ ;\ -\dot{q}\dfrac{H}{2\pi}-mg\right]$

Siła uogólniona:

$$Q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \circ \mathbf{F} = (-R\sin q)(cR\dot{q}\sin q) + (R\cos q)\cdot(-cR\dot{q}\cos q) + \left(\frac{H}{2\pi}\right)\cdot\left(-\dot{q}\frac{H}{2\pi} - mg\right) =$$

$$= -\left[\dot{q}\left(cR^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right) + \frac{mgH}{2\pi}\right]$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\dot{q}\left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right)\right] - 0 = -\left[\dot{q}\left(cR^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right) + \frac{mgH}{2\pi}\right]$$

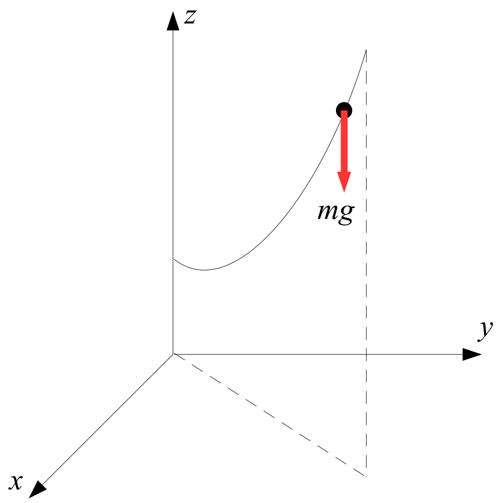
Ostatecznie:

$$m\ddot{q}\left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right) + \dot{q}\left(cR^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right) + \frac{mgH}{2\pi} = 0$$

ZADANIE 4

Wyznacz równania ruchu punktu o masie *m* poruszającego się po krzywej danej równaniami parametrycznymi:

$$K: \begin{cases} x(\lambda) = \lambda \\ y(\lambda) = \lambda \\ z(\lambda) = 3\lambda^2 + 1 \end{cases}$$



korzystając z:

a) II zasady dynamiki Newtona
b) Zasady zachowania energii
c) Zasady d'Alemberta
d) Równań Lagrange'a I rodzaju
e) Równań Lagrange'a II rodzaju
f) Zasady najmniejszego działania

ROZWIĄZANIE:

Punkt poruszający się po krzywej ma jeden stopień swobody.

AD a) – II ZASADA DYNAMIKI NEWTONA

Aby móc skorzystać z II zasady dynamiki Newtona, musimy znać wszystkie siły działające na rozpatrywany układ mechaniczny. Znamy siłę czynną,

$$\mathbf{F} = [0\ ;\ 0\ ;\ -mg]$$

którą jest siła pola grawitacyjnego, nie znamy jednak biernej siły reakcji utrzymującej punkt na zadanej krzywej. Wiemy, że jako siła bierna, nie wykonuje ona żadnej pracy na kolejnych przyrostach przemieszczeniach. Każdy przyrost przemieszczenia będzie wektorem stycznym do toru, czyli do krzywej, po której porusza się punkt. Będzie zatem jednocześnie równoległy do wektora prędkości – siłą reakcji musi być zatem prostopadła do wektora prędkości w każdej chwili ruchu.

Wektor położenia w dowolnej chwili *t* wyznaczymy z parametrycznych równań krzywej:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \lambda(t) \\ y(t) = \lambda(t) \\ z(t) = 3\lambda^2(t) + 1 \end{cases}$$

Wektor prędkości i przyspieszenia wyznaczymy różniczkując wektor położenia, pamiętając, że parametr λ opisujący położenie punktu na krzywej jest funkcją czasu:

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{\lambda} \\ \dot{y}(t) = \dot{\lambda} \\ \dot{z}(t) = 6\lambda\dot{\lambda} \end{cases} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \ddot{x}(t) = \ddot{\lambda} \\ \ddot{y}(t) = \ddot{\lambda} \\ \ddot{z}(t) = 6(\dot{\lambda})^2 + 6\lambda\ddot{\lambda} \end{cases}$$

Nieznana siła reakcji spełnia równanie: $\mathbf{R}\circ\dot{\mathbf{r}} = 0 \quad \Rightarrow \qquad R_x\dot{\lambda} + R_y\dot{\lambda} + 6R_z\lambda\dot{\lambda} = 0$

Zmniejsza ono liczbę nieznanych składowych reakcji z 3 do 2. Możemy bowiem napisać:

$$\mathbf{R} = \left[\alpha\ ;\ \beta\ ;\ -\frac{\alpha+\beta}{6\lambda}\right]$$

gdzie α,β są pewnymi nieznanymi parametrami, które musimy wyznaczyć. Zapiszmy tymczasem równania ruchu zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}+\mathbf{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} m\,\ddot{x}(t) = \alpha \\ m\,\ddot{y}(t) = \beta \\ m\,\ddot{z}(t) = -mg-\dfrac{\alpha+\beta}{6\lambda} \end{cases}$$

Jeśli porównany wyrażenia na przyspieszenie wynikające z różniczkowania wektora położenia punktu na krzywej oraz z II zasady dynamiki Newtona, otrzymamy:

$$\begin{cases} \alpha = \ddot{\lambda}m \\ \beta = \ddot{\lambda}m \\ -g-\dfrac{\alpha+\beta}{6\lambda m} = 6(\dot{\lambda})^2+6\lambda\ddot{\lambda} \end{cases}$$

Pamiętając przy tym, że $\lambda = x$ od razu znajdujemy składowe siły reakcji w dowolnej chwili ruchu $\alpha = \beta = m\ddot{x}(t)$. Samą zaś funkcję $x(t)$ opisującą ruch punktu, wyznaczamy na podstawie trzeciego z równań, które staje się tym samym poszukiwanym równaniem ruchu:

$$-g-\frac{2m\ddot{x}}{6xm} = 6(\dot{x})^2+6x\ddot{x}$$

$$-6gx-2\ddot{x} = 36(\dot{x})^2x+36x^2\ddot{x}$$

Ostatecznie:

$$\ddot{x}(18x^2+1) + 18(\dot{x})^2x+3gx = 0$$

Równanie ruchu mogłoby być określone za pomocą innej funkcji, np. równoważnie przez $y(t)$ lub $\lambda(t)$. Wybór padł na x jako na pierwszą współrzędną wektora położenia – ponieważ parametr krzywej jest liniową funkcją tej współrzędnej, zatem zawsze da się go wyrazić przez nią, a w konsekwencji – poprzez równania parametryczne krzywej – również pozostałe współrzędne można uzależnić od x . Więcej trudności sprawiłoby określanie ruchu poprzez wyznaczenie funkcji $z(t)$, ponieważ jest to funkcja kwadratowa, zatem nieróżnowartościowa dla każdej wartości potrzebne byłoby doprecyzowanie, która z dwóch dopuszczalnych wartości x i y jest właściwa w danej chwili ruchu.

AD b) – ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

Zasada zachowania energii jest wystarczająca do wyznaczenia równań ruchu układu o maksymalnie jednym stopniu swobody. W takim przypadku wszystkie składowe wektora położenia możemy wyrazić przez jedną z nich.

Najprościej będzie przyjąć za podstawową współrzędną *x* ponieważ jest liniową funkcją parametru krzywej:

$$x = \lambda \;\rightarrow\; \mathbf{r} = \begin{cases} x = x \\ y(x) = x \\ z(x) = 3x^2+1 \end{cases}$$

Wektor prędkości: $\mathbf{r} = \begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \dot{y} = \dot{x} \\ \dot{z} = 6\dot{x}\,x \end{cases}$

Energia kinetyczna: $E_k = \dfrac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} = \dfrac{m}{2}\left[(\dot{x})^2+(\dot{x})^2+36(\dot{x})^2x^2\right]$

Energia potencjalna: $E_p = m\,g\,z = m\,g\left[3x^2+1\right]$

Energia całkowita: $E = E_k+E_p = \dfrac{m(\dot{x})^2}{2}\left[36x^2+2\right] + mg\left[3x^2+1\right]$

Zasada zachowania energii:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\dot{x})^2(18x^2+1)+g(3x^2+1)\right] = 0$$

$$2(\dot{x})\ddot{x}(18x+1) + 36(\dot{x})^3x+6\,g\,x\,\dot{x} = 0$$

Ostatecznie:

$$\ddot{x}(18x^2+1) + 18(\dot{x})^2x+3\,g\,x = 0$$

AD c) – ZASADA D'ALEMBERTA

Wektor położenia punktu na krzywej wyznaczają nam parametryczne równania tej krzywej. Na tej podstawie obliczamy wektor prędkości i przyspieszenia przyjmując, że parametr krzywej jest pewną funkcją czasu:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \lambda(t) \\ y(t) = \lambda(t) \\ z(t) = 3\lambda^2(t)+1 \end{cases} \qquad \dot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{\lambda} \\ \dot{y}(t) = \dot{\lambda} \\ \dot{z}(t) = 6\lambda\dot{\lambda} \end{cases} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \ddot{x}(t) = \ddot{\lambda} \\ \ddot{y}(t) = \ddot{\lambda} \\ \ddot{z}(t) = 6(\dot{\lambda})^2+6\lambda\ddot{\lambda} \end{cases}$$

Przemieszczenie dopuszczalne w każdym punkcie musi być styczne do krzywej, a zatem równoległe do wektora prędkości. Zachowując zatem proporcje między składowymi takie, jak w wektorze prędkości możemy zbudować wektor przemieszczenia dopuszczalnego w dowolnym punkcie określonym chwilą *t* lub parametrem λ :

$$\delta\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \delta x(t) = \delta r \\ \delta y(t) = \delta r \\ \delta z(t) = 6\lambda(t)\delta r \end{cases}$$

Wyznaczamy następnie sumę sił czynnych i sił bezwładności działających na poruszającą się masę:

siły czynne: $\mathbf{F} = [0\;;\;0\;;\;-mg]$

sił bezwładności: $\mathbf{B} = -m\ddot{\mathbf{r}} = [-m\ddot{\lambda}\;;\;-m\ddot{\lambda}\;;\;-6m(\dot{\lambda})^2-6m\lambda\ddot{\lambda}]$

Wyznaczamy pracę wirtualną:

$$\delta L = (\mathbf{F}+\mathbf{B})\circ\delta\mathbf{r} = (-m\ddot{\lambda})\cdot(\delta r) + (-m\ddot{\lambda})\cdot(\delta r) + (-mg - 6m(\dot{\lambda})^2 - 6m\lambda\ddot{\lambda})\cdot(6\lambda\delta r) =$$
$$= -m\left[\ddot{\lambda}+\ddot{\lambda}+6g\lambda+36\lambda(\dot{\lambda})^2+36\lambda^2\ddot{\lambda}\right]\delta r = -m\left[\ddot{\lambda}(36\lambda^2+2)+6\lambda(6(\dot{\lambda})^2+g)\right]\delta r$$

Z zasady d'Alemberta:

$$\delta L = -m\left[\ddot{\lambda}(36\lambda^2+2)+6\lambda(6(\dot{\lambda})^2+g)\right]\delta r = 0 \qquad \forall\delta r$$
$$\ddot{\lambda}(36\lambda^2+2)+6\lambda(6(\dot{\lambda})^2+g) = 0$$

Podstawiając z równania krzywej $x=\lambda$ otrzymujemy ostatecznie równanie ruchu:

$$\ddot{x}(18x^2+1)+18(\dot{x})^2x+3gx = 0$$

AD d) – RÓWNANIA LAGRANGE'A I RODZAJU

Siły czynne działające na masę: $\mathbf{F} = [0\ ;\ 0\ ;\ -mg]$

Równania więzów wyznaczamy z równań parametrycznych krzywej:

$$K:\ \begin{cases} x(\lambda) = \lambda \\ y(\lambda) = \lambda \\ z(\lambda) = 3\lambda^2+1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} f_1(x,y,z) = x-y=0 \\ f_2(x,y,z) = z-3x^2-1 = 0 \end{cases}$$

Ponieważ mamy dwa równania więzów, wprowadzamy dwa nieznane mnożniki Lagrange'a α,β .

Równania Lagrange'a I rodzaju:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \alpha\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y + \alpha\dfrac{\partial f_1}{\partial y}+\beta\dfrac{\partial f_2}{\partial y} \\ m\ddot{z} = F_z + \alpha\dfrac{\partial f_1}{\partial z}+\beta\dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} m\ddot{x} = \alpha\cdot(1)+\beta\cdot(-6x) \\ m\ddot{y} = \alpha\cdot(-1)+\beta\cdot(0) \\ m\ddot{z} = -mg + \alpha\cdot(0)+\beta\cdot(1) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} m\ddot{x} = \alpha-6x\beta \\ m\ddot{y} = -\alpha \\ m\ddot{z} = -mg+\beta \end{cases}$$

Mamy 5 niewiadomych i 3 równania ruchu – brakujących 2 równań dostarczają nam równania więzów. Dwukrotnie różniczkując je względem czasu otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{x}-\dot{y}=0 \\ \dot{z}-6x\dot{x} = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \ddot{x}-\ddot{y}=0 \\ \ddot{z}-6(\dot{x})^2-6x\ddot{x} = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania ruchu i pierwszego równania więzów mamy

$$\alpha = -m\ddot{y} = -m\ddot{x}$$

Z trzeciego równania ruchu i drugiego równania więzów mamy

$$\beta = m\ddot{z}+mg = 6m((\dot{x})^2+x\ddot{x})+mg$$

Podstawiając do pierwszego równania ruchu:

$$m\ddot{x} = -m\ddot{x}-6\left(6mx((\dot{x})^2+x\ddot{x})+mg\right)$$

Po przekształceniach:

$$2m\ddot{x} + 36mx(\dot{x})^2 + 36mx^2\ddot{x} + 6mgx = 0 \quad ,$$

co jest równoważne wynikom uzyskanym z pozostałych metod:

$$\ddot{x}(18x^2+1)+18(\dot{x})^2x+3gx = 0$$

AD e) – RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

Parametr krzywej przyjmujemy za współrzędną uogólnioną $q = \lambda$. Wyznaczamy wektor położenia i prędkości:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x = q \\ y = q \\ z = 3q^2+1 \end{cases} \qquad \dot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \dot{x} = \dot{q} \\ \dot{y} = \dot{q} \\ \dot{z} = 6q\dot{q} \end{cases}$$

Energia kinetyczna: $$E_k = \frac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} = \frac{m}{2}\left[(\dot{q})^2+(\dot{q})^2+36q^2(\dot{q})^2\right] = \frac{m(\dot{q})^2}{2}\left[36q^2+2\right]$$

Ruch odbywa się pod wpływem sił zachowawczych, możemy zatem wyznaczyć energię potencjalną i określić lagranżjan:

Energia potencjalna: $E_p = -V = mgz = mg(3q^2+1)$

Lagranżjan: $\mathscr{L} = E_k-E_p = m(\dot{q})^2(18q^2+1) - mg(3q^2+1)$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2m\dot{q}(18q^2+1)\right] - 36m(\dot{q})^2q + 6qmg = 0$$

$$2m\ddot{q}(18q^2+1)+72m(\dot{q})^2q - 36m(\dot{q})^2q + 6qmg = 0$$

Podstawiając z równań krzywej $q = \lambda = x$:

$$\ddot{x}(18x^2+1) + 18(\dot{x})^2x + 3gx = 0$$

AD f) – ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

Lagranżjan wyznaczamy dokładnie tak samo, jak przy równaniach Lagrange'a II rodzaju.

$$L = m(\dot{q})^2(18q^2+1) - mg(3q^2+1)$$

Wyznaczamy całkę działania:

$$S[q] = \int_{t_0}^{t} \left[m(\dot{q})^2(18q^2+1) - mg(3q^2+1)\right] \mathrm{d}\tau$$

Równanie ruchu wyznaczymy z zasady najmniejszego działania, która głosi, że funkcjonał działania ma przyjmować wartość minimalną. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału jest, aby jego wariacja była równa 0. Ponieważ funkcja podcałkowa zależy nieznanej funkcji oraz od jej pierwszej pochodnej, obliczymy liniową część przyrostu całego funkcjonału δS (tj. jego wariację) jako sumę wariacji związanych ze zmiennością każdej z tych zmiennych:

$$\delta S = \int_{t_0}^{0} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right] \mathrm{d}\tau$$

$$\delta S[q] = \int_{t_0}^{t} \left[\left(36mq(\dot{q})^2 - 6mgq\right)\delta q + \left(2m\dot{q}(18q^2+1)\right)\delta \dot{q}\right] \mathrm{d}\tau$$

Wiedząc, że $\delta \dot{q} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q$ całkę stanowiącą wariację względem prędkości uogólnionej obliczymy całkując przez części:

$$\int_{t_0}^{t} \left[\left(2m\dot{q}(18q^2+1)\right)\delta\dot{q}\right]\mathrm{d}\tau = \left| \begin{matrix} f = 2m\dot{q}(18q^2+1) & f' = 2m\ddot{q}(18q^2+1) + 72mq(\dot{q})^2 \\ g' = \delta\dot{q} & g = \delta q \end{matrix} \right| =$$

$$2m\dot{q}(18q^2+1)\delta q\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \left[2m\ddot{q}(18q^2+1) + 72mq(\dot{q})^2\right]\delta q \, \mathrm{d}\tau$$

Człon zależny od wartości brzegowych jest równy 0, ponieważ wariacja funkcji δq zawsze dobierana jest w taki sposób, aby $\delta q(t_0) = \delta q(t) = 0$. Podstawiając do wariacji δS i wyłączając δq przed nawias:

$$\delta S[q] = \int_{t_0}^{t} \left[\left(36mq(\dot{q})^2 - 6mgq - 72mq(\dot{q})^2 - 2m\ddot{q}(18q^2+1)\right)\delta q\right]\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[\left(-36mq(\dot{q})^2 - 6mgq - 2m\ddot{q}(18q^2+1)\right)\delta q\right]\mathrm{d}\tau$$

Zgodnie z zasadą najmniejszego działania, wariacja ta musi być równa 0 dla każdej wariacji δq :

$$\delta S[q] = \int_{t_0}^{t} \left[\left(-36mq(\dot{q})^2 - 6mgq - 2m\ddot{q}(18q^2+1)\right)\delta q\right]\mathrm{d}\tau = 0 \qquad \forall \delta q$$

Stąd:

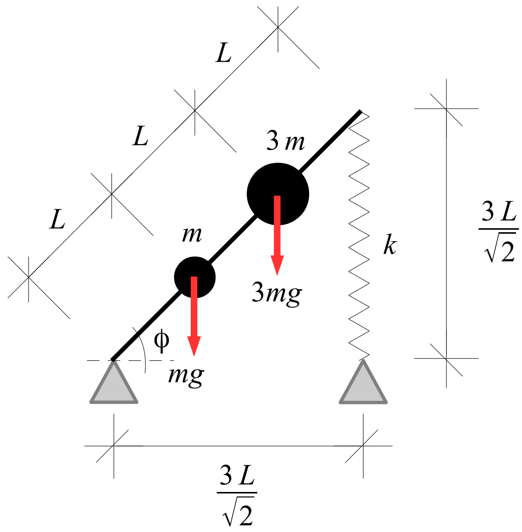
$$18q(\dot{q})^2 + 3gq + \ddot{q}(18q^2+1) = 0$$

Podstawiając $q = x$, otrzymujemy ostatecznie:

$$\ddot{x}(18x^2+1) + 18(\dot{x})^2 x + 3gx = 0$$

ZADANIE 5

Wyznacz równania ruchu układu jak na obrazku, korzystając z:
- a) Zasady d'Alemberta
- b) Równań Lagrange'a II rodzaju



ROZWIĄZANIE:

Układ posiada jeden stopień swobody.

AD a) – ZASADA D'ALEMBERTA

Z geometrii układu wyznaczamy wektory położenia każdego punktu, w którym przyłożona jest siła:

$$\mathbf{r_1} = [L\cos\phi \ ; \ L\sin\phi]$$
$$\mathbf{r_2} = [2L\cos\phi \ ; \ 2L\sin\phi]$$
$$\mathbf{r_3} = [3L\cos\phi \ ; \ 3L\sin\phi]$$

W tych punktach, w których obecna jest masa, różniczkując wektor położenia wyznaczamy **wektor przyspieszenia, który posłuży nam do wyznaczenia sił bezwładności**, pamiętając, że funkcja ϕ jest funkcją czasu:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = L\dot{q}[-\sin\phi \ ; \ \cos\phi] \qquad \ddot{\mathbf{r}}_1 = L\left[-\sin\phi\,\ddot{\phi}-\cos\phi\,(\dot{\phi})^2 \ ; \ \cos\phi\,\ddot{\phi}-\sin\phi\,(\dot{\phi})^2\right]$$
$$\dot{\mathbf{r}}_2 = 2L\dot{q}[-\sin\phi \ ; \ \cos\phi] \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = 2L\left[-\sin\phi\,\ddot{\phi}-\cos\phi\,(\dot{\phi})^2 \ ; \ \cos\phi\,\ddot{\phi}-\sin\phi\,(\dot{\phi})^2\right]$$

Siły czynne i siły bezwładności działające na układ:

$$\mathbf{F_1} = [0 \ ; \ -mg] \qquad \mathbf{B_1} = -m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = mL\left[\sin\phi\,\ddot{\phi}+\cos\phi\,(\dot{\phi})^2 \ ; \ -\cos\phi\,\ddot{\phi}+\sin\phi\,(\dot{\phi})^2\right]$$
$$\mathbf{F_2} = [0 \ ; \ -3mg] \qquad \mathbf{B_2} = -m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = 6mL\left[\sin\phi\,\ddot{\phi}+\cos\phi\,(\dot{\phi})^2 \ ; \ -\cos\phi\,\ddot{\phi}+\sin\phi\,(\dot{\phi})^2\right]$$
$$\mathbf{F_3} = [0 \ ; \ -k\,y_3] = [0 \ ; \ -3kL\sin\phi] \qquad \mathbf{B_3} = [0 \ ; \ 0]$$

Aby wyznaczyć pracę wirtualną, pozostaje nam już tylko wyznaczenie przemieszczeń wirtualnych. **Przemieszczenia wirtualne będą równoległe do wektorów prędkości liniowej**. Prędkość liniowa, może być wyrażona przez prędkość kątową, która dla każdego punktu będzie taka sama. Ponieważ siły określone mamy w składowych pionowej i poziomej, do wyznaczenia pracy wirtualnej będzie potrzebowali wyznaczyć również i przemieszczenia dopuszczalne poprzez składowe poziome i pionowe.

$$\delta r_1 = L\dot{\phi}, \quad \delta x_1 = -\delta r_1\sin\phi = -L\delta\phi\sin\phi, \quad \delta y_1 = \delta r_1\cos\phi = L\delta\phi\cos\phi$$
$$\delta r_2 = 2L\dot{\phi}, \quad \delta x_2 = -\delta r_2\sin\phi = -2L\delta\phi\sin\phi, \quad \delta y_2 = \delta r_2\cos\phi = 2L\delta\phi\cos\phi$$
$$\delta r_3 = 3L\dot{\phi}, \quad \delta x_3 = -\delta r_3\sin\phi = -3L\delta\phi\sin\phi, \quad \delta y_3 = \delta r_3\cos\phi = 3L\delta\phi\cos\phi$$

Wyznaczamy **pracę wirtualną**:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{F}_i+\mathbf{B}_i)\circ\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{3}(F_{xi}+B_{xi})\cdot\delta x_i+(F_{yi}+B_{yi})\cdot\delta y_i =$$

$$= \left[mL(\sin\phi\,\ddot{\phi}+\cos\phi(\dot{\phi})^2)\right]\cdot(-L\,\delta\phi\sin\phi) + \left[mL(-\cos\phi\,\ddot{\phi}+\sin\phi(\dot{\phi})^2)-mg\right]\cdot(L\,\delta\phi\cos\phi) +$$
$$+\left[6mL\sin\phi\,\ddot{\phi}+\cos\phi(\dot{\phi})^2\right]\cdot(-2L\,\delta\phi\sin\phi)+\left[6mL(-\cos\phi\,\ddot{\phi}+\sin\phi(\dot{\phi})^2)-3mg\right]\cdot(2L\,\delta\phi\cos\phi)+$$
$$+[0]\cdot(-3L\,\delta\phi\sin\phi) + [-3kL\sin\phi]\cdot(3L\,\delta\phi\cos\phi) =$$

$$= \left[-13mL^2\ddot{\phi}(\sin^2\phi+\cos^2\phi)-7mg\,L\cos\phi-9kL^2\cos\phi\sin\phi\right]\delta\phi =$$

$$= -\left[13mL^2\ddot{\phi}+L\cos\phi[7mg + 9kL\sin\phi]\right]\delta\phi$$

Z zasady d'Alemberta:

$$\delta L = 0 \qquad \forall\,\delta r$$
$$-\left[13mL^2\ddot{\phi}+L\cos\phi[7mg + 9kL\sin\phi]\right]\delta\phi = 0 \qquad \forall\,\delta\phi$$

Ostatecznie:

$$13mL^2\ddot{\phi}+L\cos\phi[7mg + 9kL\sin\phi]=0$$

AD b) – RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

Przyjmujemy kąt obrotu pręta wokół podpory nieprzesuwnej za współrzędną uogólnioną.

Wektory położenia i prędkości mas skupionych oraz punktu przyłożenia siły w sprężynie:

$$\mathbf{r_1} = [L\cos q\ ;\ L\sin q] \qquad \dot{\mathbf{r}}_1 = [-L\dot{q}\sin q\ ;\ L\dot{q}\cos q]$$
$$\mathbf{r_2} = [2L\cos q\ ;\ 2L\sin q] \qquad \dot{\mathbf{r}}_2 = [-2L\dot{q}\sin q\ ;\ 2L\dot{q}\cos q]$$
$$\mathbf{r_3} = [3L\cos q\ ;\ 3L\sin q]$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \sum_{i=1}^{2}\frac{m_i(\dot{\mathbf{r}}_i)^2}{2} = \frac{m}{2}\left[L^2(\dot{q})^2(\sin^2 q+\cos^2 q)\right]+\frac{3m}{2}\left[4L^2(\dot{q})^2(\sin^2 q+\cos^2 q)\right] = \frac{13}{2}mL^2(\dot{q})^2$$

Pochodne wektorów położenia punktów przyłożenia siły względem współrzędnej uogólnionej oraz wektory odpowiednich sił:

$$\frac{\partial\mathbf{r_1}}{\partial q} = [-L\sin q\ ;\ L\cos q] \qquad \mathbf{F_1} = [0\ ;\ -mg]$$
$$\frac{\partial\mathbf{r_2}}{\partial q} = [-2L\sin q\ ;\ 2L\cos q] \qquad \mathbf{F_2} = [0\ ;\ -3mg]$$
$$\frac{\partial\mathbf{r_2}}{\partial q} = [-3L\sin q\ ;\ 3L\cos q] \qquad \mathbf{F_3} = [0\ ;\ -3kL\sin q]$$

Siła uogólniona:

$$Q = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q}\circ\mathbf{F}_i = -mgL\cos q-6mgL\cos q-9kL^2\cos q\sin q =$$
$$= -L\cos q[9kL\sin q+7mg]$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q}=Q$$

Ostatecznie:

$$13\,mL^2\,\ddot{q}\,+\,L\cos q\left[7\,mg\,+\,9\,kL\sin q\right]=0$$

AD b) – RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU DLA POTENCJALNEGO POLA SIŁ

Zadanie to, można również rozwiązać zauważając, że każda z sił działających na układ jest siłą potencjalną – grawitacji lub sprężystości. Trzeba jednak mieć świadomość, że nie istnieje tu jeden potencjał.

W szczególny sposób dotyczy to sił grawitacji, które – mimo że pochodzą z jednego źródła – mają różne **potencjały**, ponieważ masy, na które działają są różne. Potencjał siły grawitacji musi być taką funkcją, której gradient w każdym punkcie przestrzeni da nam stałą wartość *mg* skierowaną pionowo w dół. Jeśli jednak masa rozpatrywanych ciał jest różna, stąd jest jasne, że i potencjały muszą być różne. Będziemy mieli zatem:

$$V_1=-m_1 g\, y_1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F_1}=\mathrm{grad}\,V_1=[0\;;\,-m_1 g]$$
$$V_2=-m_2 g\, y_2 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F_2}=\mathrm{grad}\,V_2=[0\;;\,-m_2 g]$$
$$V_3=-\frac{k\,y_3^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F_3}=\mathrm{grad}\,V_3=\left[0\;;\,-ky_3\right]=[0\;;\,-3\,k\,L\sin q]$$

Energia potencjalna, wymagana do wyznaczenia lagranżjanu, jest zatem sumą energii potencjalnych – dla każdego z elementów układu, wynikającą z jego funkcjonowanie w odpowiednim dla siebie potencjalnym polu sił. Ponieważ, w ogólności, każdy punkt będzie miał inną współrzędną *y* od pozostałych, musimy je rozróżnić przy określaniu **energii potencjalnej**:

Wyrażając współrzędną *y* przez współrzędną uogólnioną:

$$E_p=m\,g\,L\sin q+(3\,m)\cdot g\cdot(2\,L)\sin q+\frac{k}{2}(3\,L\sin q)^2=$$
$$=7\,mgL\sin q\,+\,\frac{9\,kL^2}{2}\sin^2 q$$

Lagranżjan: $$\mathscr{L}=E_k-E_p=\frac{13}{2}\,m\,L^2(\dot{q})^2-7\,mgL\sin q-\frac{9\,kL^2}{2}\sin^2 q$$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

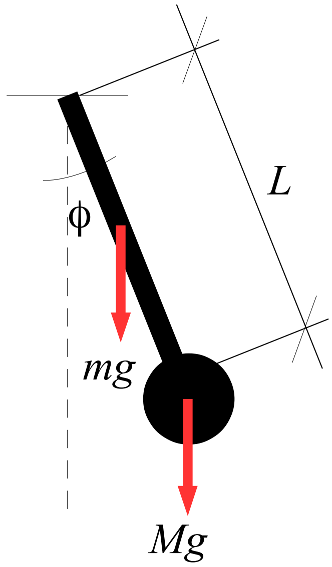
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}=0$$
$$13\,mL^2\,\dot{q}\,+\,7\,mgL\cos q\,+\,9\,kL^2\cos q\sin q$$

Ostatecznie:

$$13\,mL^2\,\ddot{q}\,+\,L\cos q\left[7\,mg\,+\,9\,kL\sin q\right]=0$$

ZADANIE 6

Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju wyznacz równania ruchu wahadła złożonego z pręta o długości *L* o skończonej masie *m* i momencie bezwładności, na
 końcu którego umieszczona jest masa skupiona *M*. Ruch odbywa się pod wpływem grawitacji.



ROZWIĄZANIE:

Układ ma jeden stopień swobody.
Za zmienną uogólnioną przyjmiemy wychylenie wahadła.

Wyznaczamy wektory położenia punktów przyłożenia sił.
W przypadku pręta, będzie to położenie jego środka ciężkości.

$$\mathbf{r_1} = \frac{L}{2}[\sin q \ ; \ 1-\cos q]$$
$$\mathbf{r_2} = L[\sin q \ ; \ 1-\cos q]$$

Ponieważ ruch odbywa się w potencjalnym polu sił, zatem nie potrzebujemy wyznaczać pochodnych wektorów położenia względem współrzędnej uogólnionej. Konieczne jest teraz wyznaczenie energii kinetycznej układu. Energia kinetyczna masy skupionej jest energią jej ruchu postępowego (masa „skupiona" oznacza ciało tak małe, że nie można dla niego określić obrotowego stopnia swobody) – musimy zatem znaleźć jej wektor prędkości:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = L\dot{q}[\cos q \ ; \ \sin q]$$

Pręt natomiast wykonuje tylko obrót wokół osi zawierającej jeden z jego końców – jego energia kinetyczna jest energią ruchu obrotowego $\frac{1}{2}I\omega^2$ – musimy znać moment bezwładności I oraz prędkość kątową ω . Ponieważ naszą współrzędną uogólnioną jest droga kątowa, więc $\omega = \dot{q}$.

Moment bezwładności przy obrocie względem osi prostopadłej do osi pręta i zawierającej jeden z jego końców jest równy

$$I = \frac{mL^2}{3}$$

Energia kinetyczna jest więc równa:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{M(\dot{\mathbf{r}}_2)^2}{2} = \frac{mL^2}{6}(\dot{q})^2 + \frac{ML^2(\dot{q})^2}{2}(\cos^2 q + \sin^2 q) = \frac{L^2(\dot{q})^2}{6}(m+3M)$$

Energię kinetyczną możemy liczyć w ten sposób tylko wtedy, gdy punkt obrotu elementu jest stały w czasie ruchu. Jeśli ulega on zmianie, wtedy musimy obliczyć jego energię kinetyczną rozważając ruch jego środka ciężkości i obrót wokół środka ciężkości. Ponieważ prędkość kątowa jest taka sama, niezależnie od przyjęcia środka obrotu, w takim przypadku mielibyśmy:

$$E_{kl} = \frac{m(\dot{\mathbf{r}}_1)^2}{2} + \frac{I_s \omega^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{4}(\dot{q})^2(\sin^2 q + \cos^2 q) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}(\dot{q})^2 = \frac{mL^2}{6}(\dot{q})^2$$

Jak widać, obydwa podejścia są równoważne.

Energia potencjalna będzie sumą energii potencjalnej pręta i masy skupionej:

$$E_p = mgy_1 + Mgy_2 = \frac{1}{2}mgL(1-\cos q) + MgL(1-\cos q)$$

Lagranżjan: $\mathscr{L} = E_k - E_p = \frac{1}{6}L^2(\dot{q})^2(m+3M) - \frac{1}{2}mgL(1-\cos q) - MgL(1-\cos q)$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = 0$$

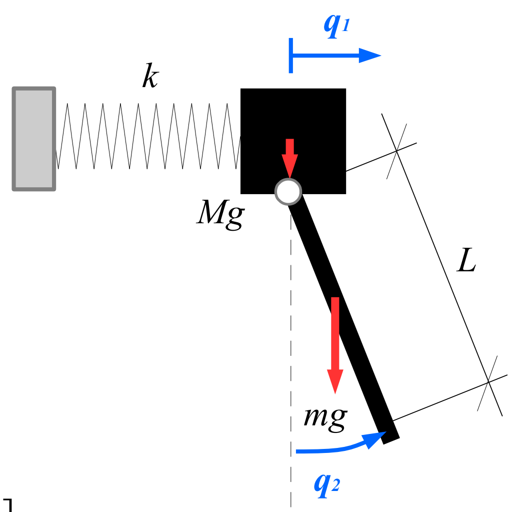
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}L^2\dot{q}(m+3M)\right) + \frac{1}{2}mgL\sin q + MgL\sin q = 0$$

Ostatecznie:

$$2L^2\ddot{q}(m+3M) + (3m+6M)gL\sin q = 0$$

ZADANIE 7

Wyznaczyć równania ruchu dla układu jak na rysunku korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju oraz z równań Hamiltona.



ROZWIĄZANIE:

1. RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

Wektory położenia punktów przyłożenia sił:

$$\mathbf{r}_1 = [q_1 \ ; \ L] \qquad \mathbf{r}_2 = \left[q_1 + \frac{L}{2}\sin q_2 \ ; \ L - \frac{L}{2}\cos q_2\right]$$

Wektory prędkości:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = [\dot{q}_1 \ ; \ 0] \qquad \dot{\mathbf{r}}_2 = \left[\dot{q}_1 + \frac{L\dot{q}_2}{2}\cos q_2 \ ; \ \frac{L\dot{q}_2}{2}\sin q_2\right]$$

Energia kinetyczna masy punktowej będzie energią kinetyczną jej ruchu postępowego:

$$E_{kI} = \frac{M(\dot{\mathbf{r}}_1)^2}{2} = \frac{M}{2}(\dot{q}_1)^2$$

Energia kinetyczna pręta będzie sumą jego energii kinetycznej ruchu postępowego i obrotowego. Ruch postępowy środka ciężkości wynika zarówno z ruchu postępowego zamocowania, jak i z obrotu pręta. Przy ruchu obrotowym musimy wziąć moment bezwładności pręta przy obrocie względem osi przechodzącej przez środek ciężkości. Musimy też zauważyć, że kąt obrotu pręta względem środka ciężkości jest tym samym kątem, który opisujemy współrzędną uogólnioną q_2, stąd prędkość obrotowa $\omega = \dot{q}_2$:

$$E_{k2} = \frac{m(\dot{\mathbf{r}}_2)^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + L\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{L^2}{4}(\dot{q}_2)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}(\dot{q}_2)^2 =$$
$$= \frac{m}{2}(\dot{q}_1)^2 + \frac{mL}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{mL^2}{6}(\dot{q}_2)^2$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = E_{kI} + E_{k2} = \frac{(m+M)}{2}(\dot{q}_1)^2 + \frac{mL}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{mL^2}{6}(\dot{q}_2)^2$$

Ruch odbywa się pod wpływem **sił zachowawczych** – wyznaczamy sumaryczną **energię potencjalną**:

$$E_p = -V_1 - V_2 - V_3 = \frac{kx_1^2}{2} + Mg\,y_1 + mgy_2 = \frac{k\,q_1^2}{2} + MgL + mg\left(L - \frac{L}{2}\cos q_2\right)$$

Warto przy tym zauważyć, że przyjęcie zerowej wartości potencjału grawitacyjnego na najniższym poziomie, który może osiągnąć koniec wahającego się pręta ma jedynie charakter umowny – taki potencjał daje nam zawsze dodatnią energię potencjalną, jeśli określimy ją jako $E_p = -V$. Wiemy jednak, że z polem sił potencjalnych wiąże się nieskończenie wiele potencjałów różniących się jedynie o stałą wartość – równie dobrze (dla prostszego opisu) moglibyśmy przyjąć zerową wartość energii potencjalnej na poziomie zamocowania wahadła:

$$E_p = \frac{k\,q_1^2}{2} - mg\frac{L}{2}\cos q_2$$

Choć formalnie operowalibyśmy ujemną energią, co nie ma sensu fizycznego, nie miałoby to znaczenia dla wyprowadzenia równań ruchu, ponieważ ważna jest tutaj zmienność tej energii (zależność od współrzędnych uogólnionych) a nie sama jej wartość – dodatkowy człon zapewniający dodatnią wartość energii i tak znika przy różniczkowaniu lagranżjanu względem współrzędnych.

Lagranżjan:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{(m+M)}{2}(\dot{q}_1)^2 + \frac{mL}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{mL^2}{6}(\dot{q}_2)^2 - \frac{k\,q_1^2}{2} - MgL - mg\left(L - \frac{L}{2}\cos q_2\right)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

Po podstawieniu:

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{q}_1 + \dfrac{mL}{2}\left(\ddot{q}_2\cos q_2 - (\dot{q}_2)^2\sin q_2\right) + k\,q_1 = 0 \\ \dfrac{mL^2}{3}\ddot{q}_2 + \dfrac{mL}{2}\left(\ddot{q}_1\cos q_2 - \dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2\right) + \left(\dfrac{mL}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2 - \dfrac{mgL}{2}\right)\sin q_2 = 0 \end{cases}$$

Ostatecznie:

$$\boxed{\begin{cases} (m+M)\ddot{q}_1 + \dfrac{mL}{2}\left(\ddot{q}_2\cos q_2 - (\dot{q}_2)^2\sin q_2\right) + k\,q_1 = 0 \\ \dfrac{mL^2}{3}\ddot{q}_2 + \dfrac{mL\,\ddot{q}_1}{2}\cos q_2 + \dfrac{mgL}{2}\sin q_2 = 0 \end{cases}}$$

2. RÓWNANIA HAMILTONA

Współrzędne uogólnione przyjmujemy tak jak poprzednio. Odpowiada im wyznaczony powyżej **lagranżajan**:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{(m+M)}{2}(\dot{q}_1)^2 + \frac{mL}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{mL^2}{6}(\dot{q}_2)^2 - \frac{k\,q_1^2}{2} - MgL - mg\left(L - \frac{L}{2}\cos q_2\right)$$

Definiujemy **pędy uogólnione**:

$$p_1 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1} = (m+M)\dot{q}_1 + \frac{mL}{2}\dot{q}_2\cos q_2$$

$$p_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{mL^2}{3}\dot{q}_2 + \frac{mL}{2}\dot{q}_1 \cos q_2$$

Odwracamy powyższe zależności:

$$\dot{q}_1 = \frac{4\,L\,p_1 - 6\,p_2 \cos q_2}{L\left[4(M+m) - 3\,m \cos^2 q_2\right]}$$
$$\dot{q}_2 = \frac{12(m+M)\,p_2 - 6\,mL\,p_1 \cos q_2}{mL^2\left[4(M+m) - 3\,m \cos^2 q_2\right]}$$

Definiujemy **hamiltonian**:

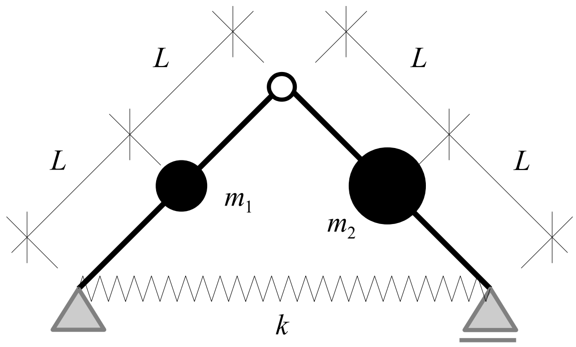
$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \sum_i^s p_j \cdot \dot{q}_j(\mathbf{p}) - \mathscr{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) =$$
$$= \frac{2\left[m\,p_1^2 L^2 + 3(m+M)\,p_2^2 - 3\,m\,p_1\,p_2 \cos q_2\right]}{mL^2\left[4(m+M) - 3\,m \cos^2 q_2\right]} + \frac{k\,q_1^2}{2} + mg\left(L - \frac{L}{2}\cos q_2\right)$$

Równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dfrac{4\,L\,p_1 - 6\,p_2 \cos q_2}{L\left[4(M+m) - 3\,m \cos^2 q_2\right]} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \dfrac{12(m+M)\,p_2 - 6\,mL\,p_1 \cos q_2}{mL^2\left[4(M+m) - 3\,m \cos^2 q_2\right]} \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = -k\,q_1 \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = \dfrac{6 \sin q_2 \left[2\,L\,p_1 - 3\,p_2 \cos q_2\right]\left[mL\,p_1 \cos q_2 - 2(m+M)\,p_2\right]}{L^2\left[4(m+M) - 3\,m \cos^2 q_2\right]^2} - \dfrac{mgL}{2} \sin q_2 \end{cases}$$

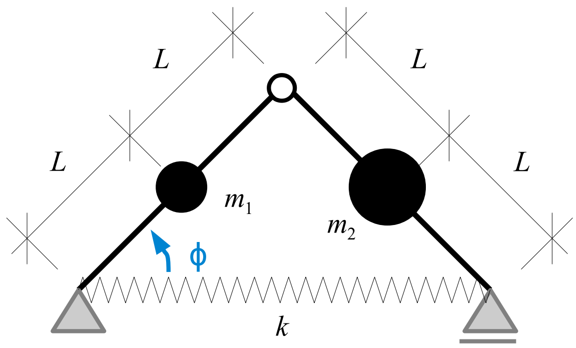
ZADANIE 8

Wyznacz równania ruchu układu jak na rysunku, wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju. Układ porusza się pod wpływem sił ciężkości. Sprężyna jest w stanie naturalnym w sytuacji, gdy obydwa pręty nachylone są do poziomu pod kątem 45°.



ROZWIĄZANIE:

Układ ma 1 stopień swobody. Jako współrzędną uogólnioną przyjmiemy kąt odchylenia pręta od poziomu. Zauważmy, że obydwa pręty tworzą trójkąt równoramienny.



Wektory położenia punktów przyłożenia sił:

$$\mathbf{r_1} = [L\cos\phi\ ;\ L\sin\phi]$$
$$\mathbf{r_2} = [3L\cos\phi\ ;\ L\sin\phi]$$
$$\mathbf{r_3} = [4L\cos\phi\ ;\ 0]$$

Wektory prędkości mas:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = [-L\dot{\phi}\sin\phi\ ;\ L\dot{\phi}\cos\phi]$$
$$\dot{\mathbf{r}}_2 = [-3L\dot{\phi}\sin\phi\ ;\ L\dot{\phi}\cos\phi]$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{m_1(\dot{\mathbf{r}}_1)^2}{2} + \frac{m_2(\dot{\mathbf{r}}_2)^2}{2} = \frac{L^2(\dot{\phi})^2}{2}\left[m_1 + m_2(1+8\sin^2\phi)\right]$$

Wszystkie siły działające na układ to siły potencjalne. Całkowita energia potencjalna układu:

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{k}{2}\left(x_3 - \frac{4L}{\sqrt{2}}\right)^2 = (m_1+m_2)gL\sin\phi + \frac{kL^2}{2}(4\cos\phi - 2\sqrt{2})^2$$

Lagranżjan:

$$\mathscr{L} = E_k - E_p = \frac{L^2(\dot{\phi})^2}{2}\left[m_1 + m_2(1+8\sin^2\phi)\right] - (m_1+m_2)gL\sin\phi - \frac{kL^2}{2}(4\cos\phi - 2\sqrt{2})^2$$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = 0$$

Ostatecznie:

$$\boxed{L^2\ddot{\phi}\left[m_1 + m_2(1+8\sin^2\phi)\right] + 8L^2(\dot{\phi})^2 m_2\sin\phi\cos\phi + (m_1+m_2)gL\cos\phi - 4kL^2(4\cos\phi - 2\sqrt{2})\sin\phi = 0}$$

ZADANIE 9

Wyznacz równania ruchu punktu o masie *m* poruszającego się pod wpływem siły ciężkości po paraboloidzie obrotowej danej równaniem:

$$f:\ 8x^2+8y^2-2z+6=0\quad ,$$

korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju.

ROZWIĄZANIE:

Punkt poruszający się po powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej ma 2 stopnie swobody. Za współrzędne uogólnione przyjmiemy dwie wybrane współrzędne kartezjańskiego układu współrzędnych

$$q_1=x\qquad q_2=y$$

Wektor położenia: $\mathbf{r}=[x,y,z]=[q_1\ ;\ q_2\ ;\ 4q_1^2+4q_2^2+3]$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}}=[\dot{q}_1\ ;\ \dot{q}_2\ ;\ 8q_1\dot{q}_1+8q_2\dot{q}_2]$

Energia kinetyczna: $E_k=\dfrac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2}=\dfrac{m}{2}\left((\dot{q}_1)^2+(\dot{q}_2)^2+64q_1^2(\dot{q}_1)^2+64q_2^2(\dot{q}_2)^2+128q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2\right)$

Energia potencjalna: $E_p=mgz=mg(4q_1^2+4q_2^2+3)$

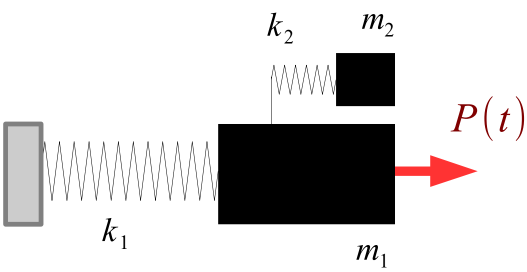
Lagranżjan: $\mathcal{L}=E_k-E_p=\dfrac{m}{2}\left[(1+64q_1^2)(\dot{q}_1)^2+(1+64q_2^2)(\dot{q}_2)^2+128q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2\right]-mg(4q_1^2+4q_2^2+3)$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1}\right)-\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1}=0\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2}\right)-\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2}=0\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}m\left[64q_1(\dot{q}_1)^2+(1+64q_1^2)\ddot{q}_2+64q_1\left((\dot{q}_2)^2+q_2\ddot{q}_2\right)\right]+8mgq_1=0\\ m\left[64q_2(\dot{q}_2)^2+(1+64q_2^2)\ddot{q}_1+64q_2\left((\dot{q}_1)^2+q_1\ddot{q}_1\right)\right]+8mgq_2=0\end{cases}}$$

ZADANIE 10



a) Wyznacz równania ruchu masy drgającej wyposażonej w strojony masowy tłumik drgań (*tuned mass damper* – TMD), jak na rysunku, wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju.

b) Zakładając, że wymuszenie jest harmonicznie zmienne, dobierz parametry tłumika tak, aby w największym stopniu redukował on drgania masy m_1

ROZWIĄZANIE:

Układ posiada 2 stopnie swobody. Przyjmijmy za współrzędne wychylenie masy m_1 oraz wychylenie masy m_2 względem masy m_1 . Zagadnienie jest jednowymiarowe, więc zamiast rozpatrywać wielkości wektorowe, możemy wykonywać obliczenia na ich jedynej niezerowej składowej.

Położenie:

$$x_1 = q_1$$
$$x_2 = q_1 + q_2$$

Prędkość:

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1$$
$$\dot{x}_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

Siły działające na układ:

$$F_1 = -k_1 q_1 + k_2 q_2 + P(t)$$
$$F_2 = -k_2 q_2$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2}\left[m_1 (\dot{q}_1)^2 + m_2\left((\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\right)\right]$$

Aby wyznaczyć siły uogólnione potrzebujemy pochodne położenia względem współrzędnych uogólnionych:

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_1} = 1 \qquad \frac{\partial x_1}{\partial q_2} = 0$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 1 \qquad \frac{\partial x_2}{\partial q_2} = 1$$

Sił uogólnione:

$$Q_1 = F_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + F_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = -k_1 q_1 + P(t)$$
$$Q_2 = F_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + F_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_2} = -k_2 q_2$$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial E_k}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial E_k}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + m_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + k_1 q_1 = P(t) \\ m_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + k_2 q_2 = 0 \end{cases}}$$

Dobór optymalnych parametrów tłumika masowego nazywa się procesem „strojenia tłumika”. Zagadnienie to rozwiążemy poprzez znalezienie rozwiązania powyższych równań ruchu w przypadku **ustalonych drgań wymuszonych siłą harmonicznie zmienną**. Przyjmijmy więc:

$$P(t) = P_0 \sin(\omega t)$$

Rozwiązaniem powyższego zagadnienia będzie **całka szczególna równań ruchu**, którą znajdziemy **metodą przewidywania** – przyjmiemy zatem:

$$\begin{aligned} q_1 &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ q_2 &= C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wyznaczamy prędkości i przyspieszenia uogólnione:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \qquad & \ddot{q}_1 &= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) \\ \dot{q}_2 &= -C\omega\sin(\omega t) + D\omega\cos(\omega t) \qquad & \ddot{q}_2 &= -C\omega^2\cos(\omega t) - D\omega^2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Po podstawieniu ich do równań ruchu i pogrupowaniu wyrazów, otrzymujemy:

$$\begin{cases} -\left[\left((m_1+m_2)-k_1\right)A + m_2\omega^2 C\right]\cos(\omega t) - \left[\left((m_1+m_2)-k_1\right)B + m_2\omega^2 D\right]\sin(\omega t) = P_0\sin(\omega t) \\ -\left[m_2\omega^2 A + (m_2\omega^2 - k_2)C\right]\cos(\omega t) - \left[m_2\omega^2 B + (m_2\omega^2 - k_2)D\right]\sin(\omega t) = 0 \end{cases}$$

Współczynniki *A, B, C, D* znajdziemy żądając, aby lewa i prawa strona każdego równania były sobie równe w każdej chwili *t*. Będzie tak tylko wtedy, gdy współczynniki przy funkcjach sinus i cosinus z jednej i drugiej strony będą sobie równe – w szczególności, jeśli dana funkcja nie występuje po prawej stronie, odpowiedni współczynnik po lewej musi być równy 0. To daje nam układ równań:

$$\begin{cases} -\left((m_1+m_2)-k_1\right)A - m_2\omega^2 C = 0 \\ -\left((m_1+m_2)-k_1\right)B - m_2\omega^2 D = P_0 \\ -m_2\omega^2 A + (m_2\omega^2 - k_2)C = 0 \\ -m_2\omega^2 B + (m_2\omega^2 - k_2)D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{(k_2 - m_2\omega^2)P_0}{m_1 m_2\omega^4 - \left((k_1+k_2)m_2 + k_2 m_1\right)\omega^2 + k_1 k_2} \\ C = 0 \\ D = \dfrac{m_2\omega^2 P_0}{m_1 m_2\omega^4 - \left((k_1+k_2)m_2 + k_2 m_1\right)\omega^2 + k_1 k_2} \end{cases}$$

Widać zatem, że amplituda drgań masy m_1 będzie równa *B*, zaś amplituda drgań masy m_2 będzie równa *D*. Możemy teraz tak dobrać parametry tłumika, aby amplituda drgań masy m_1 była równa 0 – wystarczy bowiem, aby:

$$k_2 = m_2\omega^2$$

Z reguły, tłumik strojony jest w taki sposób, aby tłumić drgania rezonansowe. Przyjmiemy zatem, że częstość wymuszenia jest równa częstości drgań własnych układu bez tłumienia:

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

Stąd:

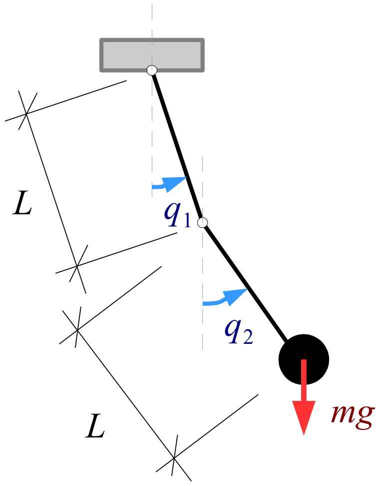
$$\boxed{\frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0^{(1)} = \omega_0^{(2)}}$$

Tłumienie będzie zatem najskuteczniejsze, jeśli częstość drgań własnych samego tłumika będzie taka sama, jak częstość drgań własnych układu bez tłumika. Stosując identyczne podejście – tj. przewidując całkę szczególną równań ruchu w formie funkcji harmonicznie zmiennej – można pokazać, że taki dobór parametrów tłumika minimalizuje amplitudę drgań ustalonych również przy uwzględnieniu tłumienia drgań obydwu mas – wynik jednak, jest niezależny od współczynników tłumienia.

Trzeba jednak zwrócić uwagę na fakt, że powyższe rozwiązanie dotyczy jedynie drgań ustalonych – tj. w odpowiednio długiej chwili po rozpoczęciu obciążenia i jedynie pod warunkiem, że trwa ono nieustannie i jego charakter (amplituda i częstość) nie zmieniają się w czasie. Wiadomo jednak, że obciążenia oscylacyjne (wiatr, pływy, wymuszenie kinematyczne od trzęsienia ziemi, wybuchów, obecności szkód górniczych itp.) w rzeczywistości nieustannie zmieniają swoją charakterystykę a przy tym trwają na tyle krótko, że nigdy nie można mówić o drganiach ustalonych – z tego względu powyższe oszacowanie parametrów optymalnego tłumika masowego ma jedynie charakter przybliżony.

ZADANIE 11

Wyznacz równania ruchu podwójnego wahadła matematycznego wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju i równania Hamiltona



ROZWIĄZANIE:

1. RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

Układ ma 2 stopnie swobody. Jako **współrzędne uogólnione** przyjmiemy:

1. Kąt wychylenia pierwszego wahadła od pionu q_1
2. Kąt wychylenia drugiego wahadła od pionu q_2

Położenie masy: $$\mathbf{r} = [L\sin q_1 + L\sin q_2 \ ; \ 2L - L\cos q_1 - L\cos q_2]$$

Wektor prędkości: $$\dot{\mathbf{r}} = L[\dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_2 \cos q_2 \ ; \ \dot{q}_1 \sin q_1 + \dot{q}_2 \sin q_2]$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} = \frac{mL^2}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2(\cos q_1 \cos q_2 + \sin q_1 \sin q_2)\right] =$$
$$= \frac{mL^2}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_2 - q_1)\right]$$

Energia potencjalna: $$E_p = mgy = mgL(2 - \cos q_1 - \cos q_2)$$

Lagranżjan: $$\mathscr{L} = E_k - E_p = \frac{mL^2}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_2 - q_1)\right] + mgL(\cos q_1 + \cos q_2 - 2)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) - (\dot{q}_2)^2 \sin(q_2 - q_1) + \dfrac{g}{L}\sin q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \cos(q_2 - q_1) + (\dot{q}_1)^2 \sin(q_2 - q_1) + \dfrac{g}{L}\sin q_2 = 0 \end{cases}}$$

2. RÓWNANIA HAMILTONA

Układ ma 2 stopnie swobody. Jako **współrzędne uogólnione** przyjmiemy:

3. Kąt wychylenia pierwszego wahadła od pionu q_1
4. Kąt wychylenia drugiego wahadła od pionu q_2

Położenie masy: $\mathbf{r} = [L\sin q_1 + L\sin q_2 \ ; \ 2L - L\cos q_1 - L\cos q_2]$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}} = L[\dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_2 \cos q_2 \ ; \ \dot{q}_1 \sin q_1 + \dot{q}_2 \sin q_2]$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} = \frac{mL^2}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2(\cos q_1 \cos q_2 + \sin q_1 \sin q_2)\right] = $$
$$= \frac{mL^2}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1)\right]$$

Energia potencjalna: $E_p = mgy = mgL(2 - \cos q_1 - \cos q_2)$

Lagranżjan: $$\mathscr{L} = E_k - E_p = \frac{mL^2}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1)\right] + mgL(\cos q_1 + \cos q_2 - 2)$$

Pędy uogólnione:
$$p_1 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_1} = mL^2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1)]$$
$$p_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_2} = mL^2[\dot{q}_2 + \dot{q}_1 \cos(q_2 - q_1)]$$

Odwracamy powyższe zależności: $$\dot{q}_1 = \frac{p_1 - \cos(q_2 - q_1)\, p_2}{\sin^2(q_2 - q_1)\, mL^2} \qquad \dot{q}_2 = \frac{p_2 - \cos(q_2 - q_1)\, p_1}{\sin^2(q_2 - q_1)\, mL^2}$$

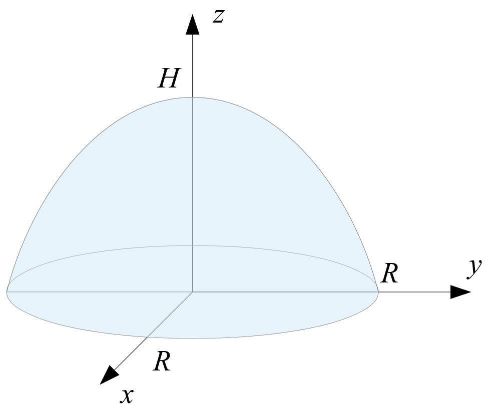
Hamiltonian:
$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_i^s p_j \cdot \dot{q}_j(\mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) = \frac{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(q_2 - q_1)}{2\sin^2(q_2 - q_1)\, mL^2} - mgL(\cos q_1 + \cos q_2 - 2)$$

Równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{p_1 - \cos(q_2 - q_1)\, p_2}{\sin^2(q_2 - q_1)\, mL^2} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{p_2 - \cos(q_2 - q_1)\, p_1}{\sin^2(q_2 - q_1)\, mL^2} \\ \dot{p}_1 = \dfrac{p_1 p_2 (1 + \cos^2(q_2 - q_1)) - (p_1^2 + p_2^2)\cos(q_2 - q_1)}{mL^2 \sin^3(q_2 - q_1)} - mgL\sin(q_1) \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{p_1 p_2 (1 + \cos^2(q_2 - q_1)) - (p_1^2 + p_2^2)\cos(q_2 - q_1)}{mL^2 \sin^3(q_2 - q_1)} - mgL\sin(q_2) \end{cases}$$

ZADANIE 12

Wyznacz równania ruchu punktu o masie *m* poruszającego się pod wpływem siły ciężkości po paraboloidzie jak na rysunku



ROZWIĄZANIE:

RÓWNANIA LAGGRANGE'A II RODZAJU

Wyznaczmy równanie paraboli. Ponieważ jest ona symetryczna względem osi płaszczyzn XZ i YZ, zatem będzie miała ona dana równaniem o ogólnej postaci:

$$z = a\cdot(x^2+y^2)+b$$

Wierzchołek paraboli: $H = a\cdot(0+0)+b = b \quad\Rightarrow\quad b = H$

Podstawa paraboli: $0 = a\cdot(R^2+0)+H = a R^2+H \quad\Rightarrow\quad a = -\dfrac{H}{R^2}$ (tak samo dla *x* = 0, *y* = *R*)

Ostatecznie:

$$z = H\left[1-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right]$$

Punkt poruszający się po powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej ma 2 stopnie swobody. Ponieważ parabola jest osiowo symetryczna, zatem za współrzędne uogólnione możemy przyjąć dowolne dwie ze współrzędnych walcowych:

$$q_1 = r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad q_2 = \phi = \operatorname{atan}\frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}.$$

Dla punktów paraboli:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = H\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right) \end{cases}$$

Wektor położenia: $\mathbf{r} = [x, y, z] = \left[q_1\cdot\cos q_2;\ q_1\cdot\sin q_2;\ H\left(1-\dfrac{q_1^2}{R^2}\right)\right]$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}} = \left[\dot{q}_1\cos q_2-q_1\dot{q}_2\sin q_2;\ \dot{q}_1\sin q_2+q_1\dot{q}_2\cos q_2;\ -\dfrac{2H}{R^2}q_1\dot{q}_1\right]$

Energia kinetyczna: $E_k = \dfrac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} = \dfrac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2+q_1^2(\dot{q}_2)^2+\dfrac{4H^2}{R^4}q_1^2(\dot{q}_1)^2\right]$

Energia potencjalna: $E_p = mgz = mgH\left(1-\frac{q_1^2}{R^2}\right)$

Lagranżjan: $\mathscr{L} = E_k - E_p = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + q_1^2(\dot{q}_2)^2 + \frac{4H^2}{R^4}q_1^2(\dot{q}_1)^2\right] + mgH\left(\frac{q_1^2}{R^2}-1\right)$

Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_1} = m q_1\left[\frac{4H^2}{R^4}(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + \frac{2gH}{R^2}\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_1} = m \dot{q}_1\left[1 + \frac{4H^2}{R^4}q_1^2\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) = m\ddot{q}_1\left[1+\frac{4H^2}{R^4}q_1^2\right] + \frac{8mH^2}{R^4}q_1(\dot{q}_1)^2$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_2} = m q_1^2 \dot{q}_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) = m\left[2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1^2\ddot{q}_2\right]$$

Ostatecznie:

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{q}_1\left[1+\frac{4H^2}{R^4}q_1^2\right] + q_1\left[\frac{4H^2}{R^4}(\dot{q}_1)^2 - (\dot{q}_2)^2 - \frac{2gH}{R^2}\right] = 0 \\ 2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1^2\ddot{q}_2 = 0 \end{cases}}$$

ZASADA D'ALEMBERTA

Układ ma tylko 2 stopnie swobody. Spośród 3 zmiennych x, y, z opisujących położenie punktu, za zmienne niezależne przyjmiemy x, y. Trzecią współrzędną wyrazimy przez te dwie, wykorzystując równanie więzów (równanie powierzchni, po której punkt może się poruszać), takie jak poprzednio:

$$f: \quad z - H\left[1-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right] = 0$$

Wektor wodzący punktu materialnego: $\mathbf{r} = [x; y; z] = \left[x; y; H\left(1-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)\right]$

Wyznaczamy wszystkie siły działające na punkt materialny:

- **siły czynne**: $\mathbf{F} = [0; 0; -mg]$
- **siły bezwładności**: $\mathbf{B} = -m\ddot{\mathbf{r}} = \left[-m\ddot{x}; -m\ddot{y}; \frac{2Hm}{R^2}\left[(\dot{x})^2+x\ddot{x}+(\dot{y})^2+y\ddot{y}\right]\right]$

Wektor przemieszczenia wirtualnego ma ogólną postać: $\delta\mathbf{r} = [\delta x; \delta y; \delta z]$

Wektor ten jest dowolnym wektorem stycznym do powierzchni, tj. prostopadłym do gradientu tej powierzchni:

$$\mathbf{n} = \operatorname{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \left[\frac{2H}{R^2}x; \frac{2H}{R^2}y; 1\right]$$

Z warunku prostopadłości wektorów:

$$\delta\mathbf{r}\circ\mathbf{n} = \frac{2H}{R^2}x\cdot\delta x + \frac{2H}{R^2}y\cdot\delta y + 1\cdot\delta z = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta z = -\frac{2H}{R^2}(x\cdot\delta x + y\cdot\delta y)$$

$$\delta\mathbf{r} = \left[\delta x; \delta y; -\frac{2H}{R^2}(x\cdot\delta x + y\cdot\delta y)\right]$$

Praca wirtualna:

$$\delta L = (\mathbf{F}+\mathbf{B})\circ\delta\mathbf{r} = \left[-m\ddot{x}; -m\ddot{y}; \frac{2Hm}{R^2}\left[(\dot{x})^2+x\ddot{x}+(\dot{y})^2+y\ddot{y}\right]-mg\right]\circ\left[\delta x; \delta y; -\frac{2H}{R^2}(x\cdot\delta x + y\cdot\delta y)\right] =$$

$$= \left[-m\ddot{x} - \frac{4H^2m}{R^4}x\left[(\dot{x})^2+x\ddot{x}+(\dot{y})^2+y\ddot{y}\right]+\frac{2mgH}{R^2}x\right]\cdot\delta x +$$

$$+ \left[-m\ddot{y} - \frac{4H^2m}{R4}y\left[(\dot{x})^2+x\ddot{x}+(\dot{y})^2+y\ddot{y}\right]+\frac{2mgH}{R^2}y\right]\cdot\delta y$$

Z zasady d'Alemberta:

$$\delta L = 0 \quad \forall \delta x, \delta y \quad ,$$

skąd otrzymujemy **równania ruchu**:

$$\begin{cases} -m\ddot{x} - \dfrac{4H^2m}{R^4}x\left[(\dot{x})^2+x\ddot{x}+(\dot{y})^2+y\ddot{y}\right]+\dfrac{2mgH}{R^2}x = 0 \\ -m\ddot{y} - \dfrac{4H^2m}{R^4}y\left[(\dot{x})^2+x\ddot{x}+(\dot{y})^2+y\ddot{y}\right]+\dfrac{2mgH}{R^2}y = 0 \end{cases}$$