MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

RÓWNANIA LAGRANGE'A

WSPÓŁRZĘDNE I PRĘDKOŚCI UOGÓLNIONE

Współrzędne uogólnione – układ **dowolnych funkcji czasu** $q_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, \mathrm{s})$, która pozwalają **w sposób jednoznaczny określić położenie dowolnego punktu układu mechanicznego w każdej chwili** t.

$$\boxed{\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i\left(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t), t\right)}$$

- Jeśli współrzędne uogólnione są **niezależne**, wtedy ich liczba jest równa liczbie stopni swobody (LSS) układu, $s = LSS$.
- Jeśli $s > LSS$, wtedy współrzędne uogólnione są zależne, tj. $s\text{-}LSS$ z nich można wyrazić przez maksymalnie LSS pozostałych, o ile tylko są one niezależne.

Prędkość uogólniona – **pochodna współrzędnej uogólnionej względem czasu**.

$$\boxed{\dot{q}_j(t) = \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}}$$

WSPÓŁRZĘDNE I PRĘDKOŚCI UOGÓLNIONE

Prędkość ***i*-tej masy punktowej** można wyznaczyć następująco:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d} q_j}{\mathrm{d} t} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

Operator pochodnej cząstkowej uwzględnia jedynie jawną zależność od zmiennej różniczkowania. Skoro przyjęliśmy, że wektor $\mathbf{r}_i$ można zapisać jako funkcję wyłącznie czasu i współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, t\right)$$

to jego **składowe nie zależą w sposób jawny od prędkości uogólnionych**. W konsekwencji również pochodne cząstkowe składowych wektora położenia względem czasu i współrzędnych uogólnionych nie zależą od prędkości uogólnionych. Wykorzystajmy ten fakt i obliczmy **pochodną wektora prędkości** i-tej masy punktowej **względem** n-tej **prędkości uogólnionej:**

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_n} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)}_{=0} + \sum_{j=1}^{s}\left[\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{=0}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_n}}_{=\delta_{jn}}\right] = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n}$$

WSPÓŁRZĘDNE I PRĘDKOŚCI UOGÓLNIONE

Podsumowując:

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}$$

To wzór na tzw. „skracanie kropek" lub „skracanie pochodnych" (z ang. „*cancellation of dots*").

UWAGI:

- Przy wyprowadzeniu tego wzoru skorzystaliśmy z faktu, że **prędkości uogólnione są niezależne**.
- Jednocześnie **współrzędne uogólnione wcale nie muszą być niezależne**, tj. **wzór powyższy może obowiązywać również dla** $s>LSS$. Nawet jeśli współrzędne uogólnione są zależne, tj. którąś z nich można wyrazić poprzez pozostałe, to ponieważ warunki początkowe na prędkości uogólnionych mogą być określane w sposób niezależny od wartości samych współrzędnych uogólnionych, prędkości mogą być traktowane jako funkcje niezależne.

WSPÓŁRZĘDNE I PRĘDKOŚCI UOGÓLNIONE

Obliczmy **pochodną wektora prędkości** i-tej masy punktowej **względem** k-tej **współrzędnej uogólnionej:**

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_n} = \left(\frac{\partial}{\partial q_n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_n}}_{=0} \right]$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_n \partial t} + \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_n \partial q_j} \dot{q}_j \right]$$

Zerowanie się ostatniej pochodnej wynika z faktu, że choć **prędkości uogólnione** zależą od współrzędnych uogólnionych (są ich pochodnymi) to jednak **nie zależą od współrzędnych uogólnionych w sposób jawny**.

WSPÓŁRZĘDNE I PRĘDKOŚCI UOGÓLNIONE

Obliczmy **pochodną względem czasu z pochodnej cząstkowej wektora położenia** i-tej masy punktowej **względem** k-tej **współrzędnej uogólnionej.** Pamiętamy przy tym, że wektor położenia zależy jedynie od czasu i współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, t\right)$$

Zatem również i pochodna cząstkowa wektora położenia będzie zależeć jedynie od czasu i współrzędnych uogólnionych (ale nie od prędkości uogólnionych)

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n}\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, t\right)$$

Pochodna względem czasu z powyższego wektora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}\right) + \sum_{j=1}^{s}\left[\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n}\right)\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t\,\partial q_n} + \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j\,\partial q_n}\dot{q}_j\right]$$

WSPÓŁRZĘDNE I PRĘDKOŚCI UOGÓLNIONE

Podsumowując obydwa uzyskane uprzednio wyniki:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial}{\partial q_n}\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_n \partial t} + \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_n \partial q_j}\dot{q}_j\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_n} + \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial q_n}\dot{q}_j\right]$$

Ponieważ pochodne mieszane są sobie równe (kolejność różniczkowania cząstkowego nie ma znaczenia):

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial q_n} = \frac{\partial^2}{\partial q_n \partial t} \qquad \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_n} = \frac{\partial^2}{\partial q_n \partial q_j}$$

możemy napisać:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}}$$

Można zatem **zmieniać kolejność** pochodnej zupełnej względem czasu i pochodnej cząstkowej względem współrzędnej uogólnionej.

RÓWNANIA LAGRANGE'A

Zakładamy:

- Spełnione są zasady dynamiki Newtona
- Spełniona jest **zasada d'Alemberta** (**sumaryczna praca reakcji na przemieszczeniach wirtualnych jest zerowa** – zachodzi to w szczególności dla **więzów gładkich** (**idealnych**))
- Układ mechaniczny zawiera N **mas skupionych** związanych c wiązaniami.
- Masa nie zmienia się w czasie
- $LSS = 3N - c$
- Układ daje się opisać s **współrzędnymi uogólnionymi**

Zapisujemy **zasadę d'Alemberta:**

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) \delta \mathbf{r}_i = 0 \qquad \forall \delta \mathbf{r}_i$$

Przemieszczenie wirtualne można wyrazić poprzez **przemieszczenia wirtualne odpowiadające przyjętym współrzędnym uogólnionym**

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

Mamy zatem:

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\right)\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right] = 0 \qquad \underset{\delta q_j}{\forall}$$

Wymnóżmy obydwie sumy i zajmijmy się pierwszym członem w powyższym równaniu, odpowiadającym siłom czynnym

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s}\mathbf{F}_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{Q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j$$

Wielkość

$$\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}$$

nazywamy siłą uogólnioną **odpowiadającą *j*-tej współrzędnej uogólnionej**. Interpretujemy ją jako wielkość fizyczną wykonującą pracę wirtualną na przemieszczeniu wirtualnym odpowiadającym j-tej współrzędnej uogólnionej.

Wymiar fizyczny siły uogólnionej to niuton razy metr podzielony przez wymiar odpowiedniej współrzędnej.

RÓWNANIA LAGRANGE'A

Zajmijmy się drugim wyrazem odpowiadającym pozornym siłom bezwładności:

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = -\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

Dla każdego z wyrazów sumy w nawiasie zachodzi związek wynikający ze wzoru na różniczkowanie iloczynu funkcji

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(m_i \dot{\mathbf{r}}_i)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right] = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + m_i \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Wyznaczmy z niego wyraz występujący pod sumą i skorzystajmy z udowodnionej możliwości zamiany kolejności różniczkowania zwykłego względem czasu i różniczkowania cząstkowego względem współrzędnej uogólnionej:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(m_i \dot{\mathbf{r}}_i)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right] - m_i \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \qquad (*)$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

Wykorzystajmy wzór na „skracanie kropek”, aby je „dodać” do pierwszego wyrazu zapisanego wyrażenia:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right] - m_i \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \qquad (**)$$

Ze wzoru na pochodną iloczynu możemy też napisać:

$$\frac{\partial}{\partial q_j}(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) = 2\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{m_i(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i)}{2}\right] = \frac{\partial E_{k,i}}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) = 2\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \Rightarrow \quad (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\frac{m_i(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i)}{2}\right] = \frac{\partial E_{k,i}}{\partial \dot{q}_j} \qquad (***)$$

Obydwa wyrażenia to odpowiednie pochodne energii kinetycznej i-**tej masy punktowej**.

RÓWNANIA LAGRANGE'A

Podsumujmy przekształcenia sumy pracy pozornych sił bezwładności:

$$-\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j =$$

(wzór na pochodną iloczynu)
(∗)

$$= -\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(m_i\dot{\mathbf{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right] - m_i\dot{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\right]\right)\delta q_j =$$

(„dodajemy kropki”)
(∗∗)

$$= -\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(m_i\dot{\mathbf{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right] - m_i\dot{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\right]\right)\delta q_j =$$

(wzór na pochodną iloczynu)
(∗∗∗)

$$= -\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i\left(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i\right)}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i\left(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i\right)}{2}\right)\right]\right)\delta q_j$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

$$= -\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i)}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i)}{2}\right)\right]\right)\delta q_j =$$

(pochodna sumy
to suma pochodnych)

$$= -\sum_{j=1}^{s}\left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i)}{2}\right)}_{=E_k}\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i)}{2}\right)}_{=E_k}\right]\right)\delta q_j =$$

$$= -\sum_{j=1}^{s}\left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j}\right]\right)\delta q_j$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

Uwzględniając wszystkie wyniki, **zasadę d'Alemberta** można zapisać w następującej postaci:

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s}\left[\left(Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right] = 0 \qquad \forall_{\delta q_j}$$

Musimy rozważyć **dwa wykluczające się przypadki**:

1) Współrzędne uogólnione są zależne.

   Liczba współrzędnych uogólnionych może być $s > LSS$.

   Wtedy odpowiadające im **przemieszczenia wirtualne** również **są zależne**.

2) Współrzędne uogólnione są niezależne.

   Skoro opisują cały układ, zatem $s = LSS$.

   Wtedy odpowiadające im **przemieszczenia wirtualne** również **są niezależne**.

   Z uwagi na **dowolność przemieszczeń wirtualnych**, suma prac na niezależnych przemieszczeniach wirtualnych będzie tożsamościowo zerowa, wtedy i tylko wtedy, gdy **każdy współczynnik przy przemiszczeniach wirtualnych w tej kombinacji przemieszczeń wirtualnych będzie będzie zerowy**.

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s} \left[\left(Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] = 0 \qquad \forall_{\delta q_j}$$

- Gdyby **współrzędne uogólnione były niezależne** (przypadek 2), wtedy odpowiadające im **przemieszczenia wirtualne również byłyby niezależne** i **zerowanie się powyższej sumy** zachodziłoby jedynie w przypadku **zerowania się wszystkich wyrażeń w nawiasie okrągłym**.
- Gdy **współrzędne uogólnione są zależne**, wtedy zerowanie się powyższej sumy może zajść nie tylko w przypadku zerowania się wszystkich współczynników przy wszystkich δq_j.
- Skoro współrzędne uogólnione są zależne, zatem również i odpowiadające im **przemieszczenia wirtualne są zależne** i $(s–LSS)$ z nich można wyrazić przez pozostałych LSS niezależnych.
- Można zatem tak dobrać wielkości zależnych przemieszczeń wirtualnych, aby **praca na niektórych z nich była różna od 0**, a jednocześnie tak, aby mimo to **suma tych prac była równa 0**.

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

Wyjście z sytuacji jest następujące:

- **Równania więzów** w postaci różniczkowej są **równaniami jednorodnymi** (przyrównanymi do 0) zależnymi liniowo od uogólnionych przemieszczeń wirtualnych. **Więzy nie muszą być holonomiczne**!

- Ponieważ prawe strony tych równań są równe 0, możemy je dodać do pracy wirtualnej, pomnożywszy uprzednio przez dowolną liczbę λ_k . Liczby te nazywać będziemy mnożnikami Lagrange'a.

- Składniki takiej kombinacji możemy pogrupować w taki sposób, aby praca wirtualna wyrażała się przez jako suma prac wykonanych na przemieszczeniach wirtualnych δq_j.

- Możemy teraz dobrać wartości mnożników Lagrange'a w taki sposób, aby wszystkie składniki sumy w wyrażeniu na pracę wirtualną były równe 0.

- Otrzymujemy wtedy s **równań wynikających z zerowania się składników pracy wirtualnej**. Zależą one od $(s+c)$ **niewiadomych** – s współrzędnych uogólnionych oraz c mnożników Lagrange'a. **Brakujących** c **równań** potrzebnych do jednoznacznego rozwiązania tego układu to **równania więzów**.

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

Różniczkowe równania więzów:
$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{kj} \mathrm{d} q_j + \beta_k \mathrm{d} t = 0 \,, \qquad k = 1, \dots, c$$

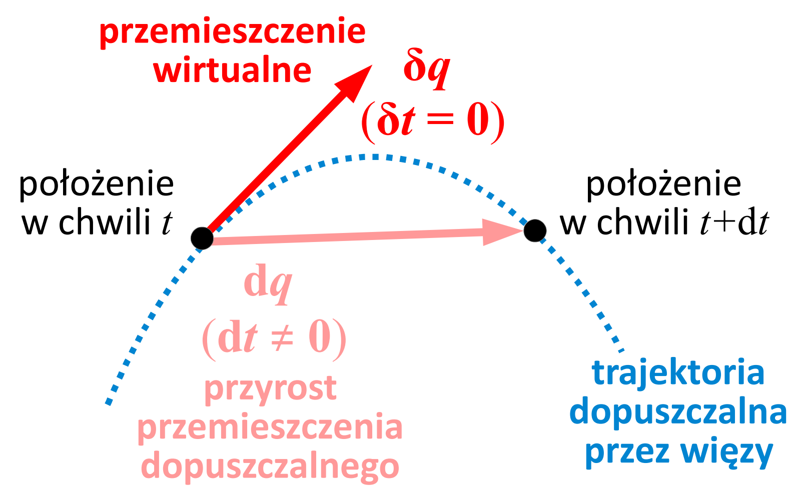
Przy czym współczynniki tej formy różniczkowej są funkcjami czasu i współrzędnych uogólnionych:

$$\alpha_{kj} = \alpha_{kj}(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

$$\beta_k = \beta_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

Równania różniczkowe więzów można wyrazić przez uogólnione przemieszczenia wirtualne δq_j, przy czym należy pamiętać, że przemieszczenia wirtualne są dopuszczalnymi przemieszczeniami w ustalonej chwili, tj. odpowiadającymi zerowemu przyrostowi czasu $\delta t = 0$. Mamy zatem:

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{kj} \delta q_j = 0 \,, \qquad k = 1, \dots, c$$



RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

Każde z równań więzów przemnóżmy przez mnożnik Lagrange'a:
$$\lambda_k \sum_{j=1}^{s} \alpha_{kj} \delta q_j = 0 \,, \quad k=1,\ldots,c$$

Dodajmy wszystkie równania więzów stronami:
$$\sum_{k=1}^{c} \sum_{j=1}^{s} \lambda_k \alpha_{kj} \delta q_j = 0$$

Dodajmy powyższe wyrażenie do wyrażenia na pracę wirtualną:

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s} \left[\left(Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj} \right) \delta q_j \right] = 0 \qquad \underset{\delta q_j}{\forall}$$

Tym razem żądać będziemy, aby zerowały się wszystkie składniki w okrągłym nawiasie, tj.:

$$Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj} = 0 \,, \qquad j=1,\ldots,s$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

Ostatecznie, możemy zapisać równania Lagrange'a I rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj} , \qquad j=1,\dots,s$$

Jest to układ s **równań różniczkowych**. Do tego dochodzi c równań więzów:

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{kj}\,\mathrm{d}q_j + \beta_k\,\mathrm{d}t = 0 , \qquad k=1,\dots,c$$

W przypadku więzów nieholonomicznych są to również równania różniczkowe, zależne od współrzędnych uogólnionych i ich pochodnych. W przypadku więzów holonomicznych można przekształcić je do postaci równań algebraicznych. Łącznie dają nam one $(s+c)$ **równań na** $(s+c)$ **niewiadomych**:

- s współrzędnych uogólnionych $\quad q_j , \quad (j=1,2,\dots,s)$
- c mnożników Lagrange'a. $\quad \lambda_k , \quad (k=1,2,\dots,c)$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

UWAGI:

- Składnik $\sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj}$ może być interpretowany w kategoriach **dodatkowego składnika siły uogólnionej**.

$$\tilde{Q}_j = Q_j + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj}$$

  Ponieważ wynika wprost z **równania więzów**, interpretuje się go jako **miarę reakcji więzów**.

- Jeśli więzy są **holonomiczne**, to istnieje taka funkcja f_k, dla której zachodzi:

$$\alpha_{kj} = \frac{\partial f_k}{\partial q_j}, \quad \beta_k = \frac{\partial f_k}{\partial t}$$

  a wtedy równania więzów przyjmują **postać algebraiczną**:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \mathrm{d} q_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} \mathrm{d} t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = 0, \qquad k = 1, \ldots, c$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

Szczególnym przypadkiem zastosowania równań Lagrange'a I rodzaju jest przyjęcie **współrzędnych kartezjańskich mas punktowych** jako współrzędnych uogólnionych:

$$q_1 = x_1\,,\quad q_2 = y_1\,,\quad \ldots\quad ,\; q_{3N-1} = y_N\,,\quad q_{3N} = z_N\,,\qquad s = 3N$$

Jeśli ponadto założymy, że więzy są **holonomiczne**, to możemy napisać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{m_l}{2}\left((\dot{x}_l)^2+(\dot{y}_l)^2+(\dot{z}_l)^2\right)\right)}_{=m_i x_i} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{m_l}{2}\left((\dot{x}_l)^2+(\dot{y}_l)^2+(\dot{z}_l)^2\right)\right)}_{=0} = P_{i,x} + \sum_{k=1}^{c}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,,\qquad i=1,\ldots,N$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{y}_i}\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{m_l}{2}\left((\dot{x}_l)^2+(\dot{y}_l)^2+(\dot{z}_l)^2\right)\right)}_{=m_i y_i} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{m_l}{2}\left((\dot{x}_l)^2+(\dot{y}_l)^2+(\dot{z}_l)^2\right)\right)}_{=0} = P_{i,y} + \sum_{k=1}^{c}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\,,\qquad i=1,\ldots,N$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{z}_i}\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{m_l}{2}\left((\dot{x}_l)^2+(\dot{y}_l)^2+(\dot{z}_l)^2\right)\right)}_{=m_i z_i} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{m_l}{2}\left((\dot{x}_l)^2+(\dot{y}_l)^2+(\dot{z}_l)^2\right)\right)}_{=0} = P_{i,z} + \sum_{k=1}^{c}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\,,\qquad i=1,\ldots,N$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

Równania Lagrange'a I rodzaju dla układu N **mas skupionych** z więzami **holonomicznym**, wyrażone we współrzędnych **kartezjańskich**:

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = P_{i,x} + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i} \\ m_i \ddot{y}_i = P_{i,y} + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial y_i} \\ m_i \ddot{z}_i = P_{i,z} + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial z_i} \end{cases} , \qquad i=1,\ldots,N$$

Do tego dochodzą **równania więzów**:

$$f_k(x_1, y_1, \ldots, z_N, t) = 0, \qquad k=1,\ldots,c$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

W przypadku, gdy **siły działające na układ są** siłami potencjalnymi, wtedy **istnieje** potencjał V, taki że:

$$\mathbf{F}_i = \nabla_i V = \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \; ; \; \frac{\partial V}{\partial y_i} \; ; \; \frac{\partial V}{\partial z_i} \right] = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}$$

Siły uogólnione są równe:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \right] = \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

W ostatniej pochodnej wyrażamy potencjał sił jako funkcję wszystkich współrzędnych uogólnionych. Jeśli zapiszemy energię potencjalną **pola sił** $E_p = -V$, wtedy równania Lagrange'a przyjmują wtedy postać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj} \, , \qquad j = 1, \ldots, s$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

Potencjał pola sił zależy jedynie od położenia w polu a **nie zależy od prędkości**, zatem:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad \underset{j=1,\dots,s}{\forall}$$

więc tym bardziej:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad \underset{j=1,\dots,s}{\forall}$$

Taki zerowy człon można odjąć od każdego z równań, co daje nam

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj} \,, \qquad j=1,\dots,s$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (E_k - E_p)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (E_k - E_p)}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj} \,, \qquad j=1,\dots,s$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 1 – współrzędne uogólnione są zależne, $s > LSS$.

Zdefiniujmy funkcję, którą nazwiemy lagranżjanem układu, będącą **różnicą całkowitej energii kinetycznej i energii potencjalnej pola sił zachowawczych**, w którym układ się znajduje:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p$$

Równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują wtedy postać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj} \,, \qquad j = 1, \ldots, s$$

Dodatkowe składniki po prawej stronie, związane ze spełnieniem równań więzów przez przemieszczenia wirtualne można interpretować jako miary sił reakcji, które mogą mieć w ogólności charakter **niezachowawczy** (**dyssypatywny**, charakter sił **tarcia**), skoro nie dają się opisać potencjałem zależnym jedynie od położeń.

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 2 – współrzędne uogólnione są niezależne, $s = LSS$.

Zasada d'Alemberta została zapisana w następującej postaci:

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s} \left[\left(Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] = 0 \qquad \underset{\delta q_j}{\forall}$$

Skoro współrzędne uogólnione są **niezależne**, zatem:

- muszą stanowić najmniejszy możliwy układ współrzędnych uogólnionych, $s=LSS$.
- odpowiadające im **przemieszczenia wirtualne również są niezależne**.
- **suma prac na niezależnych przemieszczeniach wirtualnych** będzie tożsamościowo zerowa, wtedy i tylko wtedy, gdy **każdy współczynnik tej kombinacji będzie będzie zerowy:**

$$Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, LSS$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYPADEK 2 – współrzędne uogólnione są niezależne, $s = LSS$.

Otrzymujemy w ten sposób równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, 2, \ldots, LSS$$

Jest to układ LSS **równań różniczkowych na** LSS **współrzędnych uogólnionych**. Jeśli ponadto siły działające na układ są siłami **pola potencjalnego** o potencjale $V = -E_p$, wtedy zdefiniować możemy **lagranżjan**:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p$$

i równania przyjmują postać równań **jednorodnych**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0\,, \qquad j = 1, \ldots, LSS$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

Możemy rozważać uogólnione potencjały **pola sił**. Jeśli istnieje potencjał pola sił $V(q_j, \dot{q}_j, t)$, zależny od **współrzędnych uogólnionych, prędkości uogólnionych oraz czasu**, taki że każdą siłę uogólnioną można wyrazić w następujący sposób

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

W przypadku ruchu w polu sił zadanym potencjałem uogólnionym w ogólności **całkowita energia mechaniczna układu** nie jest zachowana **w czasie** (energia potencjalna pola zmienia się w czasie).

Wtedy równania Lagrange'a II rodzaju (analogicznie równania I rodzaju) można przekształcić następująco:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (E_k - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (E_k - V)}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

Gdzie funkcja Lagrange'a jest zdefiniowana jako **różnica energii kinetycznej** i **potencjału uogólnionego**:

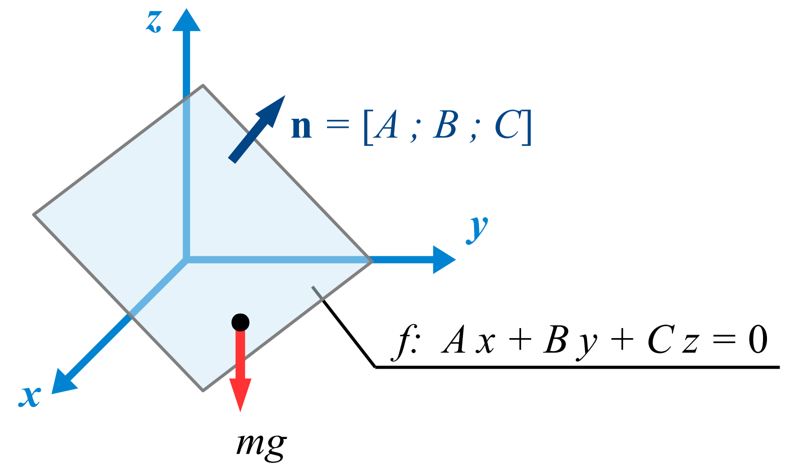
$$\boxed{\mathcal{L} = E_k - V}$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 1:

Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem sił jednorodnego pola grawitacyjnego po płaszczyźnie danej Równaniem:

$$f\left(x\,,y\,,z\right)=A\,x+B\,y+C\,z=0$$



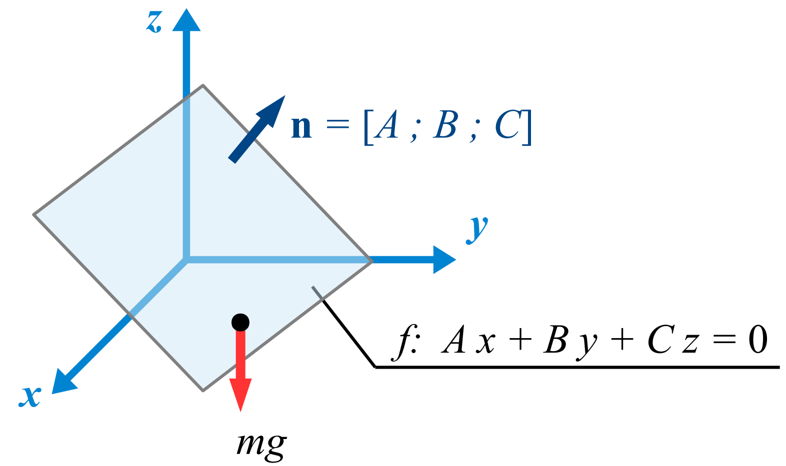
Wyznaczyć równania ruchu za pomocą równań Lagrange'a I rodzaju.

ROZWIĄZANIE:

- Punkt w przestrzeni ma 3 stopnie swobody
- Równanie płaszczyzny stanowi 1 równanie wiązania
- LSS = 3 – 1 = 2 (w istocie jest to ruch punktu po płaszczyźnie)

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 1 – Równania Lagrange'a I rodzaju



$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = P_{i,x} + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i} \\ m_i \ddot{y}_i = P_{i,y} + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial y_i} , \qquad i=1,\dots,N \\ m_i \ddot{z}_i = P_{i,z} + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial z_i} \end{cases}$$

$$f_k(x_1, y_1, \dots, z_N) = 0, \qquad k=1,\dots,c$$

W naszym przypadku N=1, c=1.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} = -mg + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = Ax + By + Cz = 0$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 1 – Równania Lagrange'a I rodzaju

$$\begin{cases} m\ddot{x} = A\lambda \\ m\ddot{y} = B\lambda \\ m\ddot{z} = -mg + C\lambda \\ Ax + By + Cz = 0 \end{cases}$$

Zróżniczkujmy dwukrotnie **równanie więzów** $\quad A\ddot{x} + B\ddot{y} + C\ddot{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -\dfrac{A\ddot{x} + B\ddot{y}}{C}$

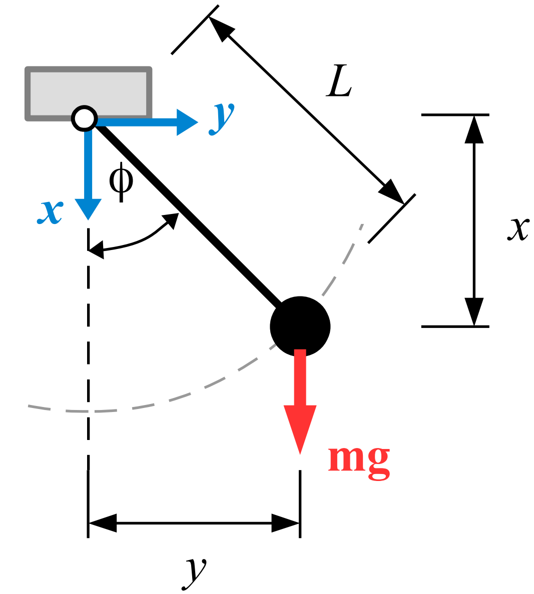
Z trzeciego równania ruchu wyznaczamy **mnożnik Lagrange'a**: $\quad \lambda = m\dfrac{(\ddot{z}+g)}{C} = \dfrac{m}{C}\left(g - \dfrac{A}{C}\ddot{x} - \dfrac{B}{C}\ddot{y}\right)$

Podstawiamy do pierwszych dwóch równań ruchu. Otrzymujemy liniowy układ równań na przyspieszenia:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = A\lambda \\ m\ddot{y} = B\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{A}{C}\left(g - \dfrac{A}{C}\ddot{x} - \dfrac{B}{C}\ddot{y}\right) \\ \ddot{y} = \dfrac{B}{C}\left(g - \dfrac{A}{C}\ddot{x} - \dfrac{B}{C}\ddot{y}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{y} = \dfrac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 2:



Wyznaczyć równanie ruchu wahadła za pomocą równań Lagrange'a I rodzaju.

ROZWIĄZANIE:

Przyjmiemy za **współrzędne biegunowe** za współrzędne uogólnione:

$$\begin{cases} q_1 = r = \sqrt{x^2+y^2} \\ q_2 = \phi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = q_1 \cos q_2 \\ y = q_1 \sin q_2 \end{cases}$$

Ogólna postać równań Lagrange'a I rodzaju:

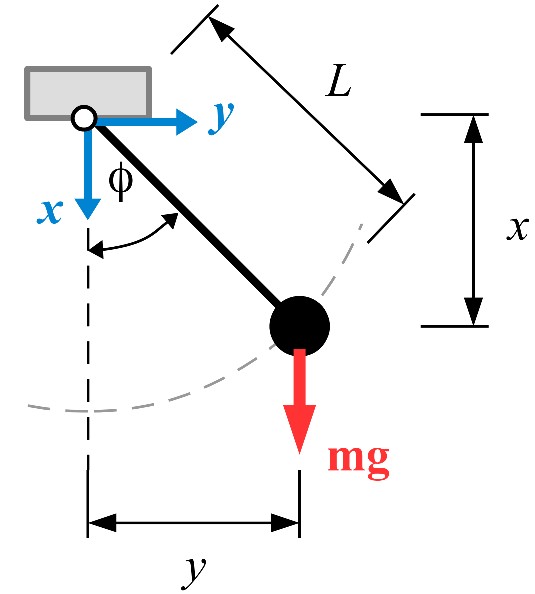
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}, \qquad j=1,2$$

Równanie wiązania:

$$f(q_1, q_2) = q_1 - L = 0$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 2 – Równania Lagrange'a I rodzaju



Wektor położenia masy: $\mathbf{r} = [q_1 \cos q_2 \; ; \; q_1 \sin q_2]$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{q}_1 \cos q_2 - q_1 \dot{q}_2 \sin q_2 \; ; \; \dot{q}_1 \sin q_2 + q_1 \dot{q}_2 \cos q_2]$

Energia kinetyczna masy na końcu wahadła:

$$E_k = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2} \left[\left(\dot{q}_1 \cos q_2 - q_1 \dot{q}_2 \sin q_2 \right)^2 + \left(\dot{q}_1 \sin q_2 + q_1 \dot{q}_2 \cos q_2 \right)^2 \right] =$$

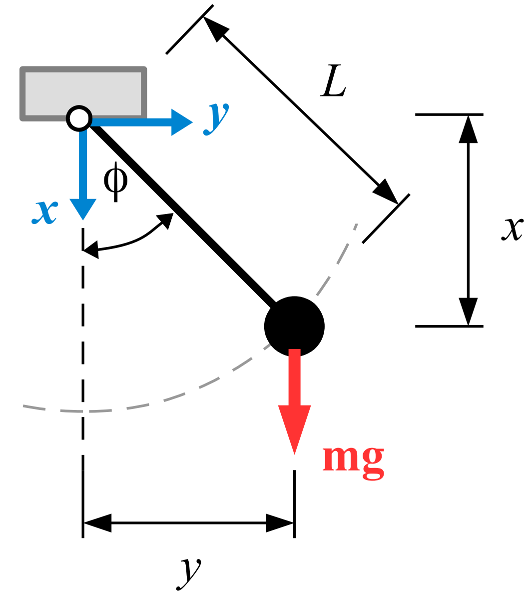
$$\frac{m}{2} \left[(\dot{q}_1)^2 (\sin^2 q_2 + \cos^2 q_2) + q_1^2 (\dot{q}_2)^2 (\sin^2 q_2 + \cos^2 q_2) \right] = \frac{m}{2} \left[(\dot{q}_1)^2 + q_1^2 (\dot{q}_2)^2 \right]$$

Wykorzystujemy równanie wiązania:

$$f(q_1, q_2) = q_1 - L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} q_1 &= L = const. \\ \dot{q}_1 &= 0 \\ \ddot{q}_1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{m L^2}{2} (\dot{q}_2)^2$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 2 – Równania Lagrange'a I rodzaju



$$E_k = \frac{m L^2}{2} (\dot{q}_2)^2$$

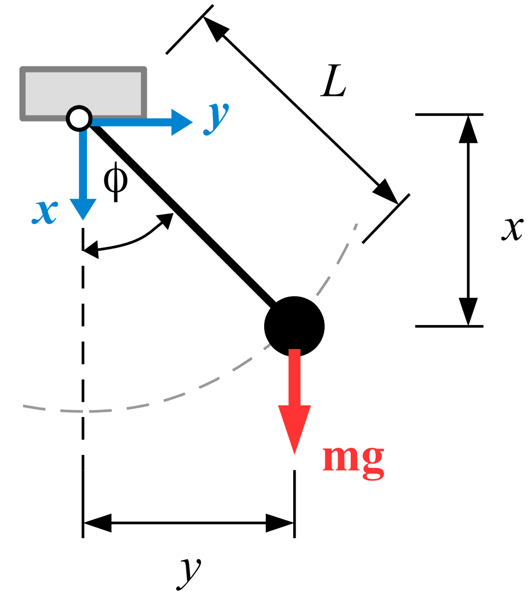
Obliczamy pochodne **energii kinetycznej**:

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_2} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = m L^2 \dot{q}_2 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = m L^2 \ddot{q}_2$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 2 – Równania Lagrange'a I rodzaju



Wyznaczamy **siły uogólnione**:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}[q_1 \cos q_2 \; ; \; q_1 \sin q_2] = [\cos q_2 \; ; \; \sin q_2]$$

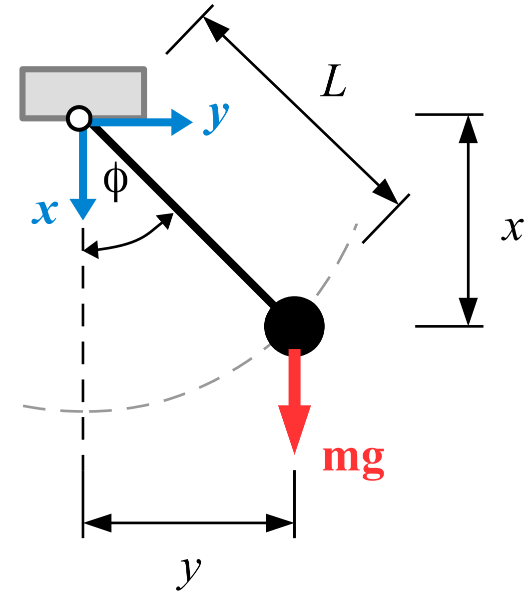
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2}[q_1 \cos q_2 \; ; \; q_1 \sin q_2] = [-q_1 \sin q_2 \; ; \; q_1 \cos q_2]$$

$$Q_1 = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = [mg\,;0]\cdot[\cos q_2 \; ; \; \sin q_2] = mg \cos q_2$$

$$Q_2 = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = [mg\,;0]\cdot[-q_1 \sin q_2 \; ; \; q_1 \cos q_2] = -m g L \sin q_2$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 2 – Równania Lagrange'a I rodzaju



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0 \qquad Q_1 = mg\cos q_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = mL^2\ddot{q}_2 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial q_2} = 0 \qquad Q_2 = -mgL\sin q_2$$

$$f(q_1, q_2) = q_1 - L = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial q_1} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial q_2} = 0$$

Zapisujemy równania Lagrange'a I rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = Q_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial q_1} \quad \Rightarrow \quad 0 = mg\cos q_2 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = -mg\cos q_2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial E_k}{\partial q_2} = Q_2 + \lambda\frac{\partial f}{\partial q_2} \quad \Rightarrow \quad mL^2\ddot{q}_2 = -mgL\sin q_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{q}_2 + \frac{g}{L}\sin q_2 = 0}$$

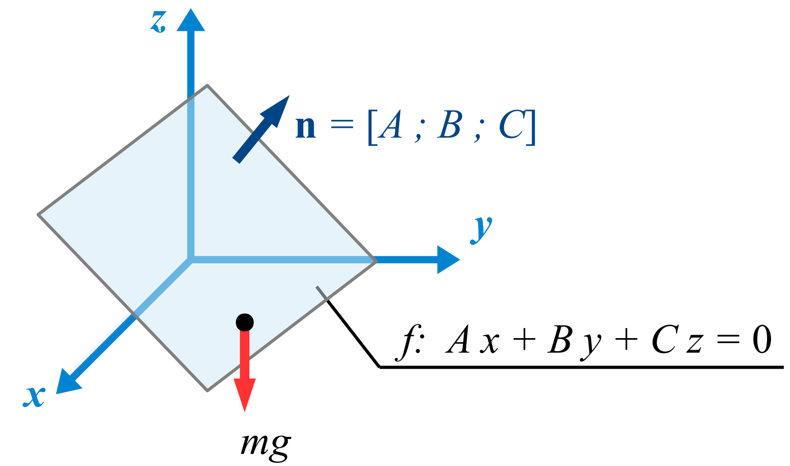
równanie ruchu

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 3:

Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem sił jednorodnego pola grawitacyjnego po płaszczyźnie danej Równaniem:

$$f(x, y, z) = A\,x + B\,y + C\,z = 0$$



Wyznaczyć równania ruchu za pomocą równań Lagrange'a II rodzaju.

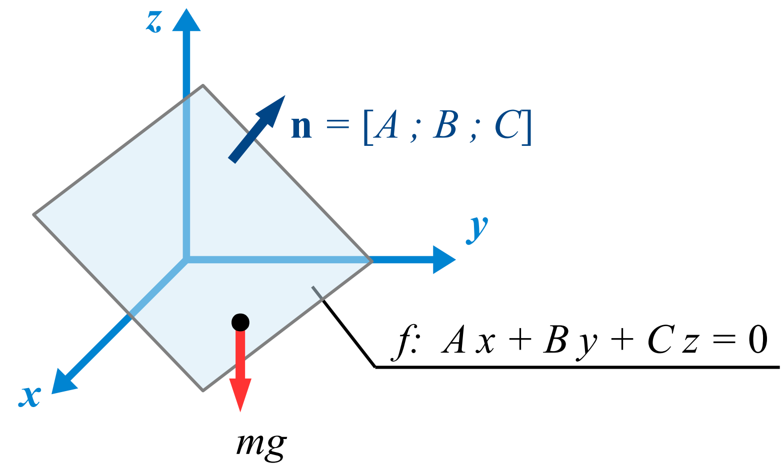
ROZWIĄZANIE:

- Punkt w przestrzeni ma 3 stopnie swobody
- Równanie płaszczyzny stanowi 1 równanie wiązania
- LSS = 3 – 1 = 2 (w istocie jest to ruch punktu po płaszczyźnie)
- Przyjmujemy 2 współrzędne kartezjańskie za współrzędne uogólnione

$$q_1 = x \qquad q_2 = y$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 3 – Równania Lagrange'a II rodzaju



Wektor położenia:
$$\mathbf{r} = \left[q_1\ ;\ q_2\ ;\ -\frac{A\,q_1 + B\,q_2}{C} \right]$$

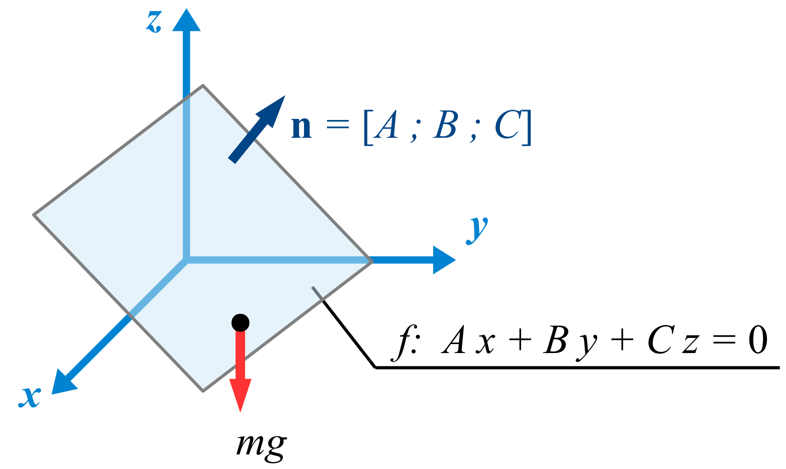
Wektor prędkości:
$$\dot{\mathbf{r}} = \left[\dot{q}_1\ ;\ \dot{q}_2\ ;\ -\frac{A\,\dot{q}_1 + B\,\dot{q}_2}{C} \right]$$

Energia kinetyczna:
$$E_k = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + \left(\frac{A\,\dot{q}_1 + B\,\dot{q}_2}{C} \right)^2 \right] =$$
$$= \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) + (\dot{q}_2)^2 \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) + \frac{2\,AB}{C^2}\dot{q}_1\dot{q}_2 \right]$$

Pochodne energii kinetycznej:
$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = m\left[\dot{q}_1 \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) + \frac{AB}{C^2}\dot{q}_2 \right] \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = m\left[\ddot{q}_1 \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) + \frac{AB}{C^2}\ddot{q}_2 \right]$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial q_2} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = m\left[\dot{q}_2 \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) + \frac{AB}{C^2}\dot{q}_1 \right] \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \ddot{q}_2} = m\left[\dot{q}_2 \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) + \frac{AB}{C^2}\ddot{q}_1 \right]$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 3 – Równania Lagrange'a II rodzaju



Siły uogólnione:

$$\mathbf{r} = \left[q_1\ ;\ q_2\ ;\ -\frac{A\,q_1 + B\,q_2}{C} \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \left[1\ ;\ 0\ ;\ -\frac{A}{C} \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = \left[0\ ;\ 1\ ;\ -\frac{B}{C} \right]$$

$$Q_1 = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = [0, 0, -mg] \cdot \left[1\ ;\ 0\ ;\ -\frac{A}{C} \right] = \frac{mg\,A}{C}$$

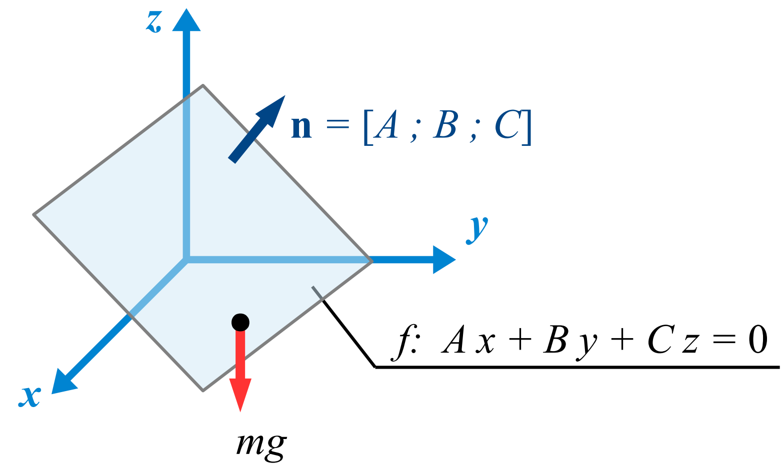
$$Q_2 = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = [0, 0, -mg] \cdot \left[0\ ;\ 1\ ;\ -\frac{B}{C} \right] = \frac{mg\,B}{C}$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 3 – Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = m\left[\ddot{q}_1\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right) + \frac{AB}{C^2}\ddot{q}_2\right] \qquad Q_1 = \frac{mg\,A}{C}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_2} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = m\left[\ddot{q}_2\left(1+\frac{B^2}{C^2}\right) + \frac{AB}{C^2}\ddot{q}_1\right] \qquad Q_2 = \frac{mg\,B}{C}$$



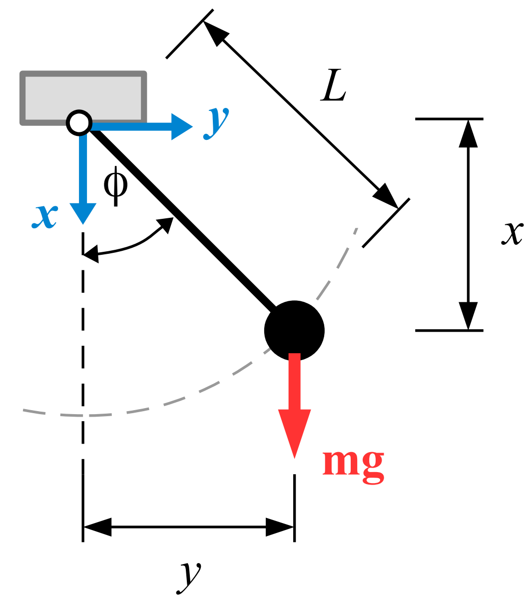
Równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} - \dfrac{\partial E_k}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} - \dfrac{\partial E_k}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\,\ddot{q}_1\left(1+\dfrac{A^2}{C^2}\right) + \dfrac{AB}{C^2}\ddot{q}_2 = \dfrac{mg\,A}{C} \\ m\,\ddot{q}_2\left(1+\dfrac{B^2}{C^2}\right) + \dfrac{AB}{C^2}\ddot{q}_1 = \dfrac{mg\,B}{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{CAg}{A^2+B^2+C^2} \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{CBg}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 4:

Wyznaczyć równanie ruchu wahadła za pomocą równań Lagrange'a II rodzaju.



ROZWIĄZANIE:

Jest to układ o **1 stopniu swobody**.

Współrzędną uogólnioną będzie **kąt wychylenia wahadła**: $q = \phi$

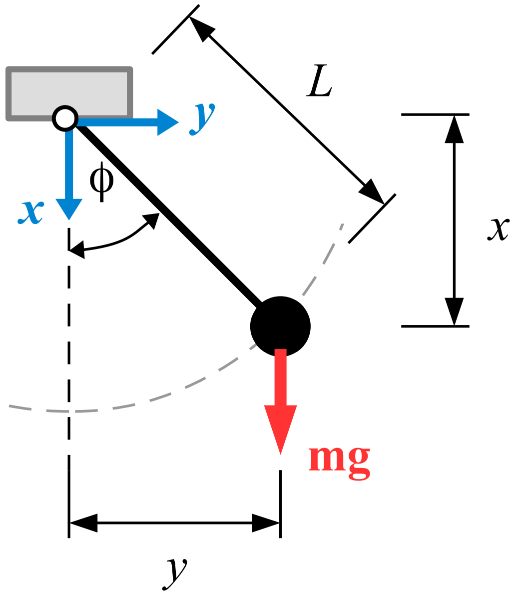
Wektor **położenia**: $\mathbf{r} = [L\cos q \ ; \ L\sin q]$

Wektor **prędkości**: $\dot{\mathbf{r}} = [-L\dot{q}\sin q \ ; \ L\dot{q}\cos q]$

Energia **kinetyczna**: $E_k = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2}\left[(-L\dot{q}\sin q)^2 + (L\dot{q}\cos q)^2\right] = \frac{mL^2}{2}(\dot{q})^2$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 4 - Równania Lagrange'a II rodzaju.



Jednorodne pole siły grawitacji jest **polem potencjalnym**.

Potencjał pola: $V = x\,m\,g = mg\,L\cos q$

Energia potencjalna: $E_p = -V = -mg\,L\cos q$

Lagranżjan: $\mathcal{L} = E_k - E_p = \dfrac{mL^2}{2}(\dot{q})^2 + mg\,L\cos q$

Pochodne lagranżjanu: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -mg\,L\sin q \qquad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = mL^2\dot{q} \qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = mL^2\ddot{q}$

Równanie Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,L^2\ddot{q} - \left(-mg\,L\sin q\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{q} + \frac{g}{L}\sin q = 0}$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj}$$

- Spełnione są zasady dynamiki Newtona.
- Muszą być **rozpatrywane łącznie z równaniami więzów**.

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{kj}\,\mathrm{d}q_j + \beta_k\,\mathrm{d}t = 0$$

  Łącznie stanowią układ $(s+c)$ równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu na s niewiadomych współrzędnych uogólnionych i c nieznanych mnożników Lagrange'a
- **Współrzędne uogólnione mogą być zależne** $(s \geq LSS)$
- Spełniona jest hipoteza d'Alemberta (w szczególności: więzy są **gładkie)**
- Więzy **mogą być nieholonomiczne**

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j$$

- Spełnione są zasady dynamiki Newtona.
- **Współrzędne uogólnione muszą być niezależne** $(s=LSS)$
- Stanowią układ LSS równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu na LSS niewiadomych współrzędnych uogólnionych i c
- Spełniona jest hipoteza d'Alemberta (w szczególności: więzy są **gładkie)**
- Więzy są **holonomiczne**

RÓWNANIA LAGRANGE'A

SCHEMAT WYZNACZANIA RÓWNAŃ RUCHU ZA POMOCĄ RÓWNAŃ LAGRANGE'A II RODZAJU

1) Dla układu o s stopniach swobody definiujemy s **współrzędnych uogólnionych**

$$q_j \qquad j=1,2,\dots,s$$

2) Dla każdego z N punktów, w których znajduje się masa lub przyłożona jest siła wyznaczamy **wektor położenia**:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s) \qquad i=1,2,\dots,N$$

3) Obliczamy **pochodne**:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}\,t}, \qquad \frac{\partial\,\mathbf{r}_i}{\partial\,q_j} \qquad i=1,2,\dots,N, \qquad j=1,2,\dots,s$$

4) Wyznaczamy **siły uogólnione**:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial\,\mathbf{r}_i}{\partial\,q_j} \qquad j=1,2,\dots,s$$

5) Obliczamy **energię kinetyczną**:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

6) Zapisujemy **równania ruchu**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial\,E_k}{\partial\,\dot{q}_j} - \frac{\partial\,E_k}{\partial\,q_j} = Q_j \qquad j=1,2,\dots,s$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ