MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

FORMALIZM LAGRANGE'A

FORMALIZM LAGRANGE'A

Formalizmem Lagrange'a nazywamy **sformułowanie mechaniki Newtonowskiej** (rządzonej przez **zasady dynamiki Newtona**), wyrażone w postaci **równań Lagrange'a I rodzaju**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j + \sum\limits_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj} \,, & j=1,\ldots,s > LSS \\ \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_{kj}\,\mathrm{d}q_j + \beta_k\,\mathrm{d}t = 0 \,, & k=1,\ldots,c \end{cases}$$

lub **równań Lagrange'a II rodzaju**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j \,, \qquad j=1,\ldots,s=LSS$$

w szczególności zaś w kategoriach **funkcji Lagrange'a** (lagranżjanu).

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = E_k - V$$

To w **dalszym ciągu mechanika Newtonowska** – jest jedynie wyrażona w inny sposób.

FORMALIZM LAGRANGE'A

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \alpha_{kj}$$

- Spełnione są zasady dynamiki Newtona.
- Muszą być **rozpatrywane łącznie z równaniami więzów**.

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{kj}\,\mathrm{d}q_j + \beta_k\,\mathrm{d}t = 0$$

Łącznie stanowią układ $(s+c)$ równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu na s niewiadomych współrzędnych uogólnionych i c nieznanych mnożników Lagrange'a

- **Współrzędne uogólnione mogą być zależne** $(s \geq LSS)$
- Spełniona jest hipoteza d'Alemberta (w szczególności: więzy są **gładkie)**
- Więzy **mogą być nieholonomiczne**

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j$$

- Spełnione są zasady dynamiki Newtona.
- **Współrzędne uogólnione muszą być niezależne** $(s=LSS)$
- Stanowią układ LSS równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu na LSS niewiadomych współrzędnych uogólnionych i c
- Spełniona jest hipoteza d'Alemberta (w szczególności: więzy są **gładkie)**
- Więzy są **holonomiczne**

FORMALIZM LAGRANGE'A

Lagranżjan (funkcję Lagrange'a) definiujemy jako **różnicę energii kinetycznej i potencjału uogólnionego** układu:

$$\mathcal{L} = E_k - V$$

W ogólności może to być funkcja **zależna jawnie czasu**, **współrzędnych uogólnionych** i **prędkości uogólnionych**.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

- **Zależność niejawna od czasu zawsze istnieje** z uwagi na to, że współrzędne uogólnione i prędkości uogólnione są funkcjami czasu.

- **Energia kinetyczna** z **definicji** jest **funkcją prędkości uogólnionych** i czas nie występuje w tej definicji jawnie.

- **Energia potencjalna** potencjalnego pola sił jest **funkcją położenia** (**współrzędnych uogólnionych**) w tym polu. Nie zależy zatem od prędkości uogólnionych. Można jednak rozważać pole sił zmienne w czasie, zatem o potencjale zależnym w sposób jawny od czasu i – w konsekwencji – o energii potencjalnej zależnej w sposób jawny od czasu. Całkowita energia mechaniczna układu zmienia się w czasie. Zatem:

Jeśli lagranżjan układu zależy w sposób jawny od czasu to energia tego układu nie jest zachowana.

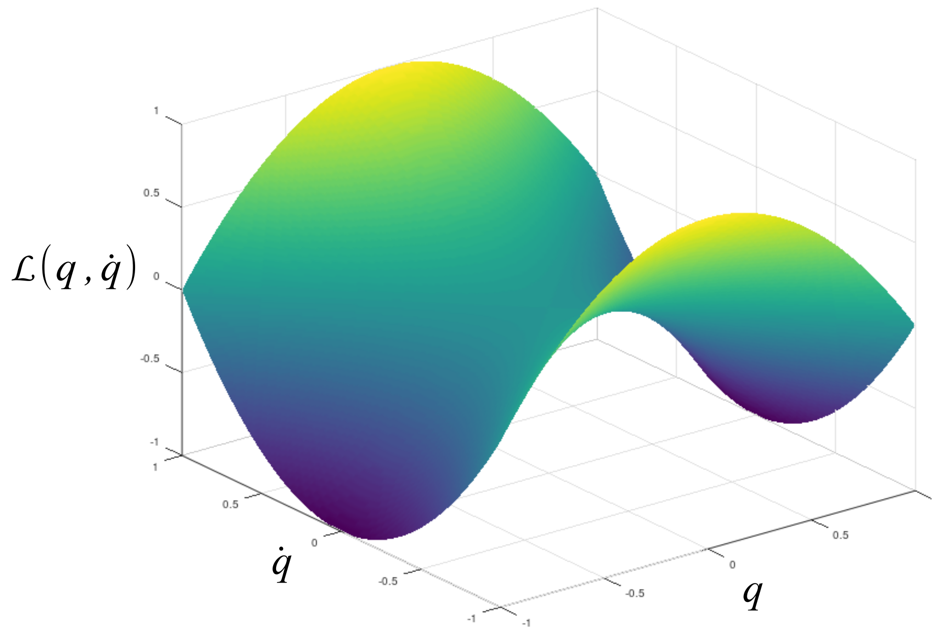
W sposób ścisły wykażemy to przy omawianiu formalizmu Hamiltona.

LAGRANŻJAN

PRZYKŁAD 1 - Drgania swobodne układu o LSS=1

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{m v^2}{2} = \frac{m(\dot{q})^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)$$



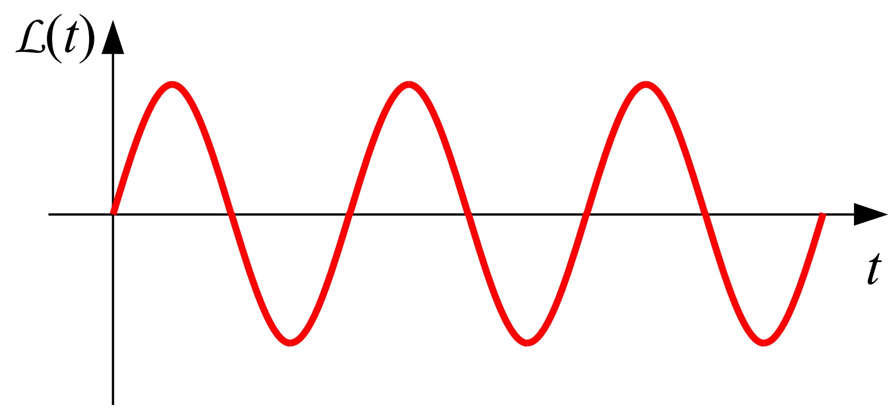
Energia potencjalna:

$$E_p = \frac{k x^2}{2} = \frac{k q^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega t)$$

Lagranżjan:

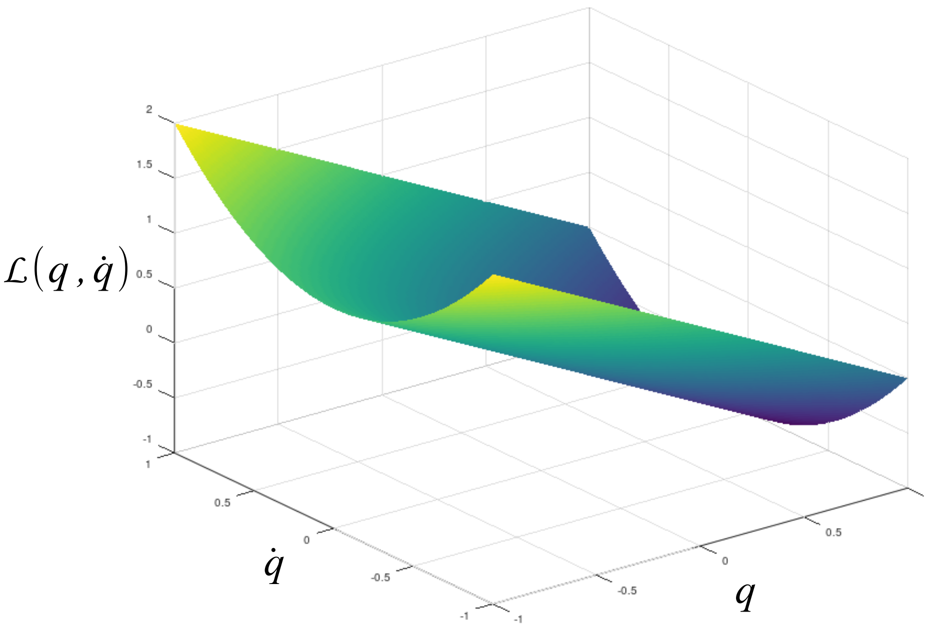
$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{1}{2}\left(m(\dot{q})^2 - k q^2\right)$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[m \omega^2 \cos^2(\omega t) - k \sin^2(\omega t)\right]$$



LAGRANŻJAN

PRZYKŁAD 2 – Spadek swobodny w jednorodnym polu sił



Energia kinetyczna:

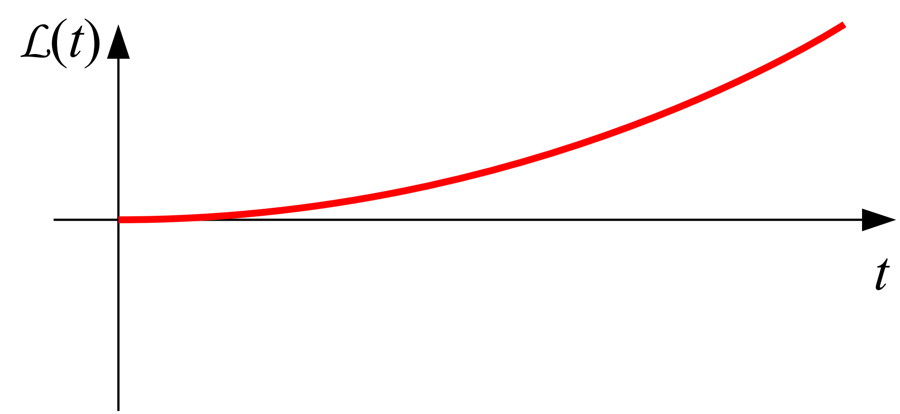
$$E_k = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}(g t)^2$$

Energia potencjalna:

$$E_p = -V = m g h = mg\left(h_0 - \frac{g t^2}{2}\right)$$

Lagranżjan:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{m}{2}\left((\dot{q})^2 - g q\right) = mg\left[g t^2 - h_0\right]$$



LAGRANŻJAN

Przypuśćmy, że mamy wybranych LSS **współrzędnych uogólnionych** q_j (j=1,...,s=LSS), i wyznaczyliśmy **lagranżjan**:

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}$$

Przypuśćmy, że wyznaczyliśmy również układ innych LSS współrzędnych uogólnionych $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_s$, które wiążą się z tymi pierwotnymi za pomocą **znanego przekształcenia**:

$$\tilde{q}_l = \tilde{q}_l(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad l = 1,2, \dots, s = LSS$$

O przekształceniu tym zakładamy, że jest **odwracalne**, zatem istnieje związek

$$q_j = q_j(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_s, t), \quad j = 1,2, \dots, s = LSS$$

LAGRANŻJAN

Wyznaczmy **stare** prędkości uogólnione jako **pochodne zupełne względem czasu z funkcji nowych współrzędnych uogólnionych**:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial t} + \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} \dot{\tilde{q}}_l$$

Obie strony powyższej zależności możemy zróżniczkować cząstkowo względem nowych prędkości uogólnionych, pamiętając, że **stare współrzędne uogólnione oraz jej pochodne cząstkowe nie zależą w sposób jawny od nowych prędkości uogólnionych**:

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{\partial q_j}{\partial t}}_{=0} + \sum_{l=1}^{s} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} \right)}_{=0} \dot{\tilde{q}}_l + \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} \underbrace{\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_l}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}}_{=\delta_{il}} = \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i}$$

Otrzymaliśmy zatem wzór na „skracanie pochodnych” przy różniczkowaniu starych i nowych prędkości uogólnionych.

LAGRANŻJAN

Zapiszmy teraz lagranżjan podstawiając za stare współrzędne i prędkości uogólnione wielkości nowe

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}\left(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t), t\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t)$$

Spróbujmy zapisać równanie Lagrange'a dla tej nowej funkcji $\tilde{\mathcal{L}}$. W tym celu potrzebujemy następujące pochodne:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \tilde{q}_l} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \tilde{q}_l} \right]$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} \right] = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} \right]$$

(„skracanie pochodnych”)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} = \sum_{j=1}^{s} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} \right) \right] = \sum_{j=1}^{s} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \tilde{q}_l} \right]$$

(zamiana kolejności różniczkowania)

LAGRANŻJAN

Podstawmy teraz obliczone pochodne do równania Lagrange'a zapisanego dla nowego lagranżjanu:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_j} = \\
&= \sum_{j=1}^{s}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \tilde{q}_l}\right] - \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \tilde{q}_l}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{s}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l}\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{s}\underbrace{\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right]}_{=0}\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} = 0
\end{aligned}
$$

A zatem, równanie Lagrange'a II rodzaju nie zmienia swojej postaci, jeśli dokonamy dowolnej zamiany współrzędnych uogólnionych. Mówimy, że **równania Lagrange'a II rodzaju są** niezmiennicze przy transformacjach punktowych.

LAGRANŻJAN

Kolejnym przekształceniem funkcji Lagrange'a, które nie zmienia postaci równań Lagrange'a jest tzw. cechowanie, tj. **dodanie do lagranżjanu pewnej funkcji**. Zakładamy, że **funkcja ta jest pochodną zupełną względem czasu** z pewnej innej funkcji, która **zależy w sposób jawny od czasu oraz od współrzędnych uogólnionych**. Oznaczmy zatem:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{\mathrm{d}\, F(\mathbf{q}, t)}{\mathrm{d}\, t}$$

Sprawdźmy, czy i tak zmodyfikowany lagranżjan spełnia równania Lagrange'a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}}_{=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}\, F}{\mathrm{d}\, t} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}\, F}{\mathrm{d}\, t}$$

Obliczmy występujące powyżej pochodne:

$$\frac{\mathrm{d}\, F}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

Różniczkowanie jawnych zależności od współrzędnych uogólnionych i od czasu nie wprowadza zależności od prędkości uogólnionych – powyższe **pochodne cząstkowe nie zależą od prędkości uogólnionych**.

LAGRANŻJAN

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Obliczmy pochodną:
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_j} \delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

Wróćmy do przekształconego **równania Lagrange'a**:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

Uwzględniamy otrzymany wynik na pochodną:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

Wcześniej już udowolniliśmy, że dla funkcji zależnych tylko od czasu i współrzędnych uogólnionych można zmieniać kolejność różniczkowania zupełnego względem czasu i cząstkowego względem współrzędnych. Otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_j} = 0$$

Równania Lagrange'a są zatem niezmiennicze względem cechowania.

FORMALIZM CAŁKI DZIAŁANIA

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

Funkcjonałem nazywamy **odwzorowanie, które funkcji przypisuje liczbę (skalar)**. Najczęściej funkcjonałem takim jest całka oznaczona:

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right) \mathrm{d}t$$

Funkcję $x(t)$ zmiennej niezależnej t, możemy uważać za swego rodzaju zmienną niezależną funkcjonału J.

- Podobnie, jak w rachunku różniczkowym, gdzie sprawdzamy zmienność funkcji, poszukując jej ekstremów, możemy zastanowić się, **dla jakich funkcji $x(t)$ funkcjonał J przyjmuje wartości ekstremalne?** Dział matematyki zajmujący się tymi zagadnieniami nazywamy **rachunkiem wariacyjnym**.

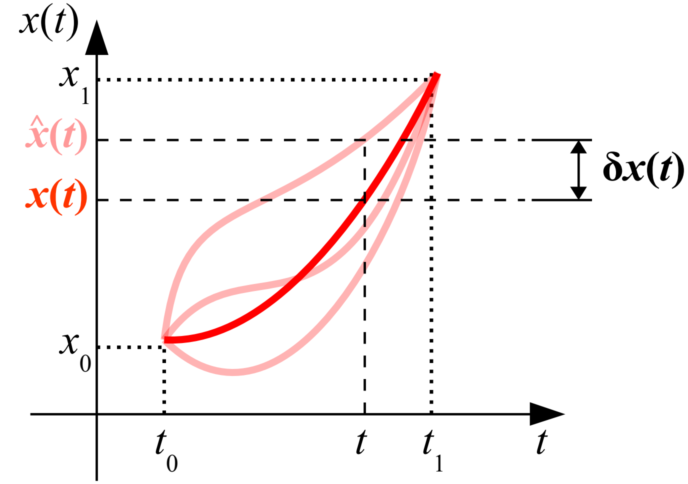
- Funkcje, dla których funkcjonał przyjmuje wartości ekstremalne nazywamy **ekstremalami**.

- **Rachunek wariacyjny znajduje zastosowanie w mechanice**. Spośród wszystkich możliwych trajektorii ciała, pozwala wyznaczyć **trajektorię rzeczywistą** (spełniającą równania ruchu, warunki początkowe i równania więzów) właśnie **jako ekstremalę** pewnego **funkcjonału, nazywanego działaniem**, w którym **funkcją podcałkową jest lagranżjan**.

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

Rozważmy pewną **funkcję o ustalonych końcach**, tj. o ustalonych wartościach w przyjętym punkcie początkowym i punkcie końcowym:

$$x(t): \quad x(t_0) = x_0\,, \quad x(t_1) = x_1$$



Inną funkcję o tych samych końcach można zapisać w postaci:

$$\hat{x} = x + \delta x$$

Jeśli δx **jest małe**, wtedy **funkcję** $\hat{x}$ **nazywamy funkcją bliską funkcji** x, a przyrost funkcji δx zdefiniowany jako:

$$\boxed{\delta x = \hat{x} - x}$$

nazywamy **wariacją funkcji** x. W **mechanice** funkcjami $\hat{x}(t)$ są **dopuszczalne trajektorie punktów**. Jedna z nich, $x(t)$, jest **trajektorią rzeczywistą**. Inne trajektorie dopuszczalne to funkcje bliskie tej trajektorii i obliczane są przez dodanie do trajektorii rzeczywistej **wariacji przemieszczenia** $\delta x(t)$**, tj. przemieszczenia wirtualnego**. Łatwo pokazać, że **wariacja pochodnej to pochodna wariacji**:

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right) = \frac{\mathrm{d}^n \hat{x}}{\mathrm{d}t^n} - \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\hat{x} - x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta x$$

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

Dla pewnego zbioru funkcji $x_j(t)$ $(j=1,\dots,s)$, pewien funkcjonał, który zależy od s funkcji i jej pochodnych do rzędu n włącznie, przyjmuje wartość daną całką oznaczoną

$$J[\mathbf{x}(t)]=\int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_s(t),\ \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}, \dots\dots, \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n}, \frac{\mathrm{d}^n x_2}{\mathrm{d}t^n} \dots \frac{\mathrm{d}^n x_s}{\mathrm{d}t^n}\right)\mathrm{d}t$$

Jeśli funkcje zmienne w funkcjonale podlegać będą niewielkim wariacjom, to również i funkcjonał zmieni nieznacznie swoją wartość. Wariacją funkcjonału nazywamy **liniową część przyrostu wartości tego funkcjonału** – przyrost ten odpowiada wariacji funkcji zmiennych. Liniowość oznacza tutaj, że wariacja funkcjonału jest kombinacją liniową (ważoną sumą pierwszych potęg) wariacji funkcji.

Pierwszą wariację **funkcjonału** można obliczyć następująco:

$$\delta J=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J[\underbrace{\mathbf{x}+\alpha\,\delta\mathbf{x}}_{\hat{\mathbf{x}}}]\,\Big|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\delta x_j+\frac{\partial F}{\partial x_j^{(1)}}\delta x_j^{(1)}+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_j^{(n)}}\delta x_j^{(n)}\right)\right]\mathrm{d}t$$

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

- Jeśli dla funkcji $x_j(t)$ **wariacja funkcjonału jest zerowa**

$$\delta J = 0$$

to mówimy, że **funkcjonał przyjmuje wartość** stacjonarną , to znaczy w najbliższym otoczeniu (dla wszystkich funkcji dostatecznie bliskich) wartość tego funkcjonału zmienia się dowolnie mało – jest „prawie stała” (stacjonarna).

- Analogicznie jak w przypadku rachunku różniczkowego może to być
  - **maksimum lokalne**
  - **minimum lokalne**
  - **„punkt siodłowy”** - w takim punkcie wariacja na kierunku jednej zmiennej powoduje przyrost wartości funkcjonału, a na kierunku innej zmiennej powoduje spadek wartości funkcjonału

- **Zerowanie się pierwszej wariacji funkcjonału jest** warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego, ale **nie jest warunkiem wystarczającym**.

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

Rozważmy **funkcjonał**, który zależy od s **funkcji** $q_j(t)$ oraz od ich **pierwszych pochodnych**.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s\right) \mathrm{d}t$$

Pierwsza wariacja **(względem funkcji** q_j**)** funkcjonału jest równa:

$$\delta J = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J[\mathbf{x} + \alpha \delta \mathbf{x}]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F\left(t, q_1 + \alpha\delta q_1, \ldots, q_s + \alpha\delta q_s, \dot{q}_1 + \alpha\delta\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s + \alpha\delta\dot{q}_s\right)\Big|_{\alpha=0} \mathrm{d}t =$$

czas nie podlega wariacji

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(q_j + \alpha\delta q_j) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\dot{q}_j + \alpha\delta\dot{q}_j) \right)\Bigg|_{\alpha=0} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j \right) \mathrm{d}t$$

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

Uwzględniając fakt, że wariacja pochodnej to pochodna wariacji, **składniki przyrostu zależne od pochodnych** można **scałkować przez części**:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_j \mathrm{d}t = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \mathrm{d}t$$

Ale **wariacja funkcji ma zerowe wartości na końcach** – była zdefiniowana jako różnica dwóch funkcji bliskich, których każda miała te same ustalone wartości na końcach. Zatem:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \mathrm{d}t$$

Po podstawieniu do wyrażenia na wariację otrzymamy:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{s} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right] \mathrm{d}t$$

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

Funkcjonał będzie miał **wartość stacjonarną**, jeśli jego **wariacja będzie zerowa**:

$$\delta J = \sum_{j=1}^{s} \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right] \mathrm{d}t = 0 \qquad \underset{\delta q_j}{\forall}$$

Wariacje δq_j **są niezależne**, zatem każda z całek powyższej sumy musi się zerować dla każdej wariacji δq_j.

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right] \mathrm{d}t = 0 \qquad \underset{\delta q_j}{\forall}$$

Można dowieść lematu podstawowego rachunku wariacyjnego, zgodnie z którym, jeśli **całka iloczynu dwóch funkcji ciągłych jest tożsamościowo równa 0 dla dowolnej postaci jednej z tych funkcji, to druga z tych funkcji musi być tożsamościowo równa 0**:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad j=1,\ldots,s}$$

Powyższy układ równań to tzw. równania Eulera-Lagrange'a. Są to równania różniczkowe na funkcje q_j. Dla funkcji q_j, będących rozwiązaniami tych równań, spełniony jest **warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału** J. **Równania te mają tę samą postać co równania Lagrange'a II rodzaju dla lagranżjanu**.

ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

Działaniem nazywamy **całkę względem czasu z lagranżjanu po dowolnej dopuszczalnej trajektorii ciała**.

$$\boxed{\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \,\mathrm{d}t}$$

Wymiarem fizycznym działania jest **dżul · sekunda**: $[\mathcal{S}] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

Zgodnie z przeprowadzonym rozważaniem, **spełnienie równań Lagrange'a II rodzaju jest warunkiem koniecznym na to, aby całka działania osiągała wartość stacjonarną**. Możemy zatem sformułować następującą zasadę:

ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA (ZASADA HAMILTONA)

Spośród wszystkich dopuszczalnych trajektorii ciała poruszającego się **w potencjalnym polu sił, trajektorią rzeczywistą** – zgodną z więzami i spełniającą zasady dynamiki Newtona oraz warunki początkowe – jest ta, dla której **działanie przyjmuje wartość stacjonarną**:

$$\delta \mathcal{S} = 0$$

ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

UWAGI:

- Formalizm całki działania nie określa żadnej nowej zasady dynamiki – jest tylko **alternatywnym sformułowaniem mechaniki Newtonowskiej**.

- Formalizm całki działania ma **te same założenia, co równania Lagrange'a II rodzaju** z użyciem lagranżjanu:

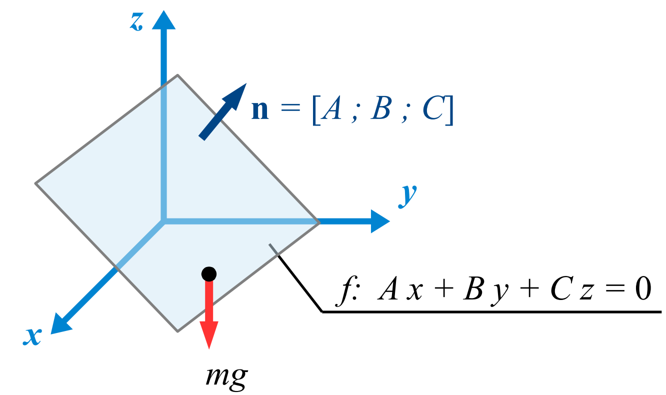
    - spełnione są **zasady dynamiki Newtona**
    - spełniona jest **hipoteza d'Alemberta** (np. więzy są **gładkie**)
    - więzy są **holonomiczne**
    - ciało porusza się w **potencjalnym polu sił**

- W przeciwieństwie do równań Lagrange'a i równań Newtona, formalizm całki działania dostarcza nam tzw. **sformułowania globalnego** (w postaci **całki po całej trajektorii**) a nie **lokalnego** (w postaci **równań różniczkowych spełnionych w każdym punkcie** trajektorii)

- Potoczna nazwa jest myląca, bo działanie ma przyjąć **wartość stacjonarną** – może to być **minimum**, ale również może to być **punkt siodłowy**.

- Można udowodnić, że trajektorii rzeczywistych **działanie nigdy nie przyjmuje wartości maksymalnej**.

RÓWNANIA LAGRANGE'A



PRZYKŁAD 1:

Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem sił jednorodnego pola grawitacyjnego po płaszczyźnie danej równaniem:

$$f(x, y, z) = A\,x + B\,y + C\,z = 0$$

Wyznaczyć równania ruchu na podstawie zasady Hamiltona.

ROZWIĄZANIE:

Jest to układ o **2 stopniach swobody**.

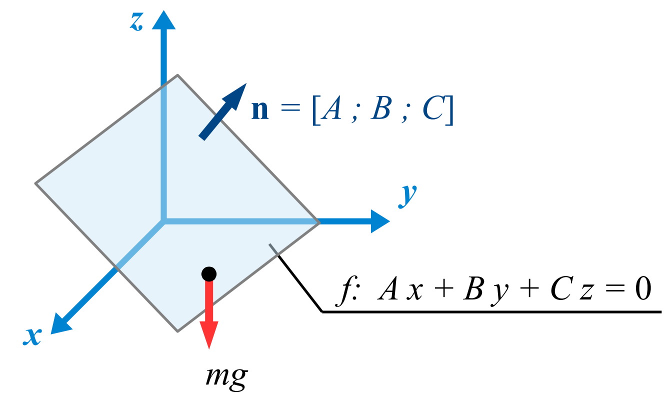
Współrzędnymi uogólnionymi będą współrzędne kartezjańskie x i y: $q_1 = x\ ,\qquad q_2 = y$

Wektor położenia: $$\mathbf{r} = \left[q_1\ ;\ q_2\ ;\ -\frac{A\,q_1 + B\,q_2}{C} \right]$$

Wektor prędkości: $$\dot{\mathbf{r}} = \left[\dot{q}_1\ ;\ \dot{q}_2\ ;\ -\frac{A\,\dot{q}_1 + B\,\dot{q}_2}{C} \right]$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 1:



Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right) + (\dot{q}_2)^2\left(1+\frac{B^2}{C^2}\right) + \frac{2AB}{C^2}\dot{q}_1\dot{q}_2\right]$$

Energia potencjalna:

$$E_p = mgz = -mg\frac{Aq_1+Bq_2}{C}$$

Lagranżjan:

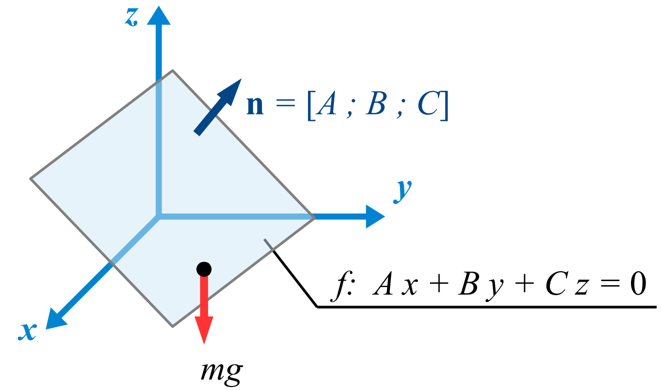
$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right) + (\dot{q}_2)^2\left(1+\frac{B^2}{C^2}\right) + \frac{2AB}{C^2}\dot{q}_1\dot{q}_2\right] + mg\frac{Aq_1+Bq_2}{C}$$

Działanie:

$$\mathcal{S}[q_1, q_2] = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{m}{2}\left[\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right)\dot{q}_1^2 + \left(1+\frac{B^2}{C^2}\right)\dot{q}_2^2 + \frac{2AB}{C^2}\dot{q}_1\dot{q}_2\right] + \frac{mg}{C}(Aq_1+Bq_2)\right]\mathrm{d}t$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 1:



Wariacja działania:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 \right] \mathrm{d}t$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{A}{C} mg \right) \delta q_1 + \left[\left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) m \dot{q}_1 + \frac{mAB}{C^2} \dot{q}_2 \right] \delta \dot{q}_1 + \left(\frac{B}{C} mg \right) \delta q_2 + \left[\left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) m \dot{q}_2 + \frac{mAB}{C^2} \dot{q}_1 \right] \delta \dot{q}_2 \right] \mathrm{d}t$$

Składniki zawierające wariację prędkości uogólnionych całkujemy przez części. W członach brzegowych uwzględniamy **zerowanie się wariacji na brzegach trajektorii**. Po pogrupowaniu wyrazów otrzymujemy:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left[\left(\frac{A}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_1 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_2 \right] \delta q_1 + \left[\left(\frac{B}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_2 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_1 \right] \delta q_2 \right] \mathrm{d}t$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A

PRZYKŁAD 1:

Z zasady najmniejszego działania wynika, że **pierwsza wariacja całki działania ma się zerować dla dowolnych wariacji przemieszczeń**:

$$\delta S = \int_{t_0}^{0} \left[\left[\left(\frac{A}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_1 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_2 \right] \delta q_1 + \left[\left(\frac{B}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_2 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_1 \right] \delta q_2 \right] \mathrm{d}\tau = 0 \qquad \forall_{\delta q_1, \delta q_2}$$

Z tego wynika, że:

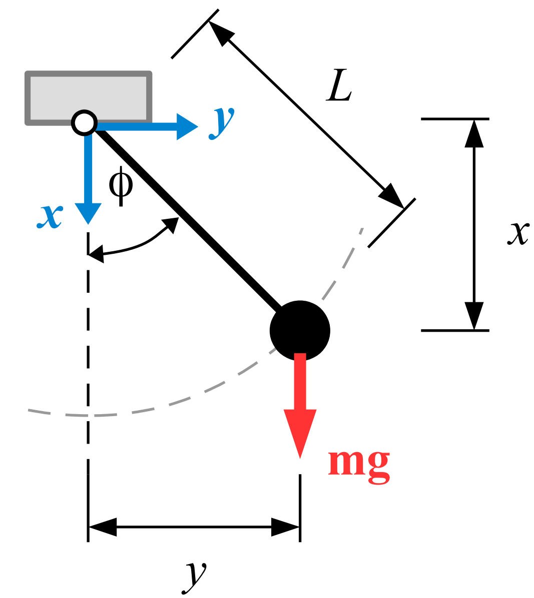
$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\left(\frac{A}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_1 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_2 \right) \delta q_1 \right] \mathrm{d}t = 0 \ , \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\left(\frac{B}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_2 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_1 \right) \delta q_2 \right] \mathrm{d}t = 0 \qquad \forall_{\delta q_1, \delta q_2}$$

Na podstawie lematu podstawowego rachunku wariacyjnego:

$$\begin{cases} \left(\frac{A}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{A^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_1 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_2 = 0 \\ \left(\frac{B}{C} mg \right) - \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \right) m \ddot{q}_2 - \frac{mAB}{C^2} \ddot{q}_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{CAg}{A^2 + B^2 + C^2} \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{CBg}{A^2 + B^2 + C^2} \end{cases}}$$

ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

PRZYKŁAD 2:



Wyznaczyć równanie ruchu wahadła za pomocą zasady najmniejszego działania.

ROZWIĄZANIE:

Jest to układ o **1 stopniu swobody**.

Współrzędną uogólnioną będzie **kąt wychylenia wahadła**: $q = \phi$

Wektor położenia: $\mathbf{r} = [L\cos q \ ; \ L\sin q]$

Wektor prędkości: $\dot{\mathbf{r}} = [-L\dot{q}\sin q \ ; \ L\dot{q}\cos q]$

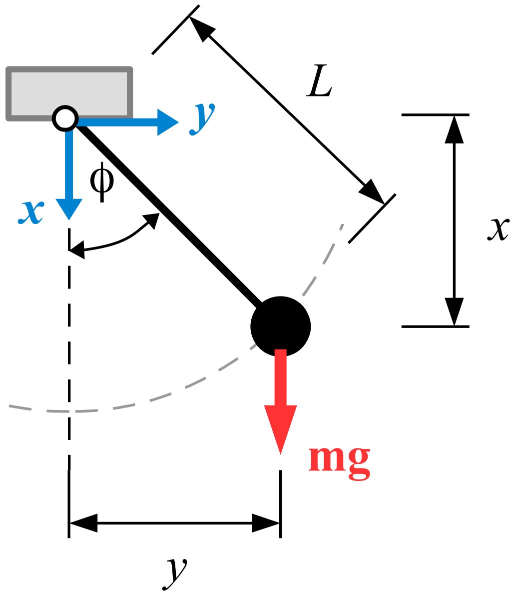
Energia kinetyczna: $E_k = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2}\left[(-L\dot{q}\sin q)^2 + (L\dot{q}\cos q)^2\right] = \frac{mL^2}{2}(\dot{q})^2$

Energia potencjalna: $E_p = -V = -mg\,L\cos q$

Lagranżjan: $\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{mL^2}{2}(\dot{q})^2 + mg\,L\cos q$

ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

PRZYKŁAD 2:



Działanie:

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q, \dot{q})\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{mL^2}{2}(\dot{q})^2 + mgL\cos q \right] \mathrm{d}t$$

Wariacja działania:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q+\alpha\delta q, \dot{q}+\alpha\delta\dot{q})\,\mathrm{d}t \Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{mL^2}{2}(\dot{q}+\alpha\delta\dot{q})^2 + mgL\cos(q+\alpha\delta q) \right] \mathrm{d}t \Bigg|_{\alpha=0} =$$

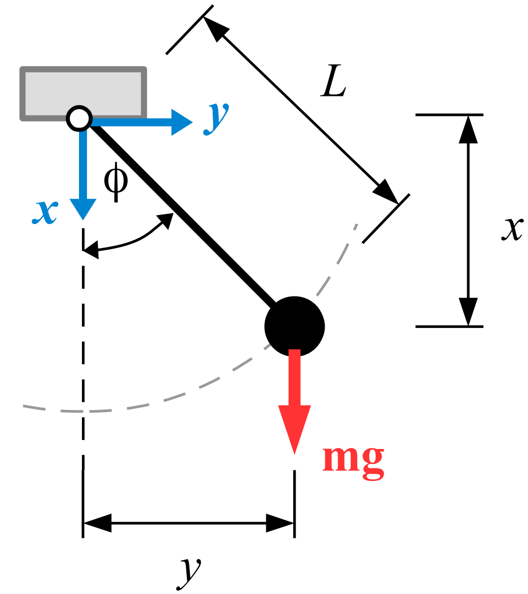
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{mL^2}{2}[(\dot{q})^2 + 2\alpha\dot{q}\delta\dot{q} + \alpha^2(\delta\dot{q})^2] + mgL\cos(q+\alpha\delta q) \right] \mathrm{d}t \Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{mL^2}{2}[2\dot{q}\delta\dot{q} + 2\alpha(\delta\dot{q})^2] - mgL\sin(q+\alpha\delta q)\delta q \right] \mathrm{d}t \Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[mL^2\dot{q}\delta\dot{q} - mgL\sin(q)\delta q \right] \mathrm{d}t$$

ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

PRZYKŁAD 2:



Wariacja działania:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} mL^2 \dot{q}\,\delta\dot{q}\,\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} mg\,L\sin(q)\,\delta q\,\mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{\left[m\,L^2\,\dot{q}\,\delta q\right]_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} mL^2\,\ddot{q}\,\delta q\,\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} mg\,L\sin(q)\,\delta q\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \left[mL^2\ddot{q} + mg\,L\sin(q)\right]\delta q\,\mathrm{d}t$$

Zasada najmniejszego działania: $\delta S = 0 \quad \forall_{\delta q}$

Równanie ruchu: $mL^2\ddot{q} + mg\,L\sin(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{q} + \frac{g}{L}\sin(q) = 0}$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ