MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

TEORIA STATECZNOŚCI LAPUNOWA

STATECZNOŚĆ UKŁADU MECHANICZNEGO

Stan równowagi **układu mechanicznego**, to stan w którym **wszystkie punkty t**ego układu **znajdują się w spoczynku** względem przyjętego układu inercjalnego.

Wyróżniamy 4 przypadki stanu równowagi:

- równowaga trwała (stabilna)
- równowaga nietrwała (chwiejna, niestabilna)
- równowaga obojętna
- równowaga metatrwała (metastabilna)

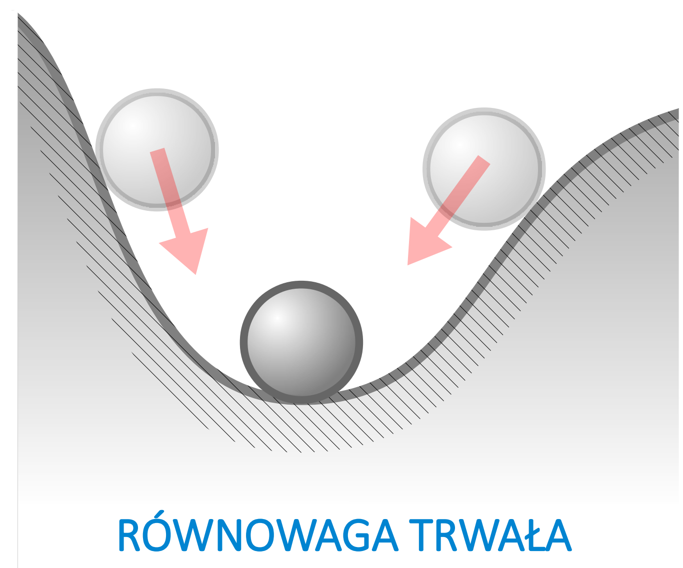
STATECZNOŚĆ UKŁADU MECHANICZNEGO

Stan równowagi **układu mechanicznego**, to stan w którym **wszystkie punkty t**ego układu **znajdują się w spoczynku** względem przyjętego układu inercjalnego.

Wyróżniamy 4 przypadki stanu równowagi:

- równowaga trwała (stabilna)
- równowaga nietrwała (chwiejna, niestabilna)
- równowaga obojętna
- równowaga metatrwała (metastabilna)

RÓWNOWAGA TRWAŁA – stan charakteryzujący się tym, że **na ciało wychylone w niewielkim stopniu z położenia równowagi trwałej działają siły, które dążą do tego, aby ciało powróciło do położenia równowagi trwałej**.



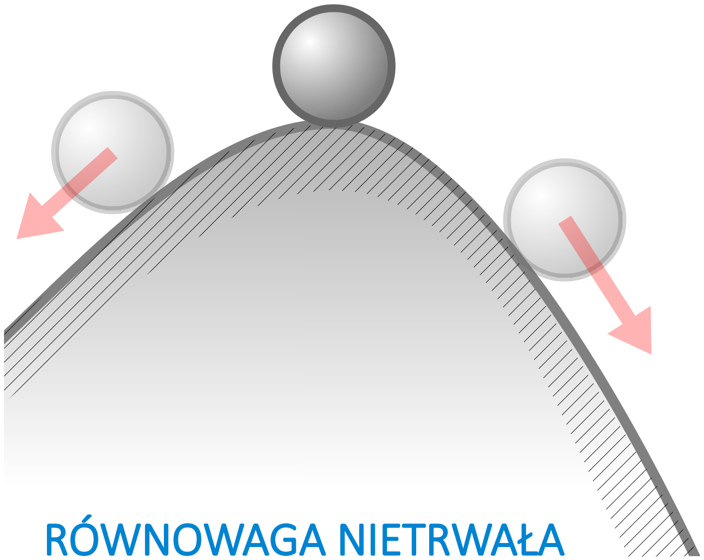
STATECZNOŚĆ UKŁADU MECHANICZNEGO

Stan równowagi **układu mechanicznego**, to stan w którym **wszystkie punkty t**ego układu **znajdują się w spoczynku** względem przyjętego układu inercjalnego.

Wyróżniamy 4 przypadki stanu równowagi:

- równowaga trwała (stabilna)
- równowaga nietrwała (chwiejna, niestabilna)
- równowaga obojętna
- równowaga metatrwała (metastabilna)

RÓWNOWAGA NIETRWAŁA – stan charakteryzujący się tym, że **na ciało wychylone w niewielkim stopniu z położenia równowagi nietrwałej działają siły, które dążą do tego, aby ciało oddaliło się do położenia równowagi nietrwałej**.



RÓWNOWAGA NIETRWAŁA

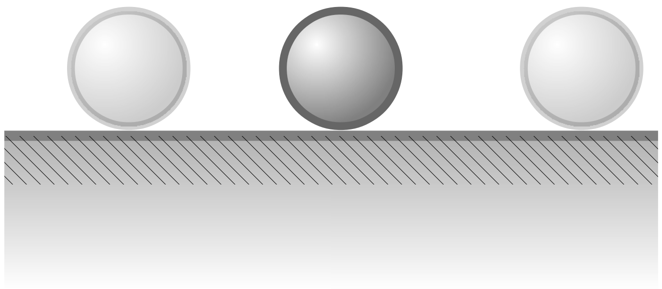
STATECZNOŚĆ UKŁADU MECHANICZNEGO

Stan równowagi **układu mechanicznego**, to stan w którym **wszystkie punkty t**ego układu **znajdują się w spoczynku** względem przyjętego układu inercjalnego.

Wyróżniamy 4 przypadki stanu równowagi:

- równowaga trwała (stabilna)
- równowaga nietrwała (chwiejna, niestabilna)
- równowaga obojętna
- równowaga metatrwała (metastabilna)

RÓWNOWAGA OBOJĘTNA – stan charakteryzujący się tym, że **na ciało wychylone w niewielkim stopniu z położenia równowagi obojętnej nadal jest w stanie równowagi obojętnej**



RÓWNOWAGA OBOJĘTNA

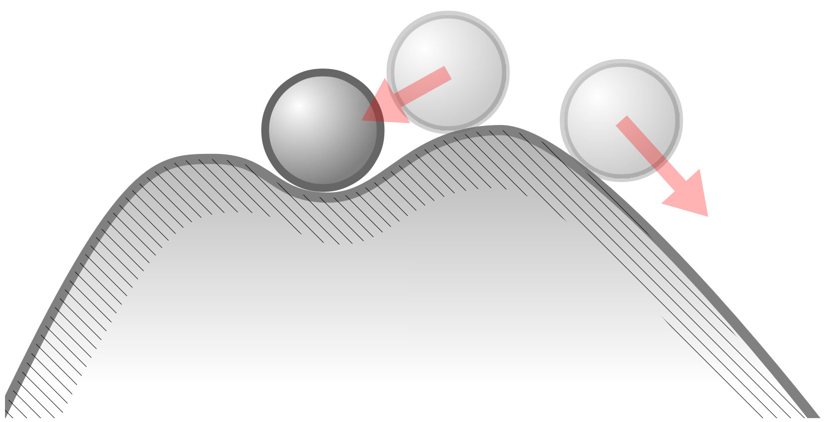
STATECZNOŚĆ UKŁADU MECHANICZNEGO

Stan równowagi **układu mechanicznego**, to stan w którym **wszystkie punkty t**ego układu **znajdują się w spoczynku** względem przyjętego układu inercjalnego.

Wyróżniamy 4 przypadki stanu równowagi:

- równowaga trwała (stabilna)
- równowaga nietrwała (chwiejna, niestabilna)
- równowaga obojętna
- równowaga metatrwała (metastabilna)

RÓWNOWAGA METATRWAŁA – stan charakteryzujący się tym, że **na ciało wychylone w niewielkim stopniu z położenia równowagi metatrwałej działają siły, które dążą do tego, aby ciało powróciło do położenia równowagi.** Jeśli jednak wychylenie jest odpowiednio duże i przekracza pewną wartość, wtedy na ciało działają siły, które dążą do tego, aby ciało oddaliło się od położenia równowagi



RÓWNOWAGA METATRWAŁA

STATECZNOŚĆ UKŁADU MECHANICZNEGO

Pojawiają się w sposób naturalny następujące pytania:

- Jak sprawdzić, czy położenie, w którym znajduje się aktualnie ciało, jest położeniem równowagi?
- Jeśli jest ono położeniem równowagi, to jaki jest jego charakter?
- Jak znaleźć położenie równowagi układu?

Narzędziem umożliwiającym znalezienie odpowiedzi na powyższe pytania są tzw. **metody Lapunowa**.

- Pośrednia metoda Lapunowa (tzw. **pierwsza metoda Lapunowa**) przybliża zachowanie układu dynamiczny w pobliżu analizowanego stanu równowagi najbardziej podobnym do niego **układem liniowym**. Z zachowania układu liniowego wnioskuje się o istnieniu i charakterze położenia równowagi.

- Bezpośrednia metoda Lapunowa (tzw. **druga metoda Lapunowa)**, zgodnie z którą, jeśli dla układu dynamicznego da się znaleźć tzw. **funkcję Lapunowa** o wartościach nieujemnych, ale stale nierosnących w czasie, to o układzie tym wnioskujemy, że ma położenie równowagi statecznej.

STATECZNOŚĆ W SENSIE LAPUNOWA

Rozważamy **układ mechaniczny**, który opisany jest **układem równań ruchu**:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

Wiemy, że równania ruchu układu mechanicznego o s stopniach swobody w formalizmie Newtona i Lagrange'a to układ równań s różniczkowych drugiego rzędu. Wiemy jednak, że układ taki możemy w prosty sposób przekształcić do układu $2s$ równań różniczkowych pierwszego rzędu, co pozwala nam rozważać układ mechaniczny opisany równaniami, jak powyżej.

UWAGI:

- Składowe funkcji wektorowej $\mathbf{x}$ niekoniecznie określają położenie w przestrzeni. Skoro maja być to równania ruchu zapisane w postaci układu równań 1. rzędu, to połowa z nich musi określać prędkości (pędy). Zatem przez **punkt równowagi $\mathbf{x}^e$** rozumiemy w ogólności „**stan równowagi**”.

- „Wielkość” („długość”) funkcji w takiej przestrzeni funkcji może być zdefiniowana w różny sposób, np.:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} [x_i(t)]^2 \, \mathrm{d}t}$$

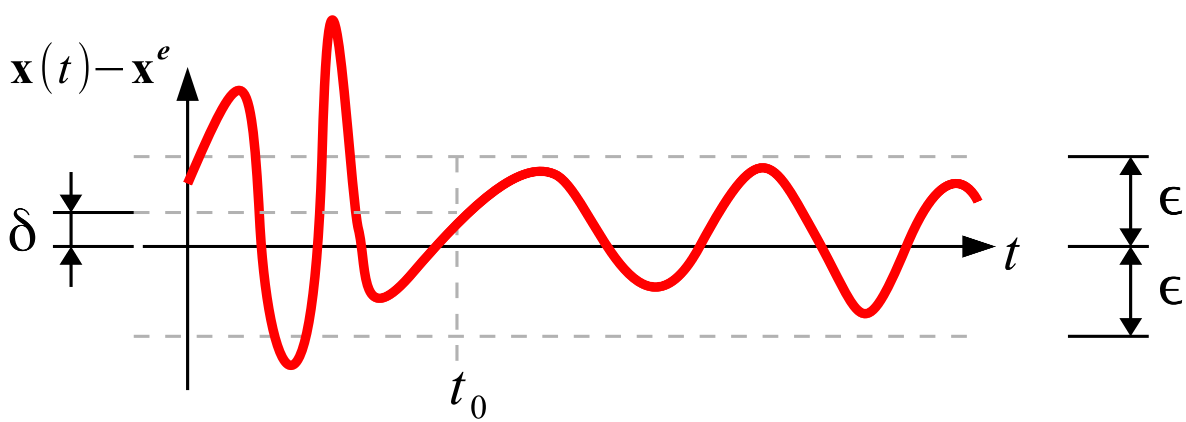
STATECZNOŚĆ W SENSIE LAPUNOWA

Układ mechaniczny nazywamy **układem statecznym w sensie Lapunowa**, jeśli:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} : \ \underset{t>t_0}{\forall} \ \|\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{x}^e\|<\delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^e\|<\epsilon$$

PO POLSKU:

- Wybieramy dowolnie małą wielkość ϵ, będącą miarą wychylenia ze stanu równowagi w dowolnie odległej chwili t. Chcemy, żeby ϵ było jak najbliższe 0.
- Przez δ oznaczmy miarę wychylenia ze stanu równowagi w pewnej ustalonej chwili t_0.
- Jeśli dla dowolnie małego ϵ zawsze jesteśmy w stanie znaleźć takie δ, że już zawsze, począwszy od chwili t_0, układ mechaniczny wychylony o δ ze stanu równowagi będzie nie dalej niż o ϵ od stanu równowagi, to układ nazywamy statecznym w sensie Lapunowa.



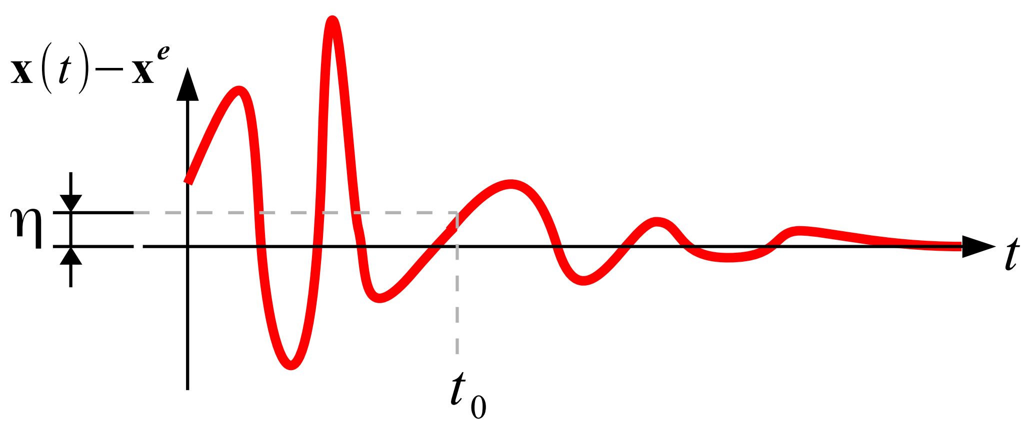
STATECZNOŚĆ W SENSIE LAPUNOWA

Układ mechaniczny nazywamy **układem asymptotycznie statecznym**, jeśli jest stateczny w sensie Lapunowa a ponadto

$$\underset{\eta>0}{\exists} : \quad \|\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{x}^e\|<\eta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^e$$

PO POLSKU:

- Dla dowolnej chwili t_0 jesteśmy w stanie znaleźć takie wychylenie ze stanu równowagi, którego miarą jest mała dodatnia liczba η, że stan układu będzie dążyć w granicy do stanu równowagi przy czasie zmierzającym do nieskończoności.



STATECZNOŚĆ W SENSIE LAPUNOWA

UWAGI:

- Układ asymptotycznie stateczny jest stateczny w sensie Lapunowa.

- Układ stateczny w sensie Lapunowa nie musi być stateczny asymptotycznie. Taki układ **nieustannie „kręci się” wokół pewnego stanu równowagi** i nawet po upływie nieskończonego czasu **„nie zatrzyma się” w tym stanie równowagi**, ale **jego wychylenie ze stanu równowagi nigdy nie przekroczy pewnej określonej miary**.

- Układ, który **nie jest stateczny w sensie Lapunowa** nazywamy układem niestabilnym.

POŚREDNIA METODA LAPUNOWA

POŚREDNIA METODA LAPUNOWA

Metoda nazywana jest pośrednią, ponieważ dostarcza nam **informacji o stateczności nie tyle samego układu dynamicznego, ale jedynie jego przybliżenia liniowego**.

Rozważamy układ dynamiczny **opisany układem równań różniczkowych**:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

- Przyjmujemy, że układ **nie zależy w sposób jawny od czasu**.
- Wybieramy punkt $\mathbf{x}^e$, który podejrzewamy o bycie stanem równowagi.
- W najbliższym otoczeniu tego punktu, równania rządzące układem można przybliżyć układem równań liniowych:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^e\| &\to 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{J}\,\mathbf{x} \qquad \text{gdzie} \qquad \mathbf{J} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^e}$$

– macierz Jacobiego

POŚREDNIA METODA LAPUNOWA

Rozważamy obecnie przybliżenie liniowe **rzeczywistego układu dynamicznego w otoczeniu wybranego punktu** $\mathbf{x}^e$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\,\mathbf{x} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{J} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^e}$$

Rozwiązanie układu liniowego o stałych współczynnikach jest znane:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} \boldsymbol{\xi}_i$$

λ_i – i-ta wartość własna macierzy Jacobiego

$\boldsymbol{\xi}_i$ – i-ty wektor własny macierzy Jacobiego

C_i – **stała całkowania**

POŚREDNIA METODA LAPUNOWA

Dla układów nie zależących jawnie od czasu cała zmienność w czasie określona jest przez funkcję wykładniczą i charakter algebraiczny jej wykładnika (wartości własnej macierzy Jacobiego).

$$x(t) = C e^{\lambda t}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$x(t) = C e^{\lambda t}$$

$\lambda > 0$ wychylenie rośnie wykładniczo

UKŁAD NIESTABILNY

$\lambda < 0$ wychylenie maleje wykładniczo

UKŁAD STABILNY

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$x(t) = e^{\mathrm{Re}(\lambda) t}\left[C_1 \cos\left[\mathrm{Im}(\lambda) t\right] + C_2 \sin\left[\mathrm{Im}(\lambda) t\right]\right]$$

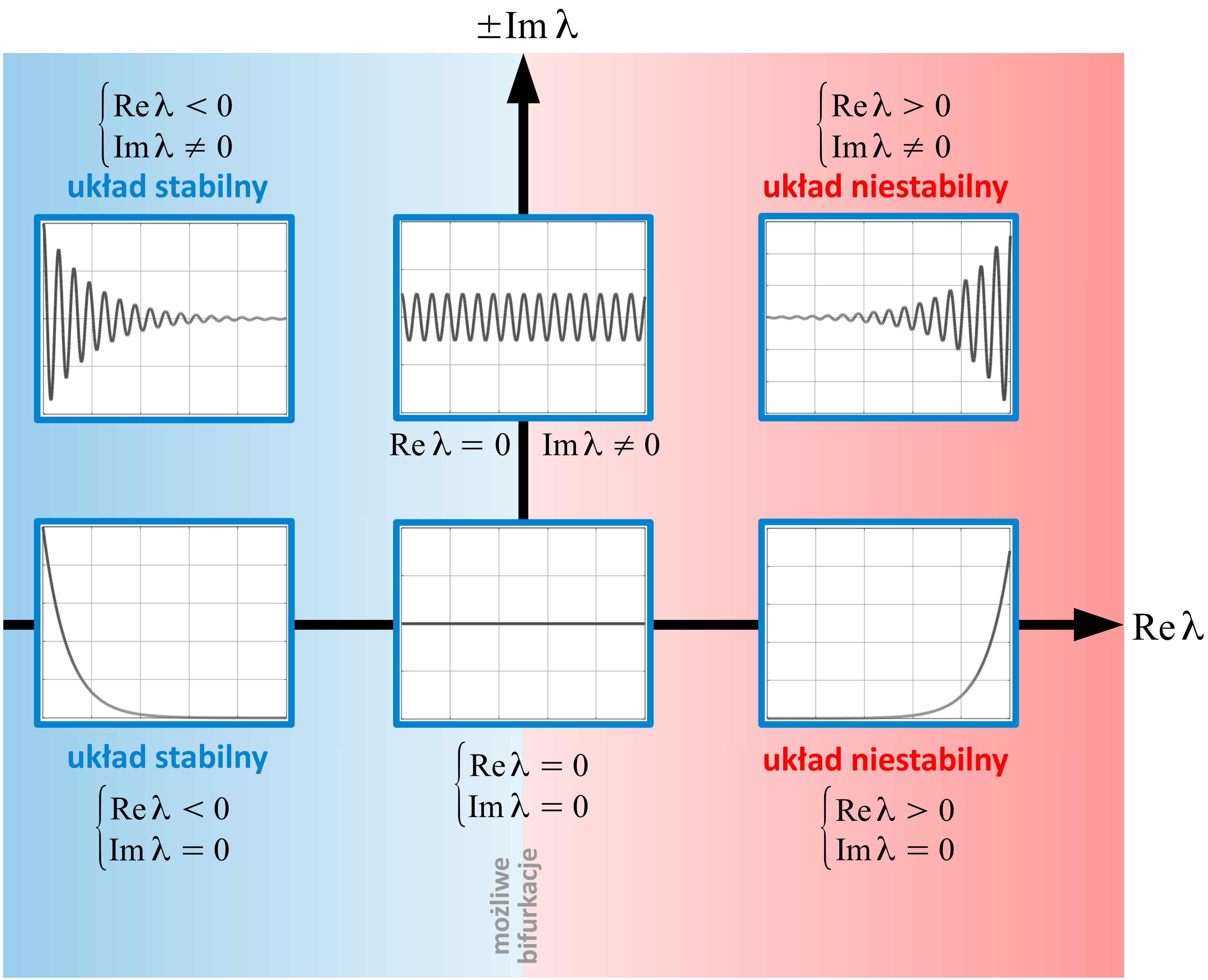
$\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ wychylenie oscyluje,
amplituda drgań rośnie wykładniczo

UKŁAD NIESTABILNY

$\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ wychylenie oscyluje,
amplituda drgań maleje wykładniczo

UKŁAD STABILNY

POŚREDNIA METODA LAPUNOWA



POŚREDNIA METODA LAPUNOWA

- Wyznaczamy liniowe przybliżenie **układu dynamicznego w otoczeniu badanego stanu**.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\,\mathbf{x}$$

- Zbiór **wartości własnych macierzy Jacobiego** nazywamy widmem Lapunowa.

$$\mathbf{J} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^e} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Jeśli wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego **mają** ujemną część rzeczywistą, to układ jest asymptotycznie stateczny **w badanym stanie**.

- Jeśli przynajmniej jedna wartość własna macierzy Jacobiego **ma** dodatnią część rzeczywistą, to układ jest niestateczny **w badanym stanie**.

- Jeśli **którakolwiek wartość własna macierzy Jacobiego ma** zerową **część rzeczywistą**, to o stateczności układu nie da się wnioskować na podstawie znaków części rzeczywistej lub urojonej wartości własnych macierzy Jacobiego. **O stateczności układu decyduje nieliniowa część równań rządzących** – część liniowa dostarcza zbyt mało informacji. W takich przypadkach możliwe są **bifurkacje** – skokowe zmiany cech jakościowych rozwiązania wynikające z niewielkich zmian parametrów zadania. Nawet najmniejsze zmiany mogą skutkować niemożliwymi do przewidzenia zmianami w ewolucji układu dynamicznego.

POŚREDNIA METODA LAPUNOWA

UWAGI:

- W przypadku, gdy **wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego są rzeczywiste** (zerowa część urojona), wtedy informację o stabilności układu niesie ze sobą znak **największej rzeczywistej wartości własnej macierzy Jacobiego** – wartość tę nazywamy wykładnikiem Lapunowa układu (lub **maksymalnym** albo **charakterystycznym wykładnikiem Lapunowa**).

- Wykładnik Lapunowa jest **miarą prędkości, z jaką bliskie sobie trajektorie oddalają się od siebie** w czasie trwania ruchu:

$$\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(2)}(t) \qquad \delta\mathbf{x}_0 = \delta\mathbf{x}(t=0)$$

$$\|\delta\mathbf{x}(t)\| \approx \|\delta\mathbf{x}_0\| e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\delta\mathbf{x}_0\|} \approx e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta\mathbf{x}_0\|\to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\delta\mathbf{x}_0\|}}$$

- Pośrednia metoda Lapunowa nie zawsze dostarcza poprawnej informacji o zachowaniu układu dynamicznego. **Istnieją układy niestabilne, których przybliżenie liniowe jest stabilne oraz układy stabilne, których przybliżenie liniowe jest niestabilne** (tzw. efekt Perrona).

POŚREDNIA METODA LAPUNOWA

PRZYKŁAD:

Drgania swobodne tłumione układu o 1 stopniu swobody:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2 =) - \dfrac{c}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

Jest to zagadnienie **liniowe**, więc przybliżenie liniowe **układu jest tożsame z samym układem**.

Jakobian i jego wartości własne:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1/2} = \frac{J_{11}+J_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{11}-J_{22}}{2}\right)^2 + J_{12}^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2m}\left[c + \sqrt{c^2 - 4km}\right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2m}\left[c - \sqrt{c^2 - 4km}\right] \end{aligned}}$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

Metodę nazywamy bezpośrednią, ponieważ pozwala nam **wnioskować o stateczności samego układu a nie tylko jego przybliżenia liniowego**.

Przyjmujemy następującą definicję:

Funkcją lokalnie dodatnio określoną w otoczeniu punktu $\mathbf{x}^e = \left(x_1^e, \dots, x_n^e\right)$ nazywamy funkcję $V(\mathbf{x})$, która:

- $V(\mathbf{x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{x}^e$ przyjmuje wartość 0 tylko w punkcie $\mathbf{x}^e$
- $V(\mathbf{x}) > 0 \;\Leftrightarrow\; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^e\| \in (0\,;R)$ jest dodatnia w otoczeniu punktu $\mathbf{x}^e$ o promieniu R

Jeśli ostatnia nierówność przyjmuje postać:

- $V(\mathbf{x}) < 0$ to funkcję nazywamy lokalnie ujemnie określoną
- $V(\mathbf{x}) \geqslant 0$ to funkcję nazywamy lokalnie nieujemnie określoną (dodatnio półokreśloną)
- $V(\mathbf{x}) \leqslant 0$ to funkcję nazywamy lokalnie niedodatnio określoną (ujemnie półokreśloną)

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

Funkcję lokalnie dodatnio określoną w otoczeniu S punktu $\mathbf{x}^e$ nazywamy **funkcją Lapunowa**, jeśli jej **pochodna względem czasu jest lokalnie niedodatnio określona w tym otoczeniu**, tj.:

- $V(\mathbf{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^e$
- $V(\mathbf{x}) > 0 \qquad \underset{\mathbf{x}\in S,\ \ \mathbf{x}\neq\mathbf{x}^e}{\forall}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\mathbf{x}) \leqslant 0 \qquad \underset{\mathbf{x}\in S}{\forall}$

UWAGA: Istnienie niedodatnio określonej pochodnej pociąga za sobą **ciągłość funkcji Lapunowa**.

TWIERDZENIE LAPUNOWA O STATECZNOŚCI UKŁADU

Jeśli dla układu **istnieje funkcja Lapunowa**, to układ ten ma **stan równowagi trwałej w sensie Lapunowa w punkcie** $\mathbf{x}^e$.

Jeśli ponadto **pochodna funkcji Lapunowa** względem czasu jest **ujemnie określona**, to punkt ten jest **asymptotycznie punktem równowagi trwałej**.

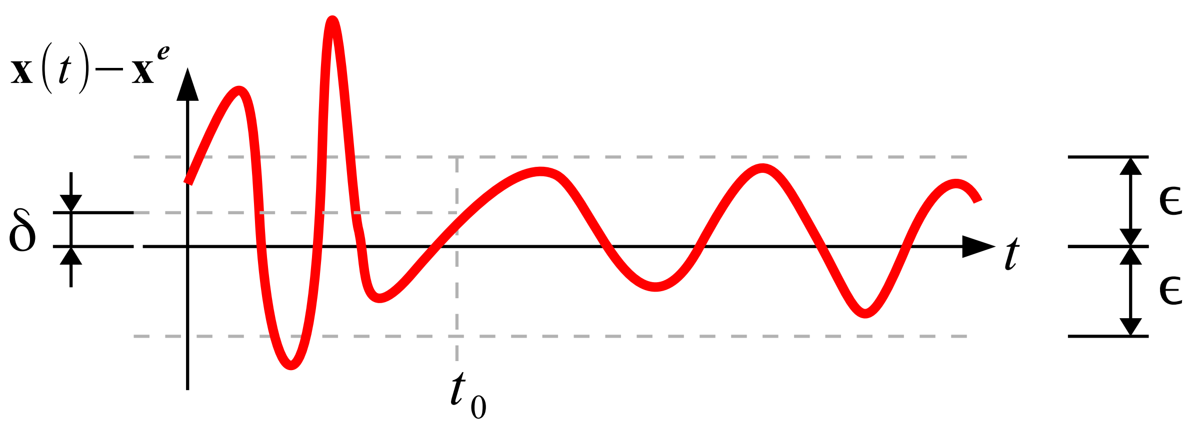
BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

DOWÓD:

Bez straty na ogólności rozważań możemy przyjąć, że tak dobraliśmy układ odniesienia i funkcje opisujące układ mechaniczny, że punktem równowagi jest stan $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$, a chwilą t_0, od której wymagamy, aby układ nie oddalił się zanadto od stanu równowagi jest $t_0 = 0$.

Przypuśćmy, że ustaliliśmy bardzo małe dodatnie ϵ, które jest miarą maksymalnego dopuszczalnego wychylenia układu ze stanu równowagi.

Poszukujemy teraz maksymalnego dopuszczalnego wychylenia δ ze stanu równowagi, dla którego układ nie oddali się od stanu równowagi o więcej niż ϵ przez cały czas trwania ruchu.



BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

DOWÓD c.d.:

Zakładamy, że **istnieje funkcja Lapunowa**, która w otoczeniu stanu równowagi o promieniu R jest dodatnio określona.

Zawężmy zatem obszar rozważań tylko stanów dla których **funkcja Lapunowa jest dodatnio określona**, i które **nie są odległe od stanu równowagi dalej niż dopuszcza to wartość ϵ.** Rozważamy zatem otoczenie stanu równowagi o promieniu:

$$r = \min(\epsilon, R)$$

Oznaczmy przez v najmniejszą wartość jaką przyjmuje funkcja Lapunowa na granicy rozważanego obszaru:

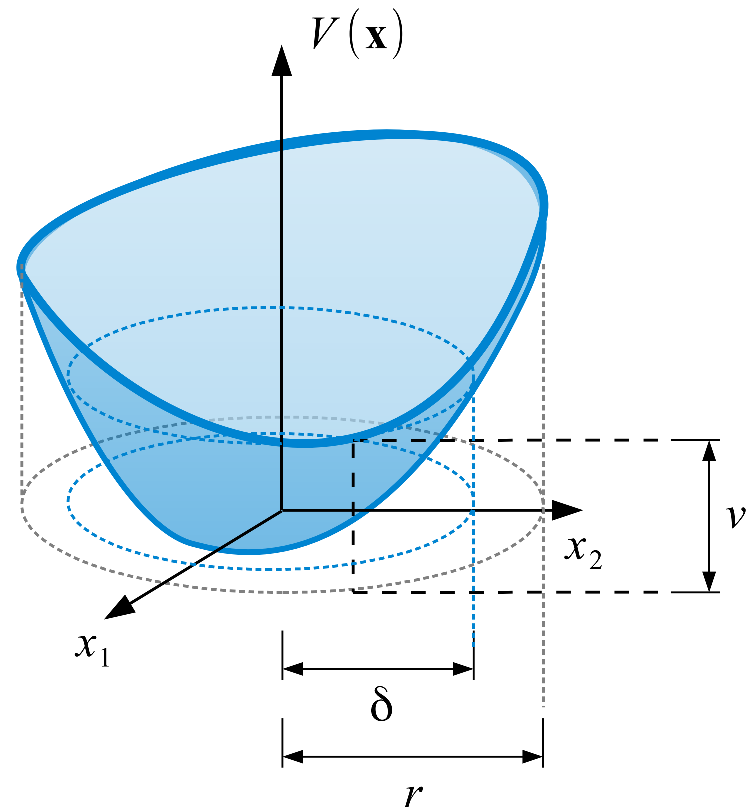
$$v = \min_{\mathbf{x}:\, \|\mathbf{x}\| = r} V(\mathbf{x})$$

Ponieważ V jest dodatnio określona, zatem $v > 0$. Wybierzmy teraz $\delta \in (0, r)$ takie, że

$$\forall_{\mathbf{x}:\, \|\mathbf{x}\| < \delta} V(\mathbf{x}) < v$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

DOWÓD c.d.:



Taki wybór jest zawsze możliwy ponieważ V jest ciągła i dodatnia, a w środku obszaru przyjmuje wartość zerową, zatem **we <u>wnętrzu</u> tego obszaru** musi istnieć taka jej wartość, która jest większa od 0 a **mniejsza od <u>najmniejszej wartości na brzegu</u> tego obszaru**.

W chwili początkowej wybierzmy zatem taką trajektorię, która w chwili początkowej znajduje się **<u>wewnątrz</u> (nie na brzegu) otoczenia o promieniu** δ, zatem odpowiadająca jej wartość funkcji Lapunowa jest **<u>mniejsza</u>** od v.

Ponieważ pochodna funkcji Lapunowa względem czasu jest niedodatnia, zatem w miarę, jak ruch będzie postępować w czasie wzdłuż wybranej trajektorii, funkcja Lapunowa nie będzie rosnąć, zatem dla dowolnego t:

$$\begin{cases} \dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) \leqslant 0 \\ V\left(\mathbf{x}(t=0)\right) < v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V\left(\mathbf{x}(t)\right) < v$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

DOWÓD c.d.:

Dla dowolnej chwili mamy zatem: $V(\mathbf{x}(t)) < v$

Pociąga to za sobą: $\|\mathbf{x}(t)\| < r$

Gdyby tak nie było, tj. gdyby w pewnej chwili było $\|\mathbf{x}(t)\| > r$, to z uwagi na ciągłość $\mathbf{x}(t)$, musiałaby być taka chwila wcześniejsza, w której $\|\mathbf{x}(t)\| = r$. Ale wartość $V(\mathbf{x})$ na brzegu otoczenia o promieniu r jest większa bądź równa v, co jest w sprzeczności z tym, że funkcja Lapunowa ma nie maleć w czasie, a w chwili początkowej miała wartość mniejszą od v.

A zatem musi być: $\|\mathbf{x}(t)\| < r \leqslant \epsilon$

co jest **zgodne z definicją stateczności w sensie Lapunowa**.

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

DOWÓD c.d.:

Pozostaje nam jeszcze do udowodnienia, że **ujemna określoność pochodnej funkcji Lapunowa pociąga za sobą asymptotyczną stateczność**, tj. jeśli w pewnym otoczeniu stanu równowagi mamy

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ < 0 & \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

wtedy

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

Jeśli dla $t \to \infty$ funkcja Lapunowa $V \to 0$, to ponieważ jest ona ciągłą funkcją stanu układu i przyjmuje ona wartość 0 jedynie dla stanu równowagi, z tego wynika, że również $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$.

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

DOWÓD c.d.:

Musimy zatem udowodnić, że z $t \to \infty$ wynika $V \to 0$.

Funkcja Lapunowa ma ujemnie określoną pochodną, zatem jest **ściśle malejąca** w każdym punkcie. Sama funkcja jest **dodatnio określona**, więc jej wartości są **ograniczone od dołu przez 0**.

Zatem dla $t \to \infty$ funkcja Lapunowa $V \to c$, gdzie c jest pewną stałą nieujemną i w czasie całego ruchu $V(t) = V(\mathbf{x}(t)) > c$. Wystarczy zatem udowodnić, że $c = 0$.

Przeprowadzimy **dowód nie wprost**. Załóżmy, że $c > 0$.

Zdefiniujmy zbiór stanów układu, dla którego funkcja Lapunowa jest mniejsza lub równa c :

$$X_c = \left\{ \mathbf{x} : \quad V(\mathbf{x}) \leqslant c \right\}$$

W zbiorze tym możemy wyróżnić podzbiór takich stanów, których norma (odległość od stanu równowagi) jest mniejsza niż $\eta \geqslant 0$:

$$X_0 = \left\{ \mathbf{x} \in X_c : \quad \|\mathbf{x}\| < \eta \right\}$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

DOWÓD c.d.:

Wybierzmy teraz dowolną trajektorię. W czasie ruchu odpowiadająca jej wartość funkcji Lapunowa jest większa od c, zatem trajektoria ta nie należy do zbioru X_c ani tym mniej do zbioru X_0.

Do tej pory udowodniliśmy już, że układ jest **stateczny w sensie Lapunowa**, tj. że dla stanu, którego norma $\|\mathbf{x}(t=0)\|<\delta$ zachodzi $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$ dla każdego t.

Biorąc pod uwagę obydwa te spostrzeżenia możemy stwierdzić, że rozważana przez nas trajektoria jest taka, że

$$\eta \leqslant \|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \epsilon$$

Ograniczając nasze rozważania do trajektorii spełniających powyższe nierówności możemy teraz określić **największą wartość pochodnej względem czasu** spośród wszystkich rozważanych funkcji

$$\gamma = \max_{\eta \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant \epsilon} \dot{V}(\mathbf{x}(t))$$

Ponieważ pochodna funkcji Lapunowa jest ujemnie określona, zatem $\gamma < 0$.

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

DOWÓD c.d.:

Wartość funkcji Lapunowa w dowolnej chwili t, możemy zapisać następująco:

$$V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(0)) + \int_{\tau=0}^{t} \dot{V}(\mathbf{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

Funkcja podcałkowa po prawej stronie jest z pewnością mniejsza niż γ, zatem

$$V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(0)) + \int_{\tau=0}^{t} \dot{V}(\mathbf{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \leqslant V(\mathbf{x}(0)) + \gamma t$$

Wartość początkowa $V(\mathbf{x}(0))$ jest **dodatnia** ale **skończona**. Ponieważ $\gamma < 0$ zatem przy $t \to \infty$ **prawa strona nierówności będzie z pewnością ujemna**, co jest sprzeczne z założeniem, że funkcja Lapunowa jest dodatnio określona.

Mówiąc obrazowo, choć niezbyt ściśle: Jeśli funkcja wychylona z położenia równowagi $(V(t=0) > c > 0)$ nie może znaleźć się docelowo w położeniu równowagi $(V=0,\ \dot{V}=0)$, a pochodna w czasie nieskończenie długiego ruchu ma być cały czas ujemna (nierówność silna) $(\dot{V}<0)$, to musiałaby zajść sytuacja, w której $V<0$, co jest niemożliwe.

A zatem jedynym przypadkiem, który może zajść jest $c=0$.

■ CBDU

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

UWAGI:

- W zagadnieniach ruchu ciał w potencjalnym polu sił funkcją, która **spełnia założenia funkcji Lapunowa** jest energia potencjalna pola sił zachowawczych.

- Przez odpowiedni dobór potencjału (tzw. cechowanie) możemy zagwarantować, że w czasie ruchu energia potencjalna będzie cały czas dodatnia, za wyjątkiem sytuacji, w której ciało znajduje się w położeniu równowagi – wtedy przyjmować będziemy zerową energię potencjalną. W ten sposób **funkcja energii potencjalnej jest dodatnio określona** w otoczeniu położenia równowagi.

- Dla energii potencjalnej masy punktowej poruszającej się w polu sił zachowawczych

  - energia potencjalna jest funkcją przeciwną do potencjału
  - potencjał nie zależy w sposób jawny od czasu
  - dla zerowych prędkości początkowych ciało będzie poruszać się w kierunku działających sił, tj. prędkość i siła będą miały ten sam zwrot (znak)

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\left[\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}\right] = -\left[F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}\right] \leqslant 0$$

Energia potencjalna spełnia drugi warunek na funkcję Lapunowa (nieujemna pochodna względem czasu)

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

UWAGI:

- W rzeczywistości możliwe jest, aby układ miał kilka możliwych położeń równowagi. W każdym z nich energia potencjalna może spełniać warunki funkcji Lapunowa jeśli tylko dokonamy odpowiedniego cechowania energii potencjalnej. A zatem kluczowym kryterium w analizie stateczności takich układów jest nie tyle zerowanie się energii potencjalnej (bo możemy zmieniać jej wartość o dowolną stałą), ale to, aby w położeniu równowagi funkcja potencjalna miała lokalne minimum.

- Kryterium Lapunowa ma zastosowanie nie tylko w mechanice, ale również w układach opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi 1 rzędu, gdzie nie da się zdefiniować pojęcia energii (np. modele ekonomiczne, numeryczna prognoza pogody itp.)

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

Wyznaczamy energię potencjalną jako funkcję współrzędnych uogólnionych:

$$E_p = E_p(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

Możliwe położenia odpowiadają punktom minimum lokalnego energii potencjalnej. **Warunkiem koniecznym** istnienia minimum jest **zerowanie się wszystkich pochodnych cząstkowych**:

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1,2,\dots,s$$

Jest to układ równań na współrzędne uogólnione opisujące konfigurację układu mechanicznego, w którym układ może być w stanie równowagi.

Warunek wystarczający na istnienie minimum lokalnego jest, aby **macierz Hessego**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_s} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2 \partial q_s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s \partial q_1} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s^2} \end{bmatrix}$$

była **dodatnio określona**, tj. miała **wszystkie wartości własne dodatnie**.

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

UWAGI:

- Przypadek, w którym **energia potencjalna osiąga lokalne** maksimum odpowiada stanowi równowagi chwiejnej. W takiej sytuacji **macierz Hessego jest ujemnie określona**, czyli wszystkie jej **wartości własne są ujemne**.

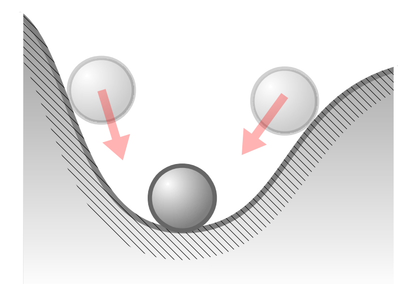
- Jeśli **macierz Hessego ma zarówno dodatnie jak i ujemne wartości własne**, wtedy niewielkie wychylenie w jednym kierunku skutkuje powrotem do położenia równowagi, natomiast wychylenie w innym kierunku powoduje oddalenie się od położenia równowagi. Z tego względu stany takie są zawsze stanami równowagi chwiejnej.

- Procedura wyznaczania położeń równowagi jest analogiczna do metod poszukiwania **ekstremów funkcji wielu zmiennych**:

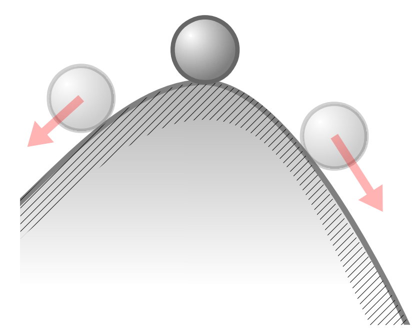
  - minima lokalne mają charakter położeń równowagi trwałej

  - maksima lokalne mają charakter położeń równowagi chwiejnej

  - punkty siodłowe mają charakter położeń równowagi chwiejnej



równowaga trwała



równowaga chwiejna

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

PRZYPADEK JEDNOWYMIAROWY:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}q^2} > 0$$ minimum lokalne → równowaga stateczna

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}q^2} < 0$$ maksimum lokalne → równowaga chwiejna

PRZYPADEK DWUWYMIAROWY:

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0\right) \wedge \left(\det \mathbf{H} > 0 \quad \wedge \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{H} > 0\right)$$ minimum lokalne → równowaga stateczna

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0\right) \wedge \left(\det \mathbf{H} > 0 \quad \wedge \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{H} < 0\right)$$ maksimum lokalne → równowaga chwiejna

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0\right) \wedge \left(\det \mathbf{H} < 0\right)$$ punkt siodłowy → równowaga chwiejna

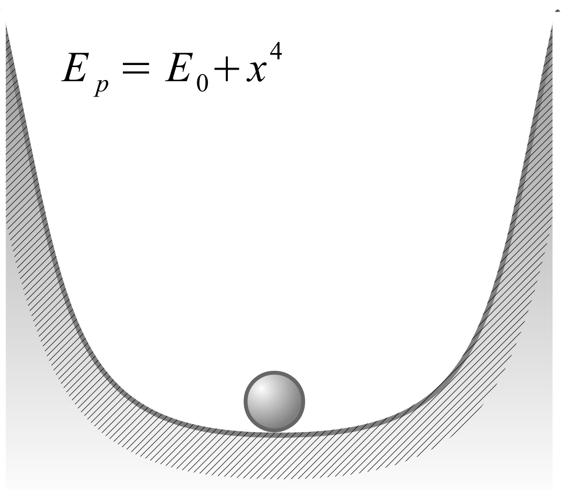
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_2 \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{H} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 \qquad \mathrm{tr}\,\mathbf{H} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2}$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

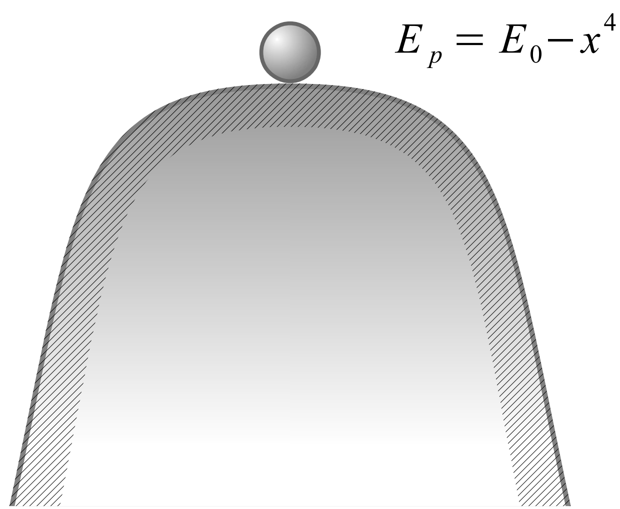
UWAGI:

Jeśli druga pochodna w punkcie jest zerowa, to konieczne jest sprawdzenie znaku wyższych pochodnych
Jeśli **najniższa pochodna przyjmująca wartość niezerową** jest pochodną:

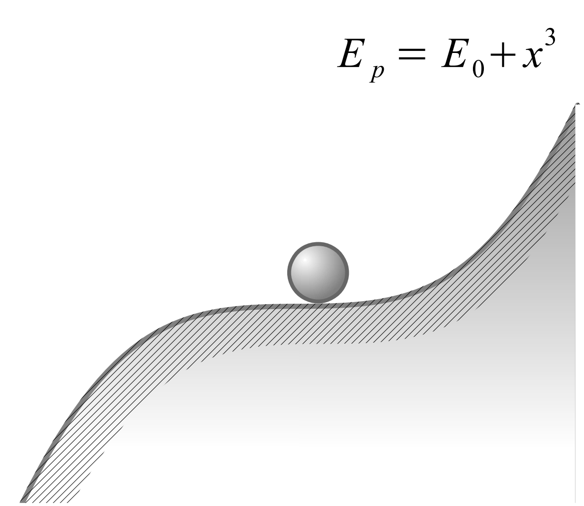
- rzędu parzystego i ma wartość dodatnią → minimum lokalne → równowaga stateczna
- rzędu parzystego i ma wartość ujemną → maksimum lokalne → równowaga chwiejna
- rzędu nieparzystego → punkt przegięcia → równowaga chwiejna



$$\left.\frac{d^2 E_p}{d x^2}\right|_0 = 0 \quad \left.\frac{d^3 E_p}{d x^3}\right|_0 = 0 \quad \left.\frac{d^4 E_p}{d x^4}\right|_0 > 0$$



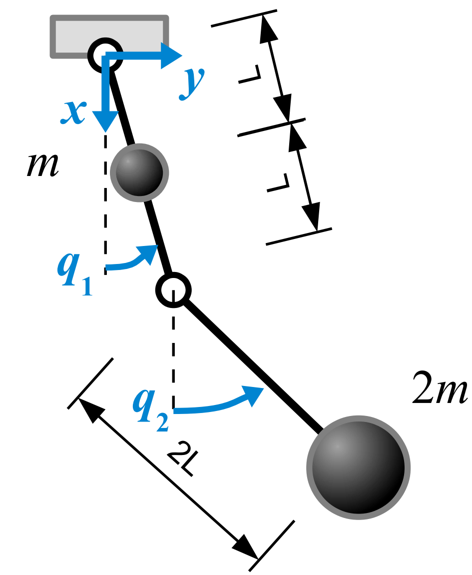
$$\left.\frac{d^2 E_p}{d x^2}\right|_0 = 0 \quad \left.\frac{d^3 E_p}{d x^3}\right|_0 = 0 \quad \left.\frac{d^4 E_p}{d x^4}\right|_0 < 0$$



$$\left.\frac{d^2 E_p}{d x^2}\right|_0 = 0 \quad \left.\frac{d^3 E_p}{d x^3}\right|_0 \neq 0$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

PRZYKŁAD:



Znaleźć i określić charakter położenia równowagi dla wahadła podwójnego.

ROZWIĄZANIE:

Współrzędne uogólnione:

q_1 - kąt odchylenia górnego wahadła od pionu
q_2 - kąt odchylenia dolnego wahadła od pionu

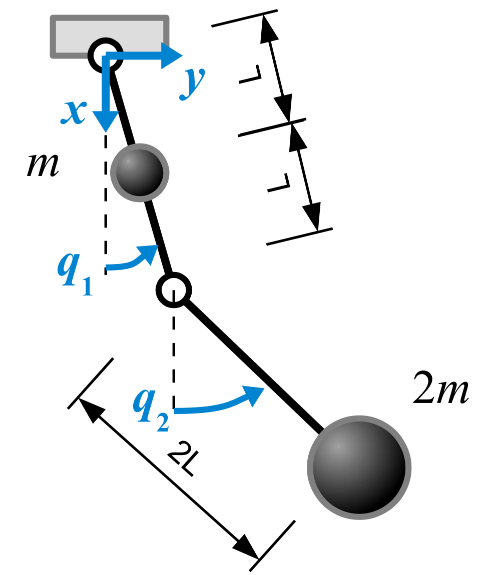
Wektory położenia:

$$\mathbf{r}_1 = [L\cos q_1 \ ; \ L\sin q_1]$$

$$\mathbf{r}_2 = [2L(\cos q_1 + \cos q_2) \ ; \ 2L(\sin q_1 + \sin q_2)]$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

PRZYKŁAD:



Potencjał jednorodnego pola sił grawitacyjnych:

$$V = m g x_1 + (2m) g x_2$$

Energia potencjalna:

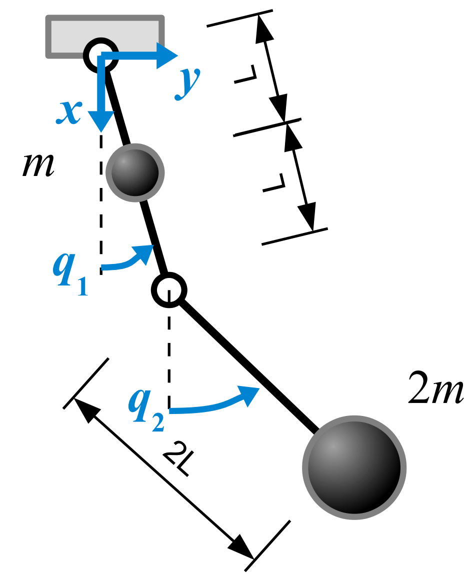
$$E_p = -V = -m g x_1 - 2 m g x_2$$

Dla tak przyjętej funkcji energii potencjalnej, energia będzie mieć wartości ujemne. Jeśli chcemy, aby energia zawsze była opisana wartościami dodatnimi (co w tym zadaniu nie ma akurat żadnego znaczenia), to musimy dodać do energii stałą (cechowanie), taką, żeby energia była zawsze dodatnia:

$$\begin{aligned} E_p &:= \left[m g L - m g x_1\right] + \left[(2m) g \cdot 4L - (2m) g x_2\right] = mg\left(9L - x_1 - 2x_2\right) = \\ &= mg\left[9L - L\cos q_1 - 4L\left(\cos q_1 + \cos q_2\right)\right] = \\ &= mgL\left[9 - 5\cos q_1 - 4\cos q_2\right] \end{aligned}$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

PRZYKŁAD:



Ekstrema lokalne energii potencjalnej:

$$E_p = mgL\left[9 - 5\cos q_1 - 4\cos q_2\right]$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = 5mgL\sin q_1$$

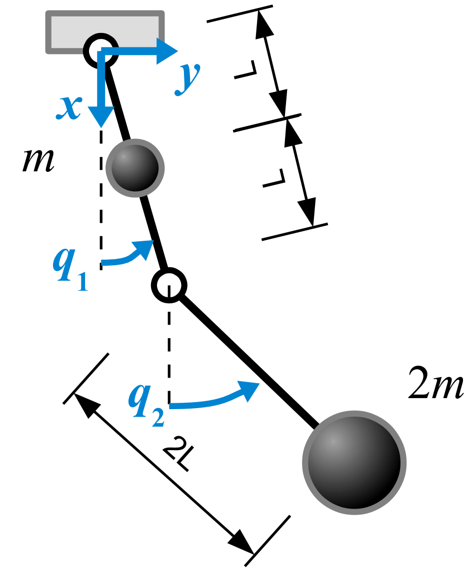
$$\frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 4mgL\sin q_2$$

Punkty stacjonarne:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial q_1} = 5mgL\sin q_1 = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial q_1} = 4mgL\sin q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 0^\circ \quad \vee \quad q_1 = 180^\circ \\ q_2 = 0^\circ \quad \vee \quad q_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (0^\circ, 0^\circ) \\ (0^\circ, 180^\circ) \\ (180^\circ, 0^\circ) \\ (180^\circ, 180^\circ) \end{matrix}$$

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

PRZYKŁAD:



Macierz Hessego: $$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_2 \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} = mgL \begin{bmatrix} 5\cos q_1 & 0 \\ 0 & 4\cos q_2 \end{bmatrix}$$

Hesjan: $$H = \det \mathbf{H} = 20 (mgL)^2 \cos q_1 \cos q_2$$

Ślad macierzy Hessego: $$\mathrm{tr}\,\mathbf{H} = mgL(5\cos q_1 + 4\cos q_2)$$

Punkty stacjonarne:

$H(0^\circ, 0^\circ) = 20(mgL)^2 > 0$ $\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{H}(0^\circ, 0^\circ) = 9\,mgL > 0$ $\rightarrow$ minimum lokalne $\rightarrow$ równowaga stateczna

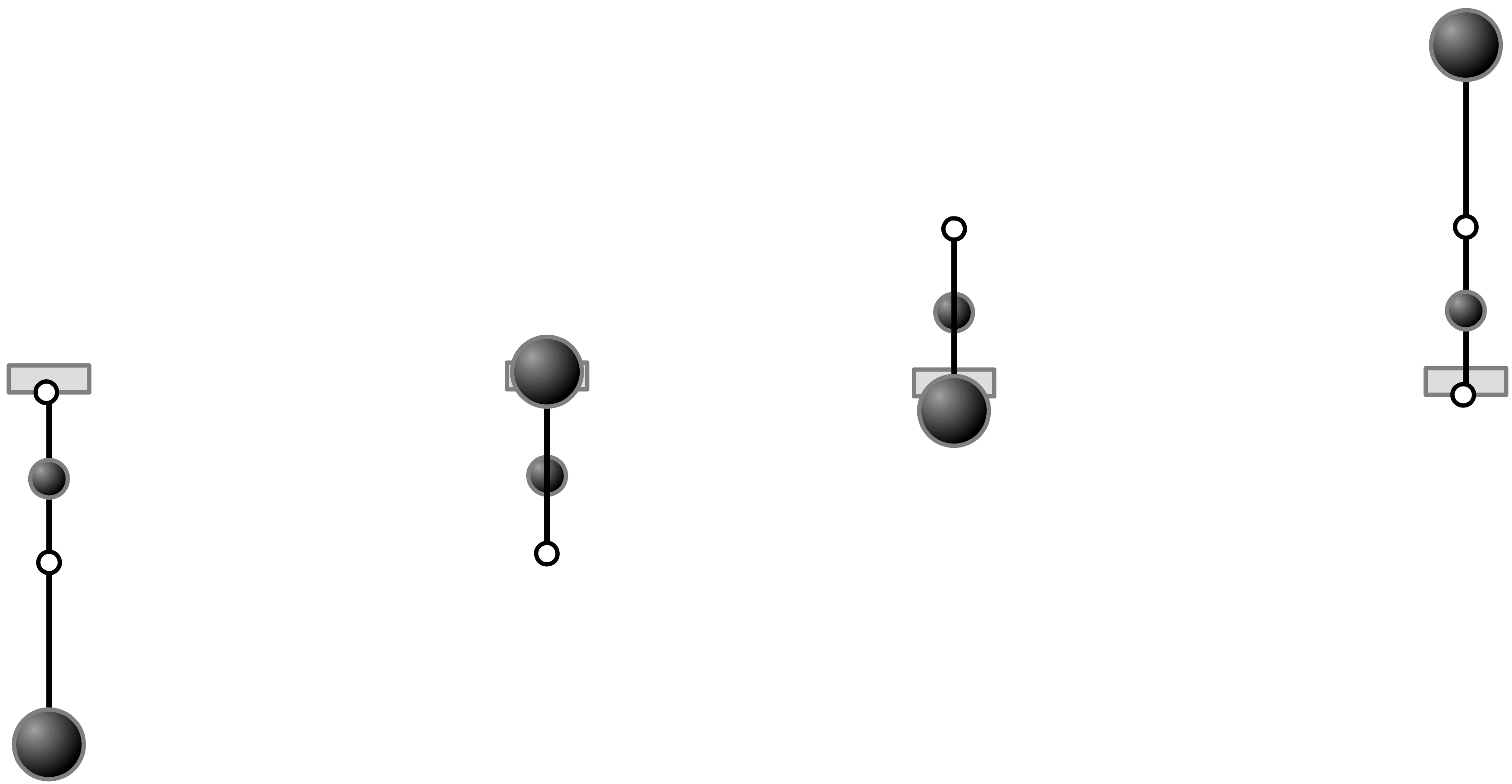
$H(180^\circ, 0^\circ) = -20(mgL)^2 < 0$ $\rightarrow$ punkt siodłowy $\rightarrow$ równowaga chwiejna

$H(0^\circ, 180^\circ) = -20(mgL)^2 < 0$ $\rightarrow$ punkt siodłowy $\rightarrow$ równowaga chwiejna

$H(180^\circ, 180^\circ) = 20(mgL)^2 > 0$ $\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{H}(0^\circ, 0^\circ) = -9\,mgL < 0$ $\rightarrow$ maksimum lokalne $\rightarrow$ równowaga chwiejna

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA

PRZYKŁAD:



$(0^\circ, 0^\circ)$
minimum lokalne
równowaga stateczna

$(0^\circ, 180^\circ)$
punkt siodłowy
równowaga chwiejna

$(180^\circ, 0^\circ)$
punkt siodłowy
równowaga chwiejna

$(180^\circ, 180^\circ)$
maksimum lokalne
równowaga chwiejna

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ