MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

FORMALIZM HAMILTONA

FORMALIZM HAMILTONA

Punktem wyjścia do sformułowania mechaniki Newtonowskiej w ujęciu Hamiltona może być próba zmniejszenia rzędu zagadnienia różniczkowego, jakim jest formalizm Lagrange'a.

Równania Lagrange'a dla układu o s stopniach swobody, to układ s równań **różniczkowych zwyczajnych** drugiego **rzędu**, z uwagi na zmienną czasową.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,s$$

Najprostszym sposobem na zmniejszenie rzędu zagadnienia jest **wprowadzenie nowych zmiennych zależnych**, będących po prostu **prędkościami uogólnionymi**:

$$\begin{cases} v_j = \dot{q}_j \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_j} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \end{cases} \qquad j=1,2,\ldots,s$$

W rezultacie otrzymujemy układ $2\,s$ równań **różniczkowych zwyczajnych,** pierwszego rzędu. Teoria równań 1 rzędu jest znacznie lepiej poznana niż teoria równań wyższych rzędów.

FORMALIZM HAMILTONA

Okazuje się, że rozwiązaniem, które ma bardziej uniwersalną interpretację fizyczną i umożliwia głębsze poznanie samej natury rozważanych zagadnień mechanicznych – w szczególności, rozwiązanie to stało się podstawą sformułowania mechaniki kwantowej – jest **wprowadzenie nowych zmiennych**, będących nie tyle prędkościami uogólnionymi, ale **pochodnymi lagranżjanu względem prędkości uogólnionych**:

$$\boxed{p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1,2,\ldots,s}$$

Tak zdefiniowane zmienne zależne nazywamy pędami uogólnionymi, lub pędami kanonicznie sprzężonymi. Wtedy równania Lagrange'a przyjęłyby prostą postać, przypominającą II zasadę dynamiki Newtona – pochodna „pędu” równa się pewnej „sile” obliczanej podobnie jak dla potencjalnego pola sił:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

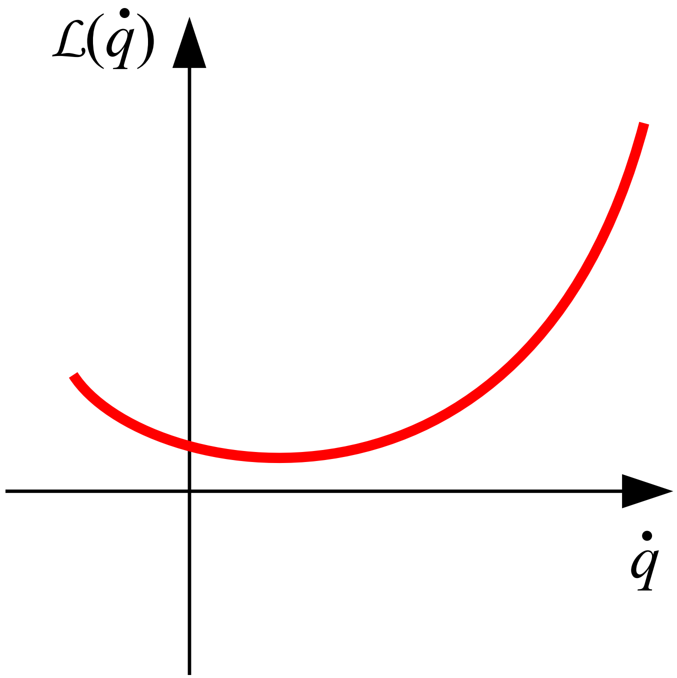
Trudność w tym podejściu polega na tym, że sam pęd uogólniony nie niesie ze sobą pełnej informacji o zależności lagranżjanu od odpowiedniej prędkości uogólnionej, a jedynie od pochodnej lagranżjanu względem tej prędkości – tymczasem **nieskończenie wiele funkcji Lagrange'a** (różniących się stałą) **ma tę samą pochodną** i **nieskończenie wiele różnych prędkości uogólnionych** (różniących się stałą), **daje w rezultacie tę samą pochodną**.

TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

Sytuacja może być zilustrowana w następujący sposób:

- Znamy **zależność lagranżjanu od prędkości uogólnionej**.



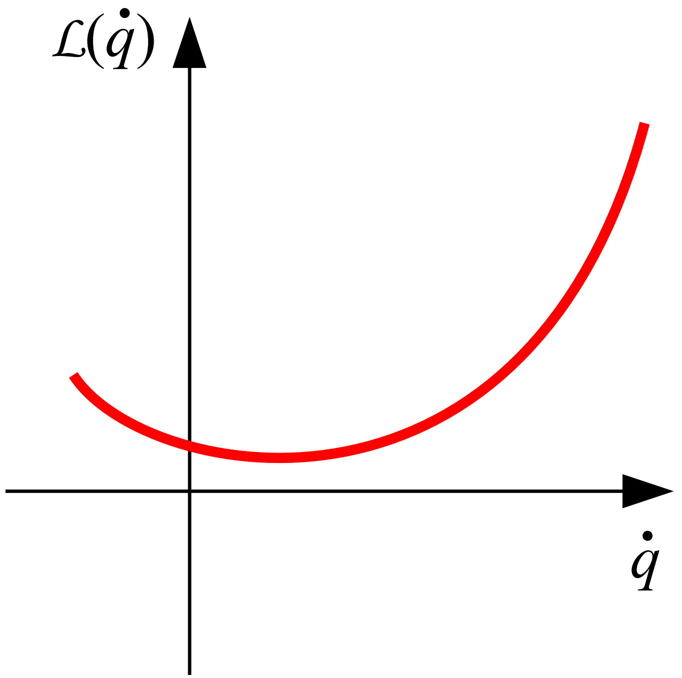
TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

Sytuacja może być zilustrowana w następujący sposób:

- Znamy **zależność lagranżjanu od prędkości uogólnionej**.

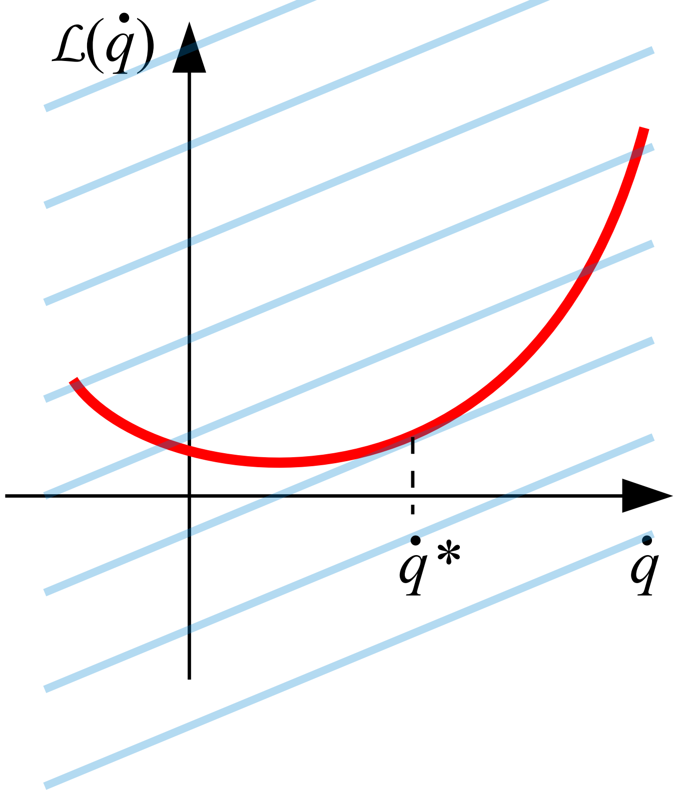
- **Pęd uogólniony** jest pochodną lagranżjanu względem prędkości uogólnionej.

$$p = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right|_{\dot{q}_0}$$



TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

Sytuacja może być zilustrowana w następujący sposób:



- Znamy **zależność lagranżjanu od prędkości uogólnionej**.

- **Pęd uogólniony** jest pochodną lagranżjanu względem prędkości uogólnionej.

$$p(\dot{q}*) = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right|_{\dot{q}*}$$

- Pęd uogólniony określa nachylenie stycznej do wykresu lagranżjanu w pewnym punkcie. Wszystkie proste równoległe do niej opisują równania postaci:

$$\mathcal{L} = p\,\dot{q} - \mathcal{H}$$

TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

Sytuacja może być zilustrowana w następujący sposób:

- Znamy **zależność lagranżjanu od prędkości uogólnionej**.
- **Pęd uogólniony** jest pochodną lagranżjanu względem prędkości uogólnionej.

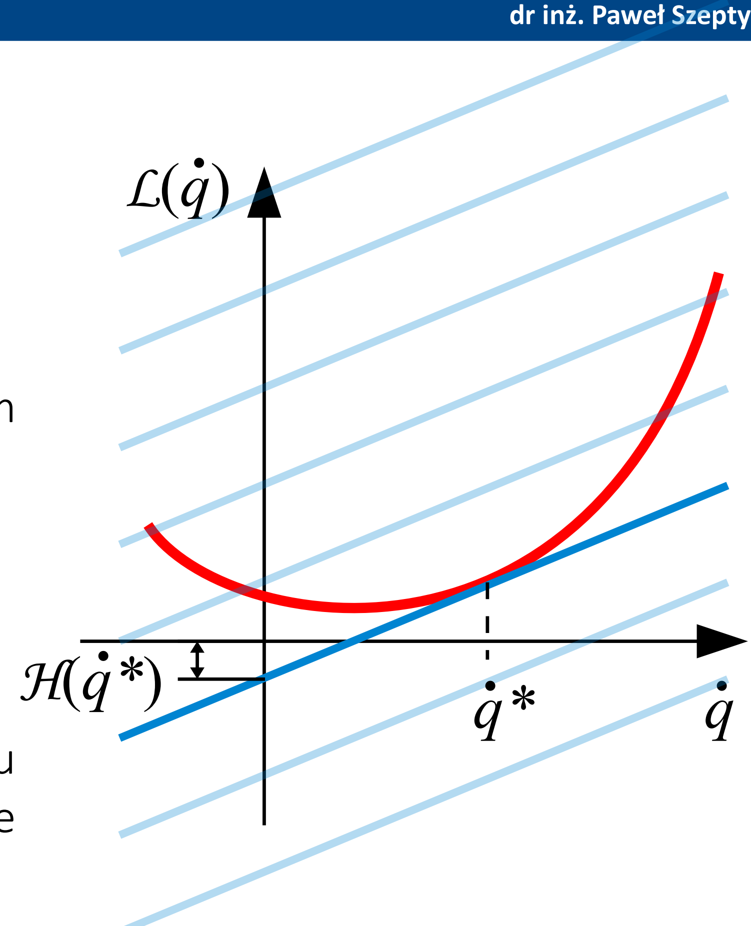
$$p(\dot{q}^*) = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right|_{\dot{q}^*}$$

- Pęd uogólniony określa nachylenie stycznej do wykresu lagranżjanu w pewnym punkcie. Wszystkie proste równoległe do niej opisują równania postaci:

$$\mathcal{L} = p\,\dot{q} - \mathcal{H}$$

- Wśród wszystkich tych prostych jest tylko jedna styczna w danym punkcie do wykresu. Jej równanie to:

$$\mathcal{L} = p(\dot{q}^*)\dot{q} - \mathcal{H}(\dot{q}^*)$$

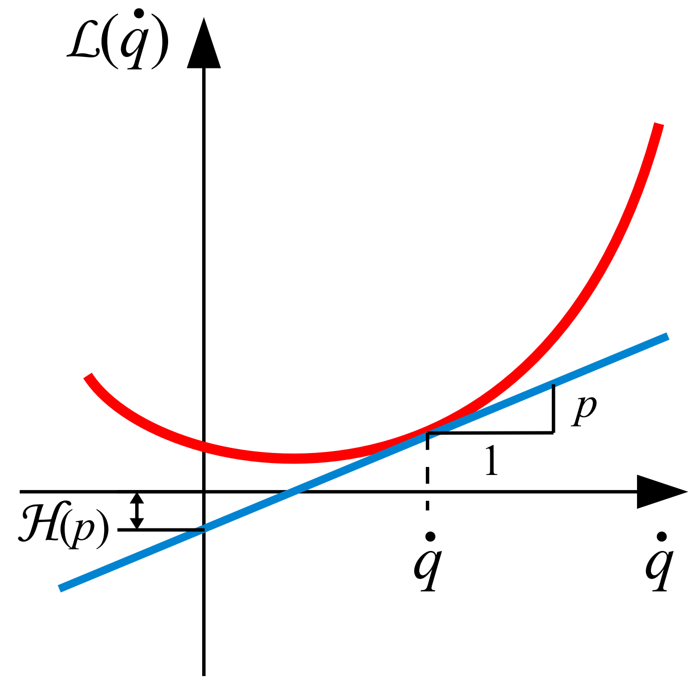


TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

Jeśli funkcję $\mathcal{H}$ zdefiniujemy w taki sposób, że dla dowolnej prędkości uogólnionej $\dot{q}$ równanie

$$\mathcal{L} = p\,\dot{q} - \mathcal{H}$$

opisywać będzie styczną do wykresu funkcji w punkcie $\dot{q}$, to zbiór takich stycznych (obwiednia wykresu) faktycznie umożliwi nam odtworzenie zależności lagranżjanu od $\dot{q}$ na podstawie znajomości zależności od pochodnej względem $\dot{q}$.

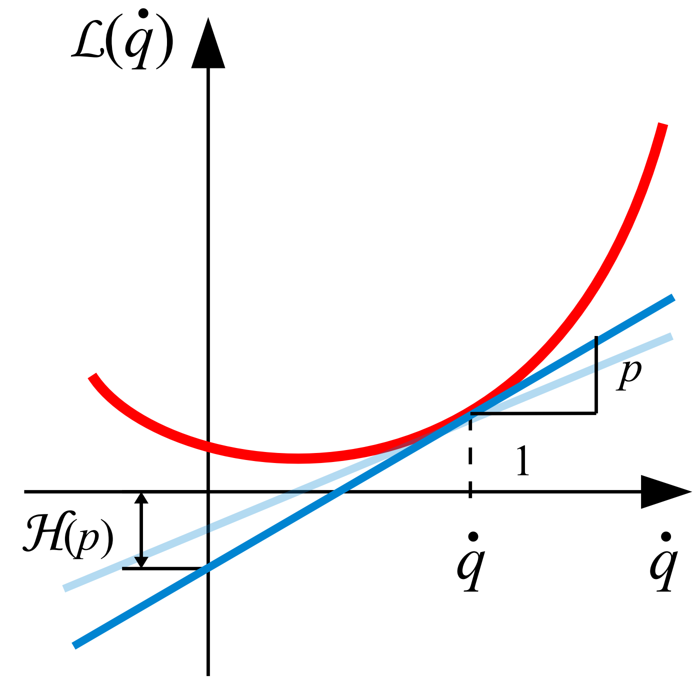


TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

Jeśli funkcję $\mathcal{H}$ zdefiniujemy w taki sposób, że dla dowolnej prędkości uogólnionej $\dot{q}$ równanie

$$\mathcal{L} = p\,\dot{q} - \mathcal{H}$$

opisywać będzie styczną do wykresu funkcji w punkcie $\dot{q}$, to zbiór takich stycznych (obwiednia wykresu) faktycznie umożliwi nam odtworzenie zależności lagranżjanu od $\dot{q}$ na podstawie znajomości zależności od pochodnej względem $\dot{q}$.



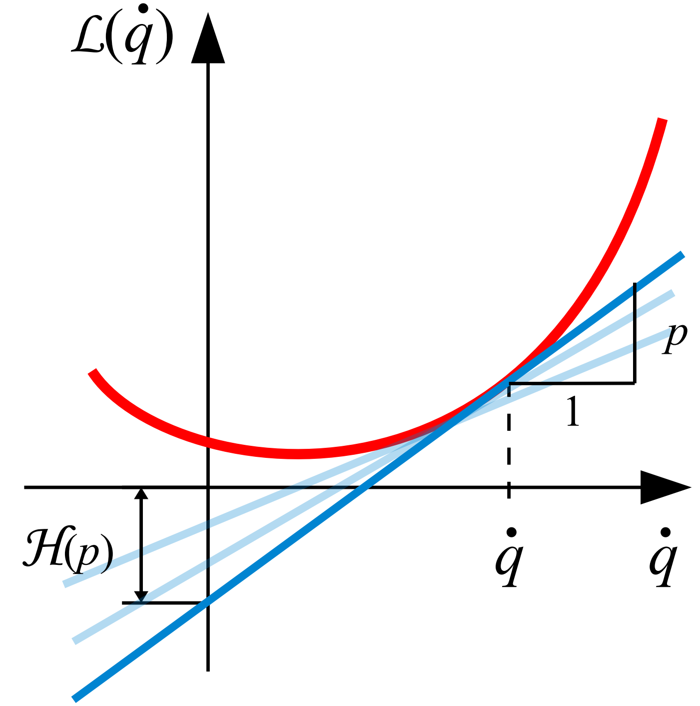
dr inż. Paweł Szeptyński

TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

Jeśli funkcję $\mathcal{H}$ zdefiniujemy w taki sposób, że dla dowolnej prędkości uogólnionej $\dot{q}$ równanie

$$\mathcal{L} = p\,\dot{q} - \mathcal{H}$$

opisywać będzie styczną do wykresu funkcji w punkcie $\dot{q}$, to zbiór takich stycznych (obwiednia wykresu) faktycznie umożliwi nam odtworzenie zależności lagranżjanu od $\dot{q}$ na podstawie znajomości zależności od pochodnej względem $\dot{q}$.

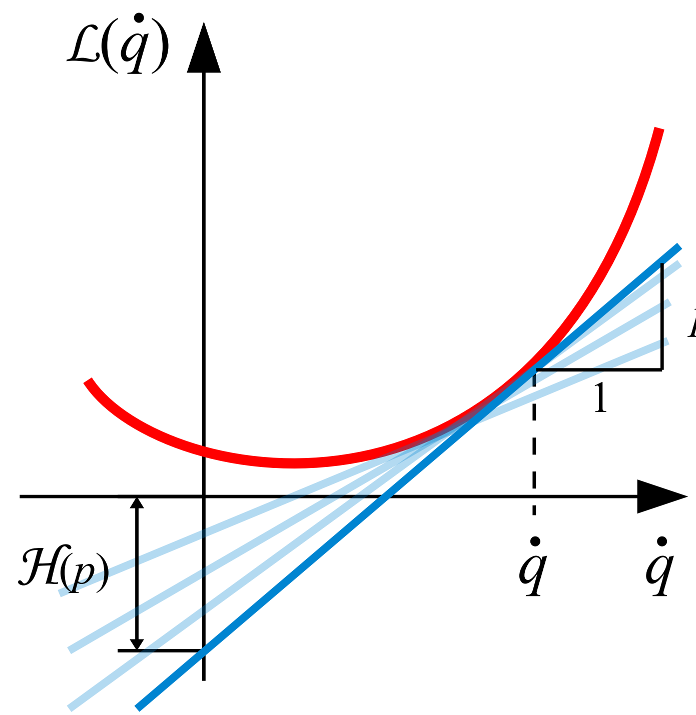


TRANSFORMACJA LEGENDRE'A

Jeśli funkcję $\mathcal{H}$ zdefiniujemy w taki sposób, że dla dowolnej prędkości uogólnionej $\dot{q}$ równanie

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{H}$$

opisywać będzie styczną do wykresu funkcji w punkcie $\dot{q}$, to zbiór takich stycznych (**obwiednia wykresu**) faktycznie umożliwi nam odtworzenie zależności lagranżjanu od $\dot{q}$ na podstawie znajomości zależności od pochodnej względem $\dot{q}$.



Funkcję $\mathcal{H}$ nazywamy transformatą Legendre'a **funkcji** $\mathcal{L}$. Jeśli funkcją $\mathcal{L}$ jest lagnrażjan, to $\mathcal{H}$ nazywamy **hamiltonianem** i definiujemy następująco:

$$\boxed{\mathcal{H}(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)}$$

gdzie

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

RÓWNANIA HAMILTONA

RÓWNANIA HAMILTONA

Definiujemy zatem hamiltonian układu mechanicznego następująco:

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \qquad \text{gdzie} \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \qquad j=1,2,\ldots,s}$$

W definicji powyższej **należy wyrazić prędkości uogólnione za pomocą pędów uogólnionych**. Robimy to wykorzystując definicje pędów uogólnionych i odwracając te związki:

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t) \qquad i, j=1,2,\ldots,s$$

Trzeba jednak zwrócić uwagę, że takie przekształcenie nie zawsze jest możliwe!

RÓWNANIA HAMILTONA

Obliczmy **różniczkę zupełną lagranżjanu**:

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \mathrm{d} q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \mathrm{d} \dot{q}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \mathrm{d} t$$

Wykorzystując **definicję pędu uogólnionego**, możemy napisać:

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \mathrm{d} q_j + p_j \mathrm{d} \dot{q}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \mathrm{d} t$$

Ze wzoru na **różniczkowanie iloczynu funkcji** mamy:

$$\mathrm{d}\left(p_j \dot{q}_j \right) = \dot{q}_j \mathrm{d} p_j + p_j \mathrm{d} \dot{q}_j$$

$$p_j \mathrm{d} \dot{q}_j = \mathrm{d}\left(p_j \dot{q}_j \right) - \dot{q}_j \mathrm{d} p_j$$

Po podstawieniu:

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \mathrm{d} q_j + \mathrm{d}\left(p_j \dot{q}_j \right) - \dot{q}_j \mathrm{d} p_j \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \mathrm{d} t$$

RÓWNANIA HAMILTONA

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \mathrm{d}\left(p_j\dot{q}_j\right) - \dot{q}_j\mathrm{d}p_j\right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Po przekształceniach:

$$\sum_{j=1}^{s}\mathrm{d}\left(p_j\dot{q}_j\right) - \mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s}\left[\dot{q}_j\mathrm{d}p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Suma różniczek do **różniczka sumy**:

$$\mathrm{d}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(p_j\dot{q}_j\right) - \mathcal{L}\right] = \sum_{j=1}^{s}\left[\dot{q}_j\mathrm{d}p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Wyrażenie po lewej stronie to **różniczka hamiltonianu**

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s}\left[\dot{q}_j\mathrm{d}p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

RÓWNANIA HAMILTONA

Ale **różniczkę zupełną hamiltonianu** możemy również obliczyć inaczej:

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j\right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

To wyrażenie, jak również wyrażenie otrzymane poprzednio:

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s}\left[\dot{q}_j\mathrm{d}p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

muszą być tożsame. Jeśli więzy są holonomiczne, to **prędkości uogólnione** (zatem i **pędy uogólnione**) **są niezależne od współrzędnych uogólnionych**. W takim przypadku te dwa wyrażenia będą sobie równe tylko wtedy, jeśli współczynniki przy odpowiednich przyrostach zmiennych będą takie same, tj.

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}} \qquad \boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j} \qquad \boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

RÓWNANIA HAMILTONA

Zajmijmy się pierwszym związkiem i wykorzystajmy w nim **równania Lagrange'a II rodzaju**:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

Wykorzystajmy w związku powyższym **definicję pędu uogólnionego**:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_j = -\dot{p}_j$$

Razem z drugim z otrzymanych uprzednio związków:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

otrzymujemy **układ równań Hamiltona**.

RÓWNANIA HAMILTONA

Równania Hamiltona lub równania kanoniczne **(Hamiltona)** mają postać:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \end{cases} \qquad j=1,2,\dots,s$$

gdzie hamiltonian jest zdefiniowany następująco:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

a w definicji tej **prędkości uogólnione wyrażone są za pomocą pędów uogólnionych** poprzez odwrócenie związków definiujących pęd uogólniony:

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t) \qquad i, j=1,2,\dots,s$$

RÓWNANIA HAMILTONA

UWAGI:

- Jest to **układ $2s$ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu**.

- Wymagają one **s warunków początkowych na s współrzędnych uogólnionych oraz drugie s warunków początkowych na s pędów uogólnionych.**

- Równania wyprowadziliśmy z wykorzystaniem równań Lagrange'a II rodzaju wyrażonych za pomocą lagranżjanu, zatem:

  - **liczba współrzędnych uogólnionych** jest **równa liczbie stopni swobody** układu
  - przyjęte **współrzędne uogólnione są niezależne**.
  - spełnione muszą być **zasady dynamiki Newtona**
  - spełniona musi być **hipoteza d'Alemberta** (np. więzy gładkie)
  - więzy muszą być **holonomiczne**
  - ruch odbywa się w **potencjalnym polu sił**

INTERPRETACJA FIZYCZNA RÓWNAŃ HAMILTONA

Przyjmujemy, że **więzy są skleronomiczne** (nie zależą od czasu) a ruch odbywa się w **potencjalnym polu sił**. Wtedy:

- **Energia kinetyczna zależy jedynie od prędkości uogólnionych** $E_k = E_k(\dot{q}_j)$
- **Energia potencjalna zależy jedynie od współrzędnych uogólnionych** $E_p = E_p(q_j)$

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j) = E_k(\dot{q}_j) - E_p(q_j)$$

Sprawdźmy charakter zależności energii kinetycznej od prędkości uogólnionych:

- energia kinetyczna z definicji jest równa: $E_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i)$
- wektor położenia jest funkcją tylko współrzędnych uogólnionych: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j)$
  (więzy są **holonomiczne**)
- wektor prędkości obliczamy następująco: $\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$

INTERPRETACJA FIZYCZNA RÓWNAŃ HAMILTONA

- wektor prędkości: $$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

  Wektor położenia nie zależy od prędkości uogólnionych, więc różniczkowanie jawnej zależności od współrzędnych uogólnionych nie wprowadzi zależności od prędkości uogólnionych. Zatem **wektor prędkości jest** liniową funkcją **prędkości uogólnionych**, tj. zależy od nich tylko w pierwszej potędze i nie ma wyrazów wolnych)

- energia kinetyczna: $$E_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i\right)$$

  Energia kinetyczna jest zatem symetryczną jednorodną funkcją drugiego stopnia **z uwagi na prędkości uogólnione** tj. zależy jedynie od iloczynów dwóch pierwszych potęg prędkości uogólnionych (w szczególności kwadratów prędkości uogólnionych) i nie ma wyrazów wolnych:

$$E_k = \alpha_{11}\left(\dot{q}_1\right)^2 + \alpha_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + \alpha_{1s}\dot{q}_1\dot{q}_s + \alpha_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1 + \alpha_{22}\left(\dot{q}_2\right)^2 + \ldots + \alpha_{ss}\left(\dot{q}_s\right)^2$$

Współczynniki α_{ij} zależą od współrzędnych uogólnionych, ale nie od prędkości uogólnionych. Ponadto:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

INTERPRETACJA FIZYCZNA RÓWNAŃ HAMILTONA

- energia kinetyczna: $E_k = \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} \alpha_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l$

pochodna energii kinetycznej względem dowolnej prędkości uogólnionej:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^{s} 2\alpha_{jl} \dot{q}_l$$

Uwzględniliśmy przy tym fakt, że współczynniki α_{jl} nie zależą w sposób jawny od prędkości uogólnionych, oraz wzięliśmy pod uwagę symetrię różniczkowanej zależności. Dwójka w powyższym wzorze bierze się ze związku $\alpha_{jl} = \alpha_{lj}$ dla $l \neq j$, oraz z różniczkowania funkcji kwadratowej dla $l = j$.

Możemy w takim razie napisać:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} 2\alpha_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j = 2E_k$$

INTERPRETACJA FIZYCZNA RÓWNAŃ HAMILTONA

Uwzględniając wszystkie te rozważania możemy napisać dla hamiltonianu:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - (E_k - E_p)$$

Wykorzystajmy **definicję pędu uogólnionego i definicję lagranżjanu**:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (E_k - E_p) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial (E_k - E_p)}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (E_k - E_p) = \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j}_{=2E_k} - \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j}_{=0} - (E_k - E_p)$$

Ostatnie przekształcenia biorą się stąd, że **energia potencjalna nie zależy w sposób jawny od prędkości uogólnionych** oraz z uwzględnienia wcześniejszych uwag dotyczących energii kinetycznej.

$$\boxed{\mathcal{H} = E_k + E_p = E_{mech}}$$

A zatem dla **sił zachowawczych** oraz **więzów skleronomicznych** (i pozostałych założeń formalizmu hamiltonowskiego) **hamiltonian jest równy całkowitej energii mechanicznej układu**.

INTERPRETACJA FIZYCZNA RÓWNAŃ HAMILTONA

Hamiltonian jest równy całkowitej energii mechanicznej:

$$\mathcal{H} = E_k + E_p = E_{mech}$$

Skoro ruch odbywa się w **polu sił zachowawczych**, to w czasie ruchu **energia jest zachowana**, zatem **wartość hamiltonianu jest stała** (**hamiltonian jest zachowany**). Będzie tak wtedy, gdy

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = 0$$

Uwzględniając **równania Hamiltona**:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right)}_{=0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

Zatem hamiltonian jest stały w czasie, jeśli tylko nie zależy w sposób jawny od czasu. Z wyprowadzenia równań hamiltona wiemy, że jawna zależność hamiltonianu od czasu jest przeciwna do jawnej zależności lagranżjanu od czasu, zatem **hamiltonian jest zachowany, gdy**:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0}$$

INTERPRETACJA FIZYCZNA RÓWNAŃ HAMILTONA

Fakt, że hamiltonian ma stałą wartość w czasie ruchu nie oznacza wcale, że jest stałą funkcją każdego ze swoich argumentów.

Hamiltonian jest funkcją $2s$ zmiennych niezależnych i jako funkcja zmienia swoją wartość przy zmianie któregoś z nich, jednakże **dla trajektorii rzeczywistych zmienne te ewoluują w czasie w taki sposób, że w każdej chwili, hamiltonian obliczony dla bieżących ich wartości będzie miał taką samą wartość**.

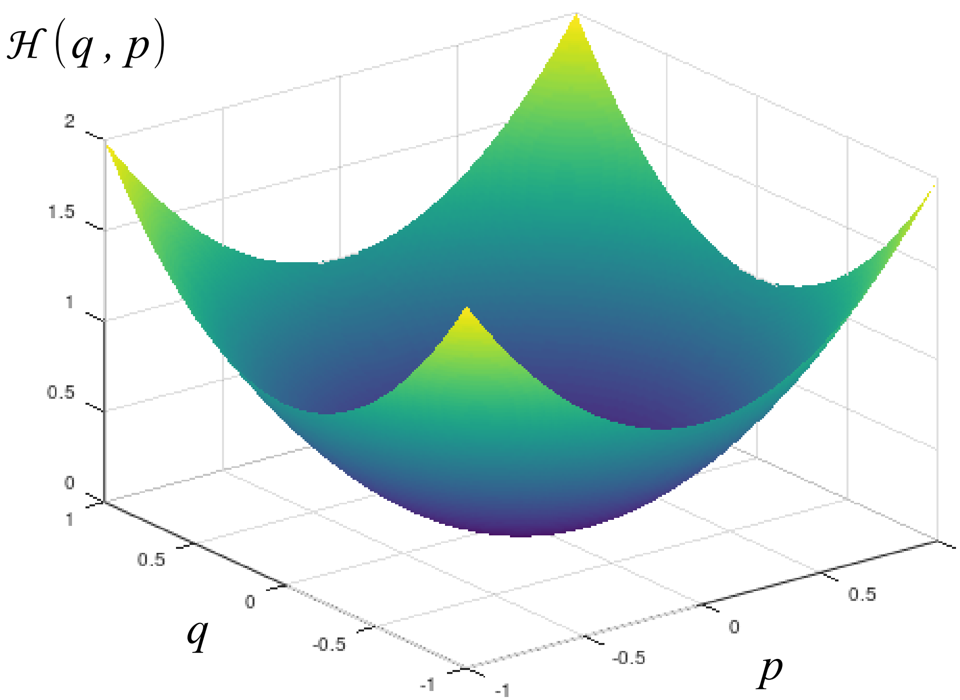
PRZYKŁADOWO:

Dla masy na sprężynie:

$$E_p = \frac{k\,x^2}{2} = \frac{k\,q^2}{2}$$

$$E_k = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{p^2}{2\,m}$$

$$\mathcal{H}(q\,,p) = E_k + E_p = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{k\,q^2}{2}$$



INTERPRETACJA FIZYCZNA RÓWNAŃ HAMILTONA

Przestrzeń (q, p) nazywamy **przestrzenią fazową**.

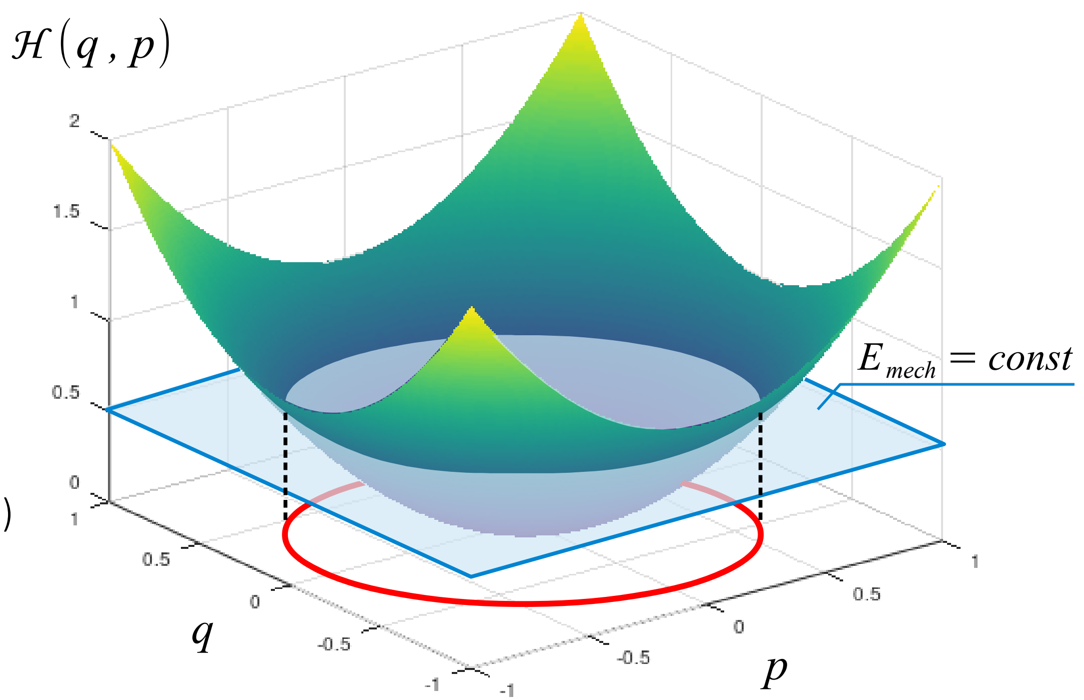
Hamiltonian w tej przestrzeni jest dla ustalonego zagadnienia pewną **powierzchnią**, ale dla **trajektoria rzeczywista**, spełniająca równania ruchu i zadane warunki początkowe (określające energię układu) jest krzywą w przestrzeni fazowej – rzutem na przestrzeń fazową przekroju powierzchni hamiltonianu płaszczyzną odpowiadającą zadanemu poziomowi energii mechanicznej.

Hamiltonian jako funkcja współrzędnych uogólnionych i pędów uogólnionych:

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k q^2}{2}$$ - paraboloida

Obraz trajektorii rzeczywistej w przestrzeni fazowej:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{k q^2}{2} = const.$$ - okrąg na płaszczyźnie (q,p)



INTERPRETACJA FIZYCZNA RÓWNAŃ HAMILTONA

Znając interpretację fizyczną hamiltonianu możemy znaleźć **interpretację równań Hamiltona** w prostym jednowymiarowym przypadku. Pamiętamy, że energia kinetyczna zależy w sposób jawny jedynie od prędkości uogólnionych, a energia potencjalna w sposób jawny jedynie od współrzędnych uogólnionych.

Wtedy pierwsze równanie

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \left(E_k + E_p \right)}{\partial q} = -\frac{\partial E_p}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q} = F$$

ma interpretację **zasady dynamiki** – pochodna pędu w czasie jest równa sile.

Drugie równanie:

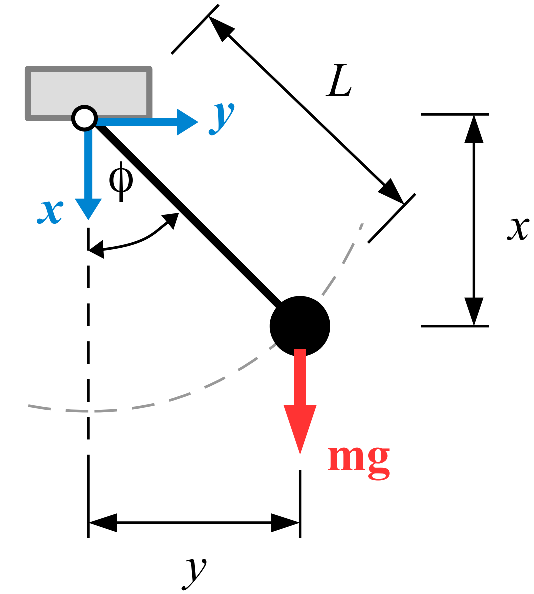
$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial \left(E_k + E_p \right)}{\partial p} = \frac{\partial E_k}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{2m} = \frac{p}{m}$$

Ma interpretację **definicji pędu** – związku między pędem, prędkością i masą.

RÓWNANIA HAMILTONA

PRZYKŁAD:

Wyznaczyć równania ruchu wahadła za pomocą równań Hamiltona.



ROZWIĄZANIE:

Jest to układ o **1 stopniu swobody**.

Współrzędną uogólnioną będzie **kąt wychylenia wahadła**: $q = \phi$

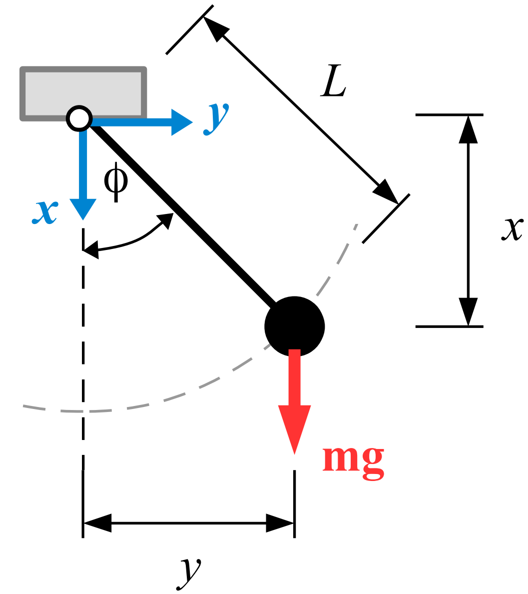
Wektor **położenia**: $\mathbf{r} = [L\cos q \;;\; L\sin q]$

Wektor **prędkości**: $\dot{\mathbf{r}} = [-L\dot{q}\sin q \;;\; L\dot{q}\cos q]$

Energia **kinetyczna**: $E_k = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2}\left[(-L\dot{q}\sin q)^2 + (L\dot{q}\cos q)^2\right] = \frac{mL^2}{2}(\dot{q})^2$

RÓWNANIA HAMILTONA

PRZYKŁAD:



Potencjał pola: $V = x m g = mg L \cos q$

Energia potencjalna: $E_p = -V = -mg L \cos q$

Lagranżjan: $\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{mL^2}{2}(\dot{q})^2 + mg L \cos q$

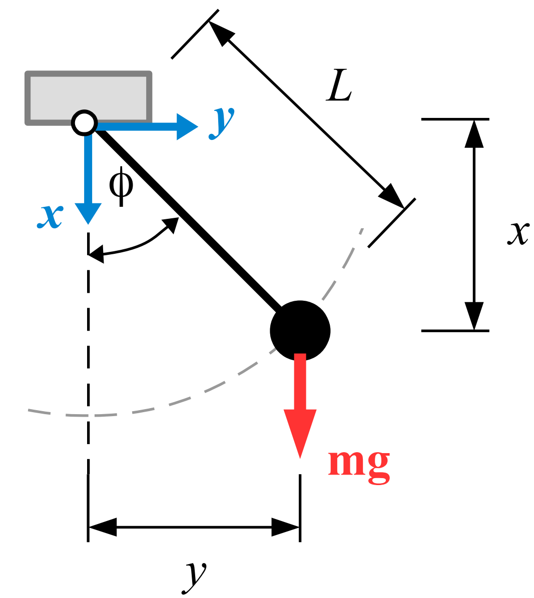
Pęd uogólniony: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m L^2 \dot{q}$

Wyrażamy prędkość uogólnioną przez pęd uogólniony: $\dot{q} = \frac{p}{m L^2}$

Hamiltonian: $\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m L^2} - \left[\frac{m L^2}{2}\left(\frac{p}{m L^2}\right)^2 + m g L \cos q\right] = \frac{p^2}{2 m L^2} - m g L \cos q$

RÓWNANIA HAMILTONA

PRZYKŁAD:



Równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dfrac{p}{m L^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -m g L \sin q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{p}{m L^2} \\ \dot{p} = -m g L \sin q \end{cases}}$$

Możemy sprawdzić poprawność tego wyniku, porównując go z równaniem ruchu otrzymanym innymi metodami. Możemy zróżniczkować pierwsze równanie, a następnie wyrazić pochodną pędu za pomocą drugiego równania:

$$\begin{cases} \ddot{q} = \dfrac{\dot{p}}{m L^2} \\ \dot{p} = -m g L \sin q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = -\dfrac{m g L \sin q}{m L^2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} + \dfrac{g}{L} \sin q = 0$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ