MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

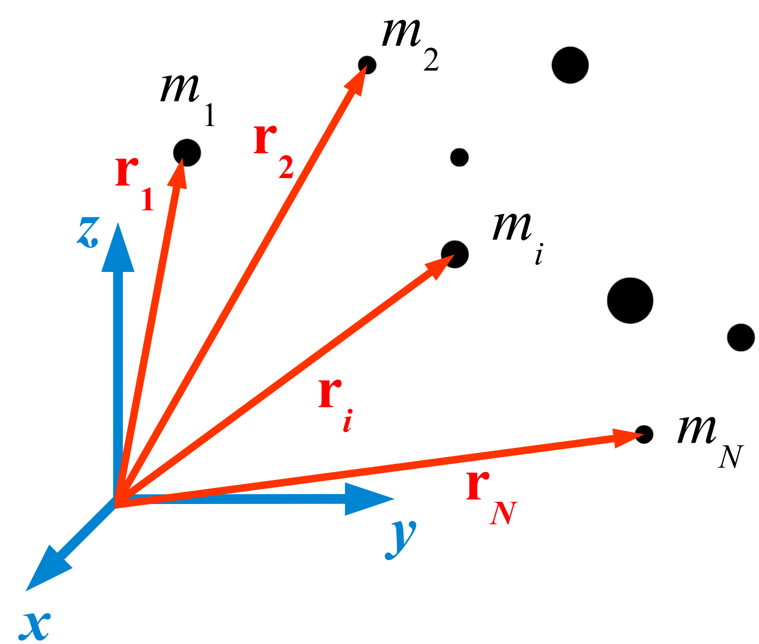
DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Układ mas punktowych – w przypadku ogólnym każdy punkt materialny mieć masę różną od pozostałych punktów i może poruszać się niezależnie od pozostałych punktów układu.

m_i – masa i-tego punktu materialnego
$\mathbf{r}_i = [x_i(t)\ ,\ y_i(t)\ ,\ z_i(t)]$ – położenie i-tego punktu materialnego



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

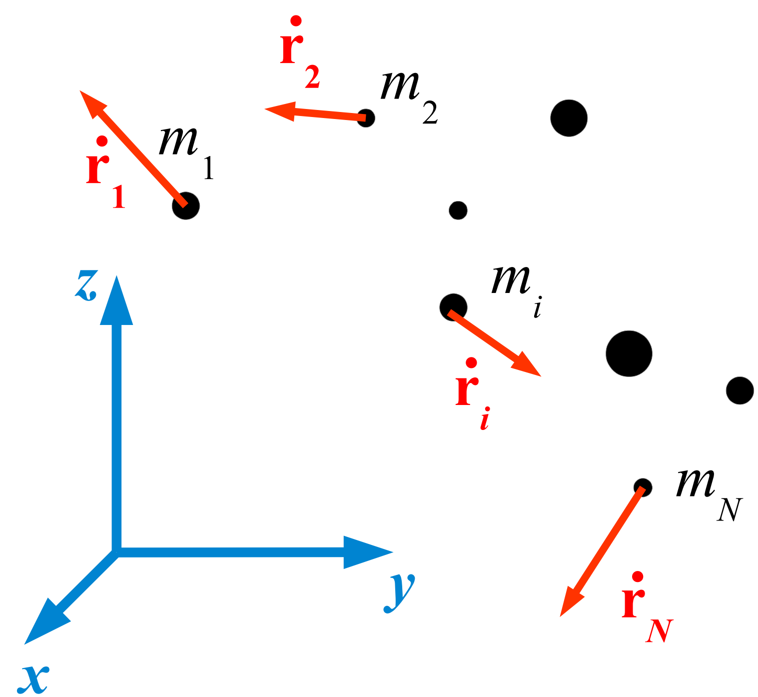
DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Pęd układu punktów materialnych – suma pędów poszczególnych mas.

$$\boxed{\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i}$$

Jeśli założymy, że **masa każdego z punktów jest stała w czasie**, wtedy możemy napisać:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_i \right]}_{\mathbf{r}_{O^*}} = M \dot{\mathbf{r}}_{O^*}$$



gdzie:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$ – **całkowita masa układu**

$$\mathbf{r}_{O^*} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$ – położenie **środka ciężkości układu**

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

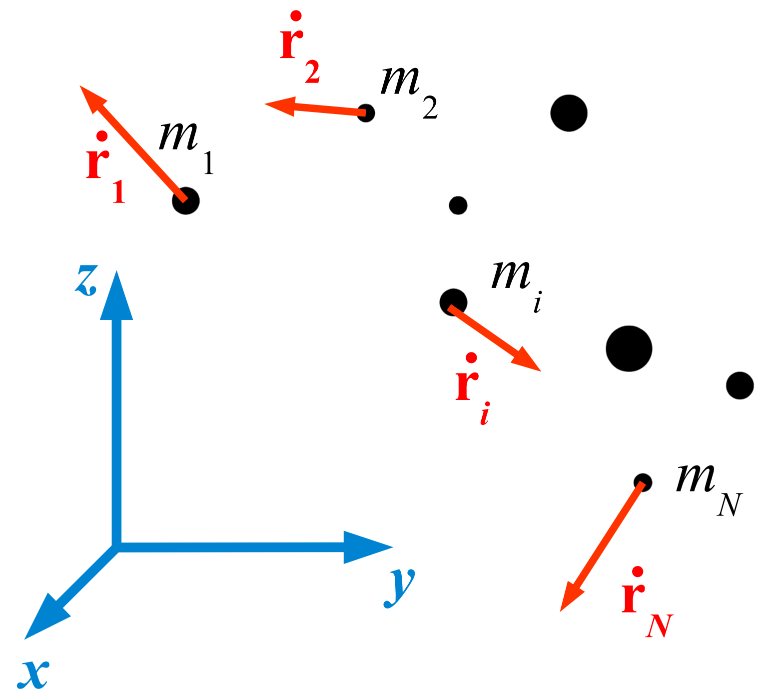
DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Układ izolowany – układ mechaniczny, w którym **nie zachodzi wymiana masy ani energii z otoczeniem**, a ponadto **na elementy tego układu nie oddziałują żadne siły zewnętrzne** lub **działające siły się równoważą**.

Oznaczmy przez $\mathbf{F}_{ij}$ siłę interakcji, z jaką m_j oddziałuje na m_i .

Zmiana pędu i-tej masy punktowej zgodnie z **II zasadą dynamiki Newtona** jest równa sumie działających na nią sił. W układzie Izolowanym jedynymi siłami, o których nie założyliśmy z góry, że się równoważą, są siły interakcji między ciałami:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}$$



Całkowita zmiana pędu układu:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij} =$$
$$= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots + \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \ldots + \mathbf{F}_{N(N-1)}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Przy założeniu **III zasady dynamiki Newtona**, mamy: $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$

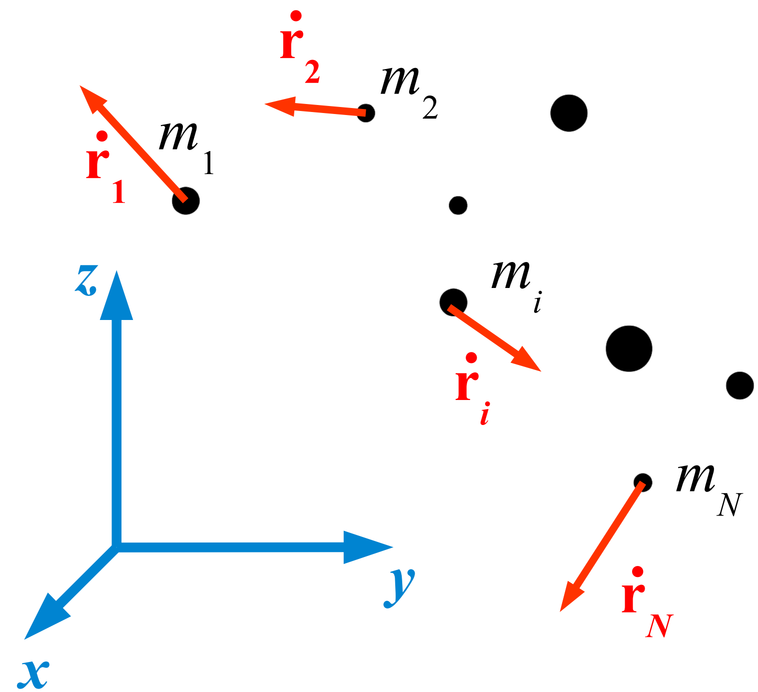
To pociąga za sobą: $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathbf{p}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{0}$

Możemy sformułować następującą zasadę:

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

W układzie izolowanym, całkowity pęd układu nie zmienia się w czasie (pęd jest zachowany)

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{p}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\sum_{i}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p} = const.$$



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

UWAGI DOTYCZĄCE ZASADY ZACHOWANIA PĘDU:

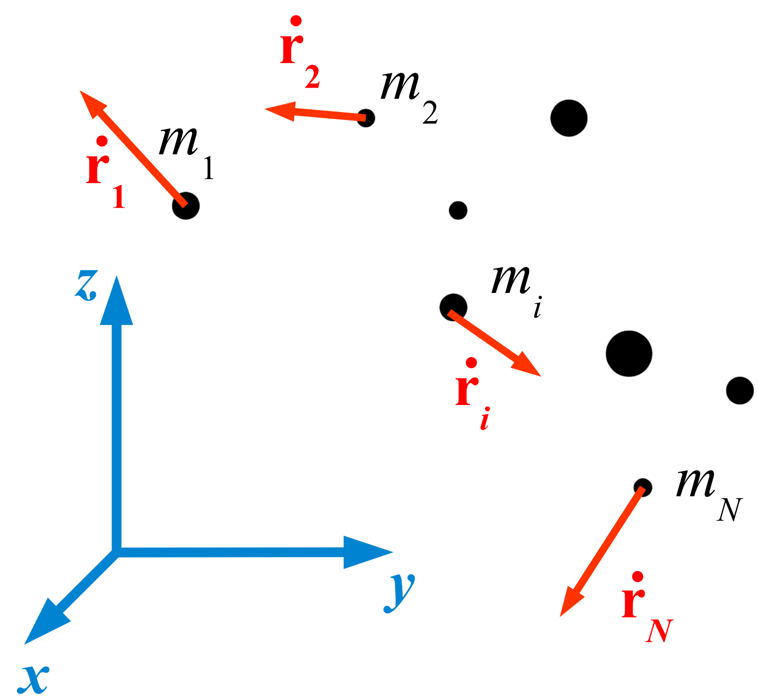
- **Prędkość środka ciężkości układu izolowanego jest stała**:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{p}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(M\,\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\right) = M\,\frac{\mathrm{d}\,\dot{\mathbf{r}}_{O^*}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{r}}_{O^*} = const.$$

- Jeśli **pęd układu izolowanego w dowolnej chwili jest zerowy**, to **położenie środka ciężkości tego układu jest stałe w czasie**:

$$\dot{\mathbf{r}}_{O^*}(t_i) = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r}_{O^*} = const.$$

- Wnioski powyższe stanowią swego rodzaju **uogólnienie I zasady dynamiki Newtona na przypadek układu** mas punktowych.



> Jeśli na układ mas punktowych nie działają żadne siły lub działające siły się równoważą, to środek ciężkości tego układu porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym, lub pozostaje w spoczynku.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

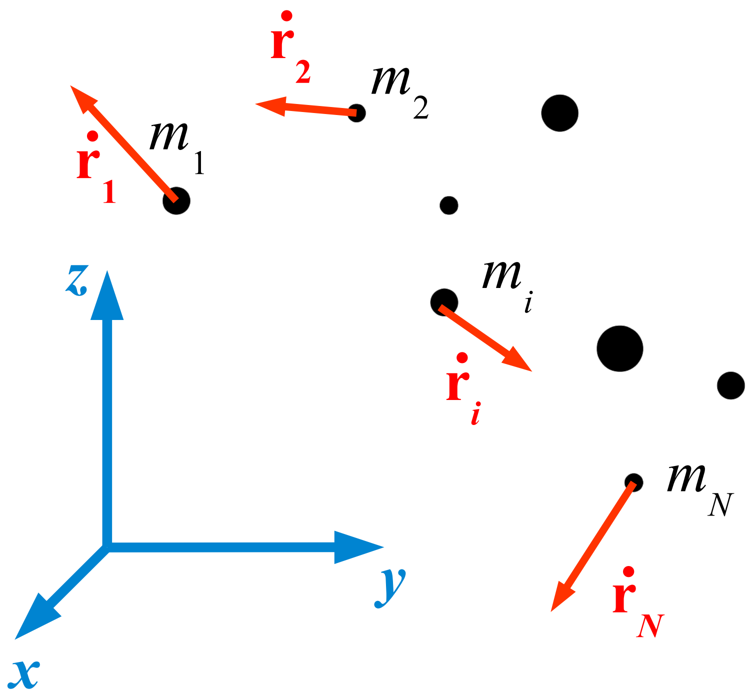
UWAGI DOTYCZĄCE ZASADY ZACHOWANIA PĘDU:

- **Zasada zachowania pędu obowiązuje dla dowolnych sił, które spełniają III zasadę dynamiki Newtona**. W szczególności **nie muszą to być siły zachowawcze**, mogą to być siły dyssypatywne (związane z różnymi formami tarcia). **Wtedy pęd jest zachowany, a energia nie jest zachowana.**

  Przykładowo: zderzenie szorstkie – pęd jest zachowany, ale część energii przekształcana jest podczas zderzenia w ciepło.

- Z drugiej strony, **w polu sił zachowawczych zachowana jest energia, ale pęd nie musi być zachowany**.

  Przykładowo: spadek swobodny w jednorodnym polu grawitacyjnym – całkowita energia mechaniczna (suma energii kinetycznej i potencjalnej) jest zachowana, ale pęd rośnie, ponieważ ciało przyspiesza.



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Układ równań ruchu dla układu N mas punktowych:

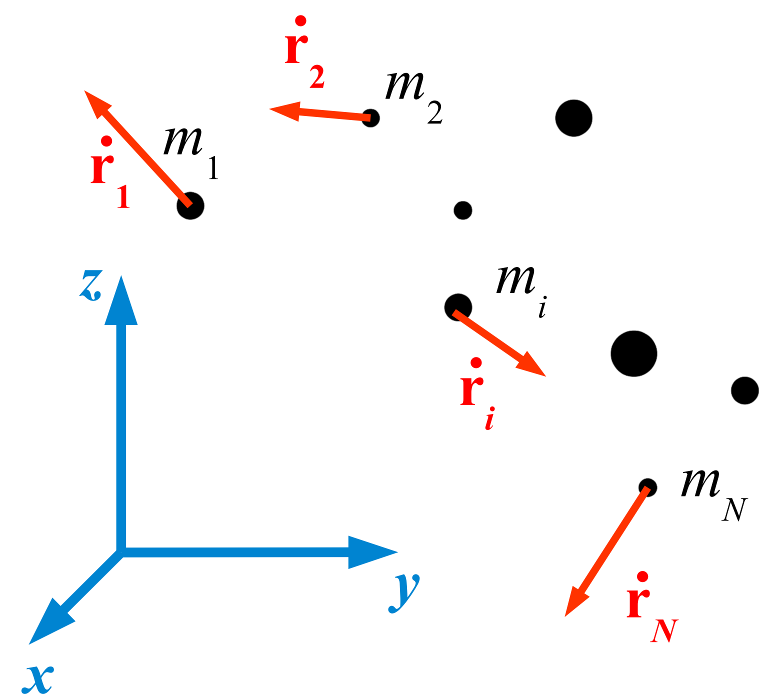
- Układ N mas punktowych ma $3N$ stopni swobody.

- **II zasada dynamiki Newtona zapisana dla każdej i-tej masy dostarcza nam równań ruchu tej masy**. Przy założeniu stałości mas, dla ogólnego przypadku układu mas punktowych (niekoniecznie izolowanego otrzymujemy) $3N$ równań:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}\,t} = F_i \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} m_i \ddot{x}_i = F_{i,x} \\ m_i \ddot{y}_i = F_{i,y} \\ m_i \ddot{z}_i = F_{i,z} \end{cases} \quad i=1,\ldots,N$$

gdzie $\mathbf{F}_i$ to suma sił działających na m_i , zarówno sił interakcji, jak i sił zewnętrznych.

- To układ $3N$ **równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu** (równoważny układowi $6N$ równań pierwszego rzędu).



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

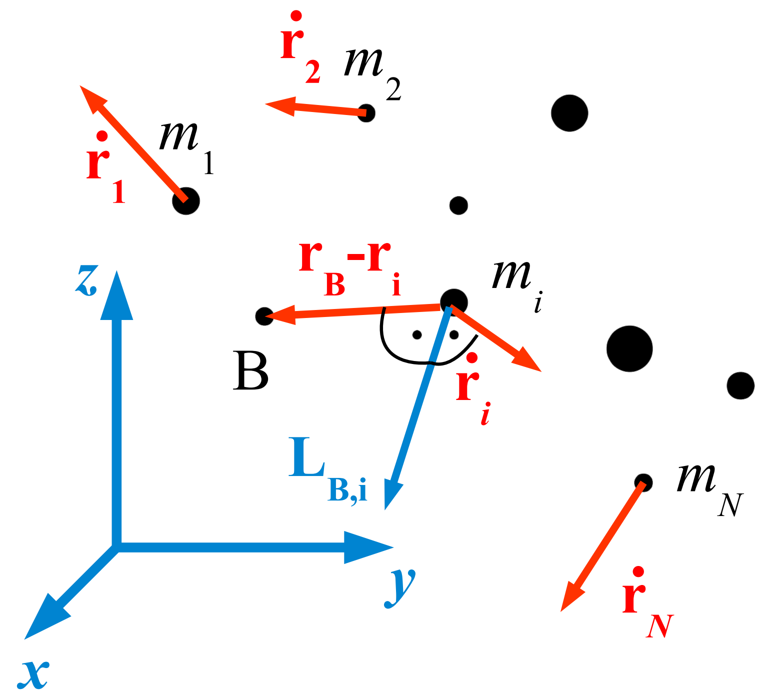
Moment pędu albo **kręt** **masy punktowej względem bieguna B** zdefiniowany jest jako iloczyn wektorowy pędu i wektora łączącego położenie masy punktowej z wybranym biegunem B:

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{p} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}) = m\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r})$$

Moment pędu układu mas punktowych **względem bieguna B**:

$$\mathbf{L}_B = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{B,i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_i)$$



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Przypuśćmy, że znamy moment pędu układu punktów względem pewnego ustalonego bieguna B. Spróbujmy obliczyć moment pędu względem innego bieguna C:

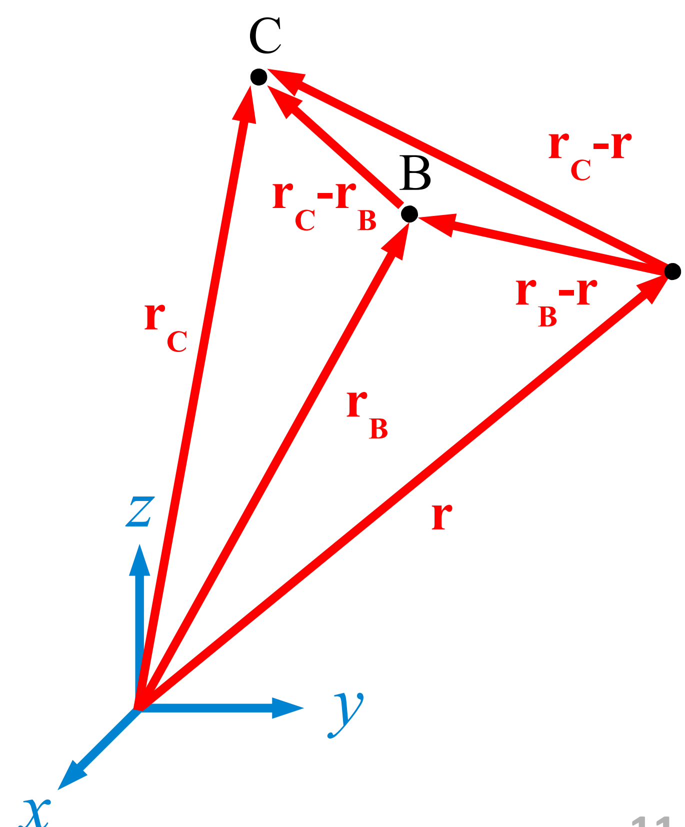
$$\mathbf{L}_C = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \times (\mathbf{r}_B + \vec{\mathrm{BC}} - \mathbf{r}_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_i)}_{\mathbf{L}_B} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}_{\mathbf{p}} \times \vec{\mathrm{BC}}$$

możemy zapisać:

TWIERDZENIE O ZMIANIE BIEGUNA MOMENTU PĘDU

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{L}_B + \mathbf{p} \times \vec{\mathrm{BC}}$$

- analogiczne do twierdzenia o zmianie bieguna momentu siły.



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Wykorzystajmy definicję momentu pędu w II zasadzie dynamiki Newtona dla układu mas punktowych.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i}_{\mathbf{p}}=\sum_{i=1}^{N}\dot{\mathbf{p}}_i=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i}_{\mathbf{F}}$$

Każdy ze składników sum po obu stronach ostatniej równości pomnóżmy wektorowo przez $(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_i)$:

$$\sum_{i=1}^{N}\dot{\mathbf{p}}_i\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_i)=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_i)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\dot{\mathbf{p}}_i\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_i)=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_B(\mathbf{F}_i)=\mathbf{M}_B$$

Pochodna momentu pędu jest równa:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L}_B=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r})\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{p}_i\times\mathbf{r}_B-\mathbf{p}_i\times\mathbf{r}_i\right]=\sum_{i=1}^{N}\left[\,(\dot{\mathbf{p}}_i\times\mathbf{r}_B+\mathbf{p}_i\times\dot{\mathbf{r}}_B)-(\dot{\mathbf{p}}_i\times\mathbf{r}_i+\mathbf{p}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i)\,\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[\,(\dot{\mathbf{p}}_i\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_i))+\mathbf{p}_i\times\dot{\mathbf{r}}_B-\mathbf{p}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i\,\right]=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\dot{\mathbf{p}}_i\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_i)}_{\mathbf{M}_B}+\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i\right)}_{\mathbf{p}}\times\dot{\mathbf{r}}_B-m_i\underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i}_{=\mathbf{0}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego **układu mas punktowych**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L}_{\boldsymbol{B}} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{B}} + \mathbf{p}\times\dot{\mathbf{r}}_B$$

WNIOSKI:

- Jeśli **biegun**, względem którego obliczamy moment pędu jest **nieruchomy**, wtedy:

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{L}}_B = \mathbf{M}_{\boldsymbol{B}}$$

- Jeśli **biegunem**, względem którego obliczamy moment pędu **jest środek ciężkości układu punktów**:

$$B = O^* \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p} = M\,\dot{\mathbf{r}}_{O^*} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p}\|\dot{\mathbf{r}}_B \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p}\times\dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{O^*} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{O}^*}$$

W tych dwóch przypadkach pochodna momentu pędu jest równa momentowi sił.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

WNIOSKI c.d.:

- Jeśli **biegun**, względem którego obliczamy moment pędu **jest nieruchomy lub jest nim środek ciężkości układu punktów**, a ponadto moment układu sił działających na dany układ punktów jest zerowy względem tego bieguna, wtedy:

$$\left(\dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{0} \;\vee\; B = O^*\right) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \dot{\mathbf{L}}_B = \mathbf{M}_{\boldsymbol{B}} \\ \mathbf{M}_{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{L}}_B = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_B = const.$$

W układzie izolowanym moment sił zewnętrznych jest zerowy. Jeśli **siły interakcji** między masami punktowymi **spełniają III zasadę dynamiki** Newtona, to również moment tych sił jest zerowy, ponieważ stanowią one układ sił parami przeciwnych. Możemy sformułować następującą zasadę:

ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU

W układzie izolowanym, całkowity moment pędu układu względem punktu nieruchomego lub względem środka ciężkości układu nie zmienia się w czasie (moment pędu jest zachowany)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{\boldsymbol{B}} = const.$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

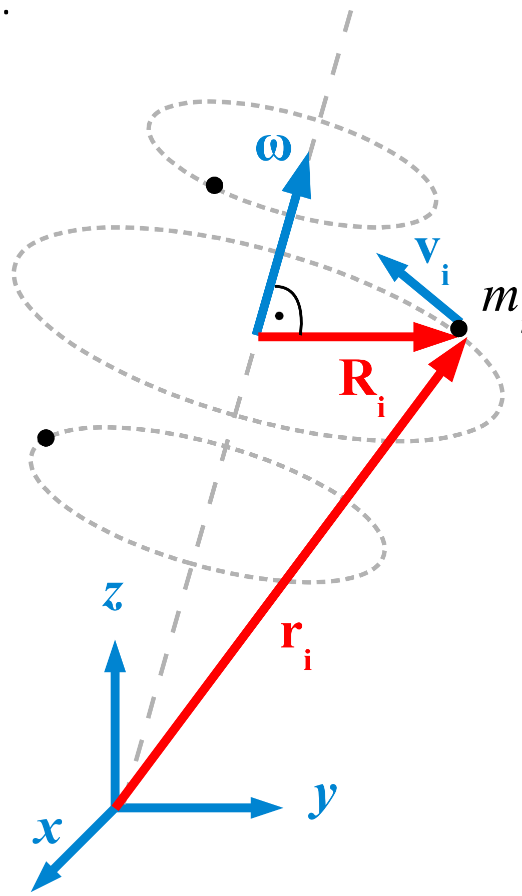
DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Rozważmy przypadek **ruchu po okręgu**, zakładając, że wszystkie masy punktowe poruszają się z **tą samą prędkością kątową**. Niech **oś obrotu przechodzi przez początek przyjętego układu współrzędnych**. Wtedy:

- Prędkość masy punktowej: $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$
- Moment pędu układu mas względem początku układu współrzędnych (B=O):

$$\mathbf{L}_B = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \times (-\mathbf{r}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

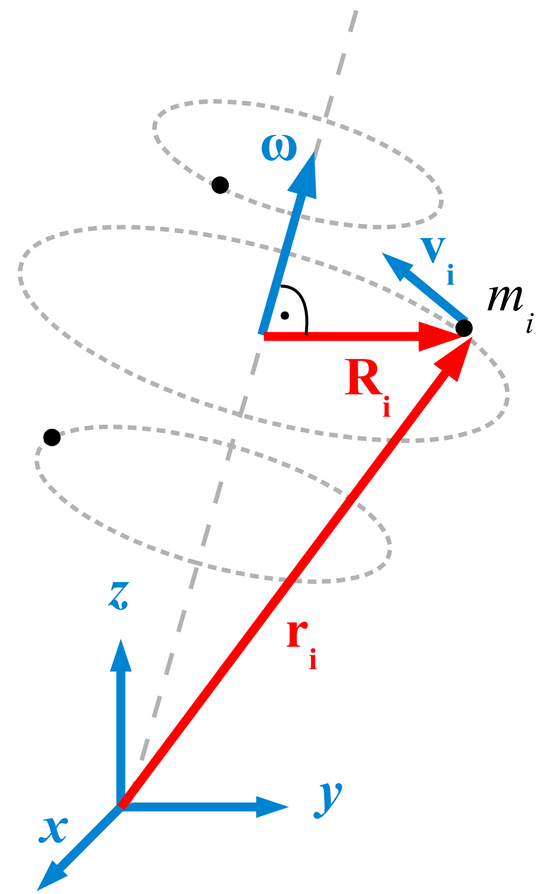


© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

$$\mathbf{L}_B = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

$$\begin{cases} L_{B,x} = \omega_x \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) \right] - \omega_y \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i y_i) \right] - \omega_z \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (z_i x_i) \right] \\ L_{B,y} = -\omega_x \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i y_i) \right] + \omega_y \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (z_i^2 + x_i^2) \right] - \omega_z \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (y_i z_i) \right] \\ L_{B,z} = -\omega_x \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (z_i x_i) \right] - \omega_y \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (y_i z_i) \right] + \omega_z \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] \end{cases}$$



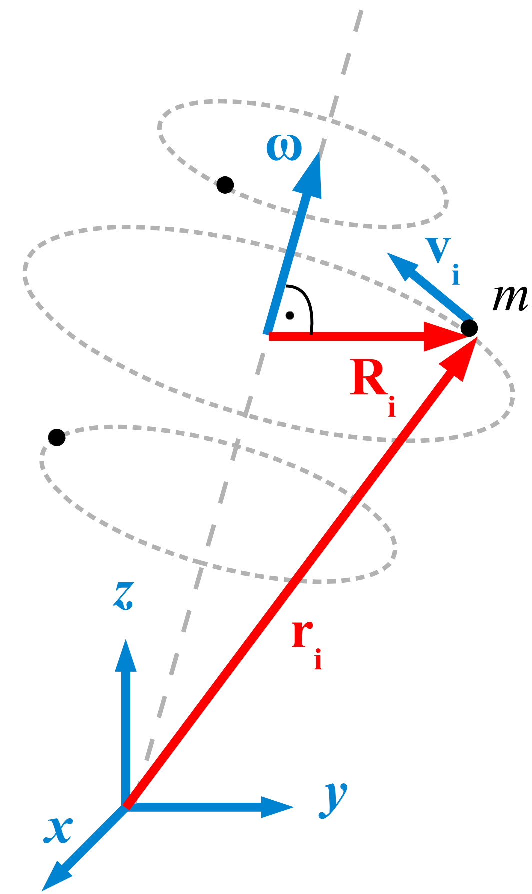
© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_B = \mathbf{M}_B}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_x\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(y_i^2+z_i^2\right)\right] - \omega_y\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(x_i y_i\right)\right] - \omega_z\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(z_i x_i\right)\right]\right) = M_{B,x} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\omega_x\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(x_i y_i\right)\right] + \omega_y\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(z_i^2+x_i^2\right)\right] - \omega_z\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(y_i z_i\right)\right]\right) = M_{B,x} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\omega_x\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(z_i x_i\right)\right] - \omega_y\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(y_i z_i\right)\right] + \omega_z\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)\right]\right) = M_{B,x} \end{cases}$$



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

Jeśli przyjmiemy układ współrzędnych, którego jedna z osi pokrywa się z osią obrotu (kierunkiem wektora prędkości kątowej), równania znacznie się uproszczą.

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

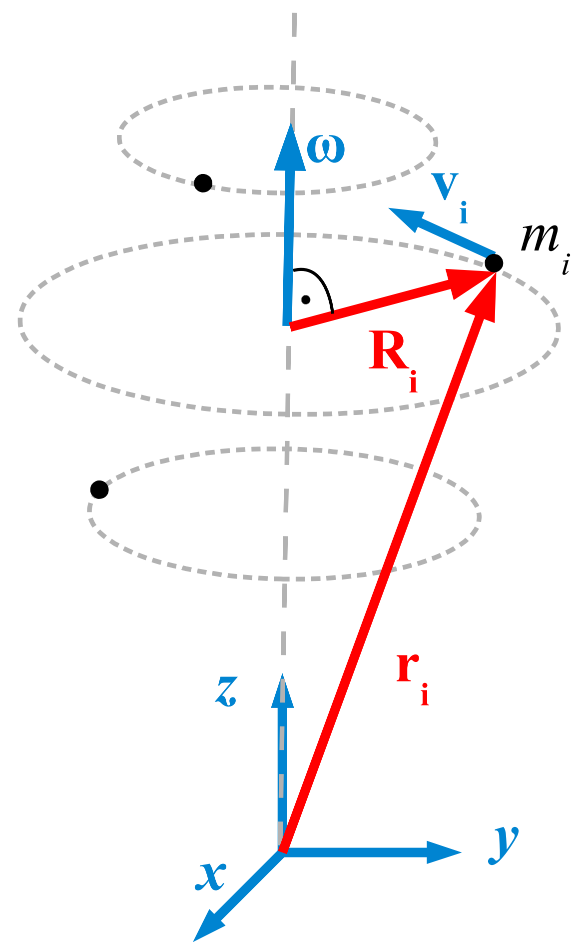
$$M_x = M_y = 0$$

$$z_i(t) = const.$$

$$[x_i(t)]^2 + [y_i(t)]^2 = [R_i(t)]^2 = const.$$

$$\frac{d\omega_z}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)\right] = M_z$$

$$\boxed{\frac{d\omega_z}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2\right] = M_z}$$



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

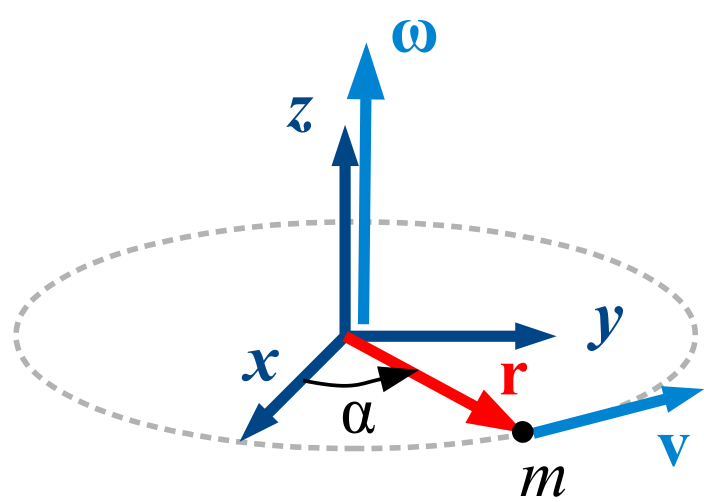
DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

W przypadku pojedynczej masy m wirującej wokół osi z w płaszczyźnie (x,y) mamy

$$\underbrace{\omega_x = \omega_y = 0 \qquad z = 0 \qquad x^2 + y^2 = r^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} L_{B,x} = 0 \\ L_{B,y} = 0 \\ L_{B,z} = \omega_z \Big[\underbrace{m(x^2+y^2)}_{mr^2 = I} \Big] \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{L = I\omega}$$



$I = m r^2$ – **moment bezwładności** masy punktowej m, wykonującej ruch po okręgu o promieniu r.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA UKŁADU MAS PUNKTOWYCH

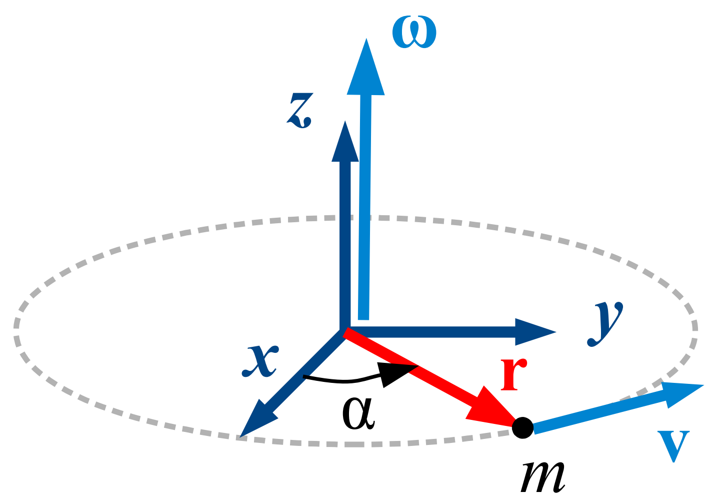
II zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L = M$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\,\omega) = M$$

$$r = const. \quad \Rightarrow \quad I = m\,r^2 = const.$$

$$I\,\dot{\omega} = M$$



$$\boxed{I\,\ddot{\alpha} = M}$$

- **równanie ruchu** dla **masy punktowej** wykonującej **ruch po okręgu**.

- moment bezwładności jest **miarą bezwładności w ruchu obrotowym**, miarą **oporu jaki masa stawia** czynnikowi wymuszającemu ruch obrotowy (**momentowi siły**). Jest to wielkość analogiczna do masy w ruchu postępowym.

- **Moment bezwładności** jest **proporcjonalny do masy** ciała oraz do **kwadratu odległości ciała od osi obrotu**.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Bryła sztywna – ciało, w którym odległość między dowolnymi dwoma punktami jest stała w czasie ruchu.

Możemy utożsamiać ją z przypadkiem **układu nieskończonej i nieprzeliczalnej liczby mas punktowych o nieskończenie małych masach** – o **siłach interakcji** między tymi punktami zakładamy, że **gwarantują stałą odległość między każdą parą punktów**, oraz że **spełniają III zasadę dynamiki Newtona**.

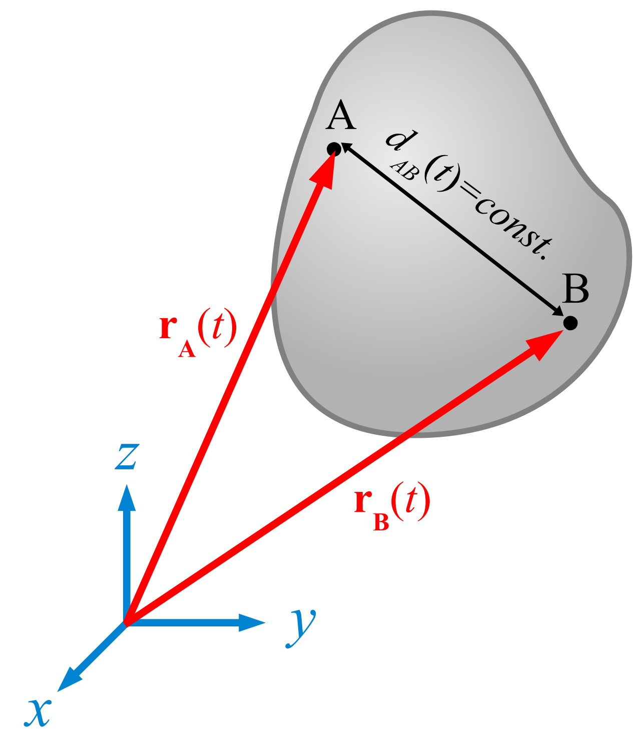
- **Bryła sztywna, na którą nie działają siły** zewnętrzne możemy uważać za układ izolowany.
- Dowolny **izolowany układ brył sztywnych** jest również układem izolowanym.

Pęd bryły sztywnej:

$$\mathbf{p} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{m_i}{\Delta V}}_{\rho} \dot{\mathbf{r}}_i \Delta V$$

Jeśli tylko granica taka istnieje, to jest to **definicja całki oznaczonej w sensie Riemanna**. W przypadku ogólnym gęstość masy ρ i prędkość każdego punktu w bryle sztywnej zależą od wyboru tego punktu.

$$\mathbf{p} = \iiint_V \left[\rho(x,y,z)\dot{\mathbf{r}}(x,y,z)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Równania ruchu dla bryły sztywnej:

ZASADA PĘDU – **II zasada dynamiki Newtona** dla **bryły sztywnej**.

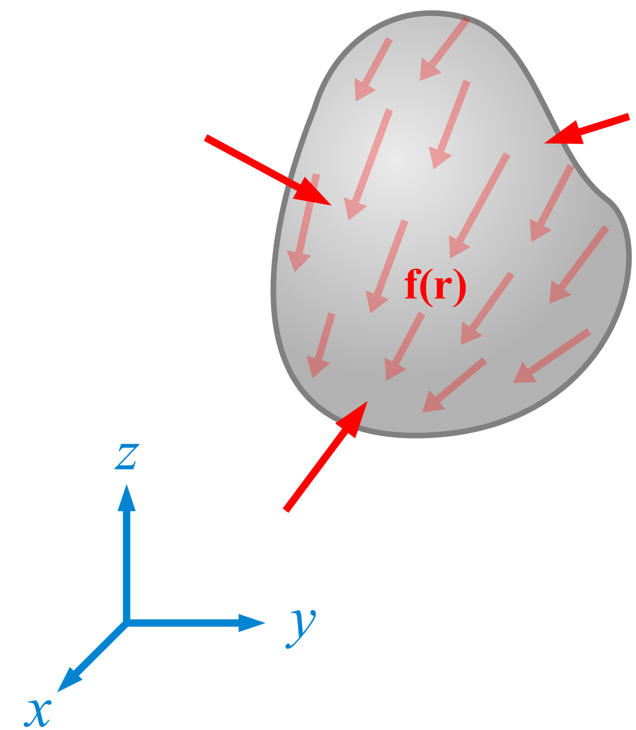
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{p}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{F}$$

gdzie:

$\mathbf{F} = \iiint\limits_V \mathbf{f}\,\mathrm{d}V$ - suma układu sił działających na bryłę sztywną

$\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z)$ - gęstość sił zewnętrznych (również siły skupione)

$\mathbf{p} = \iiint\limits_V \rho\,\dot{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V$ - całkowity pęd bryły sztywnej



Ponieważ bryła jest **nieodkształcalna**, jej konfiguracja, tj. **obszar całkowania** V **nie zmienia się w czasie** w układzie współrzędnych, który przemieszcza i obraca się razem z bryłą. Całkowanie w takim układzie daje nam zatem:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\iiint\limits_V \rho\,\dot{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\rho\,\dot{\mathbf{r}})\,\mathrm{d}V$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Jeśli zarówno **gęstość** jak i **konfiguracja** V **bryły sztywnej jest niezmienna w czasie**, wtedy:

$$\mathbf{p} = \iiint_V \rho\,\dot{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V = M\iiint_V \frac{\rho\,\dot{\mathbf{r}}}{M}\mathrm{d}V = M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\iiint_V \frac{\rho\,\mathbf{r}}{M}\mathrm{d}V}_{\mathbf{r}_{O^*}} = M\,\dot{\mathbf{r}}_{O^*}$$

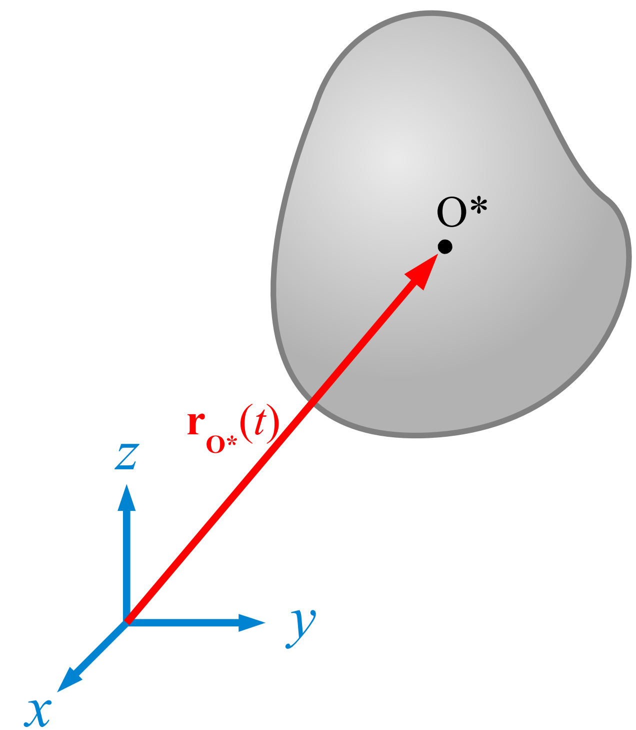
Pęd bryły sztywnej:

$$\boxed{\mathbf{p} = M\,\dot{\mathbf{r}}_{O^*}}$$

gdzie:

$$M = \iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$ – **całkowita masa bryły sztywnej**

$$\mathbf{r}_{O^*} = \iiint_V \frac{\rho\,\mathbf{r}}{M}\mathrm{d}V$$ – położenie **środka ciężkości bryły sztywnej**



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Położenie środka ciężkości bryły sztywnej:

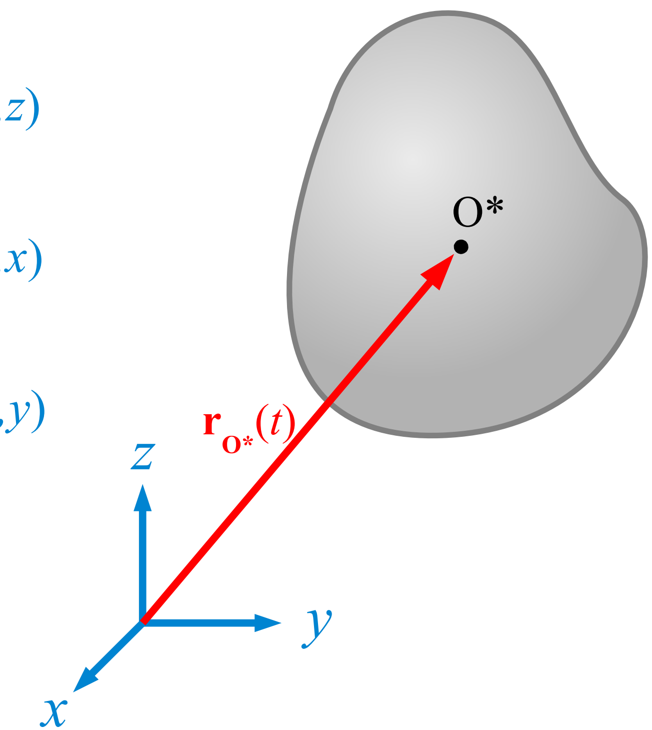
$$\mathbf{r}_{O^*} = \iiint_V \frac{\rho\,\mathbf{r}}{M}\,\mathrm{d}V = \left[x_{O^*}\,;\,y_{O^*}\,;\,z_{O^*}\right] = \left[\frac{\iiint_V \rho\,x\,\mathrm{d}V}{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}\,;\,\frac{\iiint_V \rho\,y\,\mathrm{d}V}{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}\,;\,\frac{\iiint_V \rho\,z\,\mathrm{d}V}{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}\right] = \left[\frac{S_{yz}}{M}\,;\,\frac{S_{zx}}{M}\,;\,\frac{S_{xy}}{M}\right]$$

$M = \iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$ – **masa bryły**

$S_{yz} = \iiint_V \rho\,x\,\mathrm{d}V$ – **moment statyczny** bryły **względem płaszczyzny** (y,z)

$S_{zx} = \iiint_V \rho\,y\,\mathrm{d}V$ – **moment statyczny** bryły **względem płaszczyzny** (z,x)

$S_{xy} = \iiint_V \rho\,z\,\mathrm{d}V$ – **moment statyczny** bryły **względem płaszczyzny** (x,y)



UWAGA:

- x to miara odległości od płaszczyzny (y,z). Może być dodatnia lub ujemna. Moment statyczny również może być dodatni lub ujemny.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

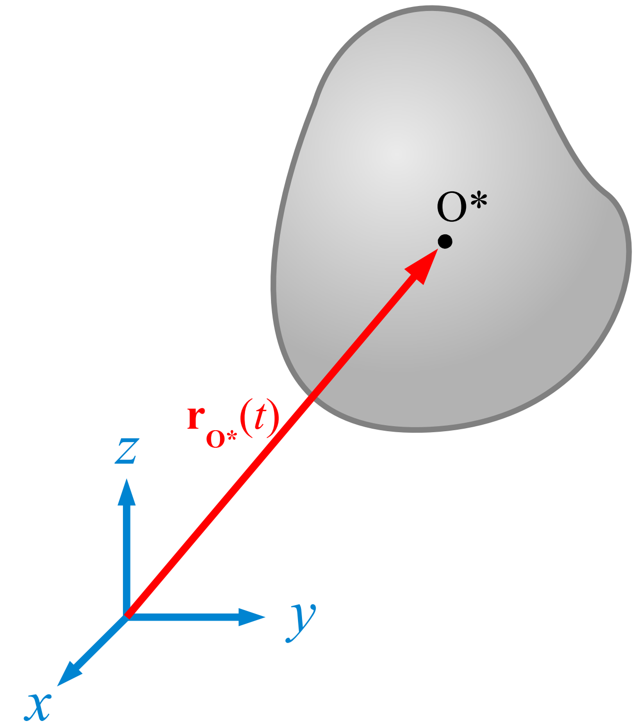
DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Równania ruchu dla bryły sztywnej:

ZASADA PĘDU – **II zasada dynamiki Newtona** dla **bryły sztywnej**.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M\,\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\right)=\mathbf{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} M\,\ddot{x}_{O^*}=F_x \\ M\,\ddot{y}_{O^*}=F_y \\ M\,\ddot{z}_{O^*}=F_z \end{cases}$$

- Swobodna bryła sztywna w przestrzeni ma 6 stopni swobody – 3 przemieszczenia i 3 kąty obrotu.
- Otrzymujemy **3 równania na 3 funkcje** opisujące **ruch postępowy środka ciężkości**.



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

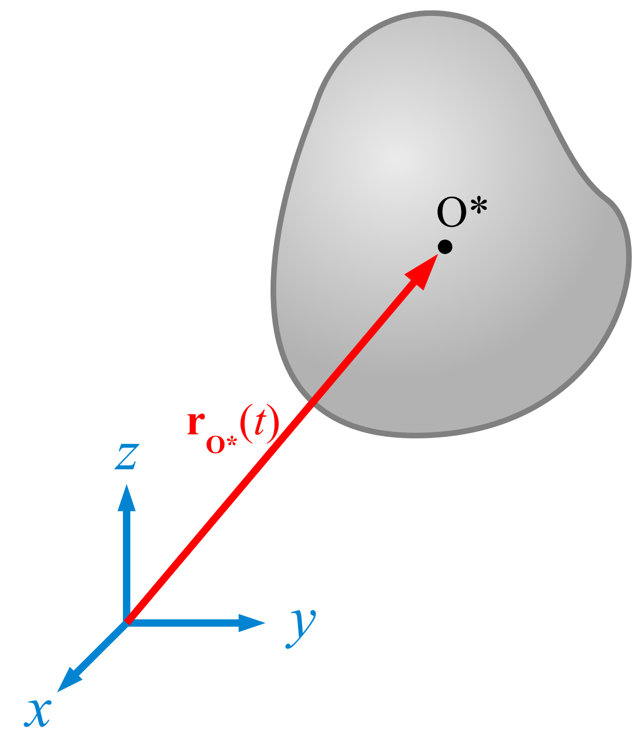
DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

- Bryła sztywna ma 6 stopni swobody. Oprócz 3 równań na położenie środka ciężkości **potrzebujemy również 3 równania na kąty Eulera lub składowe wektora prędkości kątowej**, które opisywałyby **obrót bryły sztywnej**.

- Wiemy, że **czynnikiem wymuszającym obrót jest moment siły**, zaś dla układu mas punktowych moment układu sił działających na te masy wiąże się poprzez zależność różniczkową II zasady dynamiki Newtona z momentem pędu tego układu.

- Podejrzewamy, że przez analogię do równań rządzących ruchem obrotowym układu punktów, równania ruchu obrotowego dla bryły sztywnej mogą mieć ogólną postać:

$$\dot{\mathbf{L}}_B = \mathbf{M}_B$$



- gdzie $\mathbf{M}_B$ jest momentem układu sił działających na bryłę, względem wybranego bieguna B. Nasuwają się dwa pytania:
  - *Czy równanie powyższe jest poprawne?*
  - *Jak powinien być zdefiniowany moment pędu bryły sztywnej?*

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

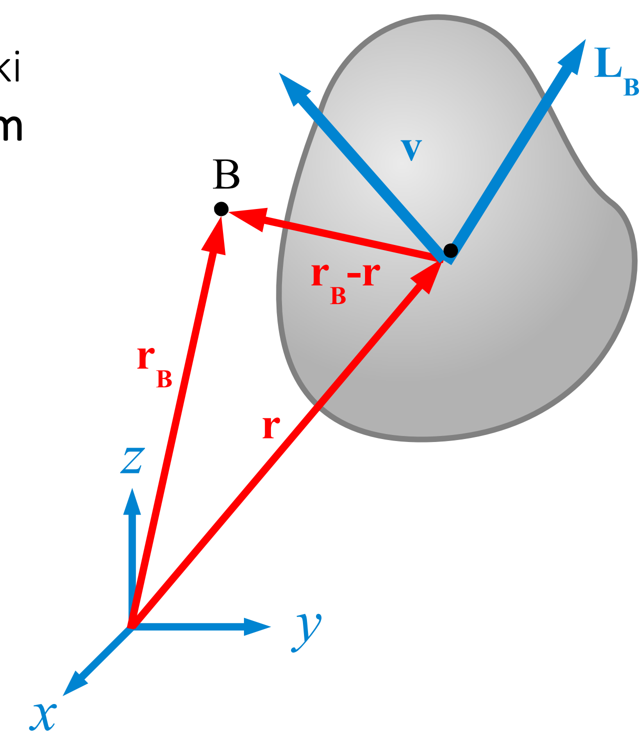
DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Moment pędu względem bieguna B dla układu nieskończenie wielu punktów materialnych o nieskończenie małej masie możemy wyznaczyć następująco:

$$\mathbf{L}_B = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V\to 0}} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{m_i}{\Delta V}}_{\rho} \dot{\mathbf{r}}_i \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_i)\,\Delta V$$

O ile tylko granica taka istnieje, to jest ona zgodna z definicją całki oznaczonej w sensie Riemanna. **Moment pędu bryły sztywnej względem bieguna B** definiujemy następująco:

$$\mathbf{L}_B = \iiint_V \rho\,\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r})\,\mathrm{d}V$$



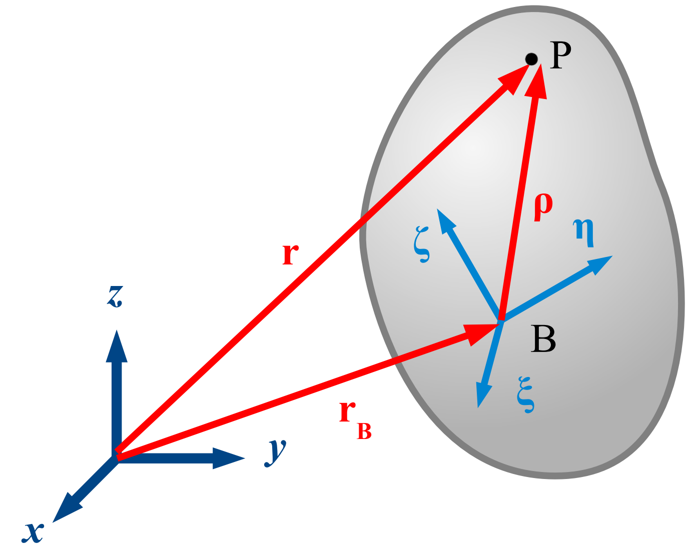
© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

- Wszystkie powyższe definicje i rozważania nie uwzględniały faktu, że **rozkład prędkości punktów bryły sztywnej nie jest dowolny** – musi gwarantować niezmienność odległości między dowolnie wybraną dwójką punktów tej bryły.

- Prostym sposobem na uwzględnienie tego ograniczenia jest **wykorzystanie formalizmu opisu ruchu względnego do opisu ruchu punktów bryły sztywnej:**

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathrm{r}^x] = [\mathrm{r}_B{}^x] + [\mathrm{A}_x^\xi]^\mathrm{T} \cdot [\rho^\xi] \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_w \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_w + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_w \end{cases}$$

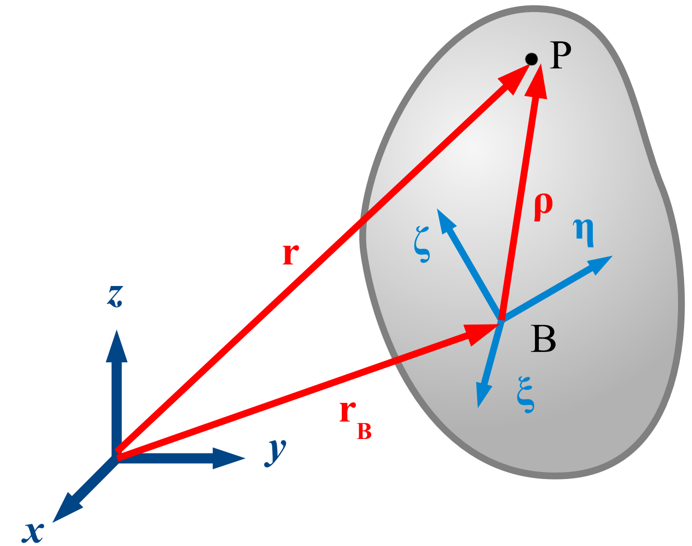


© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

- We wzorach na prędkość i przyspieszenie uwzględnić musimy fakt każdy z punktów bryły sztywnej nie porusza się względem pozostałych w układzie odniesienia związanym z tą bryłą – to znaczy, że **pochodne względne położenia względnego są zerowe**: $\dot{\boldsymbol{\rho}}_w = \mathbf{0}\ ,\ \ \ddot{\boldsymbol{\rho}}_w = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\rho} \qquad \Leftrightarrow \qquad [\mathrm{r}^x] = [\mathrm{r}_B{}^x] + [\mathrm{A}_x^\xi]^\mathrm{T} \cdot [\rho^\xi] \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \end{cases}$$



- Powyższe związki umożliwią nam sformułowanie równań ruchu obrotowego bryły sztywnej.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Pochodna momentu pędu względem **bieguna B** jest równa:

$$\dot{\mathbf{L}}_B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\dot{\mathbf{r}}\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r})\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}_B\,\mathrm{d}V - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}\,\mathrm{d}V =$$

$$= \left[\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r}_B\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \rho\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}_B\,\mathrm{d}V\right] - \left[\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \rho\underbrace{\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{0}}\,\mathrm{d}V\right] =$$

$$= \iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{\mathbf{r}})\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r})\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \rho\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}_B\,\mathrm{d}V$$

Ostatnia całka będzie równa 0, jeśli **biegun B jest nieruchomy**, tj. $\dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{0}$. Wtedy:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_B = \iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{\mathbf{r}})\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r})\,\mathrm{d}V}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Związek ten jest prawdziwy nie tylko dla biegunów nieruchomych, ale również dla bieguna związanego ze **środkiem ciężkości bryły**. Aby to udowodnić posłużmy się formalizmem ruchu względnego, przyjmując za punkt odniesienia środek ciężkości bryły. W takim przypadku:

$$\dot{\mathbf{L}}_{O^*} = \iiint_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\rho\dot{\mathbf{r}})\times(\mathbf{r}_{O^*}-\mathbf{r})\,\mathrm{d}\,V + \iiint_V \rho\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\,\mathrm{d}\,V \qquad \text{gdzie} \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{O^*} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

wtedy ostatnia całka w powyższym wyrażeniu jest równa

$$\iiint_V \rho(\dot{\mathbf{r}}_{O^*} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\times\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\,\mathrm{d}\,V = \iiint_V \rho\underbrace{\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\times\dot{\mathbf{r}}_{O^*}}_{\mathbf{0}}\,\mathrm{d}\,V + \iiint_V \rho\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\times\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\,\mathrm{d}\,V = \iiint_V \rho\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\times\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\,\mathrm{d}\,V =$$

$$= \begin{bmatrix} \iiint_V \rho\left[(y_{O^*}\omega_y + z_{O^*}\omega_z)x - x_{O^*}(y\,\omega_y + z\,\omega_z)\right]\mathrm{d}\,V \\ \iiint_V \rho\left[(z_{O^*}\omega_z + x_{O^*}\omega_x)y - y_{O^*}(z\,\omega_z + x\,\omega_x)\right]\mathrm{d}\,V \\ \iiint_V \rho\left[(x_{O^*}\omega_x + y_{O^*}\omega_y)z - z_{O^*}(x\,\omega_x + y\,\omega_y)\right]\mathrm{d}\,V \end{bmatrix}$$

UWAGA NA OZNACZENIA:
ρ - gęstość masy (skalar)
$\boldsymbol{\rho}$ - położenie względne (wektor)

Zmiennymi całkowania są x, y, z. **Położenie środka ciężkości i prędkość kątowa w ustalonej chwili są takie same (stałe) w każdym punkcie bryły**. Ich składowe można wyłączyć przed znak całki.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

$$\iiint\limits_V \rho\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\times\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\,\mathrm{d}V = \begin{bmatrix} (y_{O^*}\omega_y + z_{O^*}\omega_z)\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,x\,\mathrm{d}V}_{S_{yz}} - x_{O^*}\omega_y\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,y\,\mathrm{d}V}_{S_{zx}} - x_{O^*}\omega_z\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,z\,\mathrm{d}V}_{S_{xy}} \\ (z_{O^*}\omega_z + x_{O^*}\omega_x)\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,y\,\mathrm{d}V}_{S_{zx}} - y_{O^*}\omega_z\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,z\,\mathrm{d}V}_{S_{xy}} - y_{O^*}\omega_x\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,x\,\mathrm{d}V}_{S_{yz}} \\ (x_{O^*}\omega_x + y_{O^*}\omega_y)\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,z\,\mathrm{d}V}_{S_{xy}} - z_{O^*}\omega_x\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,x\,\mathrm{d}V}_{S_{yz}} - z_{O^*}\omega_y\underbrace{\iiint\limits_V \rho\,y\,\mathrm{d}V}_{S_{zx}} \end{bmatrix}$$

Z definicji środka ciężkości mamy: $x_{O^*} = \dfrac{S_{yz}}{M}\,,\quad y_{O^*} = \dfrac{S_{zx}}{M}\,,\quad z_{O^*} = \dfrac{S_{xy}}{M}$

$$\iiint\limits_V \rho\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\times\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{M}\begin{bmatrix} (S_{zx}\omega_y + S_{xy}\omega_z)S_{yz} - \omega_y S_{zx}S_{yz} - \omega_z S_{xy}S_{yz} \\ (S_{xy}\omega_z + S_{yz}\omega_x)S_{zx} - \omega_z S_{xy}S_{zx} - \omega_x S_{yz}S_{zx} \\ (S_{yz}\omega_x + S_{zx}\omega_y)S_{xy} - \omega_x S_{yz}S_{xy} - \omega_y S_{zx}S_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Ostatecznie:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_{O^*} = \iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{\mathbf{r}})\times(\mathbf{r}_{O^*}-\mathbf{r})\,\mathrm{d}V}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Moment układu sił działających na bryłę sztywną jest równy: $\mathbf{M}_B = \iiint\limits_V \mathbf{f}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_B)\,\mathrm{d}V$

Z **II zasady dynamiki Newtona**: $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \iiint\limits_V \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\,\dot{\mathbf{r}}) - \mathbf{f}\right]\mathrm{d}V = \mathbf{0}$

Zależność ta **obowiązuje dla dowolnego obszaru** V, zatem: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\,\dot{\mathbf{r}}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\,\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{f}$

A zatem pochodna gęstości pędu jest równa gęstości sił **w każdym punkcie ciała**. Skoro skorzystaliśmy z II zasady dynamiki Newtona, zatem nasze **rozważania są poprawne** tylko w inercjalnym układzie odniesienia.

Zatem moment układu sił jest równy: $\mathbf{M}_B = \iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\,\dot{\mathbf{r}})\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r})\,\mathrm{d}V$

Pochodną momentu pędu obliczyliśmy jako równą: $\dot{\mathbf{L}}_B = \iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\,\dot{\mathbf{r}})\times(\mathbf{r}_B-\mathbf{r})\,\mathrm{d}V$

Zatem, **w inercjalnym układzie odniesienia,** dla B **nieruchomego lub** $B=O^*$:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_B = \mathbf{M}_B}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

ZASADA MOMENTU PĘDU – **II zasada dynamiki Newtona** dla ruchu obrotowego **bryły sztywnej.**

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_B}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}_B$$

UWAGI:

- moment układu sił działających na bryłę: $\mathbf{M}_B = \iiint\limits_V \mathbf{f} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_B)\,\mathrm{d}V$
- moment pędu bryły sztywnej: $\mathbf{L}_B = \iiint\limits_V \rho\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r})\,\mathrm{d}V$
- związek ten **ma powyższą postać tylko w** inercjalnych **układach odniesienia.** Ma jednak charakter absolutny, tj. **obowiązuje w dowolnym układzie odniesienia**, ale **w układach nieinercjalnych będzie miał on odmienną postać – różniczkowanie względem** czasu będzie musiało być obliczone jako **pochodna absolutna** (uwzględniająca niejednostajną zmienność wektorów bazy układu ruchomego).
- związek ten jest **prawdziwy tylko wtedy, gdy** biegun B jest nieruchomy, lub gdy biegunem tym jest środek ciężkości bryły sztywnej.
- to **układ 3 równań różniczkowych zwyczajnych**. Póki co **nie zależą one w sposób jawny od składowych wektora drogi kątowej lub prędkości kątowej** i tym samym trudno z nich wyznaczyć ruch obrotowy.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Przyjmijmy, że **ciało wykonuje ruch obrotowy wokół bieguna B** (niekoniecznie należy on do ciała). Biegun może się poruszać.

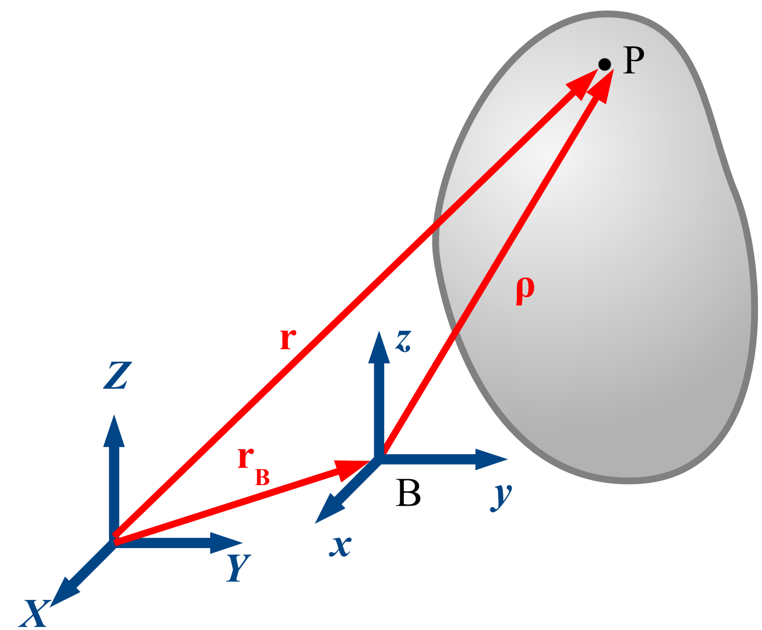
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

Przyjmijmy **układ współrzędnych o początku w biegunie B**:

$$\dot{\mathbf{r}}_B = [\dot{X}_B \,,\, \dot{Y}_B \,,\, \dot{Z}_B]$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_X , \omega_Y , \omega_Z] = [\omega_x , \omega_y , \omega_z]$$

$$\boldsymbol{\rho} = [x , y , z] = [X - X_B \,,\, Y - Y_B \,,\, Z - Z_B]$$



Moment pędu bryły sztywnej można zapisać następująco:

$$\mathbf{L}_B = \iiint\limits_V \rho \, \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}) \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho [\dot{\mathbf{r}} \times (-\boldsymbol{\rho})] \, \mathrm{d}V =$$

$$= \iiint\limits_V \rho [\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] \, \mathrm{d}V =$$

$$= \iiint\limits_V \rho [\boldsymbol{\rho} \times \dot{\mathbf{r}}_B] \, \mathrm{d}V + \iiint\limits_V \rho [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] \, \mathrm{d}V$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

$$\mathbf{L}_B = \iiint_V \rho[\boldsymbol{\rho}\times\dot{\mathbf{r}}_B]\,\mathrm{d}V + \iiint_V \rho[\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})]\,\mathrm{d}V$$

Jeśli **biegun B jest** nieruchomy, wtedy $\dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{L}_B = \iiint_V \rho[\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})]\,\mathrm{d}V$$

Jeśli **biegunem B jest** środek ciężkości **bryły sztywnej**, wtedy:

$$\iiint_V \rho[\boldsymbol{\rho}\times\dot{\mathbf{r}}_{O^*}]\,\mathrm{d}V = \begin{bmatrix} \iiint_V \rho\left[\dot{Z}_{O^*}(Y-Y_{O^*})-\dot{Y}_{O^*}(Z-Z_{O^*})\right] \\ \iiint_V \rho\left[\dot{X}_{O^*}(Z-Z_{O^*})-\dot{Z}_{O^*}(X-X_{O^*})\right] \\ \iiint_V \rho\left[\dot{Y}_{O^*}(X-X_{O^*})-\dot{X}_{O^*}(Y-Y_{O^*})\right] \end{bmatrix}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Prędkość i współrzędne środka ciężkości są takie same dla każdego punktu bryły. Można wyłączyć je przed całkę:

$$\iiint_V \rho[\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{v}_{O^*}]\,\mathrm{d}V = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{O^*}(\underbrace{\iiint_V \rho Y\,\mathrm{d}V}_{S_{ZX}} - Y_{O^*}\underbrace{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}_{M}) - \dot{Y}_{O^*}(\underbrace{\iiint_V \rho Z\,\mathrm{d}V}_{S_{XY}} - Z_{O^*}\underbrace{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}_{M}) \\ \dot{X}_{O^*}(\underbrace{\iiint_V \rho Z\,\mathrm{d}V}_{S_{XY}} - Z_{O^*}\underbrace{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}_{M}) - \dot{Z}_{O^*}(\underbrace{\iiint_V \rho X\,\mathrm{d}V}_{S_{YZ}} - X_{O^*}\underbrace{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}_{M}) \\ \dot{Y}_{O^*}(\underbrace{\iiint_V \rho X\,d\mathrm{V}}_{S_{YZ}} - X_{O^*}\underbrace{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}_{M}) - \dot{X}_{O^*}(\underbrace{\iiint_V \rho Y\,\mathrm{d}V}_{S_{ZX}} - Y_{O^*}\underbrace{\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}_{M}) \end{bmatrix}$$

Dla środka ciężkości mamy: $X_{O^*} = \dfrac{S_{YZ}}{M}\,,\quad Y_{O^*} = \dfrac{S_{ZX}}{M}\,,\quad Z_{O^*} = \dfrac{S_{XY}}{M}$

$$\iiint_V \rho[\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{v}_{O^*}]\,\mathrm{d}V = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{O^*}\left(S_{ZX} - \dfrac{S_{ZX}}{M}M\right) - \dot{Y}_{O^*}\left(S_{XY} - \dfrac{S_{XY}}{M}M\right) \\ \dot{X}_{O^*}\left(S_{XY} - \dfrac{S_{XY}}{M}M\right) - \dot{Z}_{O^*}\left(S_{YZ} - \dfrac{S_{YZ}}{M}M\right) \\ \dot{Y}_{O^*}\left(S_{YZ} - \dfrac{S_{YZ}}{M}M\right) - \dot{X}_{O^*}\left(S_{ZX} - \dfrac{S_{ZX}}{M}M\right) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

$$\mathbf{L}_B = \iiint_V \rho[\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})]\,\mathrm{d}V = \begin{bmatrix} \iiint_V \rho\left(\omega_x(y^2+z^2)-\omega_y\,xy-\omega_z\,zx\right)\mathrm{d}V \\ \iiint_V \rho\left(-\omega_x\,xy+\omega_y(z^2+x^2)-\omega_z\,yz\right)\mathrm{d}V \\ \iiint_V \rho\left(-\omega_x\,zx-\omega_y\,yz+\omega_z(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}V \end{bmatrix}$$

Prędkość kątowa jest taka sama dla każdego punktu bryły sztywnej. Można ją wyłączyć przed znak całki.

$$\begin{cases} L_{B,x} = \omega_x \underbrace{\iiint_V \rho(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V}_{I_x} - \omega_y \underbrace{\iiint_V \rho\,xy\,\mathrm{d}V}_{I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\iiint_V \rho\,zx\,\mathrm{d}V}_{I_{zx}} \\ L_{B,y} = -\omega_x \underbrace{\iiint_V \rho\,xy\,\mathrm{d}V}_{I_{xy}} + \omega_y \underbrace{\iiint_V \rho(z^2+x^2)\,\mathrm{d}V}_{I_y} - \omega_z \underbrace{\iiint_V \rho\,yz\,\mathrm{d}V}_{I_{yz}} \\ L_{B,z} = -\omega_x \underbrace{\iiint_V \rho\,zx\,\mathrm{d}V}_{I_{zx}} - \omega_y \underbrace{\iiint_V \rho\,yz\,\mathrm{d}V}_{I_{yz}} + \omega_x \underbrace{\iiint_V \rho(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V}_{I_z} \end{cases}$$

UWAGA: Całkowanie odbywa się względem zmiennych $x = X - X_B$, $y = y - Y_B$, $z = Z - Z_B$, a zatem względem osi równoległych do osi przyjętego i nieruchomego układu współrzędnych, ale przesuniętych do punktu odniesienia B.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Momenty bezwładności bryły sztywnej:

$$I_x = \iiint_V \rho \left(y^2 + z^2 \right) \mathrm{d}V$$ - moment bezwładności względem osi x

$$I_y = \iiint_V \rho \left(z^2 + x^2 \right) \mathrm{d}V$$ - moment bezwładności względem osi y

$$I_z = \iiint_V \rho \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}V$$ - moment bezwładności względem osi z

Funkcja podcałkowa jest zawsze dodatnia, więc momenty bezwładności zawsze dodatnie.

Momenty dewiacji (momenty zboczenia, odśrodkowe momenty bezwładności) bryły sztywnej:

$$I_{xy} = \iiint_V \rho \, xy \, \mathrm{d}V$$ - moment dewiacji względem osi x i y

$$I_{yz} = \iiint_V \rho \, yz \, \mathrm{d}V$$ - moment dewiacji względem osi y i z

$$I_{zx} = \iiint_V \rho \, zx \, \mathrm{d}V$$ - moment dewiacji względem osi z i x

Momenty dewiacji mogą być zarówno dodatnie, jak i ujemne lub równe 0.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

$$\begin{cases} L_{B,x} = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{zx} \omega_z \\ L_{B,y} = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ L_{B,z} = -I_{zx} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_x \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} L_{B,x} \\ L_{B,y} \\ L_{B,z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_B} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}}$$

wektor momentu pędu

tensor momentu bezwładności

wektor prędkości kątowej

$$\boxed{\mathbf{L}_B = \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}}$$

UWAGI:

- Związek jest słuszny, gdy **biegun B jest nieruchomy** lub gdy **biegun jest środkiem ciężkości bryły.**
- Każdą ze **składowych wektora momentu pędu** wyznaczamy jako **kombinację liniową**(sumę pierwszych potęg przemnożonych przez stałe współczynniki) **składowych wektora prędkości kątowej**.
- **Współczynnikami tej kombinacji** liniowej są **momenty bezwładności i momenty dewiacji**.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

$$\boxed{\mathbf{L}_B = \mathbf{I}_B\boldsymbol{\omega}}$$

wektor momentu pędu

tensor momentu bezwładności

wektor prędkości kątowej

UWAGI:

- **Powyższy związek odwzorowuje wektor** $\boldsymbol{\omega}$ **w wektor** $\mathbf{L}_B$. Jeśli zależność taka obowiązuje w dowolnym układzie współrzędnych, to ma ona charakter absolutny i jest pewnym **odwzorowaniem liniowym**.

- Wymaga to, aby momenty bezwładności przekształcały się przy zmianie układu współrzędnych w ściśle określony sposób, tak aby związek ten nadal był prawdziwy dla wektorów, których postać w nowym układzie współrzędnych zmieniła się zgodnie z regułą transformacji wektorów.

- Jeśli tak rzeczywiście jest, to macierz momentów bezwładności jest macierzą odwzorowania liniowego, która jest reprezentacją **tensora drugiego rzędu** – **tensora momentu bezwładności**. Jest to tensor **symetryczny**: $I_{ij} = I_{ji}$.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

ZASADA MOMENTU PĘDU – **II zasada dynamiki Newtona** dla ruchu obrotowego **bryły sztywnej.**

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_B}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}_B$$

UWAGI:

- Równanie ruchu ma powyższą postać **tylko w inercjalnych układach odniesienia,** a ponadto tylko wtedy, gdy **biegun B jest nieruchomy** lub gdy jest **środkiem ciężkości** bryły sztywnej.
- Jeśli **biegun B jest nieruchomy** lub jest on **środkiem ciężkości bryły**, wtedy moment pędu możemy wyrazić za pomocą tensora momentu bezwładności i wektora prędkości kątowej:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_B}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}_B \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{I}_B\boldsymbol{\omega}\right) = \mathbf{M}_B$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

ZASADA MOMENTU PĘDU – **II zasada dynamiki Newtona** dla ruchu obrotowego **bryły sztywnej**.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_B}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}_B \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{I}_B\boldsymbol{\omega}\right) = \mathbf{M}_B$$

UWAGI:

- W nieruchomym **układzie współrzędnych zarówno tensor momentu bezwładności jak i wektor prędkości kątowej mogą się zmieniać w czasie**. Mimo, że bryła nie zmienia kształtu, to zmienia jednak swoją orientację i położenie względem osi układu nieruchomego i dlatego zmieniają się momenty bezwładności.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{L}_B\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{I}_B\boldsymbol{\omega}\right) = \dot{\mathbf{I}}_B\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_B\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}_B$$

- W ruchomym **układzie współrzędnych**, którego **orientacja jest w sposób sztywny połączona z geometrią bryły, momenty bezwładności są stałe**, jednak pochodna względem czasu musi być obliczona jako **pochodna bezwzględna**, będąca **sumą pochodnej względnej i pochodnej unoszenia**.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{L}_B\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{L}_B\right)_w + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}_B = \mathbf{I}_B\dot{\boldsymbol{\omega}}_w + \boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{I}_B\boldsymbol{\omega}\right) = \mathbf{M}_B$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

W **ruchomym** układzie współrzędnych:

$$\begin{cases} \left[I_{\xi}(\dot{\omega}_{\xi})_w + I_{\xi\eta}(\dot{\omega}_{\eta})_w + I_{\xi\zeta}(\dot{\omega}_{\zeta})_w\right] + \left[\omega_{\eta}\left(I_{\zeta\xi}\omega_{\xi}+I_{\eta\zeta}\omega_{\eta}+I_{\zeta}\omega_{\zeta}\right)-\omega_{\zeta}\left(I_{\xi\eta}\omega_{\xi}+I_{\eta}\omega_{\eta}+I_{\eta\zeta}\omega_{\zeta}\right)\right] = M_{B,\xi} \\ \left[I_{\xi\eta}(\dot{\omega}_{\xi})_w + I_{\eta}(\dot{\omega}_{\eta})_w + I_{\eta\zeta}(\dot{\omega}_{\zeta})_w\right] + \left[\omega_{\zeta}\left(I_{\xi}\omega_{\xi}+I_{\xi\eta}\omega_{\eta}+I_{\zeta\xi}\omega_{\zeta}\right)-\omega_{\xi}\left(I_{\zeta\xi}\omega_{\xi}+I_{\eta\zeta}\omega_{\eta}+I_{\zeta}\omega_{\zeta}\right)\right] = M_{B,\eta} \\ \left[I_{\zeta\xi}(\dot{\omega}_{\xi})_w + I_{\eta\zeta}(\dot{\omega}_{\eta})_w + I_{\zeta}(\dot{\omega}_{\zeta})_w\right] + \left[\omega_{\xi}\left(I_{\xi\eta}\omega_{\xi}+I_{\eta}\omega_{\eta}+I_{\eta\zeta}\omega_{\zeta}\right)-\omega_{\eta}\left(I_{\xi}\omega_{\xi}+I_{\xi\eta}\omega_{\eta}+I_{\zeta\xi}\omega_{\zeta}\right)\right] = M_{B,\zeta} \end{cases}$$

UWAGI:

- **Układ współrzędnych związany z poruszającym się ciałem nie jest w ogólności inercjalny**, zatem nie obowiązuje w nim II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego w taj postaci, w jakiej została przez nas wyprowadzona, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_B}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}_B$$

- Niemniej, gdy została ona już wyprowadzona w układzie inercjalnym, **otrzymane równanie ruchu ma charakter absolutny** i może być transformowane do dowolnego układu odniesienia, niekoniecznie inercjalnego. **W takim nieinercjalnym układzie postać równania ruchu jest już inna** niż w dowolnym układzie inercjalnym, mianowicie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{L}_B\right)_w + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}_B = \mathbf{M}_B$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Równania te często zapisuje się stosując oznaczenia $\xi = x\,,\ \ \eta = y\,,\ \ \zeta = z$
oraz zastępując symbol pochodnej względnej zwykłym symbolem pochodnej względem czasu.

$$\begin{cases}
\left[I_x\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z\right] + \left[\omega_y\left(I_{zx}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z\right) - \omega_z\left(I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z\right)\right] = M_{B,x} \\
\left[I_{xy}\dot{\omega}_x + I_y\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z\right] + \left[\omega_z\left(I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{zx}\omega_z\right) - \omega_x\left(I_{zx}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z\right)\right] = M_{B,y} \\
\left[I_{zx}\dot{\omega}_x + I_{yz}\dot{\omega}_y + I_z\dot{\omega}_z\right] + \left[\omega_x\left(I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z\right) - \omega_y\left(I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{zx}\omega_z\right)\right] = M_{B,z}
\end{cases}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

- Wiemy, że momenty bezwładności zmieniają swoje wartości w zależności od przyjętego układu współrzędnych. Okazuje się, że **istnieje taki układ współrzędnych, w którym wszystkie momenty dewiacji są zerowe**.

- Układ taki nazywamy układem **głównych osi bezwładności** – jest on związany z geometrią bryły. W szczególności, jeśli obliczamy momenty bezwładności względem środka ciężkości, a bryła posiada osie symetrii, to osie te są głównymi (centralnymi) osiami bezwładności.

- W układzie współrzędnych, których osie pokrywają się głównymi osiami bezwładności równania ruchu obrotowego przyjmują prostą postać:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) = M_{B,x} \\ I_y \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) = M_{B,y} \\ I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = M_{B,z} \end{cases}$$

Powyższy układ równań nazywamy **równaniami Eulera dla ruchu obrotowego bryły sztywnej**.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

ZASADA PĘDU – **II zasada dynamiki Newtona** dla **ruchu postępowego** **bryły sztywnej.**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M\,\dot{\mathbf{r}}_{O^*}\right)=\mathbf{F}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}M\,\ddot{x}_{O^*}=F_x\\ M\,\ddot{y}_{O^*}=F_y\\ M\,\ddot{z}_{O^*}=F_z\end{cases}$$

ZASADA MOMENTU PĘDU – **II zasada dynamiki Newtona** dla **ruchu obrotowego** **bryły sztywnej.**

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_B}{\mathrm{d}t}=\mathbf{M}_B\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{I}_B\boldsymbol{\omega}\right)=\mathbf{M}_B$$

- Układ **6 równań różniczkowych zwyczajnych** na
  - **3 składowe** położenia środka ciężkości bryły sztywnej
  - **3 składowe** wektora prędkości kątowej ruchu obrotowego wokół nieruchomego bieguna B lub środka ciężkości.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0