

MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL

tel. 12 628 20 30

e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

GEOMETRIA MAS

PO CO NAM GEOMETRIA MAS W BUDOWNICTWIE?

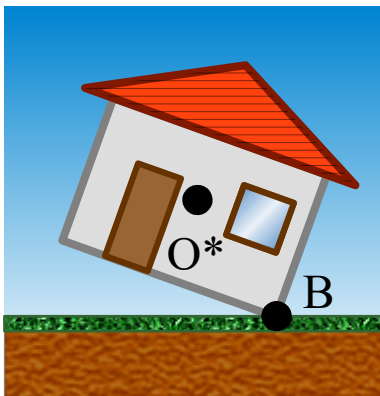
Momenty statyczne pozwalają wyznaczyć położenie środka ciężkości bryły sztywnej.

Momenty bezwładności i **momenty dewiacji** pozwalają określić bezwładność bryły w ruchu obrotowym.

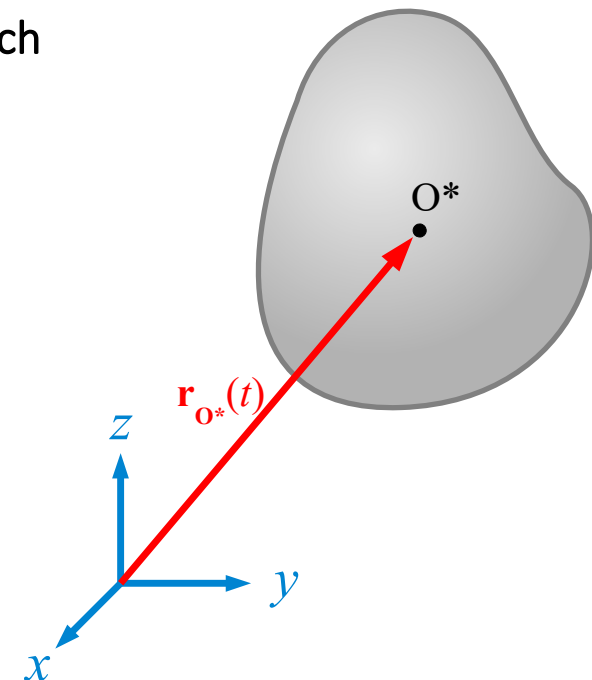
Są wielkościami wynikającymi z:

- **kształtu** bryły sztywnej,
- **położenia** i **orientacji** bryły sztywnej w przyjętym układzie współrzędnych

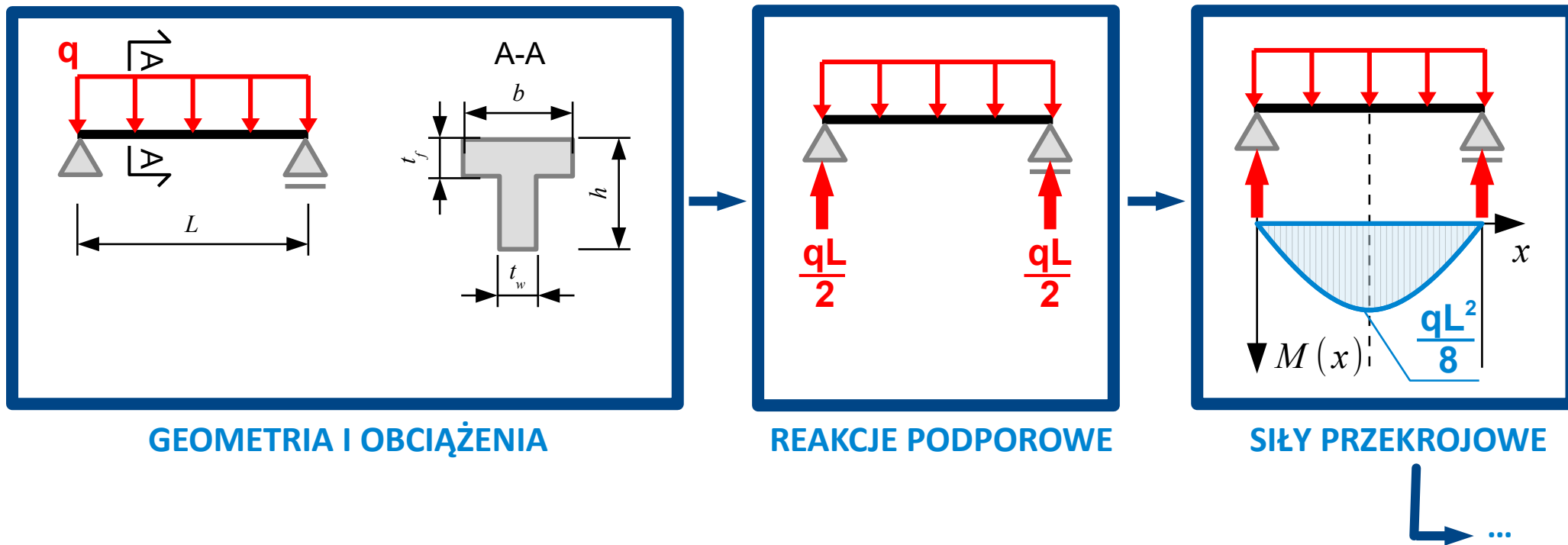
Pozwalają na sformułowanie równań ruchu bryły sztywnej.



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{L}}_B = \mathbf{M}_B \end{cases}$$



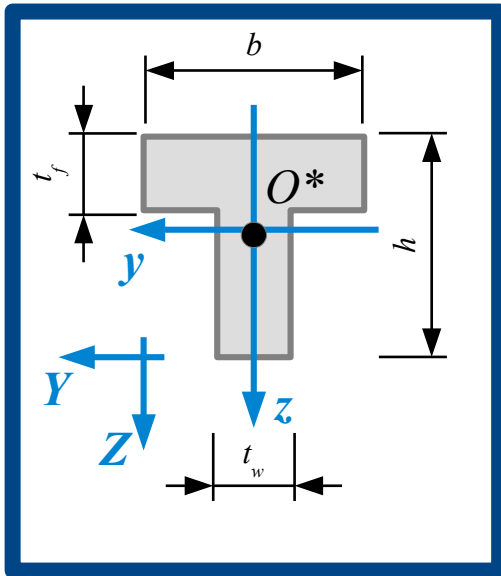
PO CO NAM GEOMETRIA MAS W BUDOWNICTWIE?



PROJEKTOWANIE – należy dobrać wymiary przekroju poprzecznego pręta tak, aby spełniony był:

- Warunek **stanu granicznego nośności (SGN)** – maksymalne naprężenia nie mogą przekroczyć naprężeń dopuszczalnych (wytrzymałości materiału)
- Warunek **stanu granicznego użytkowalności (SGU)** – maksymalne ugięcie nie może przekroczyć maksymalnego ugięcia dopuszczalnego.

NAPRĘŻENIA NORMALNE



Równanie belki zginanej Bernoulliego – Eulera.
Równanie różniczkowe na ugięcie belki.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI_y}$$

Naprężenie normalne w belce zginanej

$$\sigma = \frac{M_y(x)}{I_y} z$$

Maksymalne ugięcie belki swobodnie podpartej
Pod jednorodnym obciążeniem ciągłym.

$$w_{max} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_y}$$

Wzór na naprężenia normalne obowiązuje **tylko w układzie głównych centralnych osi bezwładności** przekroju poprzecznego (**osie własne** tensora momentu bezwładności, **zawierające środek ciężkości**).

- **położenie środka ciężkości:** $O^* = (Y_{O^*}, Z_{O^*}) = \left(\frac{S_Z}{A}, \frac{S_Y}{A} \right)$
- **pole powierzchni:** $A = \iint_A dA$
- **geometryczne momenty statyczne:** $S_Z = \iint_A Y dA$ $S_Y = \iint_A Z dA$
- **geometryczne momenty bezwładności:** $I_y = \iint_A z^2 dA$ $I_z = \iint_A y^2 dA$

MOMENTY STATYCZNE I ŚRODEK CIĘŻKOŚCI

Momenty statyczne bryły sztywnej wyznaczają położenie jej **środku ciężkości**:

$$\mathbf{r}_{O^*} = [x_{O^*}, y_{O^*}, z_{O^*}] = \left[\frac{S_{yz}}{M}, \frac{S_{zx}}{M}, \frac{S_{xy}}{M} \right]$$

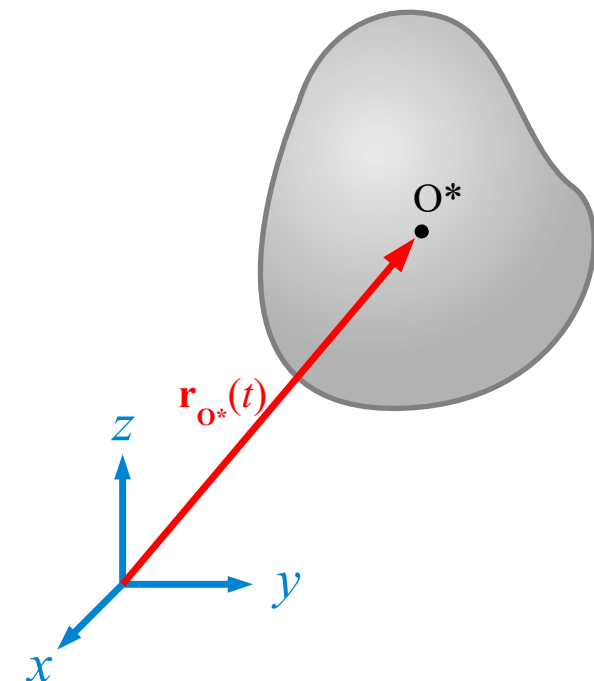
$$M = \iiint_V \rho dV \quad - \text{masa całkowita bryły sztywnej}$$

$$S_{yz} = \iiint_V \rho x dV \quad - \text{moment statyczny bryły względem płaszczyzny (y,z)}$$

$$S_{zx} = \iiint_V \rho y dV \quad - \text{moment statyczny bryły względem płaszczyzny (z,x)}$$

$$S_{xy} = \iiint_V \rho z dV \quad - \text{moment statyczny bryły względem płaszczyzny (x,y)}$$

moment statyczny = masa × odległość



MOMENTY STATYCZNE I ŚRODEK CIĘŻKOŚCI

$$\mathbf{r}_{O^*} = [x_{O^*}, y_{O^*}, z_{O^*}] = \left[\frac{S_{yz}}{M}, \frac{S_{zx}}{M}, \frac{S_{xy}}{M} \right]$$

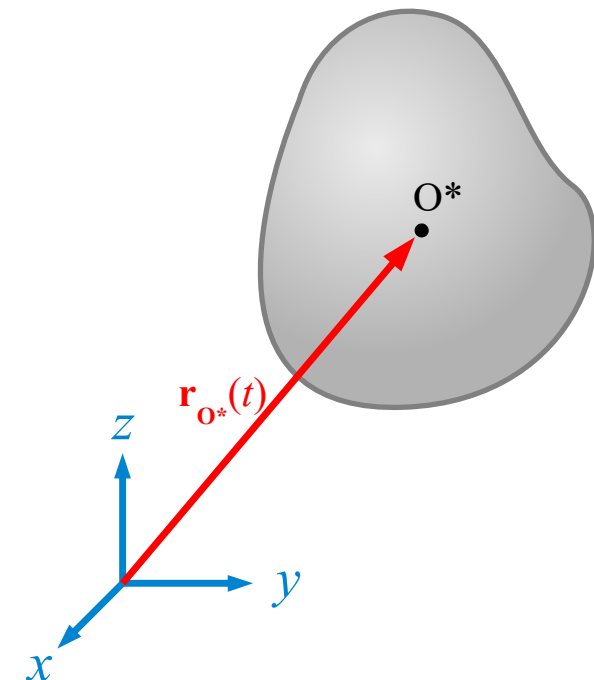
UWAGI:

- Położenie środka ciężkości jest własności bryły, więc nie zależy od wyboru układu współrzędnych, choć – oczywiście – składowe wektora położenia są różne w różnych układach współrzędnych.
- Jeśli znamy położenie środka ciężkości oraz całkowitą masę bryły, możemy wyznaczyć jej **momenty statyczne**:

$$S_{yz} = x_{O^*} M, \quad S_{zx} = y_{O^*} M, \quad S_{xy} = z_{O^*} M$$

- Jeśli któraś z płaszczyzn wyznaczonych przez osie układu współrzędnych zawiera środek ciężkości, to odpowiedni moment statyczny jest zerowy:

$$\begin{aligned} x_{O^*} = 0 &\Rightarrow S_{yz} = 0 \\ y_{O^*} = 0 &\Rightarrow S_{zx} = 0 \\ z_{O^*} = 0 &\Rightarrow S_{xy} = 0 \end{aligned}$$



MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

Momenty bezwładności bryły sztywnej pozwalają **wyznaczyć jej moment pędu** przy znanej prędkości kątowej:

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} L_{B,x} \\ L_{B,y} \\ L_{B,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$I_x = \iiint_V \rho (y^2 + z^2) dV \quad - \text{moment bezwładności bryły względem osi } x$$

$$I_y = \iiint_V \rho (z^2 + x^2) dV \quad - \text{moment bezwładności bryły względem osi } y$$

$$I_z = \iiint_V \rho (x^2 + y^2) dV \quad - \text{moment bezwładności bryły względem osi } z$$

$$I_{yz} = \iiint_V \rho yz dV \quad - \text{moment dewiacji bryły względem osi } y \text{ i } z$$

$$I_{zx} = \iiint_V \rho zx dV \quad - \text{moment dewiacji bryły względem osi } z \text{ i } x$$

$$I_{xy} = \iiint_V \rho xy dV \quad - \text{moment dewiacji bryły względem osi } x \text{ i } y$$

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} L_{B,x} \\ L_{B,y} \\ L_{B,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

UWAGI:

- Wartości momentów bezwładności **zależą nie tylko od geometrii bryły, ale również od wyboru bieguna i orientacji osi**, względem których są obliczane. Zależą zatem od wybranego układu współrzędnych.
- Biegun B znajduje się w **początku** przyjętego układu współrzędnych.
- $I_x = \iiint_V \rho (y^2 + z^2) dV$ Momenty bezwładności dla brył o niezerowych wymiarach **są zawsze dodatnie**, niezależnie od wybranego bieguna i przyjętego układu współrzędnych
- $I_{yz} = \iiint_V \rho yz dV$ Momenty dewiacji mogą być **dodatnie, ujemne lub równe zero**.

MOMENT BEZWŁADNOŚCI - definicja

$$\text{moment bezwładności} = \text{masa} \times (\text{odległość})^2$$

Moment bezwładności jest miarą bezwładności w ruchu obrotowym.

$$I \dot{\omega} = M \quad \text{dla} \quad I = \text{const.}$$

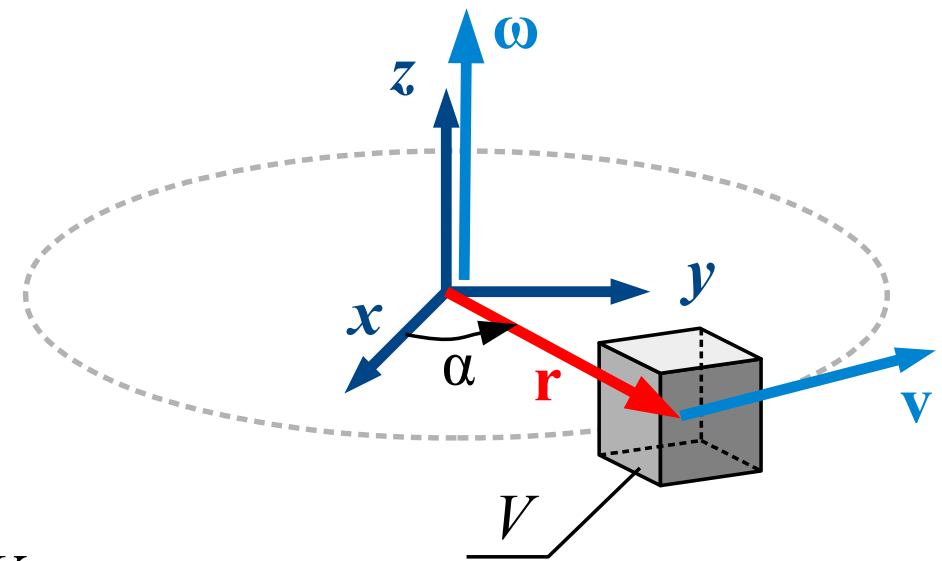
M – moment siły

L – moment pędu

ω – prędkość kątowa

I – moment bezwładności

$$I_z = \iiint_V \rho r^2 dV = \iiint_V \rho (x^2 + y^2) dV$$



MOMENTY DEWIACJI - definicja

Moment pędu względem osi obróconych o 45° względem osi symetrii bryły:

$$\begin{bmatrix} L_{B,x} \\ L_{B,y} \\ L_{B,z} \end{bmatrix} = \frac{m}{24} \begin{bmatrix} (L^2 + B^2 + 2H^2) & (L^2 - B^2) & 0 \\ (L^2 - B^2) & (L^2 + B^2 + 2H^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(L^2 + B^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

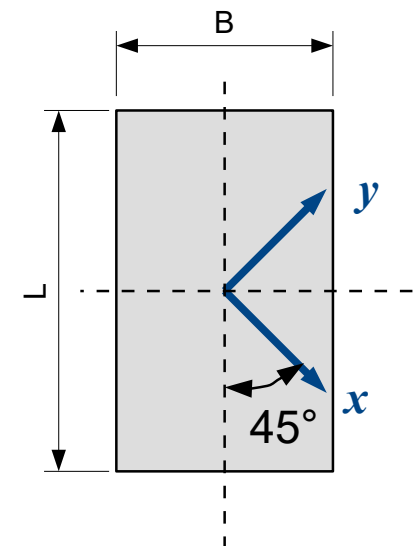
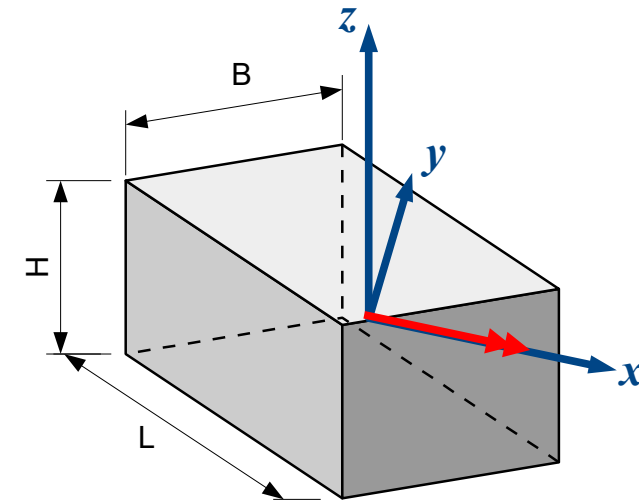
Równanie ruchu:

$$\dot{\mathbf{L}}_{O^*} = \mathbf{M}_{O^*}$$

W chwili $t = 0$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y] = M_x \\ \frac{d}{dt} [-I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y] = 0 \\ \frac{d}{dt} [I_z \omega_z] = 0 \end{cases}$$

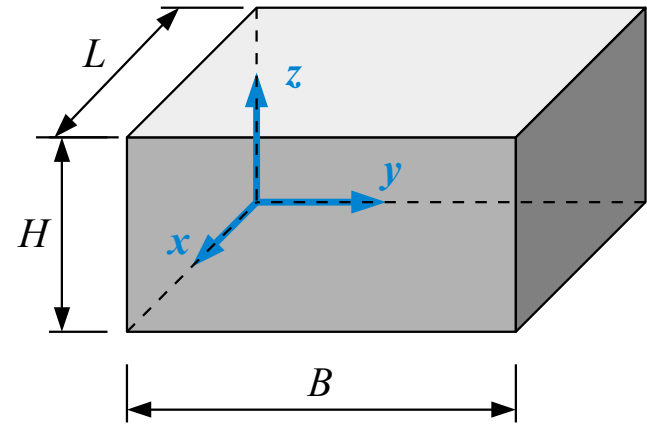
Z pierwszego równania otrzymamy niezerowe ω_x . Dla niezerowego momentu dewiacji I_{xy} obrót wokół osi x pociąga za sobą obrót wokół osi y , nawet jeśli na kierunku osi y nie ma momentu siły wymuszającego obrót.



GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1 – Prostopadłościan o stałej gęstości

$$V = \begin{cases} x: 0 \leq x \leq L \\ y: 0 \leq y \leq B \\ z: 0 \leq z \leq H \end{cases}$$



Masa całkowita:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \rho \, dV = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left[\int_{z=0}^H dz \right] dy \right] dx = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B [z]_{z=0}^H dy \right] dx = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B H \, dy \right] dx = \\ &= \rho \int_{x=0}^L [H y]_{y=0}^B dx = \rho \int_{x=0}^L BH \, dx = \rho [BH x]_{x=0}^L = \rho BHL = \rho V \end{aligned}$$

GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1 – Prostopadłościan o stałej gęstości

Momenty statyczne:

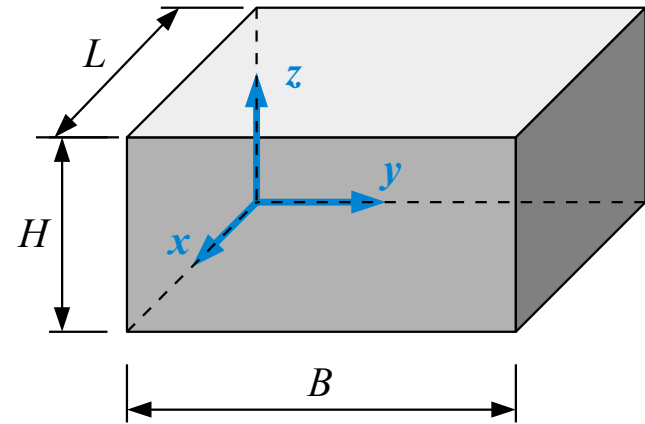
$$\begin{aligned}
 S_{yz} &= \iiint_V \rho x \, dV = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left[\int_{z=0}^H x \, dz \right] dy \right] dx = \\
 &= \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B [x z]_{z=0}^H dy \right] dx = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B H x \, dy \right] dx = \\
 &= \rho \int_{x=0}^L [H x y]_{y=0}^B dx = \rho \int_{x=0}^L BH x \, dx = \rho \left[BH \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^L = \rho \frac{L^2 BH}{2}
 \end{aligned}$$

$$S_{zx} = \rho \frac{LB^2 H}{2}$$

$$S_{xy} = \rho \frac{LBH^2}{2}$$

Położenie środka ciężkości:

$$\mathbf{r}_{o^*} = \left[\frac{S_{yz}}{M}, \frac{S_{zx}}{M}, \frac{S_{xy}}{M} \right] = \left[\frac{L}{2}, \frac{B}{2}, \frac{H}{2} \right]$$



GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1 – Prostopadłościan o stałej gęstości

Momenty bezwładności:

$$I_x = \iiint_V \rho(y^2 + z^2) dV = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left[\int_{z=0}^H (y^2 + z^2) dz \right] dy \right] dx =$$

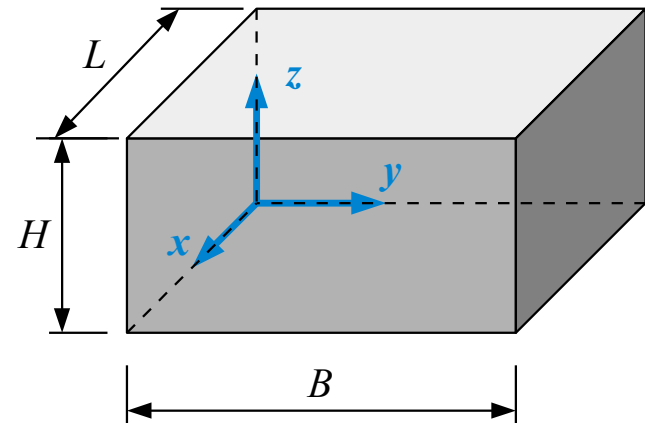
$$= \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left[y^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^H dy \right] dx = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left(y^2 H + \frac{H^3}{3} \right) dy \right] dx =$$

$$= \rho \int_{x=0}^L \left[H \frac{y^3}{3} + \frac{H^3}{3} y \right]_{y=0}^B dx = \rho \int_{x=0}^L \left(H \frac{B^3}{3} + \frac{H^3}{3} B \right) dx = \rho \left[\frac{BH}{3} (B^2 + H^2) x \right]_{x=0}^L =$$

$$= \rho \frac{LBH}{3} (B^2 + H^2) = \frac{1}{3} M (B^2 + H^2)$$

$$I_y = \frac{1}{3} M (H^2 + L^2)$$

$$I_z = \frac{1}{3} M (L^2 + B^2)$$



GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

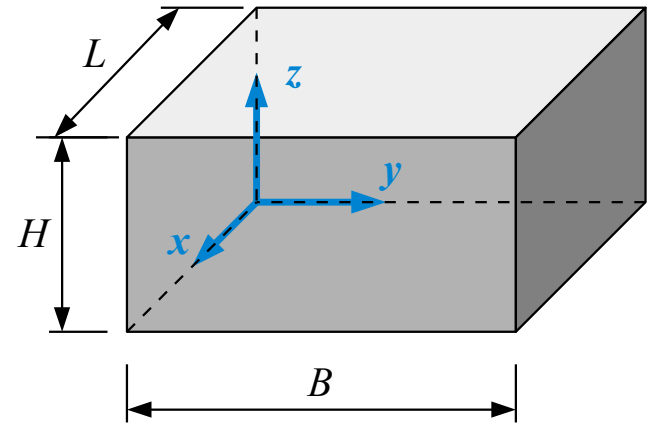
PRZYKŁAD 1 – Prostopadłościan o stałej gęstości

Momenty dewiacji:

$$\begin{aligned}
 I_{yz} &= \iiint_V \rho (yz) dV = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left[\int_{z=0}^H (yz) dz \right] dy \right] dx = \\
 &= \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left[y \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^H dy \right] dx = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left(y \frac{H^2}{2} \right) dy \right] dx = \\
 &= \rho \int_{x=0}^L \left[\frac{y^2}{2} \frac{H^2}{2} \right]_{y=0}^B dx = \rho \int_{x=0}^L \left(\frac{B^2}{2} \frac{H^2}{2} \right) dx = \rho \left[\frac{B^2 H^2}{4} x \right]_{x=0}^L = \\
 &= \rho \frac{LBH}{4} BH = \frac{1}{4} M BH
 \end{aligned}$$

$$I_{zx} = \frac{1}{4} M HL$$

$$I_{xy} = \frac{1}{4} M LB$$

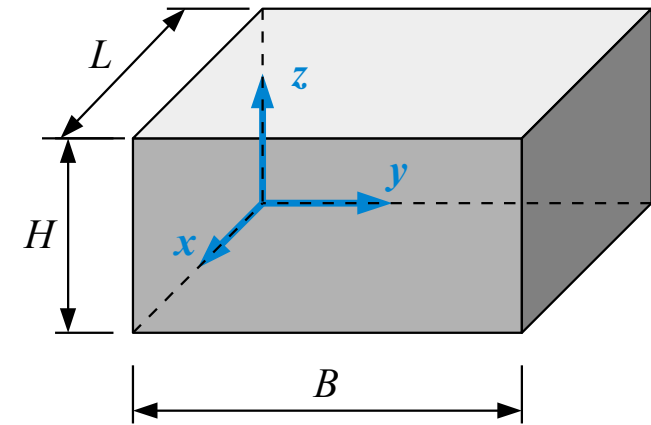


GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1 – Prostopadłościan o stałej gęstości

Tensor momentu bezwładności:

$$\mathbf{I} = M \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(B^2 + H^2) & -\frac{LB}{4} & -\frac{HL}{4} \\ -\frac{LB}{4} & \frac{1}{3}(H^2 + L^2) & -\frac{BH}{4} \\ -\frac{HL}{4} & -\frac{BH}{4} & \frac{1}{3}(L^2 + B^2) \end{bmatrix}$$



GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2 – Walec o stałej gęstości

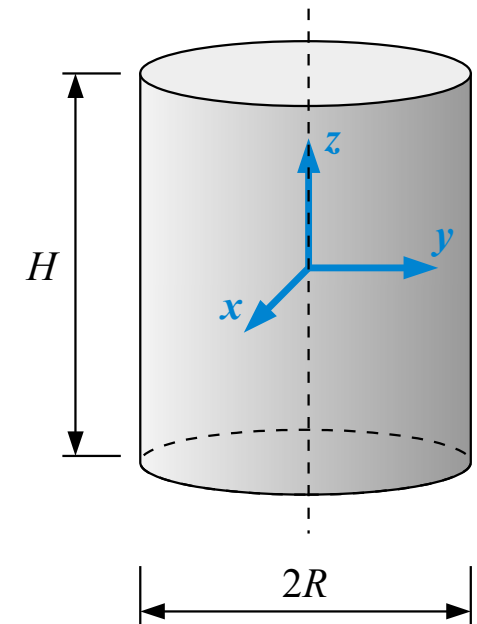
$$V = \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}: & 0 \leq r \leq R \\ z: & -\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2} \end{cases}$$

Zmiana współrzędnych na współrzędne walcowe:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V J(r, \phi, z) \cdot f(r, \phi, z) dr d\phi dz \quad \text{gdzie} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

$$V = \begin{cases} r: & 0 \leq r \leq R \\ \phi: & 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ z: & -\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2} \end{cases}$$

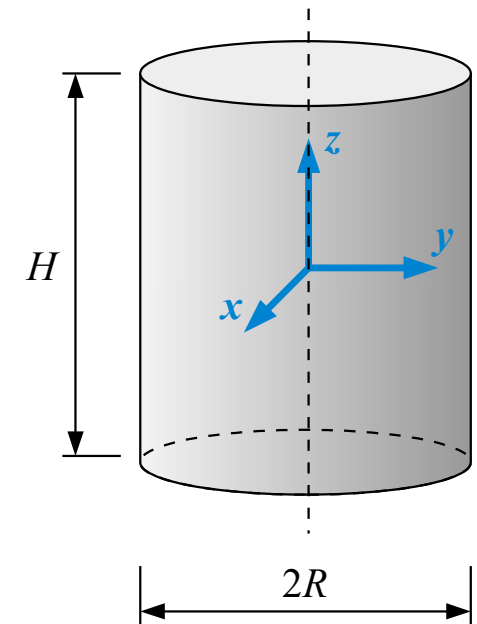


GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2 – Walec o stałej gęstości

Masa całkowita:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \rho dV = \rho \int_{x=0}^L \left[\int_{y=0}^B \left[\int_{z=0}^H dz \right] dy \right] dx = \\ &= \rho \int_{z=-H/2}^{H/2} \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\int_{r=0}^R r dr \right] d\phi \right] dz = \\ &= \rho \int_{z=-H/2}^{H/2} \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\phi \right] dz = \rho \int_{z=-H/2}^{H/2} 2\pi \frac{R^2}{2} dz = \rho \pi R^2 H = \rho V \end{aligned}$$



GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2 – Walec o stałej gęstości

Momenty statyczne:

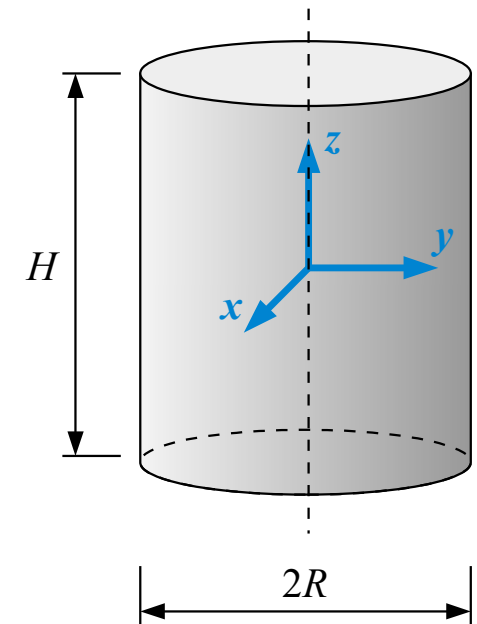
$$S_{yz} = \iiint_V \rho x dV = \rho \int_{z=-H/2}^{H/2} \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\int_{r=0}^R r^2 \cos \phi dr \right] d\phi \right] dz =$$

$$= \rho \underbrace{\int_{-H/2}^{H/2} dz}_{=H} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi}_{=0} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{=R^3/3} = 0$$

$$S_{zx} = \iiint_V \rho y dV = \rho \int_{-H/2}^{H/2} dz \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi}_{=0} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{=R^3/3} = 0$$

$$S_{xy} = \iiint_V \rho z dV = \rho \underbrace{\int_{-H/2}^{H/2} z dz}_{=0} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^R dr}_{=R} = 0$$

Położenie środka ciężkości: $\mathbf{r}_{o^*} = \left[\frac{S_{yz}}{M}, \frac{S_{zx}}{M}, \frac{S_{xy}}{M} \right] = [0, 0, 0]$

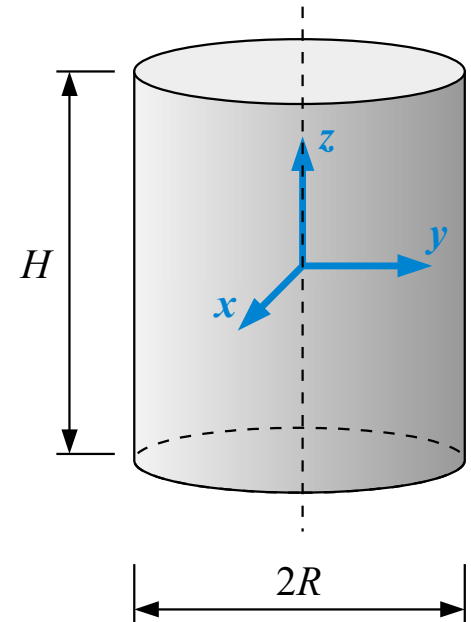


GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2 – Walec o stałej gęstości

Momenty bezwładności:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dV = \rho \iiint [((r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2) J] dr d\phi dz = \\
 &= \rho \underbrace{\int_{-H/2}^{H/2} dz}_{=H} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{=R^4/4} = \rho \pi R^2 H \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}
 \end{aligned}$$



$$I_x = \iiint_V \rho(y^2 + z^2) dV = \rho \iiint [((r \sin \phi)^2 + z^2) J] dr d\phi dz = \dots = \frac{1}{12} M (3R^2 + H^2)$$

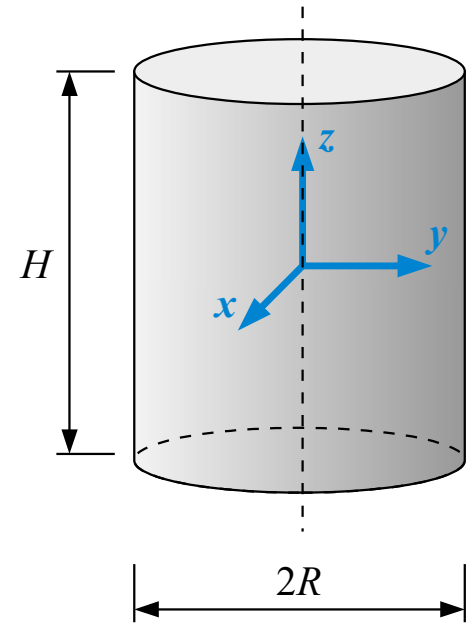
$$I_y = \iiint_V \rho(x^2 + z^2) dV = \rho \iiint [((r \cos \phi)^2 + z^2) J] dr d\phi dz = \dots = \frac{1}{12} M (3R^2 + H^2)$$

GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2 – Walec o stałej gęstości

Momenty dewiacji:

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \iiint_V \rho(x y) dV = \rho \iiint [(r^2 \cos \phi \sin \phi) J] dr d\phi dz = \\
 &= \rho \underbrace{\int_{-H/2}^{H/2} dz}_{=H} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi}_{=0} \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{=R^4/4} = 0
 \end{aligned}$$



$$I_{yz} = \iiint_V \rho(y z) dV = \rho \iiint [(r z \sin \phi) J] dr d\phi dz = \rho \underbrace{\int_{-H/2}^{H/2} z dz}_{=0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi}_{=0} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{=R^3/3} = 0$$

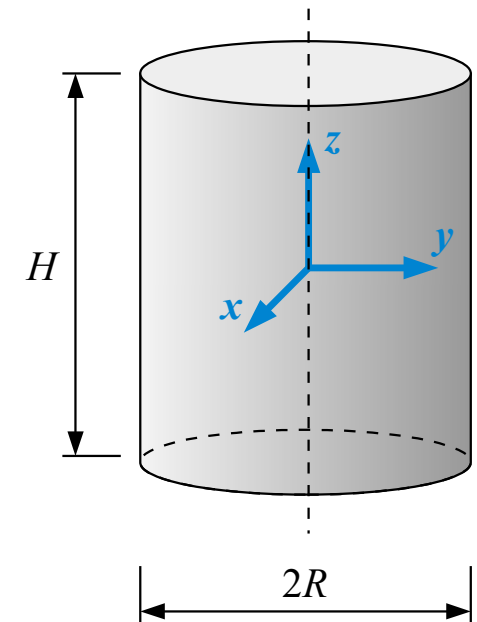
$$I_{zx} = \iiint_V \rho(z x) dV = \rho \iiint [(r z \cos \phi) J] dr d\phi dz = \rho \underbrace{\int_{-H/2}^{H/2} z dz}_{=0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi}_{=0} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{=R^3/3} = 0$$

GEOMETRIA MAS - PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2 – Walec o stałej gęstości

Tensor momentu bezwładności:

$$\mathbf{I} = M \begin{bmatrix} \frac{1}{12}(3R^2 + H^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}(3R^2 + H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$$



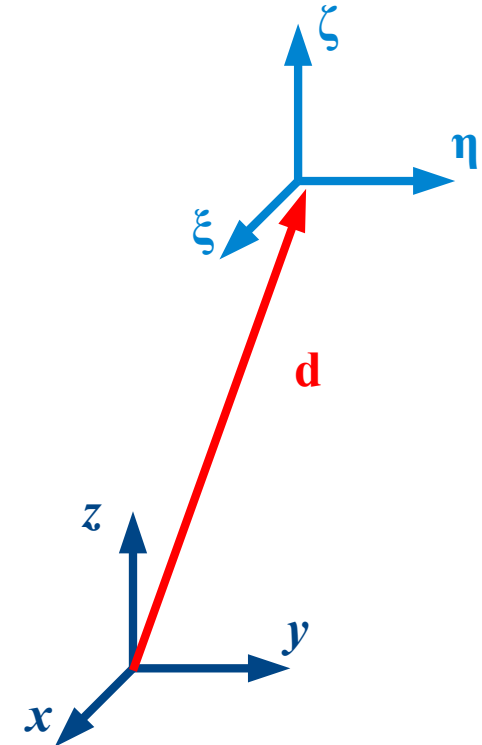
UWAGI:

- Tensor momentu bezwładności w tak przyjętym układzie współrzędnych ma postać diagonalną (jedyne niezerowe składowe znajdują się na przekątnej głównej). Wszystkie **momenty dewiacji są zerowe**. W takim układzie zapisuje się **równania Eulera** ruchu obrotowego bryły sztywnej.
- Taki układ osi nazywamy **układem głównych osi bezwładności**. Ponieważ w początku takiego układu znajduje się **środek ciężkości**, nazywamy go ponadto układem **głównych centralnych osi bezwładności**. Jedną z nich to oś symetrii – pozostałe są prostopadłe.

TWIERDZENIE STEINERA

Przypuśćmy, że znamy momenty bezwładności w pewnym układzie współrzędnych. Chcemy znaleźć momenty bezwładności w układzie współrzędnych, którego osie są równoległe do osi układu pierwotnego, jednak początek nowego układu przesunięty jest względem początku układu starego o wektor \mathbf{d} .

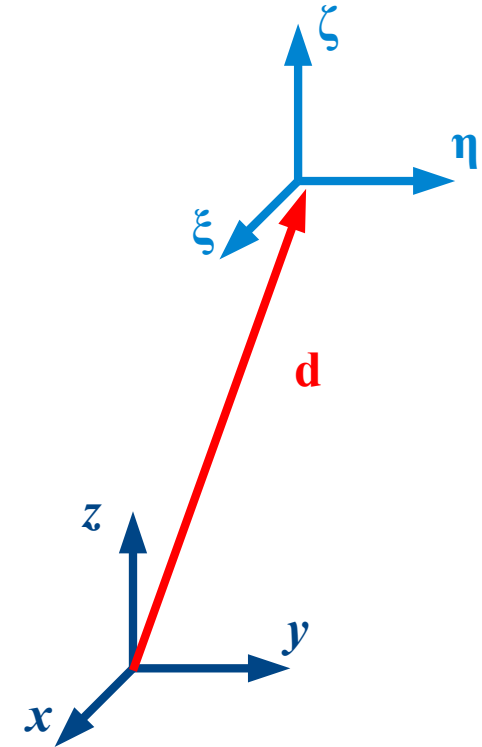
$$\begin{cases} \xi = x + d_x \\ \eta = y + d_y \\ \zeta = z + d_z \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} = 1$$



$$\begin{aligned} \iiint_V f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta &= \iiint_V J(x, y, z) \cdot f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

TWIERDZENIE STEINERA

$$\begin{aligned}
 I_{\xi} &= \iiint_V \rho(\eta^2 + \zeta^2) d\xi d\eta d\zeta = \iiint_V \rho[(y+d_y)^2 + (z+d_z)^2] dx dy dz = \\
 &= \underbrace{\iiint_V \rho(y^2 + z^2) dx dy dz}_{I_x} + \underbrace{(d_y^2 + d_z^2) \iiint_V \rho dx dy dz}_M + \\
 &+ \underbrace{2d_y \iiint_V \rho y dx dy dz}_{S_{zx}} + \underbrace{2d_z \iiint_V \rho z dx dy dz}_{S_{xy}} \\
 &= I_x + (d_y^2 + d_z^2)M + 2d_y S_{zx} + 2d_z S_{xy}
 \end{aligned}$$



Jeśli układ współrzędnych (x, y, z) ma początek w **środku ciężkości** bryły, wtedy $S_{xy} = 0$, $S_{zx} = 0$

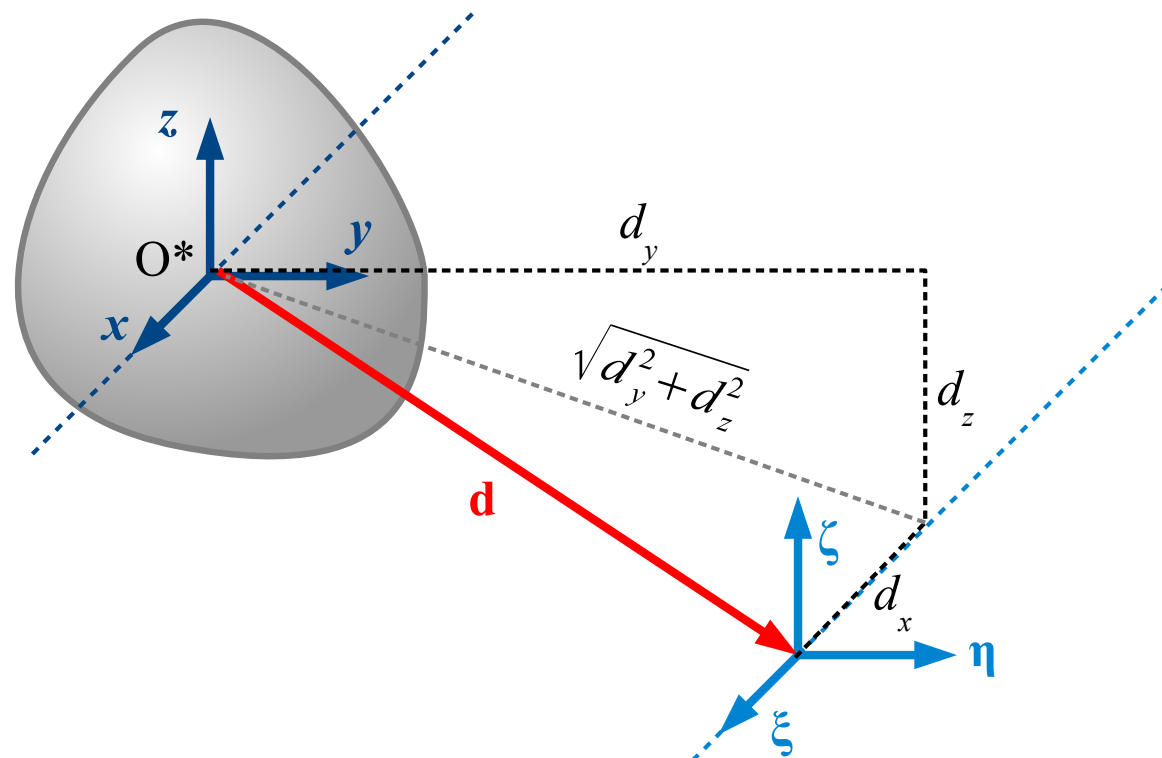
$$I_{\xi} = I_x + (d_y^2 + d_z^2)M$$

TWIERDZENIE STEINERA

TWIERDZENIE STEINERA (dla momentów bezwładności)

Moment bezwładności bryły względem dowolnej prostej jest równy momentowi bezwładności względem prostej **równoległej** i przechodzącej przez **środek ciężkości** tej bryły powiększonemu o iloczyn całkowitej masy bryły i kwadratu odległości między tymi prostymi.

$$I_{\xi} = I_x + (d_y^2 + d_z^2) M$$



TWIERDZENIE STEINERA

WNIOSKI Z TWIERDZENIA STEINERA:

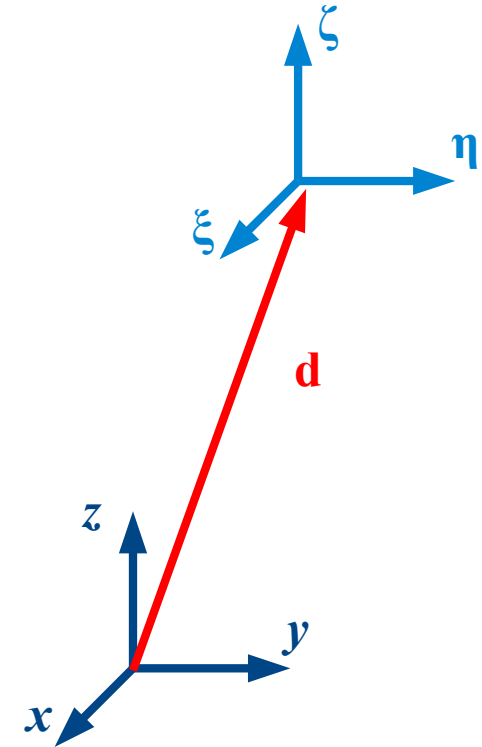
- Moment bezwładności bryły względem prostej przechodzącej przez **środek ciężkości** bryły jest równy momentowi bezwładności względem prostej **równoległej** pomniejszonemu o iloczyn całkowitej masy bryły i kwadratu odległości między tymi prostymi.

$$I_{\xi} = I_x + d^2 M \quad \Rightarrow \quad I_x = I_{\xi} - d^2 M$$

- Ponieważ momenty bezwładności są zawsze dodatnie, podobnie masa całkowita i kwadrat odległości między prostymi, zatem **moment bezwładności względem osi centralnej** (przechodzących przez środek ciężkości) **jest najmniejszy** spośród momentów bezwładności względem wszelkich innych prostych równoległych.

TWIERDZENIE STEINERA

$$\begin{aligned}
 I_{\eta\xi} &= \iiint_V \rho(\eta\xi) d\xi d\eta d\xi = \iiint_V \rho[(y+d_y)(z+d_z)] dx dy dz = \\
 &= \underbrace{\iiint_V \rho(yz) dx dy dz}_{I_{yz}} + \underbrace{(d_y d_z) \iiint_V \rho dx dy dz}_M + \\
 &+ \underbrace{d_y \iiint_V \rho y dx dy dz}_{S_{zx}} + \underbrace{d_z \iiint_V \rho z dx dy dz}_{S_{xy}} \\
 &= I_{xy} + (d_y^2 + d_z^2)M + 2d_y S_{zx} + 2d_z S_{xy}
 \end{aligned}$$



Jeśli układ współrzędnych (x,y,z) ma początek w **środku ciężkości** bryły, wtedy $S_{xy} = 0$, $S_{zx} = 0$

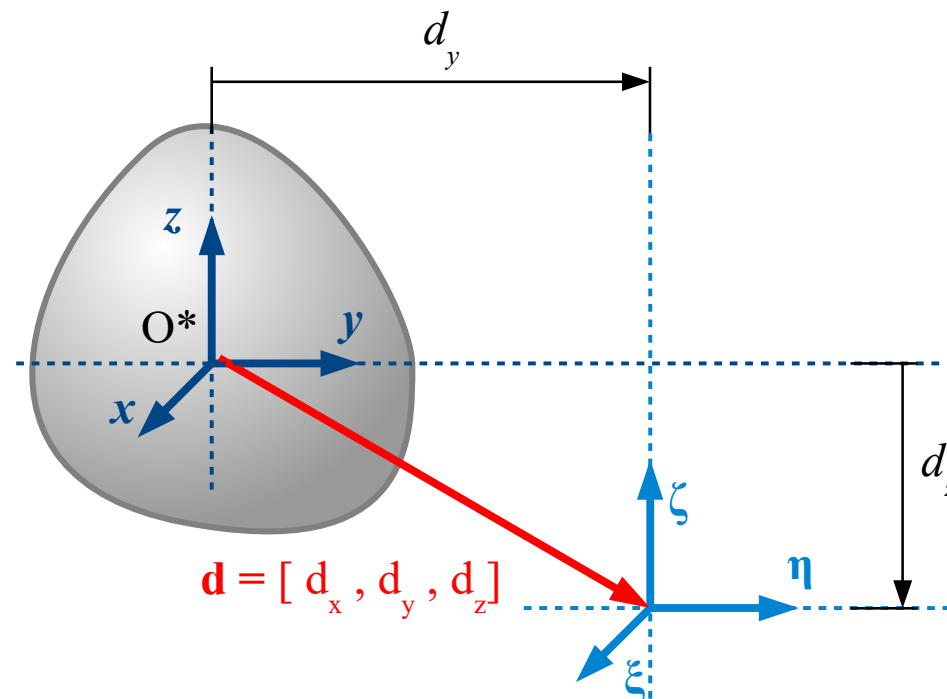
$$I_{\eta\xi} = I_{yz} + d_y d_z M$$

TWIERDZENIE STEINERA

TWIERDZENIE STEINERA (dla momentów dewiacji)

Moment dewiacji bryły względem pary prostopadłych osi jest równy momentowi dewiacji względem osi **równoległych** i przechodzących przez **środek ciężkości** tej bryły powiększonemu o iloczyn całkowitej masy bryły oraz tych składowych wektora łączącego punkty przecięcia się osi, które odpowiadają kierunkom tych osi.

$$I_{\eta\xi} = I_{yz} + d_y d_z M$$

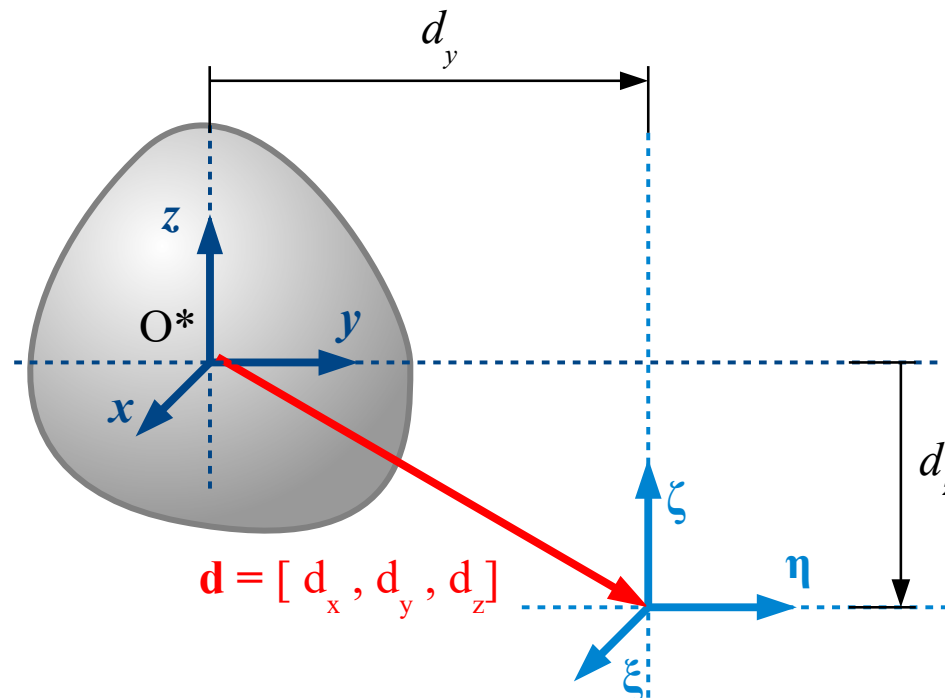


TWIERDZENIE STEINERA

WNIOSKI Z TWIERDZENIA STEINERA:

- Moment dewiacji bryły względem pary prostopadłych osi przechodzących przez środek ciężkości bryły jest równy momentowi dewiacji względem dowolnych osi **równoległych** pomniejszonemu o iloczyn całkowitej masy bryły oraz tych składowych wektora łączącego punkty przecięcia się osi, które odpowiadają kierunkom tych osi.

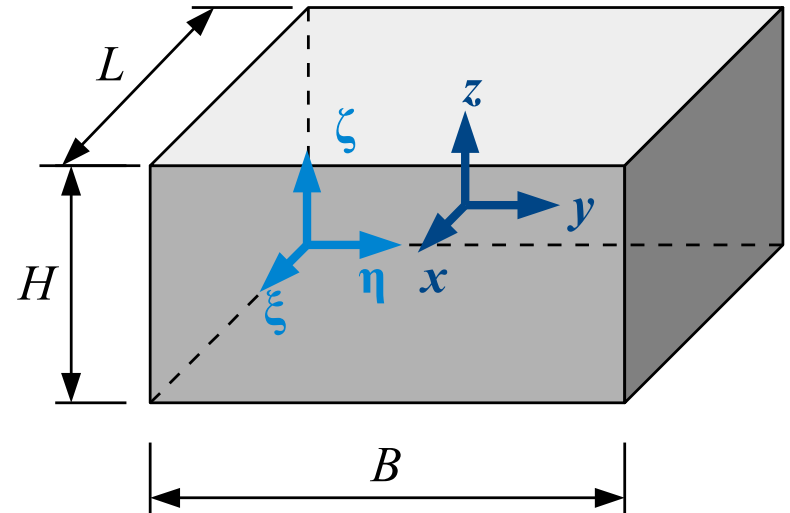
$$I_{\xi\eta} = I_{xy} + d_x d_y M \quad \Rightarrow \quad I_{xy} = I_{\xi\eta} - d_x d_y M$$



TWIERDZENIE STEINERA - PRZYKŁAD

PRZYKŁAD 3

$$\mathbf{I} = M \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(B^2 + H^2) & -\frac{LB}{4} & -\frac{HL}{4} \\ -\frac{LB}{4} & \frac{1}{3}(H^2 + L^2) & -\frac{BH}{4} \\ -\frac{HL}{4} & -\frac{BH}{4} & \frac{1}{3}(L^2 + B^2) \end{bmatrix}$$



Wyznaczyć składowe tensora momentu bezwładności względem osi równoległych do krawędzi prostopadłościanu i przechodzących przez środek ciężkości prostopadłościanu.

Wektor łączący początki układów: $\mathbf{d} = [d_x, d_y, d_z] = \left[\frac{L}{2}, \frac{B}{2}, \frac{H}{2} \right]$

TWIERDZENIE STEINERA - PRZYKŁAD

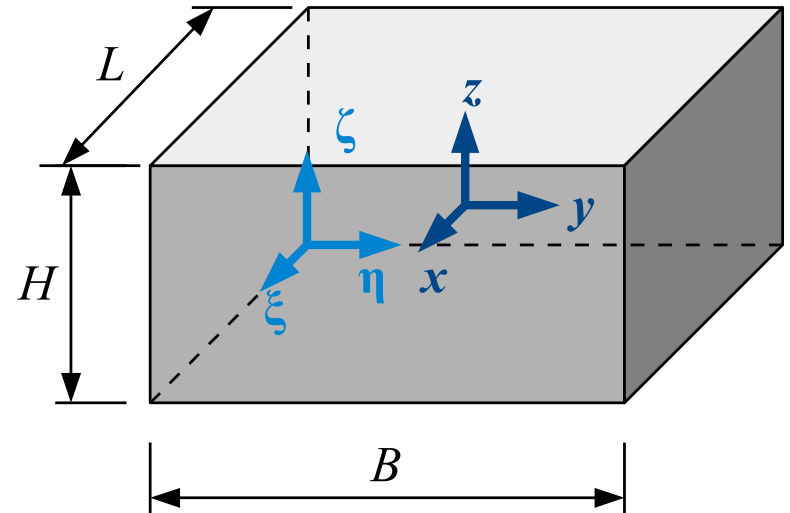
PRZYKŁAD 3

$$\mathbf{I} = M \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(B^2 + H^2) & -\frac{LB}{4} & -\frac{HL}{4} \\ -\frac{LB}{4} & \frac{1}{3}(H^2 + L^2) & -\frac{BH}{4} \\ -\frac{HL}{4} & -\frac{BH}{4} & \frac{1}{3}(L^2 + B^2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = [d_x, d_y, d_z] = \left[\frac{L}{2}, \frac{B}{2}, \frac{H}{2} \right]$$

$$I_x = \underbrace{\frac{M}{3}(B^2 + H^2)}_{I_{\xi}} - \underbrace{M \left[\left(\frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{B}{2} \right)^2 \right]}_{M(d_y^2 + d_z^2)} = \frac{M}{12}(B^2 + H^2)$$

$$I_{yz} = \underbrace{\frac{BH}{4}}_{I_{\eta\xi}} - \underbrace{M \left[\left(\frac{B}{2} \right) \left(\frac{H}{2} \right) \right]}_{M(d_y d_z)} = 0$$



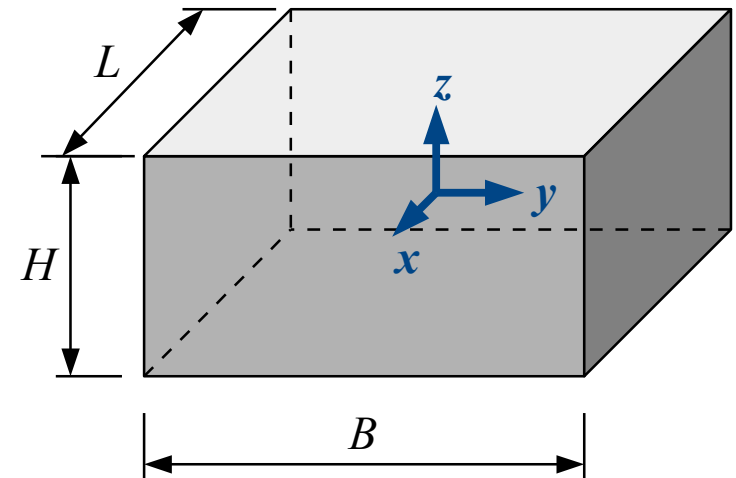
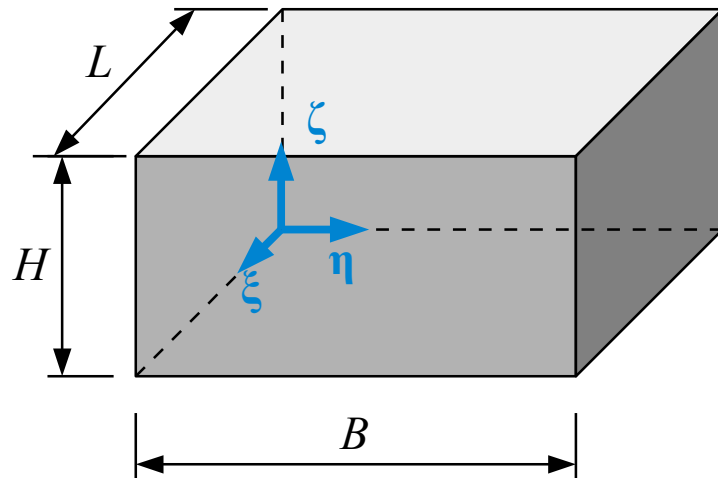
$$I_x = I_{\xi} - (d_y^2 + d_z^2)M$$

$$I_{yz} = I_{\eta\xi} - d_y d_z M$$

„wracamy” do środka ciężkości.
W środku ciężkości momenty są najmniejsze.
Twierdzenie Steinera ze znakiem „-”

TWIERDZENIE STEINERA - PRZYKŁAD

PRZYKŁAD 3

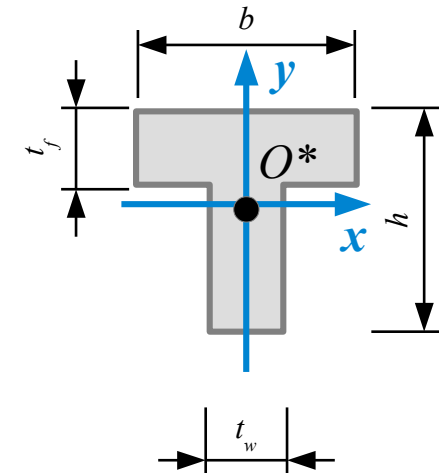


$$\mathbf{I} = M \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(B^2 + H^2) & -\frac{LB}{4} & -\frac{HL}{4} \\ -\frac{LB}{4} & \frac{1}{3}(H^2 + L^2) & -\frac{BH}{4} \\ -\frac{HL}{4} & -\frac{BH}{4} & \frac{1}{3}(L^2 + B^2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = M \begin{bmatrix} \frac{1}{12}(B^2 + H^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}(H^2 + L^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}(L^2 + B^2) \end{bmatrix}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

Definicje i twierdzenia geometrii mas stosować będziemy do **figur płaskich** reprezentujących **przekroje poprzeczne** rozważanych prętowych elementów konstrukcyjnych (belek, słupów, ściągów itp.)



- Choć nadal używać będziemy terminów „moment statyczny”, „moment bezwładności”, „moment dewiacji”, wielkości, którymi będziemy się posługiwać będą miały inny charakter, ponieważ nie będą uwzględniać masy (gęstości) a jedynie geometrię. Wielkości te słuszniej byłoby nazwać **momentami geometrycznymi** (rzędu 1, rzędu 2, ...).

W j. angielskim:	moment statyczny:	<i>statical moment</i>	\neq	1^{st} moment of area
	moment bezwładności:	<i>moment of inertia</i>	\neq	2^{nd} moment of area

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

Pole powierzchni przekroju

(moment geometryczny rzędu 0)

$$A = \iint_A dA$$

Momenty geometryczne rzędu 1:

Moment statyczny względem osi x

$$S_x = \iint_A y dA$$

Moment statyczny względem osi y

$$S_y = \iint_A x dA$$

Momenty geometryczne rzędu 2:

Moment bezwładności względem osi x

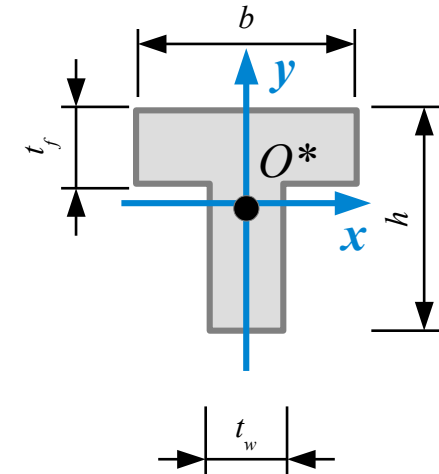
$$I_x = \iint_A y^2 dA$$

Moment bezwładności względem osi y

$$I_y = \iint_A x^2 dA$$

Moment dewiacji względem osi x i y

$$I_{xy} = \iint_A xy dA$$



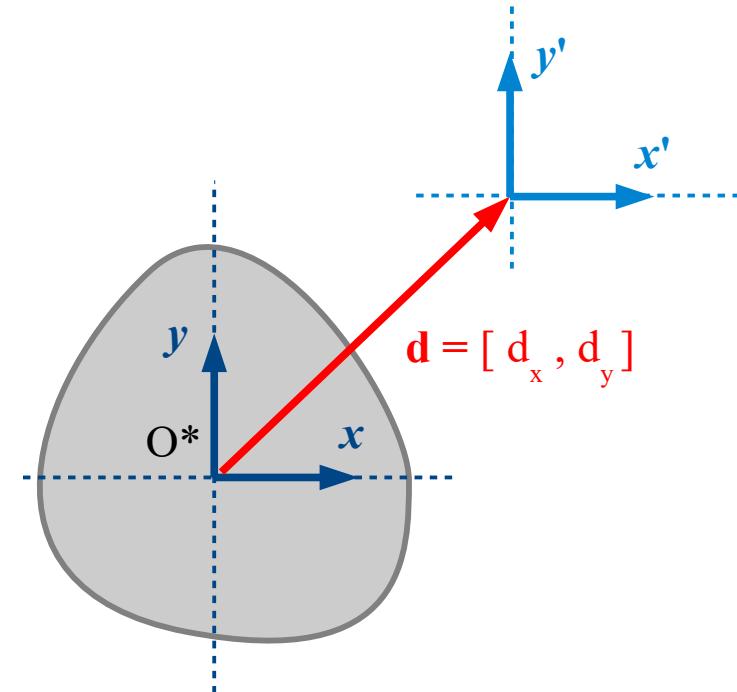
GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

TWIERDZENIE STEINERA

$$I_{x'} = I_x + A d_y^2 \quad \Leftrightarrow \quad I_x = I_{x'} - A d_y^2$$

$$I_{y'} = I_y + A d_x^2 \quad \Leftrightarrow \quad I_y = I_{y'} - A d_x^2$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + A d_x d_y \quad \Leftrightarrow \quad I_{xy} = I_{x'y'} - A d_x d_y$$



UWAGA: W twierdzeniu dla momentów dewiacji nie ma znaczenia, czy bierzemy składowe wektora „od starego układu do nowego”, czy wektora przeciwnego. Iloczyn składowych obydwu tych wektorów jest taki sam.

$$(-d_x)(-d_y) = d_x d_y$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 4 – PROSTOKĄT

Obliczenia wykonujemy w centralnym układzie współrzędnych.

Pole powierzchni:

$$A = \iint_A dA = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} dy = bh$$

Momenty statyczne:

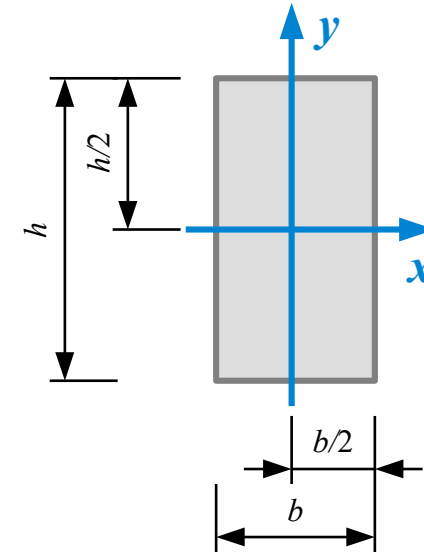
$$S_x = \iint_A y dA = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} y dy = 0$$

$$S_y = \iint_A x dA = \int_{-b/2}^{b/2} x dx \int_{-h/2}^{h/2} dy = 0$$

Położenie środka ciężkości:

$$x_{o^*} = \frac{S_y}{A} = 0$$

$$y_{o^*} = \frac{S_x}{A} = 0$$



GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

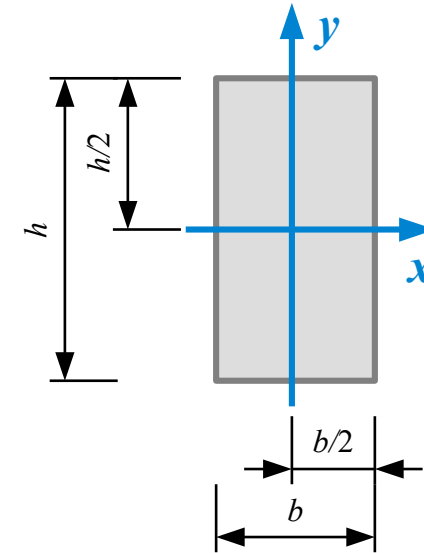
PRZYKŁAD 4 – PROSTOKĄT

Momenty bezwładności:

$$I_x = \iint_A y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \iint_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx \int_{-h/2}^{h/2} dy = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{xy} = \iint_A xy dA = \int_{-b/2}^{b/2} x dx \int_{-h/2}^{h/2} y dy = 0$$



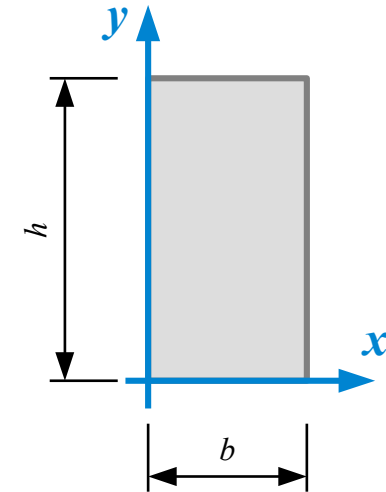
Tensor momentu bezwładności:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{bh^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{b^3h}{12} \end{bmatrix}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 4 – PROSTOKĄT

Obliczenia wykonujemy w układzie współrzędnych, którego osie pokrywają się z dwoma krawędziami prostokąta.



Pole powierzchni:

$$A = \iint_A dA = \int_0^b dx \int_0^h dy = bh$$

Momenty statyczne:

$$S_x = \iint_A y dA = \int_0^b dx \int_0^h y dy = \frac{bh^2}{2}$$

$$S_y = \iint_A x dA = \int_0^b x dx \int_0^h dy = \frac{b^2 h}{2}$$

Położenie środka ciężkości:

$$x_{o^*} = \frac{S_y}{A} = \frac{b}{2} \quad y_{o^*} = \frac{S_x}{A} = \frac{h}{2}$$

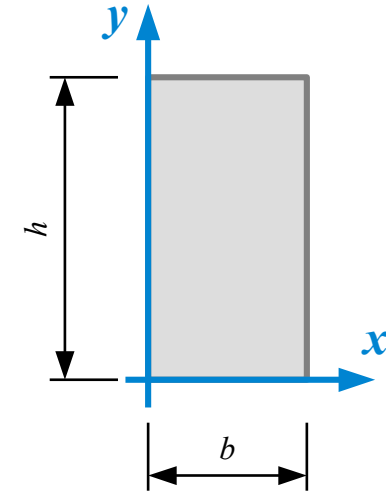
GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 4 – PROSTOKĄT

Momenty bezwładności:
$$I_x = \iint_A y^2 dA = \int_0^b dx \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \iint_A x^2 dA = \int_0^b x^2 dx \int_0^h dy = \frac{b^3 h}{3}$$

$$I_{xy} = \iint_A xy dA = \int_0^b x dx \int_0^h y dy = \frac{b^2 h^2}{4}$$



Tensor momentu bezwładności:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{bh^3}{3} & -\frac{b^2 h^2}{4} \\ -\frac{b^2 h^2}{4} & \frac{b^3 h}{3} \end{bmatrix}$$

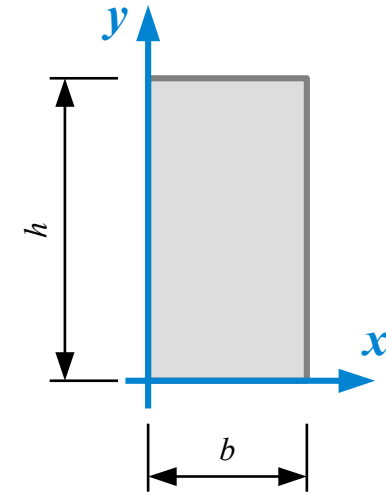
GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 4 – PROSTOKĄT

Moment dewiacji:
$$I_{xy} = \iint_A x y \, dA$$

Jeśli obszar całkowania ma miarę dodatnią (a z reguły ma), wtedy:

- całka oznaczona z funkcji **dodatniej** jest **dodatnia**.
- całka oznaczona z funkcji **ujemnej** jest **ujemna**.

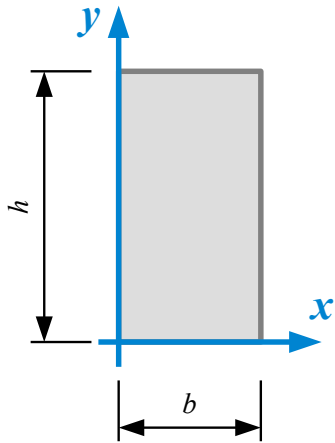


Jeśli obszar całkowania

- znajduje się w całości w **I ćwiartce** układu współrzędnych $x > 0, y > 0 \rightarrow$
 \rightarrow funkcja podcałkowa $f = xy$ jest **dodatnia** i moment dewiacji (całka) jest **dodatni** $I_{xy} > 0$
- znajduje się w całości w **II ćwiartce** układu współrzędnych $x < 0, y > 0 \rightarrow$
 \rightarrow funkcja podcałkowa $f = xy$ jest **ujemna** i moment dewiacji (całka) jest **ujemny** $I_{xy} < 0$
- znajduje się w całości w **III ćwiartce** układu współrzędnych $x < 0, y < 0 \rightarrow$
 \rightarrow funkcja podcałkowa $f = xy$ jest **dodatnia** i moment dewiacji (całka) jest **dodatni** $I_{xy} > 0$
- znajduje się w całości w **IV ćwiartce** układu współrzędnych $x > 0, y < 0 \rightarrow$
 \rightarrow funkcja podcałkowa $f = xy$ jest **ujemna** i moment dewiacji (całka) jest **ujemny** $I_{xy} < 0$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 4 – PROSTOKĄT



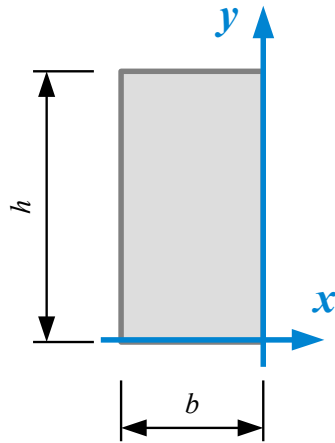
$$x \in (0, b)$$

$$y \in (0, h)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$



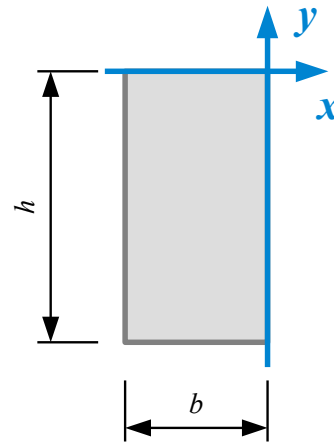
$$x \in (-b, 0)$$

$$y \in (0, h)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{4}$$



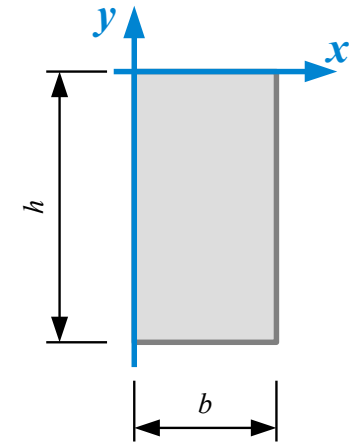
$$x \in (-b, 0)$$

$$y \in (-h, 0)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$



$$x \in (0, b)$$

$$y \in (-h, 0)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

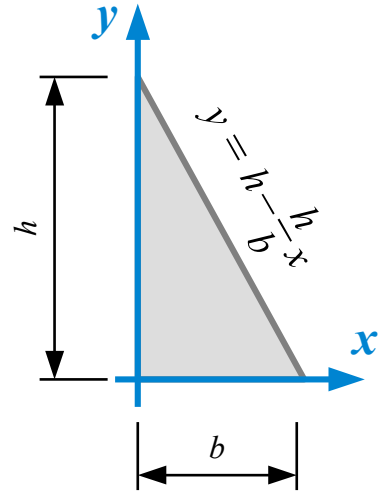
$$I_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{4}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 5 – TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

Obliczenia wykonujemy w układzie współrzędnych, którego osie pokrywają się z przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego.



Pole powierzchni:
$$A = \iint_A dA = \int_{x=0}^b \int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x} dy dx = \int_{x=0}^b \left[h - \frac{h}{b}x \right] dx = \frac{bh}{2}$$

Momenty statyczne:
$$S_x = \int_{x=0}^b \int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x} y dy dx = \int_{x=0}^b \frac{1}{2} \left(h - \frac{h}{b}x \right)^2 dx = \left[-\frac{1}{6} \frac{b}{h} \left(h - \frac{h}{b}x \right)^3 \right]_0^b = \frac{bh^2}{6}$$

$$S_y = \int_{x=0}^b \int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x} x dy dx = \int_{x=0}^b \left[hx - \frac{h}{b}x^2 \right] dx = \frac{b^2h}{6}$$

Położenie środka ciężkości:
$$x_{o^*} = \frac{S_y}{A} = \frac{b}{3} \quad y_{o^*} = \frac{S_x}{A} = \frac{h}{3}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

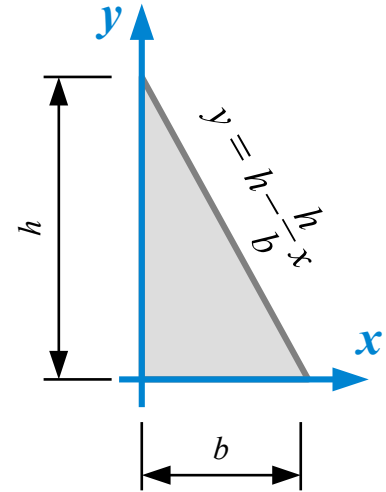
PRZYKŁAD 5 – TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

Momenty bezwładności:

$$I_x = \int_{x=0}^b \int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x} y^2 dy dx = \int_{x=0}^b \frac{1}{3} \left(h - \frac{h}{b}x \right)^3 dx = \left[-\frac{1}{12} \frac{b}{h} \left(h - \frac{h}{b}x \right)^4 \right]_0^b = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \int_{x=0}^b \int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x} x^2 dy dx = \int_{x=0}^b \left[hx^2 - \frac{h}{b}x^3 \right] dx = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{xy} = \int_{x=0}^b \int_{y=0}^{h-\frac{h}{b}x} xy dy dx = \int_{x=0}^b \frac{x}{2} \left(h - \frac{h}{b}x \right)^2 dx = \frac{b^2h^2}{24}$$

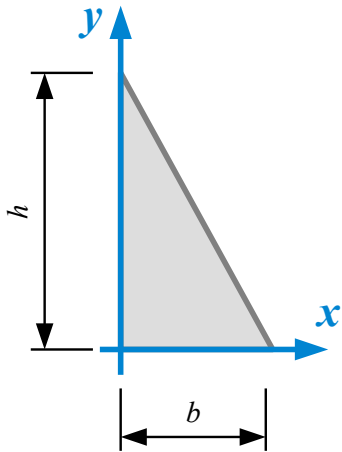


Tensor momentu bezwładności:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{bh^3}{12} & -\frac{b^2h^2}{24} \\ -\frac{b^2h^2}{24} & \frac{b^3h}{12} \end{bmatrix}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 5 – TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY



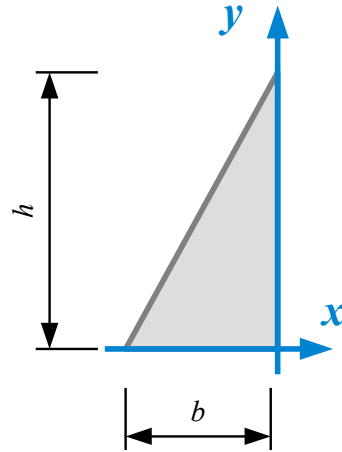
$$x \in (0, b)$$

$$y \in (0, h)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$



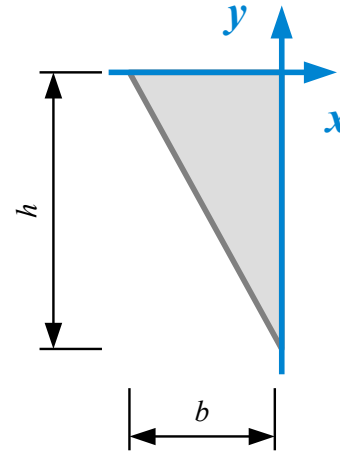
$$x \in (-b, 0)$$

$$y \in (0, h)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{24}$$



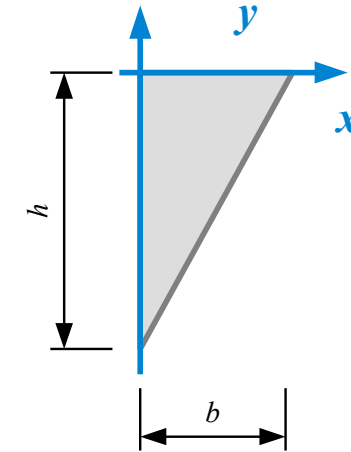
$$x \in (-b, 0)$$

$$y \in (-h, 0)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$



$$x \in (0, b)$$

$$y \in (-h, 0)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{24}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

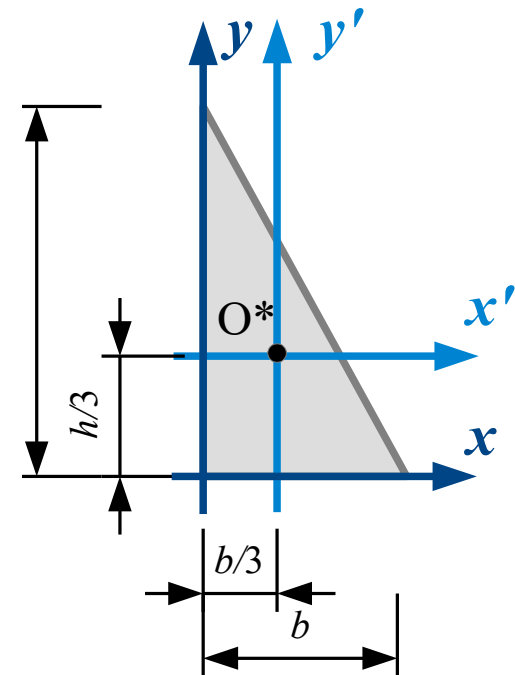
PRZYKŁAD 5 – TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

Centralne momenty bezwładności – korzystamy z tw. Steinera:

$$I_{x'} = I_x - A d_y^2 = \underbrace{\frac{b h^3}{12}}_{I_x} - \underbrace{\frac{b h}{2}}_A \underbrace{\left(\frac{h}{3}\right)^2}_{d_y^2} = \frac{b h^3}{36}$$

$$I_{y'} = I_y - A d_x^2 = \underbrace{\frac{b^3 h}{12}}_{I_y} - \underbrace{\frac{b h}{2}}_A \underbrace{\left(\frac{b}{3}\right)^2}_{d_x^2} = \frac{b^3 h}{36}$$

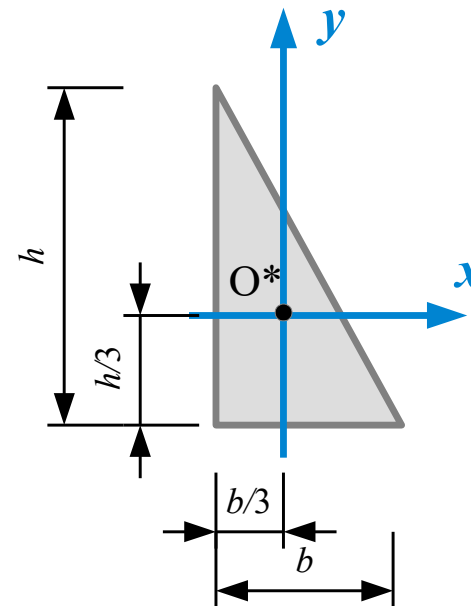
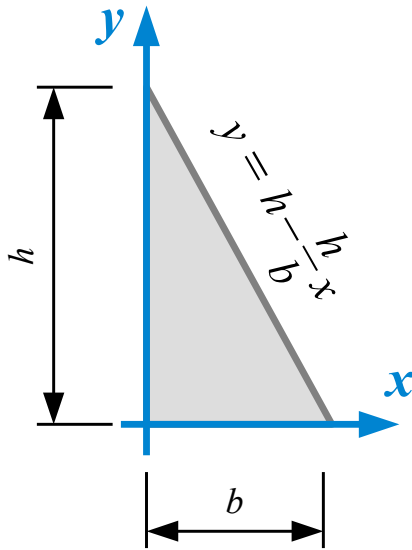
$$I_{x'y'} = I_{xy} - A d_x d_y = \underbrace{\frac{b^2 h^2}{24}}_{I_{xy}} - \underbrace{\frac{b h}{2}}_A \underbrace{\frac{b}{3} \frac{h}{3}}_{d_x d_y} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$



GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 5 – TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

Centralne momenty bezwładności – korzystamy z tw. Steinera:



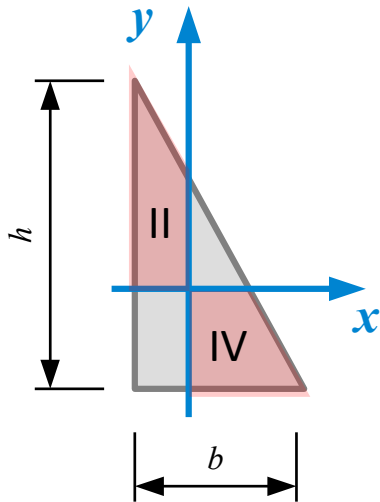
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{bh^3}{12} & -\frac{b^2h^2}{24} \\ -\frac{b^2h^2}{24} & \frac{b^3h}{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{bh^3}{36} & \frac{b^2h^2}{72} \\ \frac{b^2h^2}{72} & \frac{b^3h}{36} \end{bmatrix}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 5 – TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

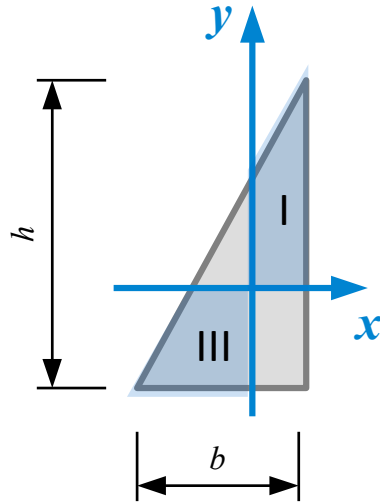
Trapezy są większe i ich punkty są bardziej oddalone od osi.
To one decydują o znaku momentu dewiacji.



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{36}$$

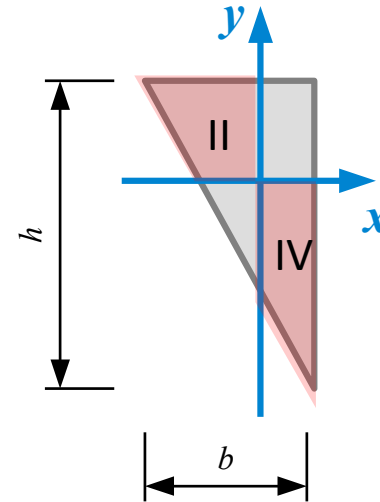
$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{36}$$

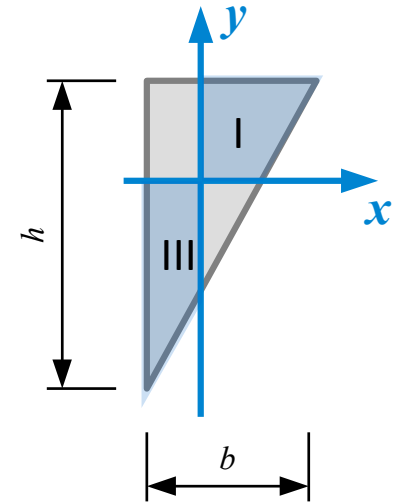
$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{72}$$



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{36}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{36}$$

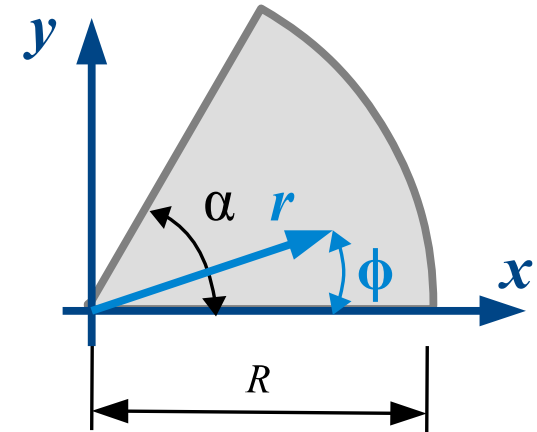
$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{72}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 6 – WYCINEK KOŁA

Obliczenia wykonujemy w układzie współrzędnych, którego początek znajduje się w środku koła, którego wycinek rozważamy, a jedna z osi jest osią symetrii wycinka.

Korzystamy z układu współrzędnych biegunowych



$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctg \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow J = r$$

Pole powierzchni:

$$A = \iint_A dA = \int_{r=0}^R r dr \int_0^\alpha d\phi = \alpha \frac{R^2}{2}$$

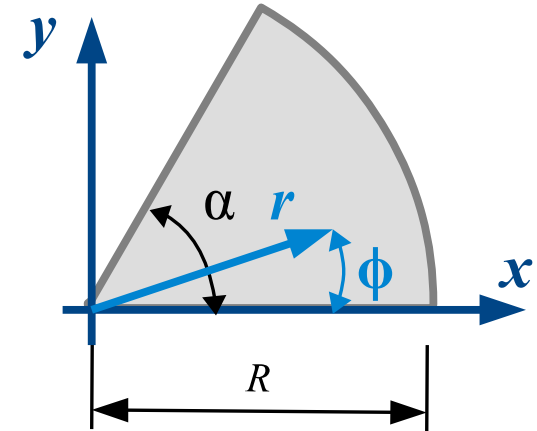
GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 6 – WYCINEK KOŁA

Momenty statyczne:

$$S_x = \iint_A y \, dA = \underbrace{\int_{r=0}^R r^2 \, dr}_{= \frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin \phi \, d\phi}_{= 0} = \frac{R^3}{3} (1 - \cos \alpha)$$

$$S_y = \iint_A x \, dA = \underbrace{\int_{r=0}^R r^2 \, dr}_{= \frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \phi \, d\phi}_{= 2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{R^3}{3} \sin \alpha$$



Położenie środka ciężkości:

$$x_{o^*} = \frac{S_y}{A} = \frac{2}{3} \frac{R}{\alpha} \sin \alpha \qquad y_{o^*} = \frac{S_x}{A} = \frac{2}{3} \frac{R}{\alpha} (1 - \cos \alpha)$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 6 – WYCINEK KOŁA

Momenty bezwładności:

$$I_x = \iint_A y^2 dA = \int_{r=0}^R r^3 dr \int_0^\alpha \sin^2 \phi d\phi = \frac{R^4}{16} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

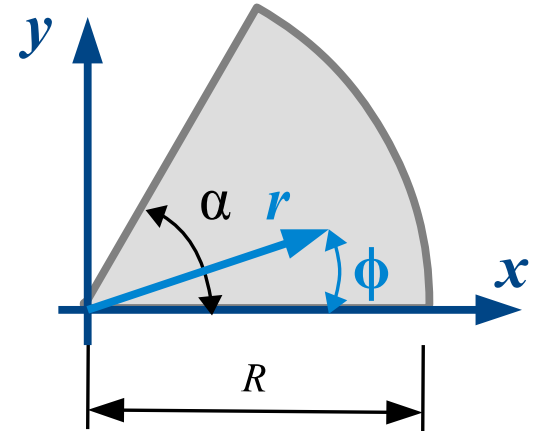
$$= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{4} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$I_y = \iint_A x^2 dA = \int_{r=0}^R r^3 dr \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos^2 \phi d\phi = \frac{R^4}{16} (2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{4} (2\alpha + \sin 2\alpha)$$

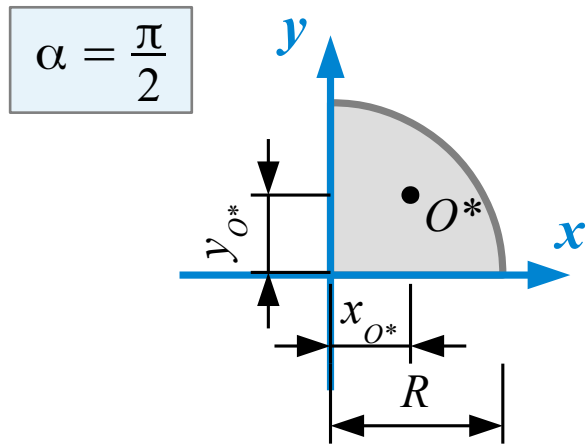
$$I_{xy} = \iint_A xy dA = \int_{r=0}^R r^3 dr \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \phi \sin \phi d\phi = \frac{R^4}{8} (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \alpha)$$



GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

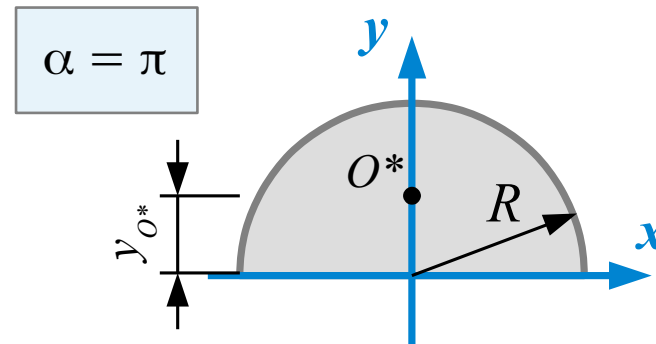
PRZYKŁAD 6 – WYCINEK KOŁA



$$x_{O^*} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \quad I_x = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$y_{O^*} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \quad I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$

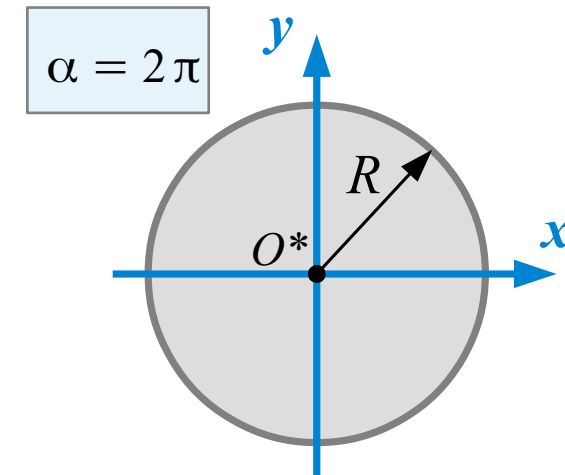
$$I_{xy} = \frac{R^4}{8}$$



$$x_{O^*} = 0 \quad I_x = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$y_{O^*} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \quad I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$I_{xy} = 0$$



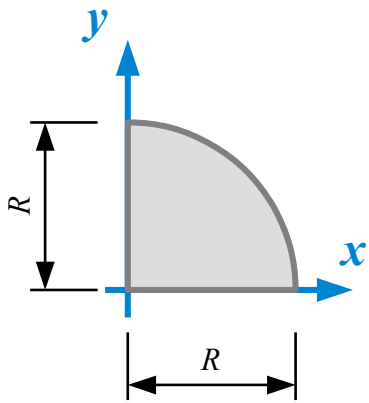
$$x_{O^*} = 0 \quad I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$y_{O^*} = 0 \quad I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

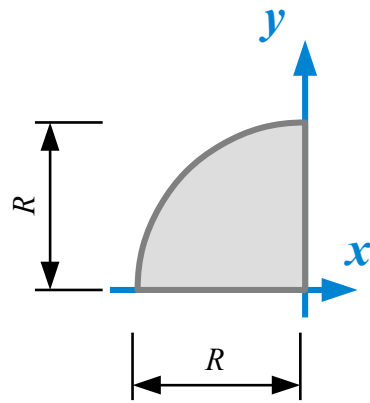
GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

PRZYKŁAD 6 – WYCINEK KOŁA



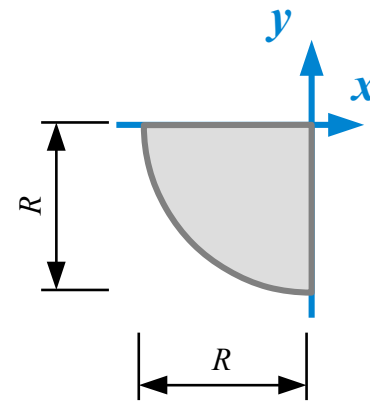
$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_{xy} = \frac{R^4}{8}$$



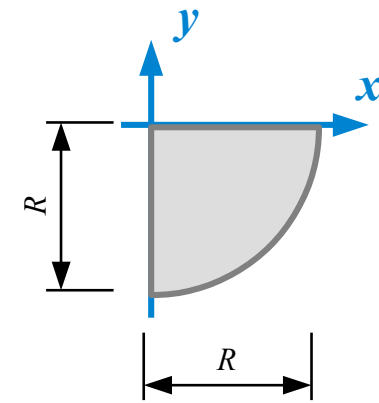
$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_{xy} = -\frac{R^4}{8}$$



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$

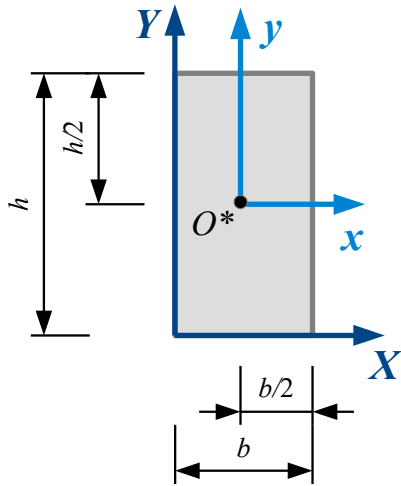
$$I_{xy} = \frac{R^4}{8}$$



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_{xy} = -\frac{R^4}{8}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH



$$X_{O^*} = \frac{b}{2}$$

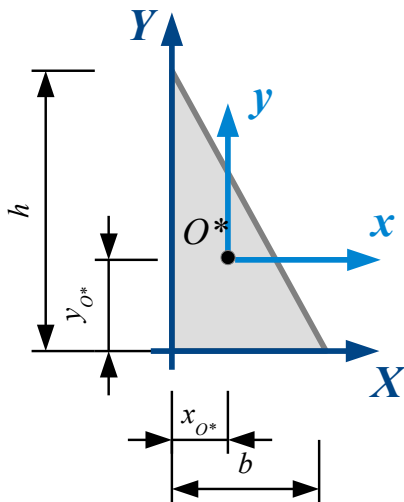
$$Y_{O^*} = \frac{h}{2}$$

w układzie (X, Y)

$$\begin{bmatrix} \frac{bh^3}{3} & -\left(\frac{b^2h^2}{4}\right) \\ -\left(\frac{b^2h^2}{4}\right) & \frac{b^3h}{3} \end{bmatrix}$$

w układzie **centralnym** (x, y)

$$\begin{bmatrix} \frac{bh^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{b^3h}{12} \end{bmatrix}$$



$$X_{O^*} = \frac{b}{3}$$

$$Y_{O^*} = \frac{h}{3}$$

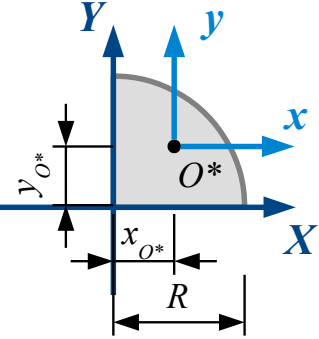
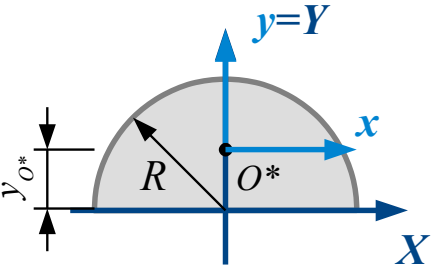
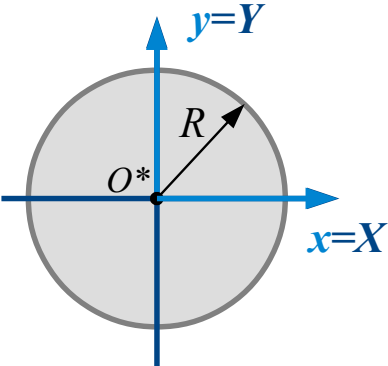
w układzie (X, Y)

$$\begin{bmatrix} \frac{bh^3}{12} & -\left(\frac{b^2h^2}{24}\right) \\ -\left(\frac{b^2h^2}{24}\right) & \frac{b^3h}{12} \end{bmatrix}$$

w układzie **centralnym** (x, y)

$$\begin{bmatrix} \frac{bh^3}{36} & -\left(-\frac{b^2h^2}{72}\right) \\ -\left(-\frac{b^2h^2}{72}\right) & \frac{b^3h}{36} \end{bmatrix}$$

GEOMETRYCZNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

	$X_{O^*} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$ $Y_{O^*} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$	<p>w układzie (X,Y)</p> $\begin{bmatrix} \frac{\pi R^4}{16} & -\left(\frac{R^4}{8}\right) \\ -\left(\frac{R^4}{8}\right) & \frac{\pi R^4}{16} \end{bmatrix}$	<p>w układzie centralnym (x,y)</p> $\begin{bmatrix} R^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) & -\left[R^4\left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)\right] \\ -\left[R^4\left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)\right] & R^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) \end{bmatrix}$
	$X_{O^*} = 0$ $Y_{O^*} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$	<p>w układzie (X,Y)</p> $\begin{bmatrix} \frac{\pi R^4}{8} & 0 \\ 0 & \frac{\pi R^4}{8} \end{bmatrix}$	<p>w układzie centralnym (x,y)</p> $\begin{bmatrix} R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\pi R^4}{8} \end{bmatrix}$
	$X_{O^*} = 0$ $Y_{O^*} = 0$	<p>w układzie (X,Y)</p> $\begin{bmatrix} \frac{\pi R^4}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\pi R^4}{4} \end{bmatrix}$	<p>w układzie centralnym (x,y)</p> $\begin{bmatrix} \frac{\pi R^4}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\pi R^4}{4} \end{bmatrix}$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ