

MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL

tel. 12 628 20 30

e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

GEOMETRIA MAS

ciąg dalszy

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

- Tensor momentu bezwładności odwzorowuje wektor prędkości kątowej w wektor momentu pędu.

w pewnym układzie (x, y, z) :

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

- Jest zatem **operatorem liniowym**, reprezentowanym przez odpowiednią **symetryczną macierz kwadratową**.
- Z algebry liniowej wiemy, że dla odwzorowań takich można znaleźć szczególny układ współrzędnych, nazywamy **układem osi własnych**, w którym odpowiednia **macierz ma postać diagonalną** (składowe spoza przekątnej głównej są zerowe).

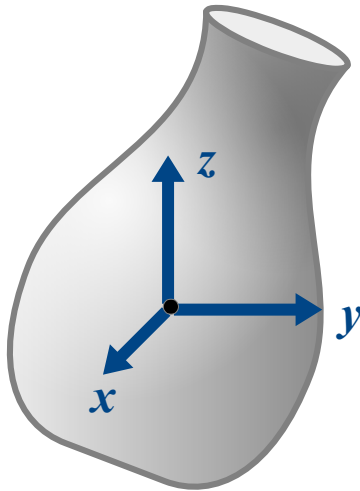
w układzie osi własnych (ξ, η, ζ) :

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}$$

- Składowe na przekątnej głównej I_1, I_2, I_3 nazywamy **wartościami własnymi**.
- Wektory równoległe do osi własnych nazywamy **wektorami własnymi**.

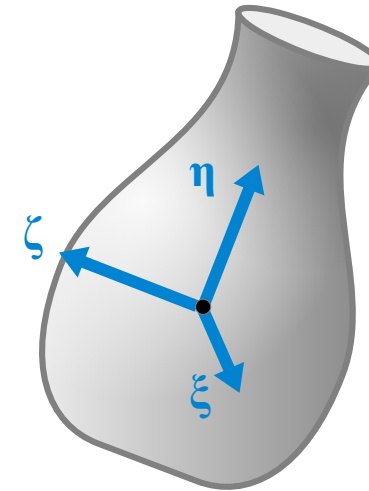
OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

w wyjściowym układzie współrzędnych



$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

w układzie osi własnych



$$\begin{bmatrix} L_{\xi} \\ L_{\eta} \\ L_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\xi} \\ \omega_{\eta} \\ \omega_{\zeta} \end{bmatrix}$$

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

- W układzie osi własnych dla wektora własnego odpowiadającego pierwszej osi własnej mamy

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^{(\xi)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\xi}^{(\xi)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \omega_{\xi}^{(\xi)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = I_1 \boldsymbol{\omega}^{(\xi)}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^{(\eta)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{\eta}^{(\eta)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \omega_{\eta}^{(\eta)} \\ 0 \end{bmatrix} = I_2 \boldsymbol{\omega}^{(\eta)}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^{(\zeta)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{\zeta}^{(\zeta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \omega_{\zeta}^{(\zeta)} \end{bmatrix} = I_3 \boldsymbol{\omega}^{(\zeta)}$$

- Wektor własny odwzorowywany jest w wektor do niego równoległy – skrócony lub wydłużony, a miarą zmiany długości wektora jest odpowiadająca mu wartość własna.

$$\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^{(k)} = I_k \boldsymbol{\omega}^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3$$

WŁASNOŚCI GŁÓWNYCH MOMENTÓW I OSI BEZWŁADNOŚCI

Dla każdego **symetrycznego trójwymiarowego tensora drugiego rzędu** (np. tensora momentu bezwładności, tensora naprężenia, tensora odkształcenia):

- istnieją w przestrzeni **3 wzajemnie prostopadłe kierunki własne**.
- istnieją **3 rzeczywiste wartości własne** odpowiadające tym osiom.
- W układzie osi własnych tensor ma postać **diagonalną**. Na przekątnej głównej są wartości własne, a poza przekątną główną są zera.
- **Największa wartość własna to największa wartość, jaką mogą przyjąć składowe jednoimienne** (na przekątnej głównej – tutaj: momenty bezwładności), biorąc pod uwagę wszelkie możliwe układy współrzędnych.

$$I_{max} = \max(I_1, I_2, I_3) = \max_{(x', y', z')} (I_{x'}, I_{y'}, I_{z'})$$

- **Najmniejsza wartość własna to najmniejsza wartość, jaką mogą przyjąć składowe jednoimienne** (na przekątnej głównej – tutaj: momenty bezwładności), biorąc pod uwagę wszelkie możliwe układy współrzędnych.

$$I_{min} = \min(I_1, I_2, I_3) = \min_{(x', y', z')} (I_{x'}, I_{y'}, I_{z'})$$

- **Składowe różnoimienne** (poza przekątną główną – tutaj: momenty dewiacji) **przyjmują wartości ekstremalne** względem osi nachylonych pod kątem 45° do osi własnych.

WŁASNOŚCI GŁÓWNYCH MOMENTÓW i OSI BEZWŁADNOŚCI

Dla każdego **symetrycznego trójwymiarowego tensora drugiego rzędu** (np. tensora momentu bezwładności, tensora naprężenia, tensora odkształcenia):

- **Wartości własne są pierwiastkami tzw. równania wiekowego.** Dla tensora trójwymiarowego jest to **równanie trzeciego stopnia**. Równanie takie ma zawsze 3 pierwiastki, a z symetrii tensora wynika, że pierwiastki te będą wszystkie rzeczywiste. Może zdarzyć się, że któryś z pierwiastków będzie pierwiastkiem wielokrotnym. Mamy zatem 3 możliwości:

- **3 różne wartości własne** $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$

osie własne są wzajemnie prostopadłe i określone w przestrzeni jednoznacznie.

- **1 pojedyncza wartość własna i 1 podwójna wartość własna** $I_1 \neq I_2 = I_3$

oś własna odpowiadająca wartości pojedynczej określona jest w przestrzeni jednoznacznie. Pozostałe dwie osie – odpowiadające wartości podwójnej – to dowolne dwie prostopadłe do siebie osie leżące w płaszczyźnie prostopadłej do osi odpowiadającej wartości pojedynczej.

- **Potrójna wartość własna** $I_1 = I_2 = I_3$

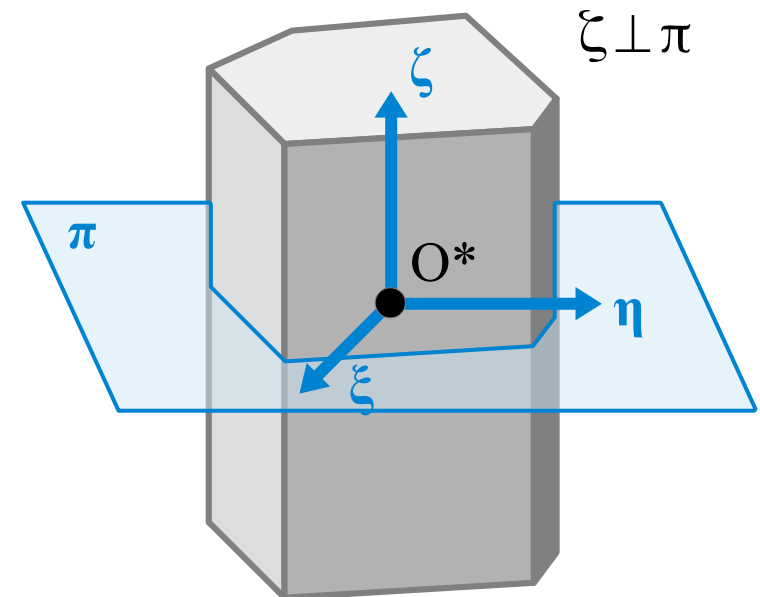
dowolne 3 wzajemnie prostopadłe osie są osiami własnymi.

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

- Jeśli bryła posiada **płaszczyznę symetrii**, to po przyjęciu np. osi ζ jako zawierającej środek ciężkości i prostopadłej do płaszczyzny symetrii, dla dowolnego punktu (ξ, η, ζ) należącego do bryły, punkt $(\xi, \eta, -\zeta)$ również należy do bryły. W takim przypadku:

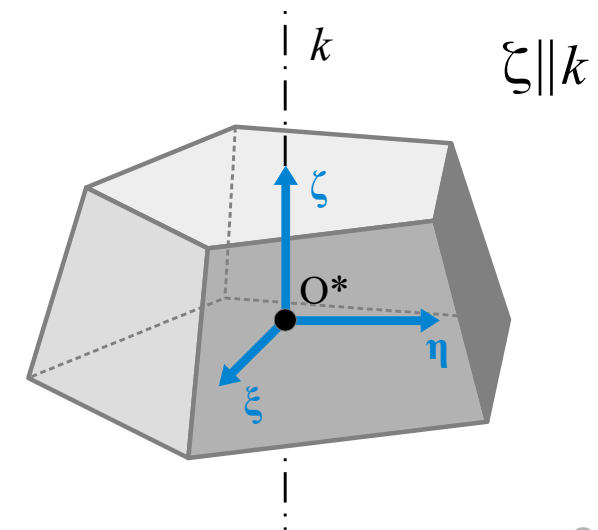
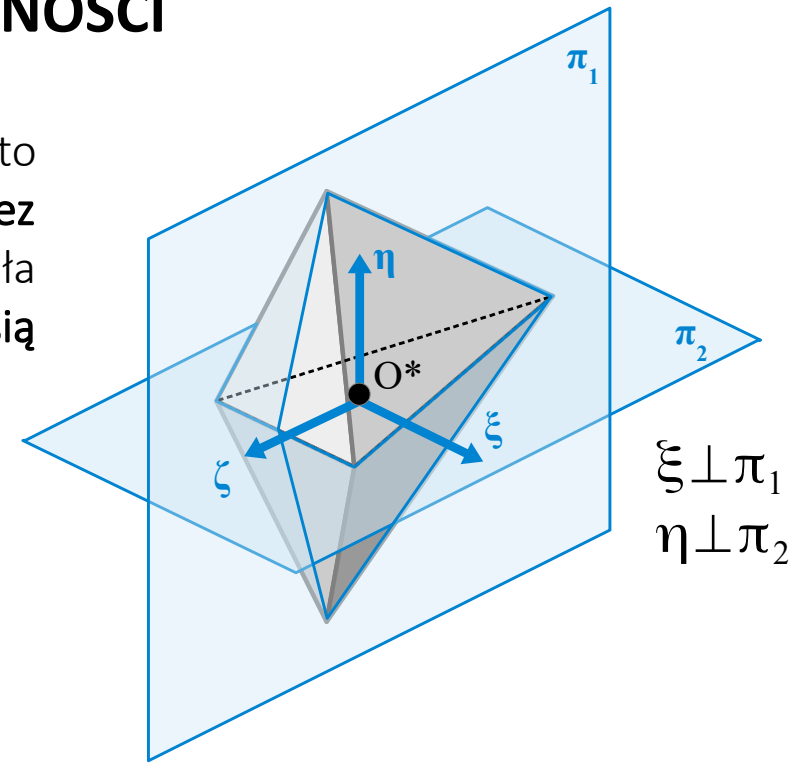
$$I_{\eta\zeta} = \iiint_V \rho \eta \zeta dV = 0, \quad I_{\zeta\xi} = \iiint_V \rho \zeta \xi dV = 0$$

Trzeci moment dewiacji zależy już tylko od orientacji osi ξ i η . Przez odpowiedni obrót wokół osi ζ można je dobrać tak, aby również $I_{\xi\eta} = 0$. Oś ζ , czyli **oś prostopadła do płaszczyzny symetrii** jest **osią własną**. Pozostałe dwie są do niej prostopadłe, czyli leżą w płaszczyźnie symetrii.



OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

- Jeśli bryła posiada **dwie prostopadłe płaszczyzny symetrii**, to osie prostopadłe do płaszczyzn symetrii i przechodzące przez środek ciężkości są osiami własnymi. Trzecia jest prostopadła do nich, czyli krawędź przecięcia płaszczyzn symetrii jest osią własną.
- Jeśli bryła posiada **oś symetrii** o krotności większej niż 2, to oś symetrii jest osią własną, a pozostałe dwie osie własne to dowolne osie leżące w płaszczyźnie prostopadłej do osi symetrii. Tym ostatnim odpowiadają równe sobie wartości własne (wniosek z **tw. Hermana - Germana**).



OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

Jak wyznaczyć osie własne dla danego tensora momentu bezwładności?

Zajmujemy się zagadnieniami dwuwymiarowymi.

PODEJŚCIE 1

- Korzystając z **definicji składowych I** wyznaczamy je w **obróconym** układzie współrzędnych.
- Wiedząc, że w układzie osi własnych tensor ma postać **diagonalną**, wyznaczamy taki **kąt obrotu** układu współrzędnych, aby **moment dewiacji był zerowy**.
- **Kierunki własne** określa wyznaczony kąt.
- **Wartości własne** obliczamy jako składowe I w układzie obróconym o ten kąt.

PODEJŚCIE 2

- Odwzorowanie zapisane dla wektorów własnych interpretujemy jako pewien **nieoznaczony jednorodny układ równań liniowych**.
- **Warunek istnienia niezerowego rozwiązania** takiego układu to **zerowanie się wyznacznika macierzy współczynników** – otrzymujemy **równanie wiekowe**, z którego wyznaczamy **wartości własne**.
- **Wektory własne** to **niezerowe rozwiązania tego układu**, zapisanego dla wyznaczonych wartości własnych.

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

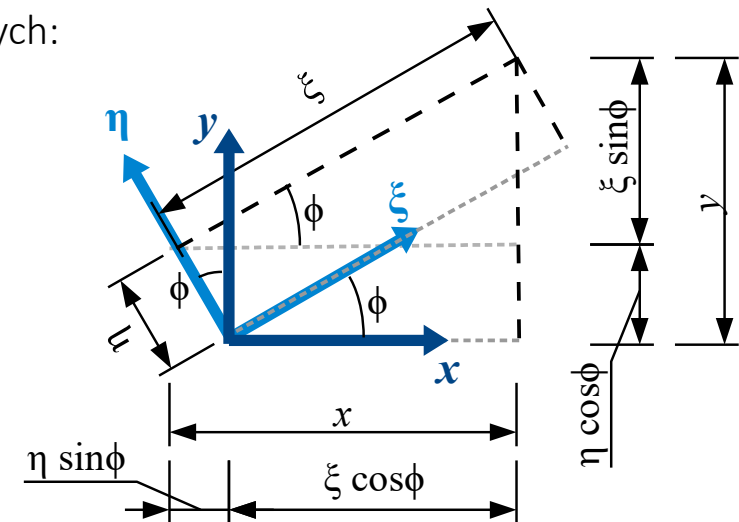
PODEJŚCIE 1

- Rozważane przez nas momenty geometryczne dotyczą **zagadnień dwuwymiarowych** w płaszczyźnie (x,y) .
- Jeśli ograniczymy nasze rozważania jedynie do **kartezjańskich układów współrzędnych o wspólnym początku** (znajdującym się w biegunie, względem którego obliczamy momenty bezwładności), **przejście z jednego takiego układu do dowolnego innego** układu tego typu odbywa się przez **obrót wokół osi z**.
- Możemy zatem rozważyć następujące przekształcenie układu współrzędnych:

$$\begin{cases} \xi = x \cos \phi + y \sin \phi \\ \eta = -x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \xi \cos \phi - \eta \sin \phi \\ y = \xi \sin \phi + \eta \cos \phi \end{cases}$$

- Możemy obliczyć jacobian przekształcenia odwrotnego, aby zmienić zmienne całkowania w definicjach momentów geometrycznych i wyrazić momenty względem nowych osi przez momenty względem starych osi.

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$



OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

PODEJŚCIE 1

- Obliczamy momenty geometryczne w nowym układzie współrzędnych, całkując względem starych współrzędnych:

$$\begin{aligned}
 I_{\xi} &= \iint_A \eta^2 d\xi d\eta = \iint_A (-x \sin \phi + y \cos \phi)^2 J^{-1} dx dy = \\
 &= \cos^2 \phi \iint_A y^2 dA + \sin^2 \phi \iint_A x^2 dA - 2 \sin \phi \cos \phi \iint_A xy dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\eta} &= \iint_A \xi^2 d\xi d\eta = \iint_A (x \cos \phi + y \sin \phi)^2 J^{-1} dx dy = \\
 &= \sin^2 \phi \iint_A y^2 dA + \cos^2 \phi \iint_A x^2 dA + 2 \sin \phi \cos \phi \iint_A xy dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\xi\eta} &= \iint_A \xi \eta d\xi d\eta = \iint_A (-x \sin \phi + y \cos \phi)(x \cos \phi + y \sin \phi) J^{-1} dx dy = \\
 &= \left(\iint_A y^2 dx dy - \iint_A x^2 dx dy \right) \sin \phi \cos \phi + \iint_A xy dx dy (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)
 \end{aligned}$$

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

PODEJŚCIE 1

- Obliczamy momenty geometryczne w nowym układzie współrzędnych, całkując względem starych współrzędnych:

$$\begin{aligned}
 I_{\xi} &= \iint_A \eta^2 d\xi d\eta = \iint_A (-x \sin \phi + y \cos \phi)^2 J^{-1} dx dy = \\
 &= \underbrace{\cos^2 \phi \iint_A y^2 dA}_{I_x} + \underbrace{\sin^2 \phi \iint_A x^2 dA}_{I_y} - \underbrace{2 \sin \phi \cos \phi}_{\sin 2\phi} \underbrace{\iint_A xy dA}_{I_{xy}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\eta} &= \iint_A \xi^2 d\xi d\eta = \iint_A (x \cos \phi + y \sin \phi)^2 J^{-1} dx dy = \\
 &= \underbrace{\sin^2 \phi \iint_A y^2 dA}_{I_x} + \underbrace{\cos^2 \phi \iint_A x^2 dA}_{I_y} + \underbrace{2 \sin \phi \cos \phi}_{\sin 2\phi} \underbrace{\iint_A xy dA}_{I_{xy}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\xi\eta} &= \iint_A \xi \eta d\xi d\eta = \iint_A (-x \sin \phi + y \cos \phi)(x \cos \phi + y \sin \phi) J^{-1} dx dy = \\
 &= \left(\underbrace{\iint_A y^2 dx dy}_{I_x} - \underbrace{\iint_A x^2 dx dy}_{I_y} \right) \underbrace{\sin \phi \cos \phi}_{\frac{1}{2} \sin 2\phi} + \underbrace{\iint_A xy dx dy}_{I_{xy}} \underbrace{(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}_{\cos 2\phi}
 \end{aligned}$$

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

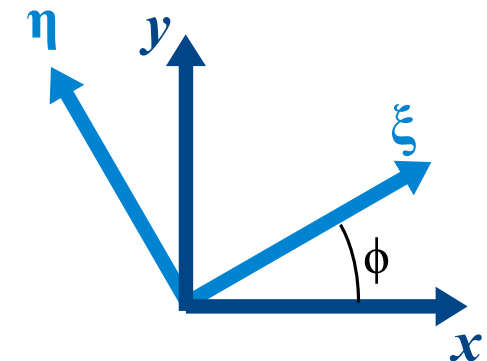
PODEJŚCIE 1

WZORY TRANSFORMACYJNE PRZY OBRÓCIE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH
dla symetrycznego dwuwymiarowego tensora drugiego rzędu

$$I_{\xi} = I_x \cos^2 \phi + I_y \sin^2 \phi - I_{xy} \sin 2\phi$$

$$I_{\eta} = I_x \sin^2 \phi + I_y \cos^2 \phi + I_{xy} \sin 2\phi$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\phi + I_{xy} \cos 2\phi$$



UWAGI:

- To szczególny przypadek ogólnej postaci wzorów transformacyjnych dla tensorów
- Wzory powyższe pozwalają nam obliczać momenty geometryczne względem osi obróconych.
- Razem z twierdzeniem Steinera pozwalają nam **obliczać momenty względem dowolnego układu współrzędnych (obróconego i przesuniętego)** na podstawie momentów w pewnym danym układzie.

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

PODEJŚCIE 1

- W układzie osi własnych moment dewiacji ma być zerowy:

$$I_{\xi\eta} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\phi + I_{xy} \cos 2\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 2\phi = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

- Dla $\phi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ mamy:

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\phi}}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right)^2}}\right)$$

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\phi}}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right)^2}}\right)$$

$$\sin 2\phi = \frac{\operatorname{tg} 2\phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\phi}} = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right)^2}}$$

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

PODEJŚCIE 1

$$I_{\xi} = I_x \cos^2 \phi + I_y \sin^2 \phi - I_{xy} \sin 2\phi \quad \Rightarrow$$

$$I_{\eta} = I_x \sin^2 \phi + I_y \cos^2 \phi + I_{xy} \sin 2\phi \quad \Rightarrow$$

Wartości własne I . **Główne momenty bezwładności.**

$$I_{\xi} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\eta} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

UWAGA:

- Powyższe wzory obowiązują tylko wtedy, gdy kąt ϕ zawarty między osią x a osią ξ zawiera się w przedziale od 0° do 90° .

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

PODEJŚCIE 2

- Wiemy, że wektory własne spełniają zależność ($k=1,2,3$):

$$\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^{(k)} = I_k \boldsymbol{\omega}^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{I} - I_k \mathbf{1}) \boldsymbol{\omega}^{(k)} = \mathbf{0} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dla ustalonego k , powyższe równanie wektorowe jest równoważne **układowi równań liniowych**:

$$\begin{cases} (I_x - I_k) \omega_x^{(k)} - I_{xy} \omega_y^{(k)} - I_{zx} \omega_z^{(k)} = 0 \\ -I_{yz} \omega_x^{(k)} + (I_y - I_k) \omega_y^{(k)} - I_{zx} \omega_z^{(k)} = 0 \\ -I_{zx} \omega_x^{(k)} - I_{xy} \omega_y^{(k)} + (I_z - I_k) \omega_z^{(k)} = 0 \end{cases}$$

- Jest to **układ równań jednorodnych** (prawe strony są równe 0). Taki układ **posiada niezerowe rozwiązanie** tylko wtedy, jeśli **wyznacznik macierzy współczynników jest równy 0**.

$$\det(\mathbf{I} - I_k \mathbf{1}) = 0, \quad k=1,2,3$$

- Rozwiązań takich (wektorów $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$) jest **nieskończenie wiele**. Każdy wektor równoległy do osi własnej jest **wektorem własnym** – wektory mają ten sam kierunek, ale mogą mieć różne zwroty i długości.

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

PODEJŚCIE 2

- W przypadku dwuwymiarowym

$$\det(\mathbf{I} - I \mathbf{1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \left(\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} - I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} I_x - I & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (I_x - I)(I_y - I) - I_{xy}^2 = 0$$

$$I^2 - \underbrace{(I_x + I_y)}_{\alpha} I + \underbrace{(I_x I_y - I_{xy}^2)}_{\beta} = 0$$

Równanie charakterystyczne (wiekowe): $I^2 - \alpha I + \beta = 0$

gdzie:

α - pierwszy niezmiennik tensora, ślad tensora	$\alpha = \text{tr}(\mathbf{I}) = I_x + I_y$
β - drugi niezmiennik tensora, wyznacznik tensora	$\beta = \det(\mathbf{I}) = I_x I_y - I_{xy}^2$

Niezmienniki mają taką samą wartość w każdym układzie współrzędnych.

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

PODEJŚCIE 2

- Równanie kwadratowe: $I^2 - \alpha I + \beta = 0$
- Wyróżnika równania kwadratowego: $\Delta = \alpha - 4\beta$
- Pierwiastki równania kwadratowego – wartości własne: $I_{1/2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

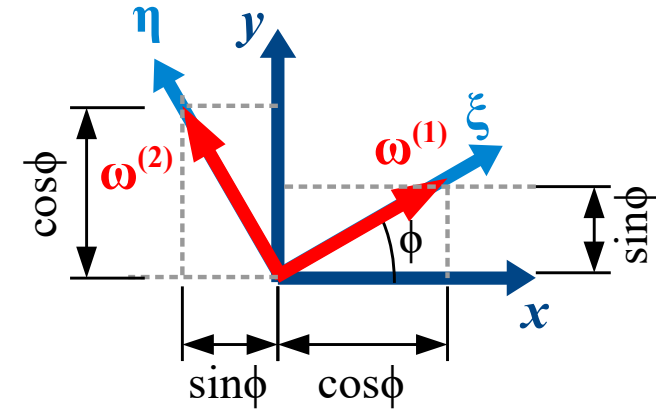
UWAGA:

- Ponieważ $I_x, I_y > 0$, zatem $I_1, I_2 > 0$ i ponadto $I_1 \geq I_2$

OSIE WŁASNE TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

PODEJŚCIE 2

Oznaczmy przez ϕ kąt zawarty między osią x a osią własną odpowiadającą wartości własnej I_1 . Wtedy w pierwotnym układzie współrzędnych (x,y) :



$$\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^{(1)} = I_1 \boldsymbol{\omega}^{(1)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \cos \phi \\ I_1 \sin \phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_x \cos \phi - I_{xy} \sin \phi = I_1 \cos \phi \\ -I_{xy} \cos \phi + I_y \sin \phi = I_1 \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{tg } \phi = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} = \frac{I_{xy}}{I_y - I_1}}$$

$$\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^{(2)} = I_2 \boldsymbol{\omega}^{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_2 \sin \phi \\ I_2 \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -I_x \sin \phi - I_{xy} \cos \phi = -I_2 \sin \phi \\ I_{xy} \sin \phi + I_y \cos \phi = I_2 \cos \phi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{tg } \phi = \frac{I_2 - I_y}{I_{xy}} = \frac{I_{xy}}{I_2 - I_x}}$$

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

ZADANIE

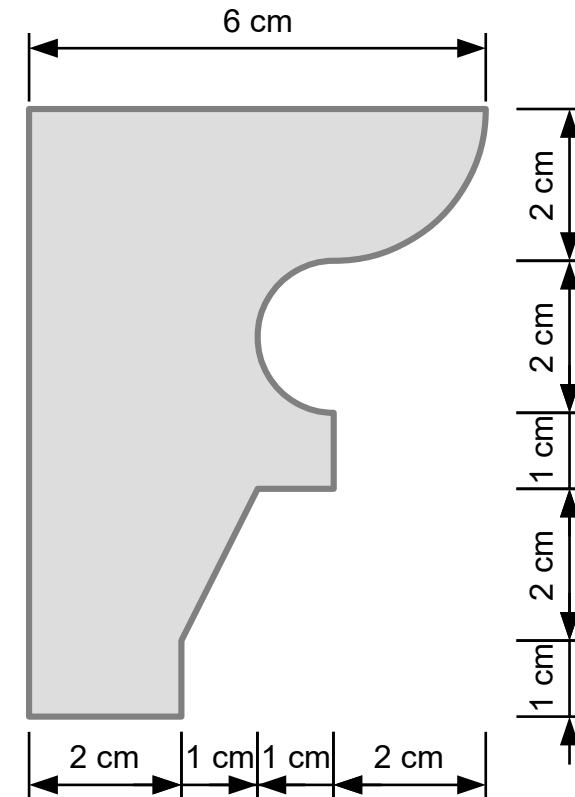
Wyznaczyć centralne momenty bezwładności względem osi poziomej i pionowej a także główne centralne momenty bezwładności dla przekroju belki gzymsowej jak na rysunku.

KROK 1 – podział na proste figury składowe

- Momenty geometryczne są zdefiniowane poprzez **całki**.
- Całka po sumie obszarów jest sumą całek po obszarach:

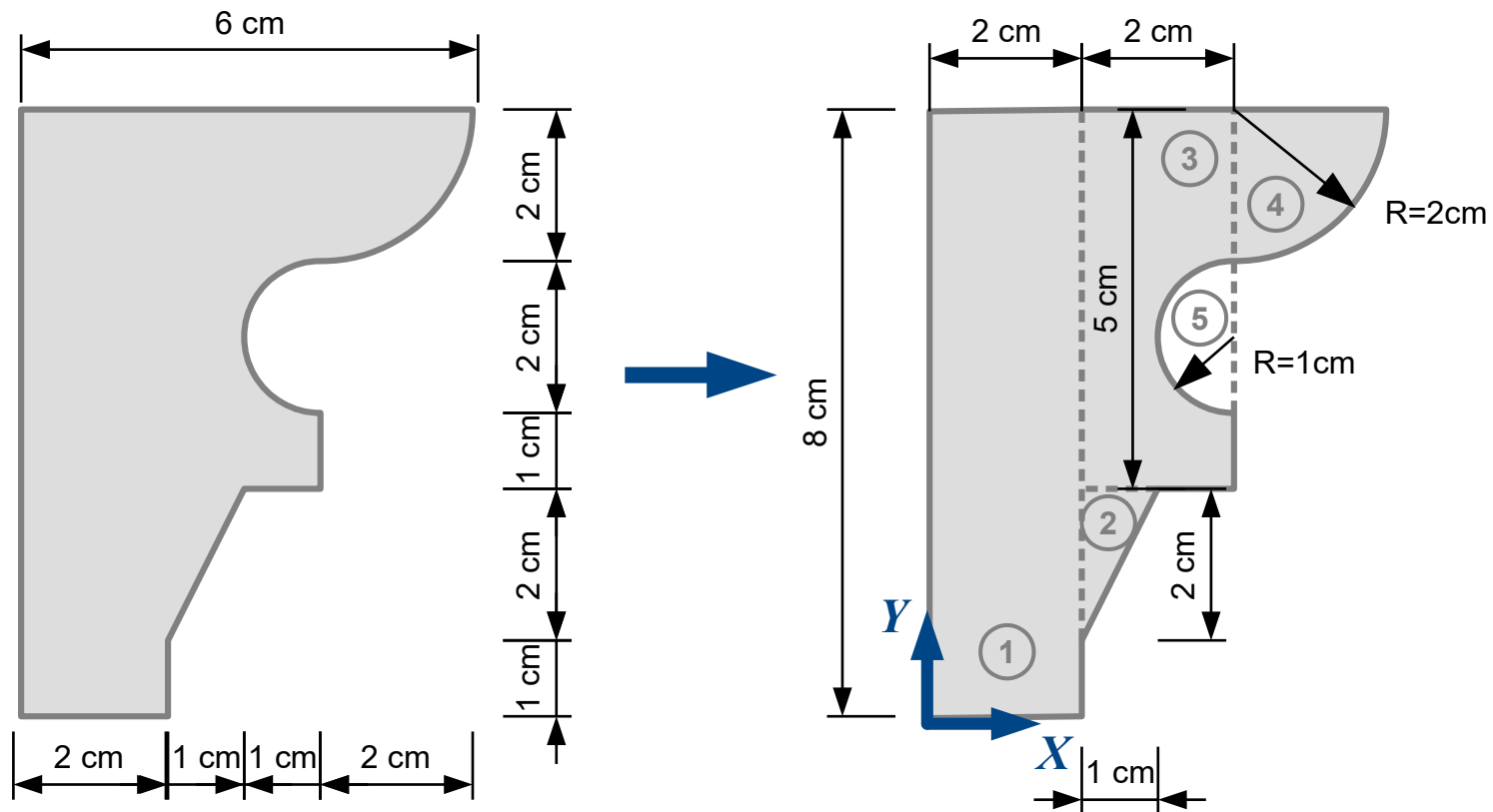
$$J = \iint_{\bigcup_i A_i} f(x, y) dA = \sum_i \iint_{A_i} f(x, y) dA$$

- Obszary można **dodawać** lub **odejmować**.
- Dzielimy przekrój na figury, dla których znamy położenie środka ciężkości i wzory na momenty bezwładności – prostokąty, trójkąty, wycinki koła.



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1



KROK 2 – wybór układu współrzędnych

- Momenty bezwładności oblicza się zawsze względem jakichś wybranych osi.
- Docelowo mają być to osie centralne – zawierające środek ciężkości. Póki co nie wiemy gdzie on jest.
- Musimy wybrać jakiś pomocniczy układ. Jeśli jego pozioma oś będzie pokrywać się z dolną krawędzią rysunku, a pionowa oś z lewą krawędzią, to wszystkie punkty przekroju będą miały dodatnie współrzędne.

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 3 – wprowadzenie dodatkowych układów współrzędnych

- Dla prostych figur składowych znamy wzory tylko względem pewnych szczególnych osi – należy określić ich położenie na rysunku. W przypadku ogólnym najlepiej korzystać z osi centralnych, bo...
- ...aby wyznaczyć momenty w przyjętym układzie współrzędnych będziemy musieli skorzystać z twierdzenia Steinera. Wymaga ono znajomości położenia osi centralnych.

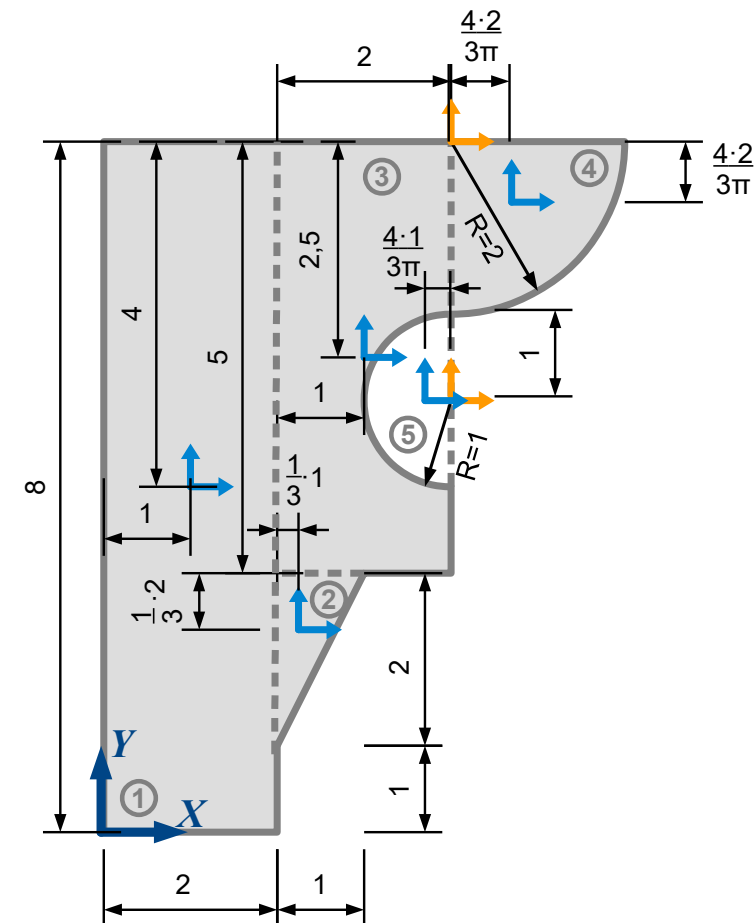
Granatowym kolorem oznaczamy wyjściowy u.w.

Niebieskim kolorem oznaczamy centralne u.w. figur składowych

Żółtym kolorem oznaczamy pomocnicze u.w. dla wycinków kąt

Czerwonym kolorem oznaczamy centralny u.w. przekroju

Zielonym kolorem oznaczamy główny centralny u.w. przekroju

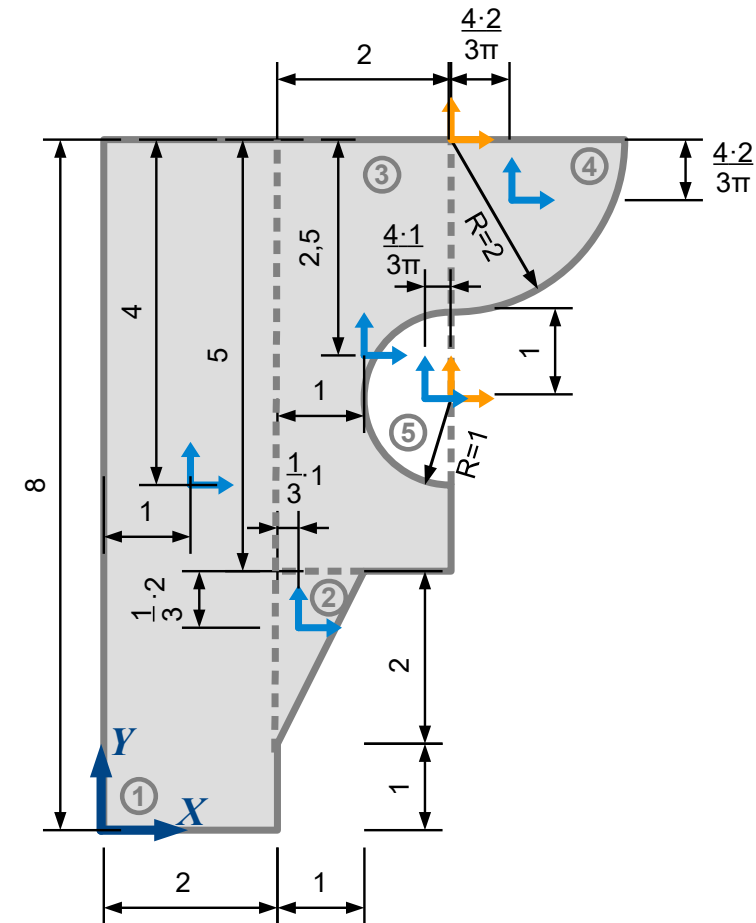


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 4 – wyznaczenie pola powierzchni

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 = \\
 &= \underbrace{[2 \cdot 8]}_{16} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\right]}_{=1} + \underbrace{[2 \cdot 5]}_{=10} + \underbrace{\left[\frac{\pi \cdot 2^2}{4}\right]}_{=3,1416} - \underbrace{\left[\frac{\pi \cdot 1^2}{2}\right]}_{=1,5708} = \\
 &= 28,5708 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$



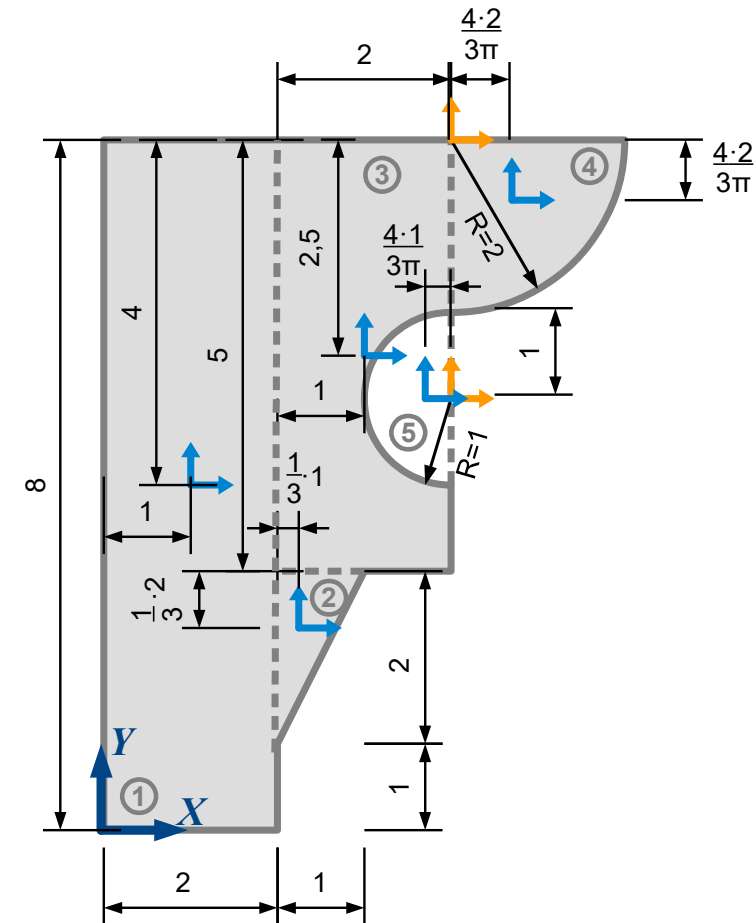
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 5 – wyznaczenie momentów statycznych

$$\begin{aligned}
 S_X &= S_{X,1} + S_{X,2} + S_{X,3} + S_{X,4} - S_{X,5} = \\
 &= \underbrace{[2 \cdot 8 \cdot 4]}_{= 64} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right]}_{= 2,3333} + \underbrace{[2 \cdot 5 \cdot (3 + 2,5)]}_{= 55} + \\
 &+ \underbrace{\left[\frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \right]}_{= 22,4661} - \underbrace{\left[\frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot 5 \right]}_{= 7,854} = 135,9454 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_Y &= S_{Y,1} + S_{Y,2} + S_{Y,3} + S_{Y,4} - S_{Y,5} = \\
 &= \underbrace{[2 \cdot 8 \cdot 1]}_{= 16} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right]}_{= 2,3333} + \underbrace{[2 \cdot 5 \cdot 3]}_{= 30} + \\
 &+ \underbrace{\left[\frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \right]}_{= 15,233} - \underbrace{\left[\frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot \left(4 - \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} \right) \right]}_{= 5,6165} = 57,9499 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$



moment statyczny = pole × odległość środka ciężkości

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

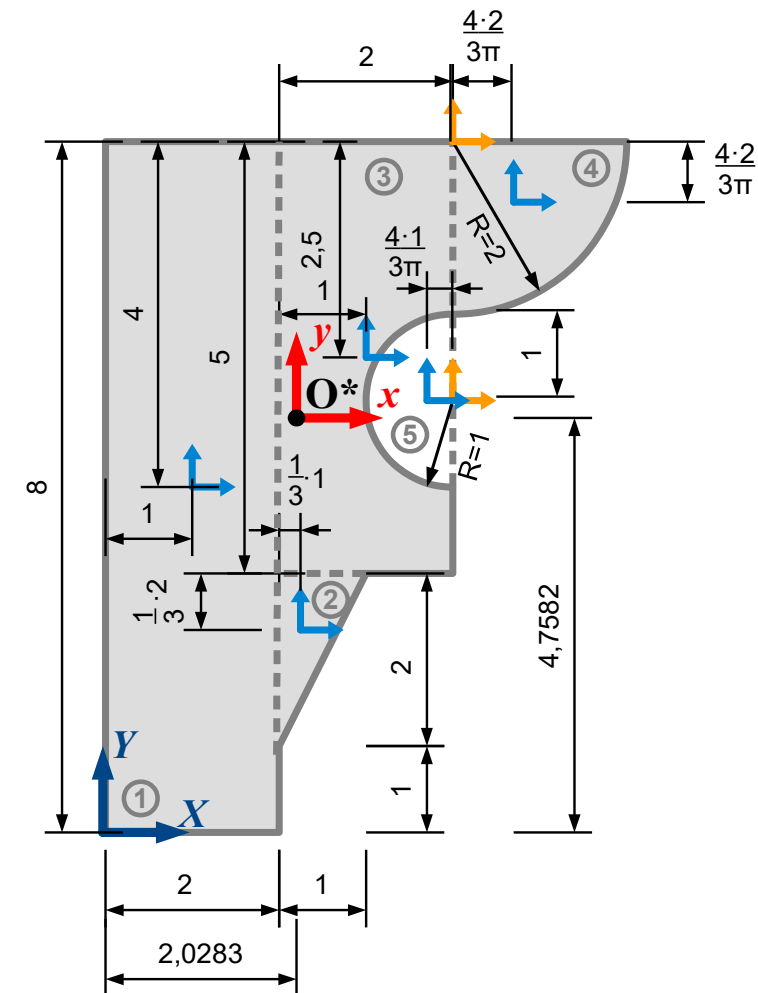
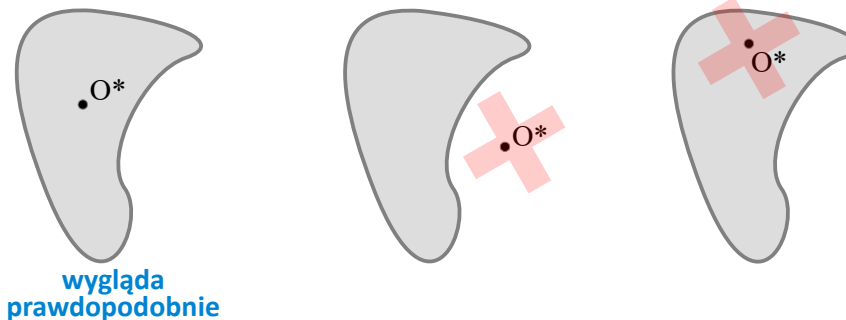
KROK 6 – wyznaczenie położenia środka ciężkości

$$X_{O^*} = \frac{S_Y}{A} = 2,0283 \text{ cm}$$

$$Y_{O^*} = \frac{S_X}{A} = 4,7582 \text{ cm}$$

- Środek ciężkości może należeć do przekroju lub nie.
- Położenie środka ciężkości rozumiane jest dość intuicyjnie. Warto krytycznie spojrzeć na uzyskany wynik. W naszym przypadku „więcej masy” jest z lewej i na górze. W tym kierunku przesunięty jest środek ciężkości.

• Przykładowo:



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

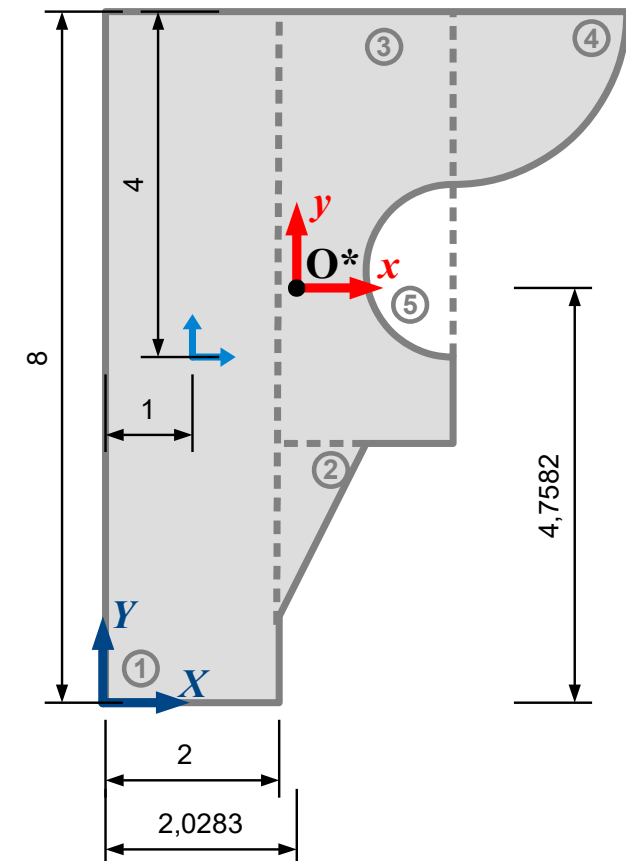
PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_x = \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} \right]$$

centralny
moment bezwładności
wzgl. prostej poziomej
dla prostokąta

- Chcemy obliczyć moment składowego prostokąta względem osi poziomej zawierającej O^* .
- Znamy wartość momentu bezwładności dla prostokąta względem jego osi centralnych, równoległych do jego krawędzi (tabelka).



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

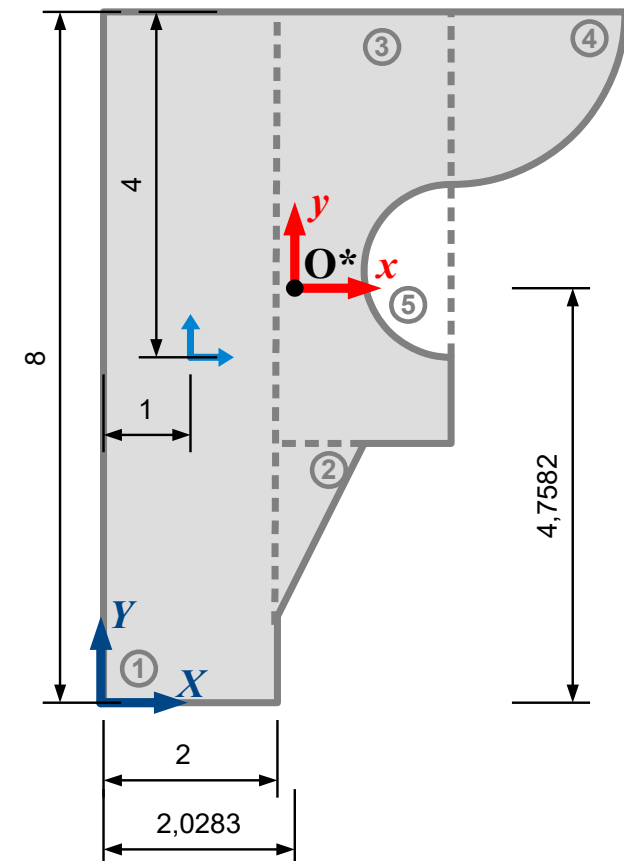
KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_x = \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{tw. Steinera}}$

moment bezwładności
wzgl. prostej poziomej
zawierającej O*
od prostokąta

- Moment względem osi równoległej (x , zawierającej O^*) wyznaczamy, korzystając z twierdzenia Steinera.
- **Odległość między prostymi** (poziomą osią centralną dla prostokąta a osią x) **obliczamy jako różnicę współrzędnych Y** , którym odpowiadają. Kolejność odejmowania jest dowolna, ale **ustalimy jedną kolejność odejmowania** dla całego zadania, żeby nie zrobić błędu przy momentach dewiacji.
- Nawet jeśli wynik odejmowania współrzędnych jest ujemny, nie ma to znaczenia, bo i tak podnosimy go do kwadratu.



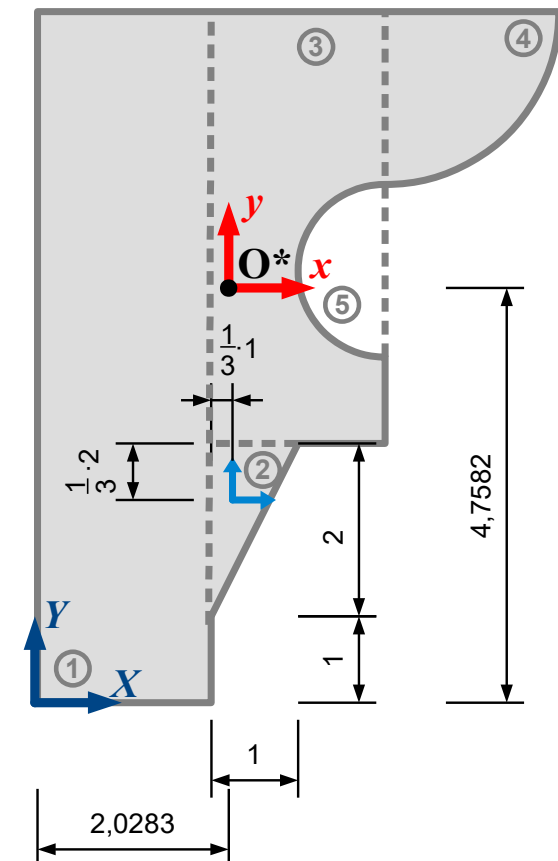
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_x = \underbrace{\left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right]}_{= 94,5311} + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} \right]$$

centralny
moment bezwładności
wzgl. prostej poziomej
dla trójkąta



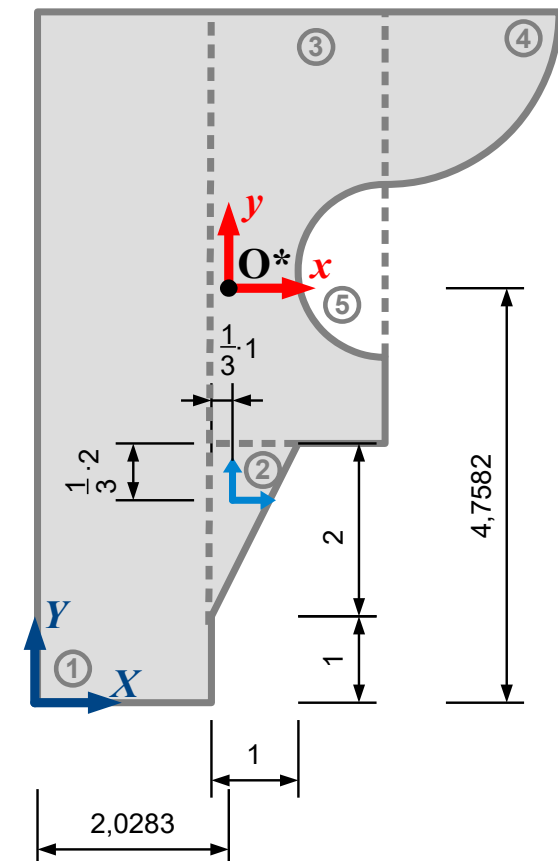
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_x = \underbrace{\left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right]}_{= 94,5311} + \underbrace{\left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right]}_{\substack{I + A \cdot d^2 \\ \text{tw. Steinera}}}$$

moment bezwładności
wzgl. prostej poziomej
zawierającej O*
od trójkąta



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

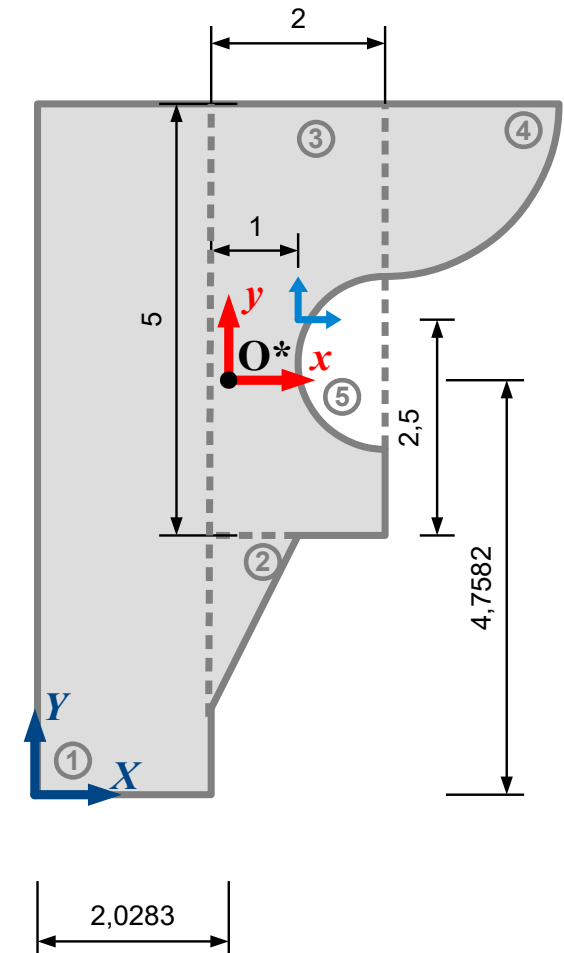
KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_x = \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right]$$

$= 94,5311$
 $= 6,1876$

$$+ \left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} \right]$$

centralny
moment bezwładności
prostokąta
wzgl. prostej poziomej



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

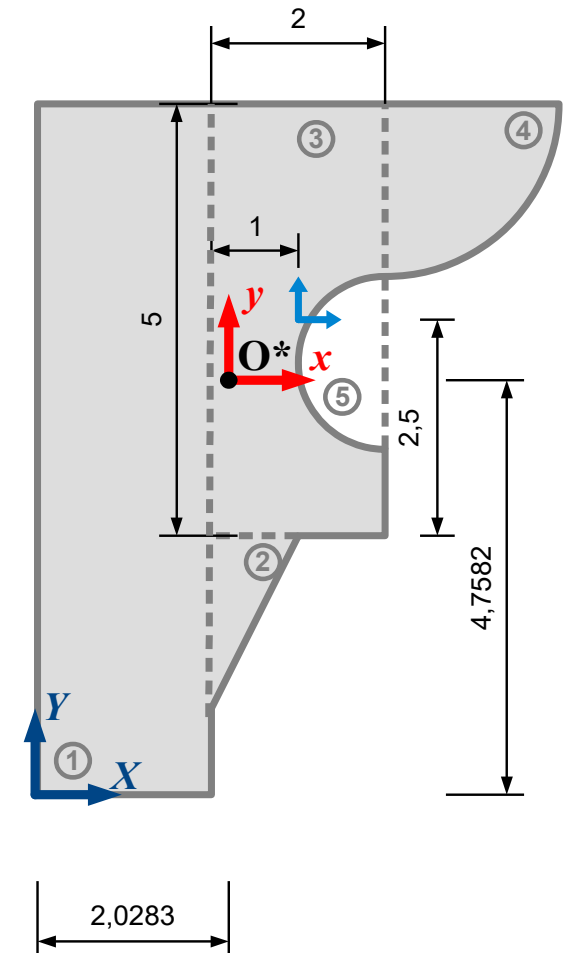
KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_x = \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right]$$

$= 94,5311$
 $= 6,1876$

$$+ \left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)^2 \right]$$

moment bezwładności
wzgl. prostej poziomej
zawierającej O*
od prostokąta



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

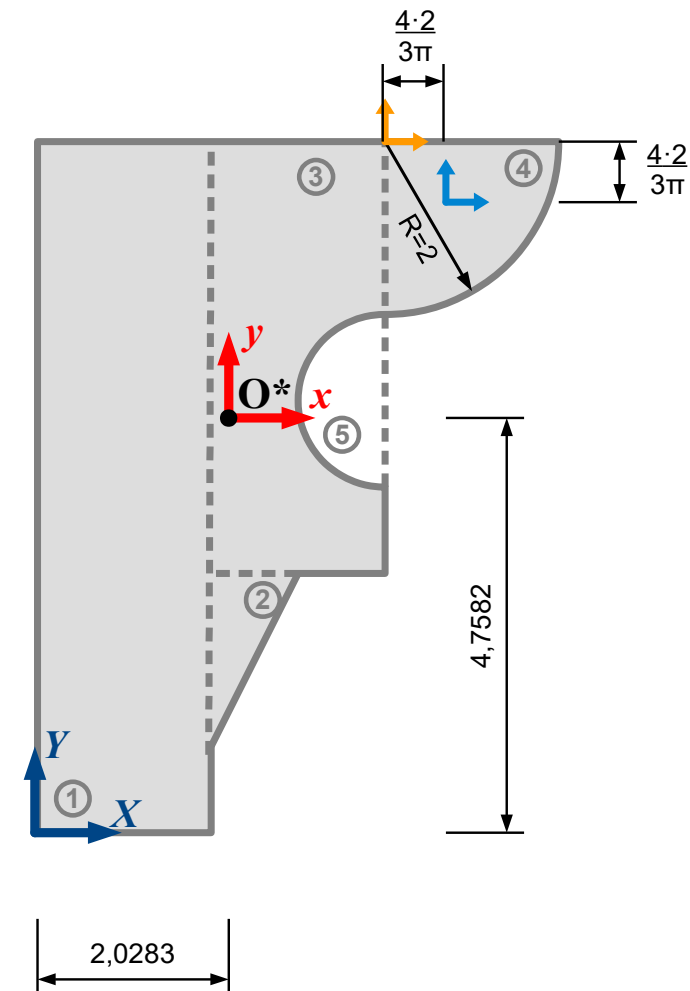
KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_x = \underbrace{\left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right]}_{= 94,5311} + \underbrace{\left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right]}_{= 6,1876}$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)^2 \right]}_{= 26,3361}$$

$$+ \frac{\pi \cdot 2^4}{16}$$

moment bezwładności
ćwiartki koła
wzgl. prostej poziomej
zawierającej jej krawędź



- Znamy wartość momentu bezwładności dla ćwiartki koła względem osi zawierającej jej krawędź (tabelka).

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

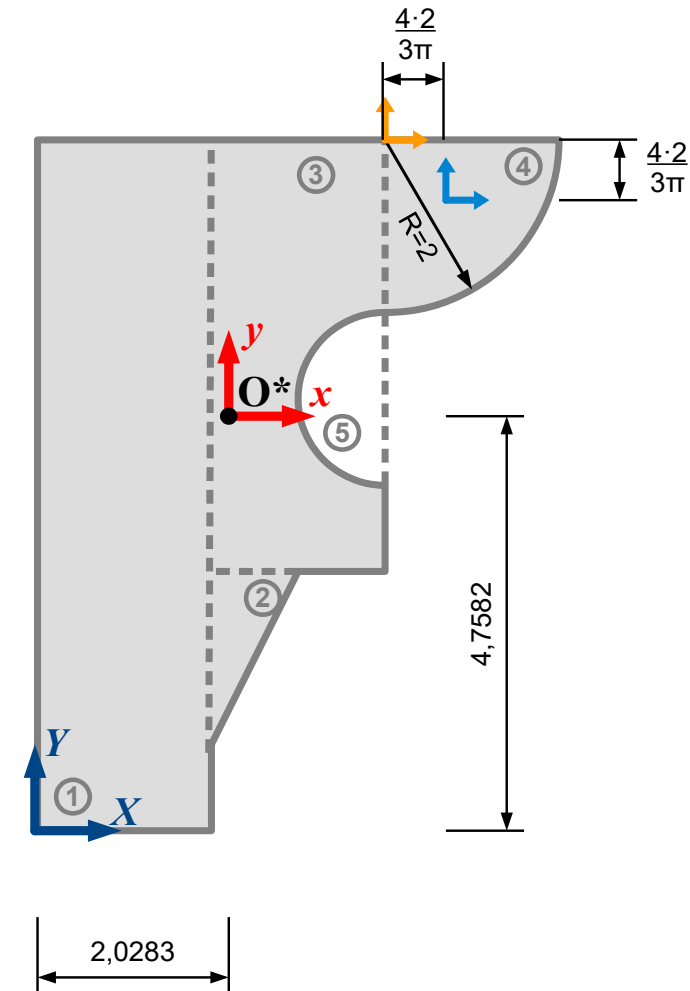
KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_x = \underbrace{\left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right]}_{= 94,5311} + \underbrace{\left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right]}_{= 6,1876}$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)^2 \right]}_{= 26,3361}$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{\pi \cdot 2^4}{16} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right)^2 \right]}_{\substack{I - A \cdot d^2 \\ \text{tw. Steinera}}}$$

centralny moment bezwładności ćwiartki koła wzgl. prostej poziomej



- Docelowo chcemy znać moment względem osi zawierającej O*, ale tw. Steinera pozwala nam przeliczać tylko między osią centralną a osią równoległą. Oś centralna dla całego przekroju nie jest centralna dla ćwiartki koła. Najpierw należy wyznaczyć moment centralny dla ćwiartki koła. Korzystamy z tw. Steinera (ze znakiem „-”, bo wyznaczamy moment centralny)

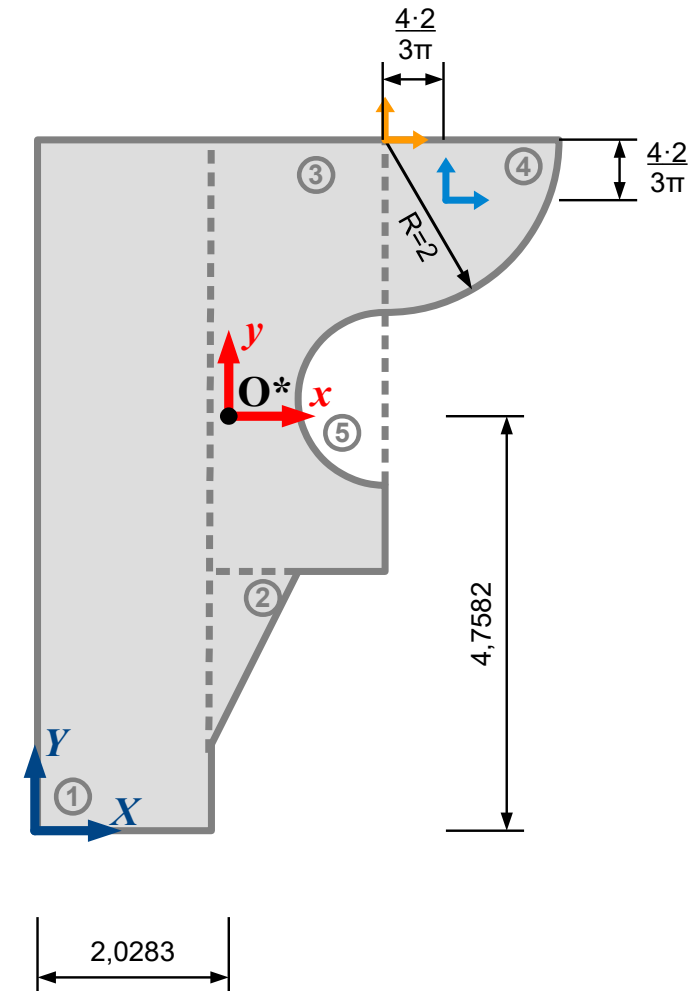
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_x = & \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 & = 94,5311 \qquad \qquad \qquad = 6,1876 \\
 & + \left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)^2 \right] \\
 & = 26,3361 \\
 & + \left[\frac{\pi \cdot 2^4}{16} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 & \underbrace{\quad \quad \quad}_{I} \quad - \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{A \cdot d^2} \quad + \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{A \cdot d^2} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{tw. Steinera}
 \end{aligned}$$

moment bezwładności
wzgl. prostej poziomej
zawierającej O*
od ćwiartki koła



- Znając centralny moment bezwładności dla ćwiartki koła wyznaczamy jej moment względem osi przechodzącej przez O*. Jest to oś centralna dla całego przekroju, ale nie jest centralna dla ćwiartki koła. Stosujemy zatem tw. Steinera ze znakiem „+” - odchodzimy od środka ciężkości ćwiartki, więc moment musi być większy.

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

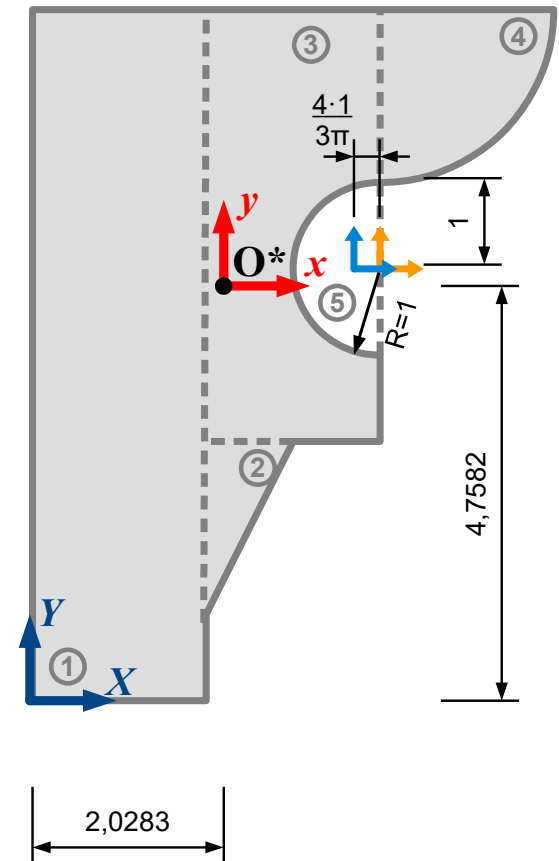
PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_x = & \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 & = 94,5311 \qquad \qquad \qquad = 6,1876 \\
 & + \left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)^2 \right] \\
 & = 26,3361 \\
 & + \left[\frac{\pi \cdot 2^4}{16} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 & = 18,8679
 \end{aligned}$$

$$- \left[\frac{\pi \cdot 1^4}{8} \right]$$

moment bezwładności
wzgl. prostej poziomej
zawierającej oś symetrii
połówki koła



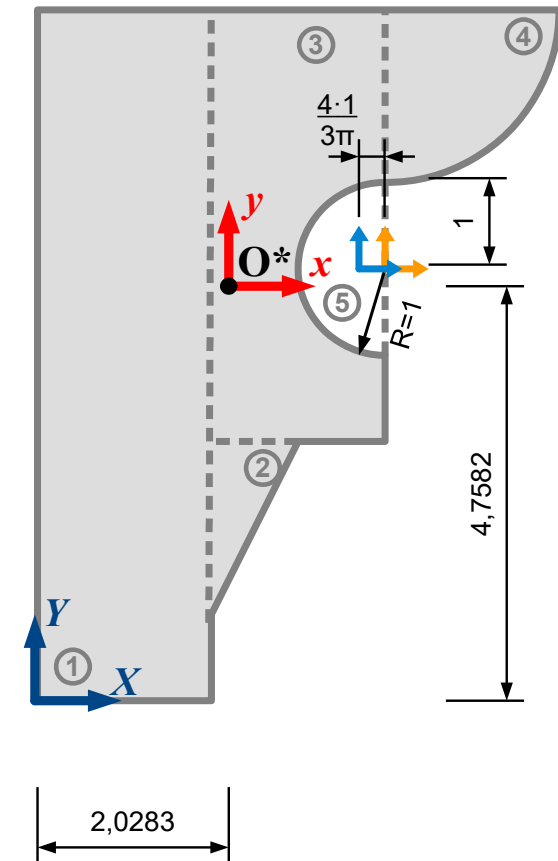
- W tabelce połówka koła miała inną orientację. Tam oś pozioma X zawierała krawędź połówki, a oś pionowa Y była osią symetrii. Tutaj jest odwrotnie, więc z tabelki bierzemy wartość odpowiadającą osi symetrii, czyli nasze I_x to I_y z tabelki.

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_x = & \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 & = 94,5311 \qquad \qquad \qquad = 6,1876 \\
 & + \left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)^2 \right] \\
 & = 26,3361 \\
 & + \left[\frac{\pi \cdot 2^4}{16} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 & = 18,8679 \\
 & - \left[\frac{\pi \cdot 1^4}{8} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot (0)^2 \right] \\
 & \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{\text{tw. Steinera}} \qquad \qquad \qquad \text{centralny} \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{moment bezwładności} \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{połówki kąta} \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{wzgl. prostej poziomej}
 \end{aligned}$$



- Odległość między osiami poziomymi układu pomocniczego i centralnego jest równa 0. Odpowiadające im momenty bezwładności są takie same, bo to w istocie jedna i ta sama oś.

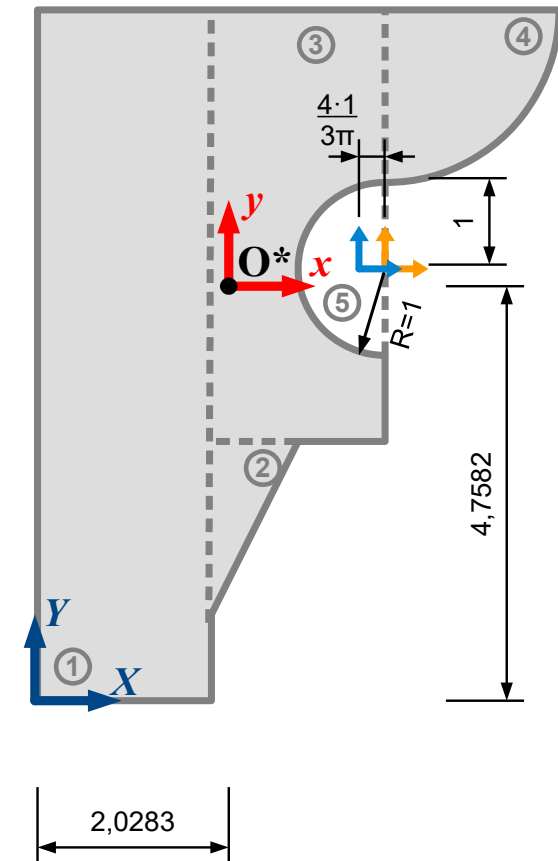
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_x = & \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 & = 94,5311 \qquad \qquad \qquad = 6,1876 \\
 & + \left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)^2 \right] \\
 & = 26,3361 \\
 & + \left[\frac{\pi \cdot 2^4}{16} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 & = 18,8679 \\
 & - \left[\frac{\pi \cdot 1^4}{8} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot (0)^2 + \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot (5 - 4,7582)^2 \right] \\
 & \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{I} - \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{A \cdot d^2} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{I} + \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{A \cdot d^2} \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{tw. Steinera}
 \end{aligned}$$

moment bezwładności
wzgl. prostej poziomej
zawierającej O*
od półki koła

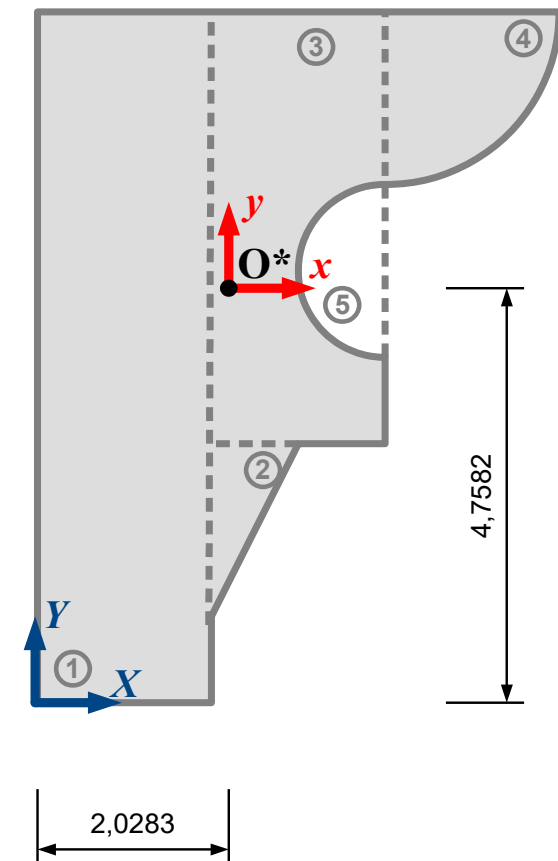


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_x &= \left[\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 &= 94,5311 + 6,1876 \\
 &+ \left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)^2 \right] \\
 &= 26,3361 \\
 &+ \left[\frac{\pi \cdot 2^4}{16} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right)^2 \right] \\
 &= 18,8679 \\
 &- \left[\frac{\pi \cdot 1^4}{8} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot (0)^2 + \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot (5 - 4,7582)^2 \right] \\
 &= 0,4845 \\
 &= 145,4382 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

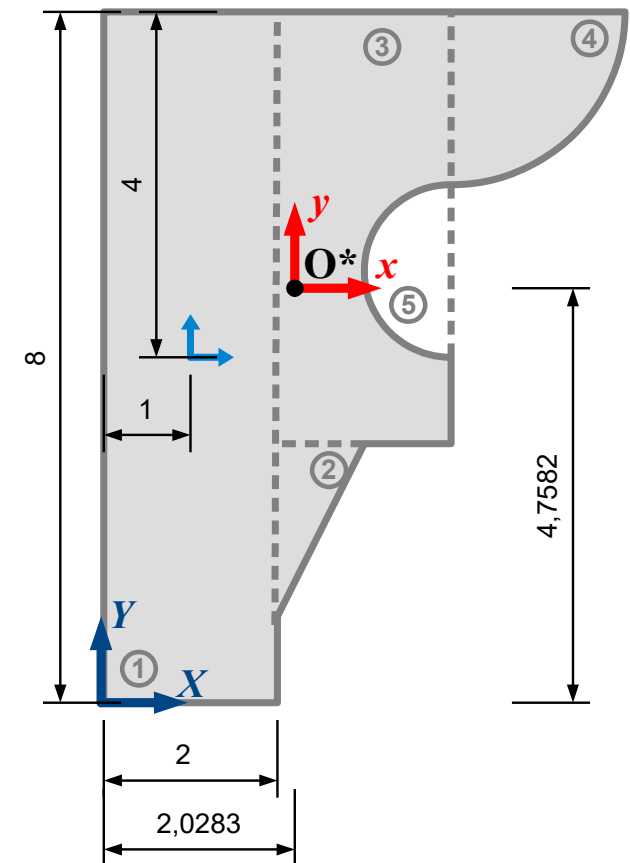


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_y = \left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} \right]$$

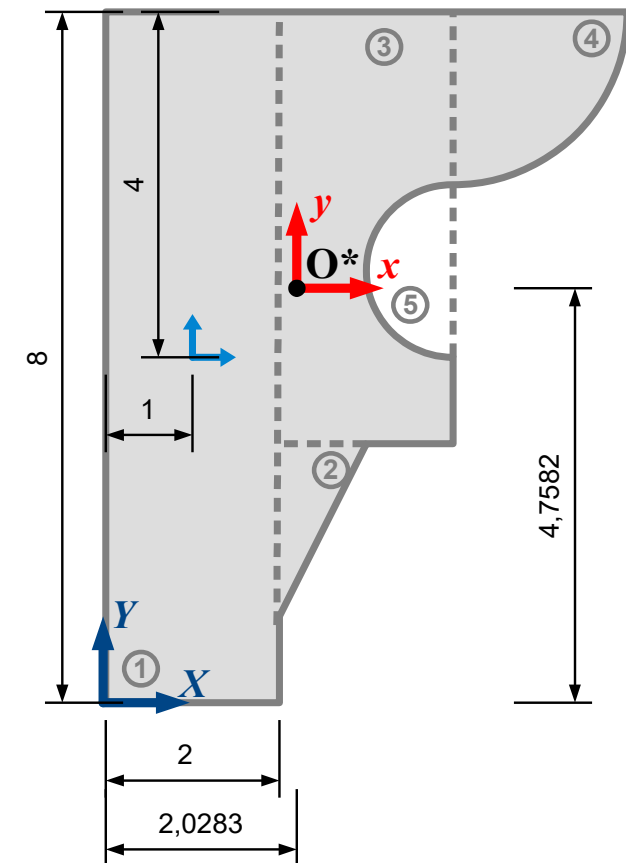


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_y = \left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right]$$

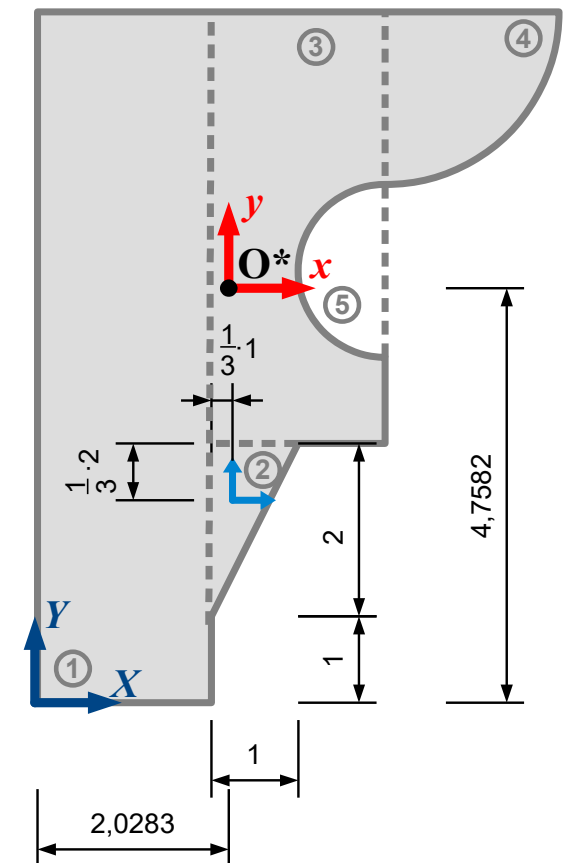


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_y = \underbrace{\left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right]}_{= 22,2514} + \left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} \right]$$

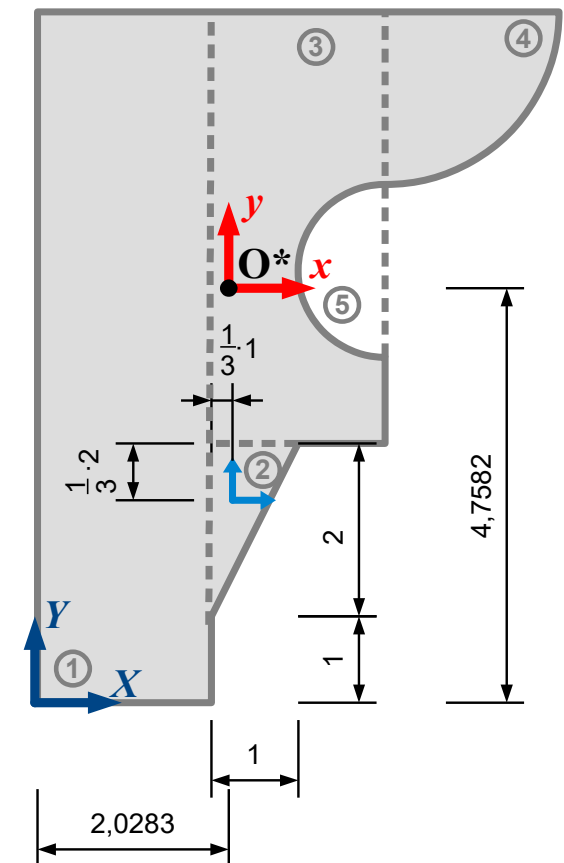


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_y = \underbrace{\left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right]}_{= 22,2514} + \left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right)^2 \right]$$



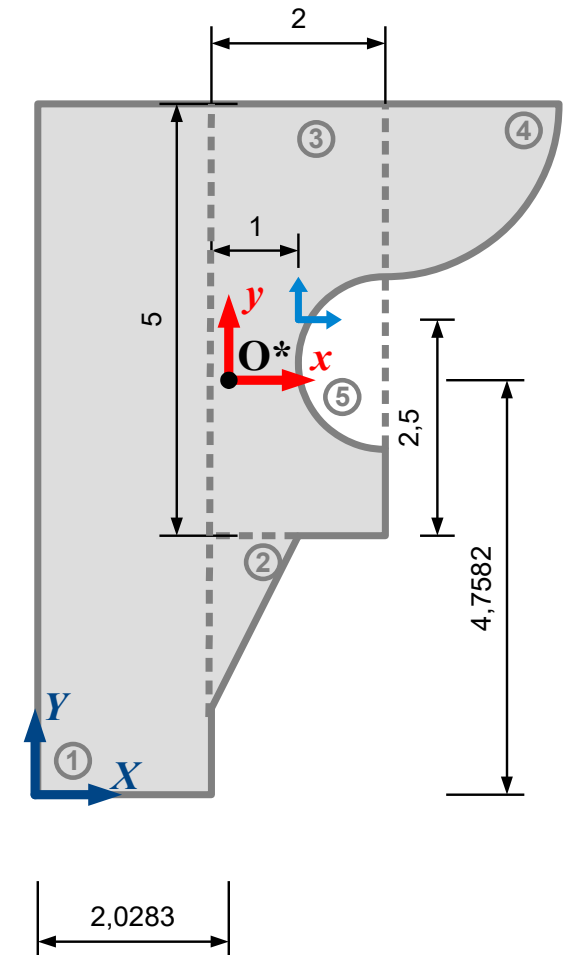
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_y = \underbrace{\left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right]}_{= 22,2514} + \underbrace{\left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right)^2 \right]}_{= 0,1486}$$

$$+ \left[\frac{2^3 \cdot 5}{12} \right]$$



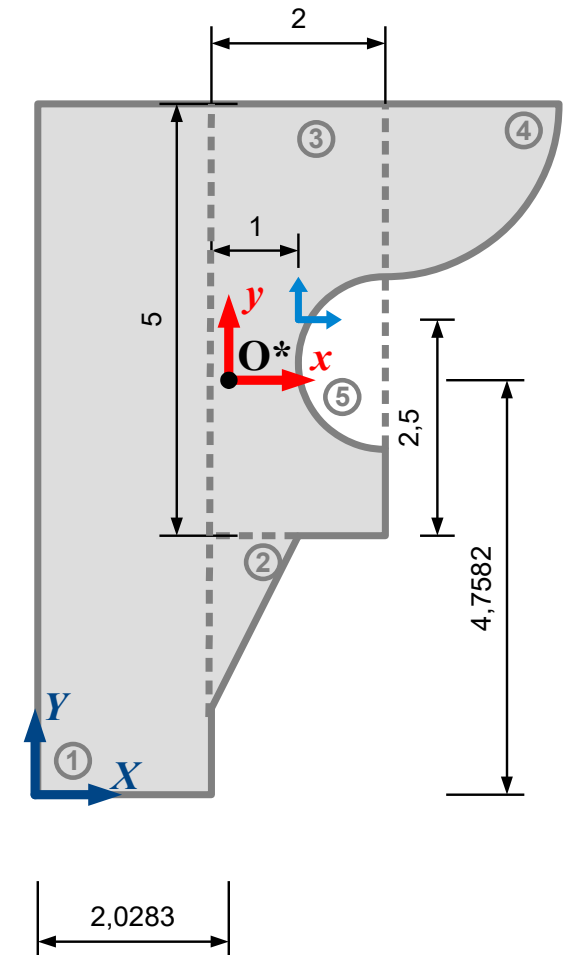
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_y = \underbrace{\left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right]}_{= 22,2514} + \underbrace{\left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right)^2 \right]}_{= 0,1486}$$

$$+ \left[\frac{2^3 \cdot 5}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (3 - 2,0283)^2 \right]$$



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

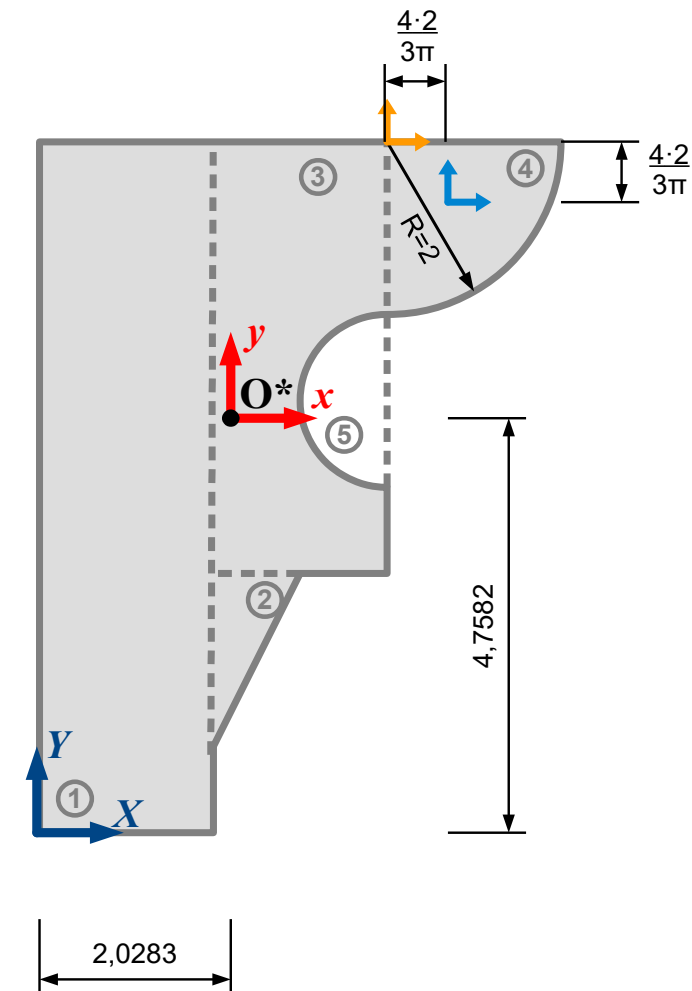
KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_y = \underbrace{\left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right]}_{= 22,2514} + \underbrace{\left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right)^2 \right]}_{= 0,1486}$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{2^3 \cdot 5}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (3 - 2,0283)^2 \right]}_{= 12,7755}$$

$$+ 2^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$$

- Jeśli zapamiętamy wzór na centralny moment bezwładności dla wycinka koła, to nie ma potrzeby stosowania tw. Steinera dwukrotnie – obliczenia mają wtedy ten sam schemat, co w przypadku pozostałych figur.
- Obydwa podejścia są równoważne.

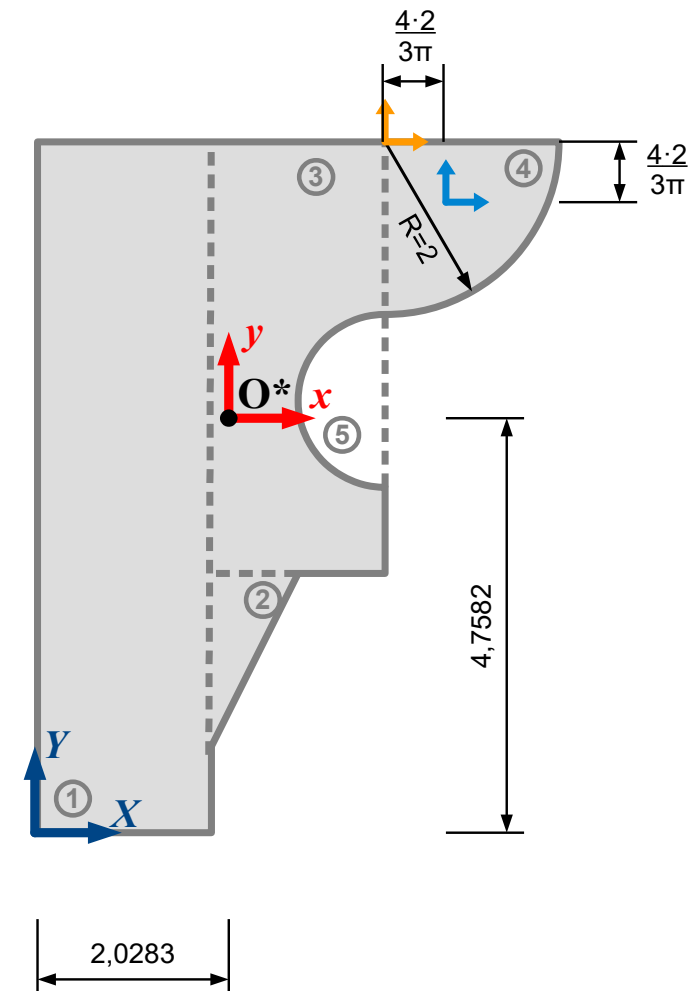


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_y = & \left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right] + \left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right)^2 \right] \\
 & = 22,2514 \qquad \qquad \qquad = 0,1486 \\
 & + \left[\frac{2^3 \cdot 5}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (3 - 2,0283)^2 \right] \\
 & = 12,7755 \\
 & + \left[2^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

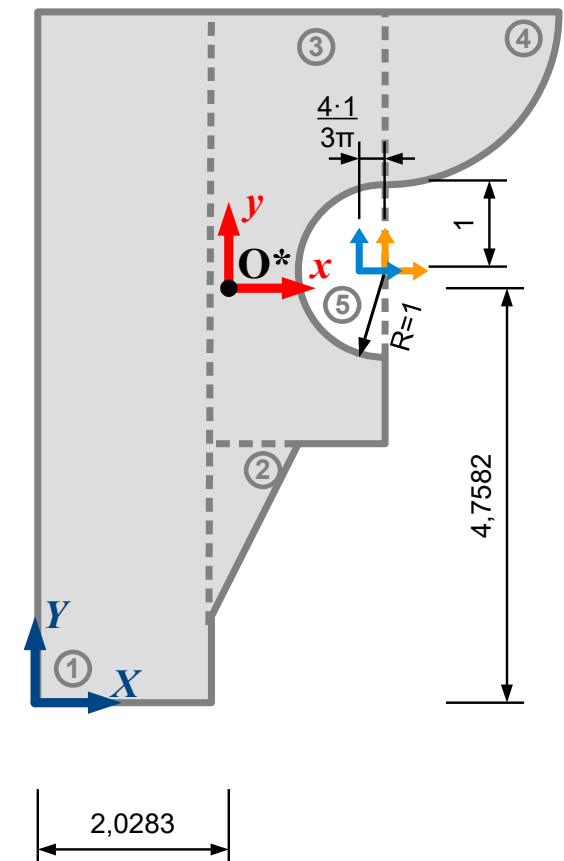


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_y = & \left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right] + \left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right)^2 \right] \\
 & = 22,2514 \qquad \qquad \qquad = 0,1486 \\
 + & \left[\frac{2^3 \cdot 5}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (3 - 2,0283)^2 \right] \\
 & = 12,7755 \\
 + & \left[2^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right)^2 \right] \\
 & = 25,8708 \\
 - & \left[1^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \right]
 \end{aligned}$$

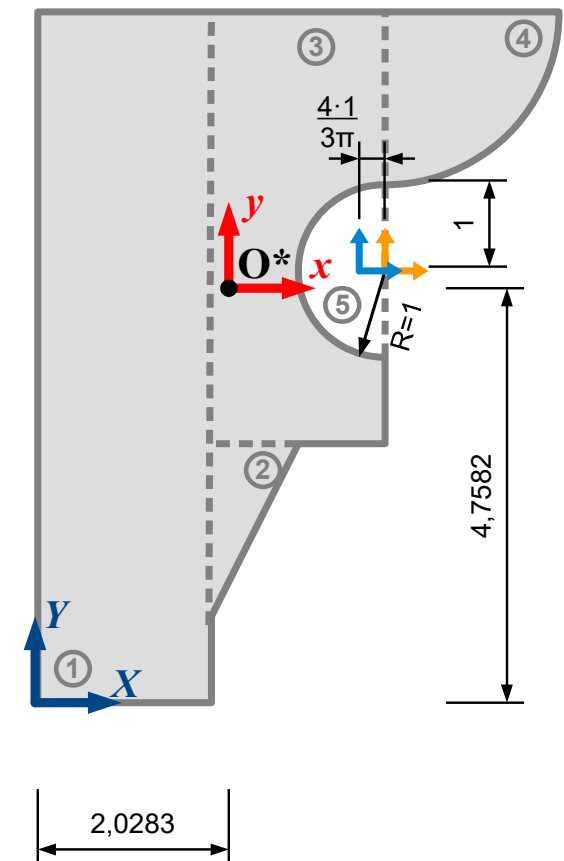


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_y = & \left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right] + \left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right)^2 \right] \\
 & = 22,2514 \qquad \qquad \qquad = 0,1486 \\
 + & \left[\frac{2^3 \cdot 5}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (3 - 2,0283)^2 \right] \\
 & = 12,7755 \\
 + & \left[2^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right)^2 \right] \\
 & = 25,8708 \\
 - & \left[1^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot \left(4 - \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} - 2,0283 \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

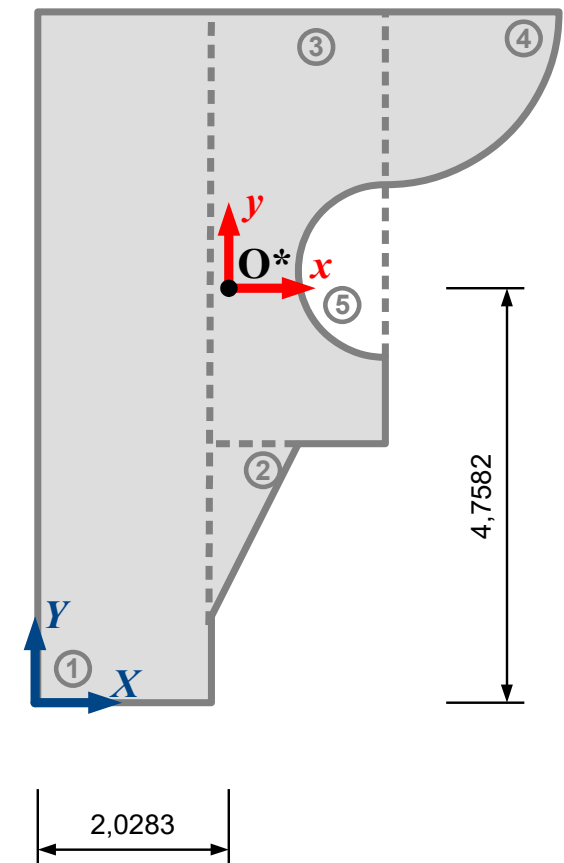


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_y &= \left[\frac{2^3 \cdot 8}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (1 - 2,0283)^2 \right] + \left[\frac{1^3 \cdot 2}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right)^2 \right] \\
 &= 22,2514 + 0,1486 \\
 &+ \left[\frac{2^3 \cdot 5}{12} + 2 \cdot 5 \cdot (3 - 2,0283)^2 \right] \\
 &= 12,7755 \\
 &+ \left[2^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right)^2 \right] \\
 &= 25,8708 \\
 &- \left[1^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot \left(4 - \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} - 2,0283 \right)^2 \right] \\
 &= 3,8704 \\
 &= 57,1759 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

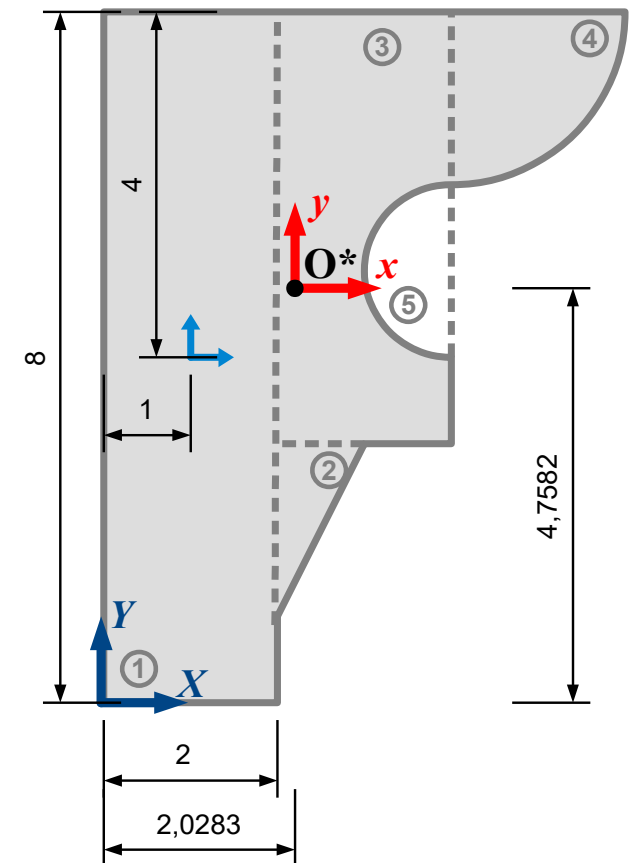


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_{xy} = [0]$$

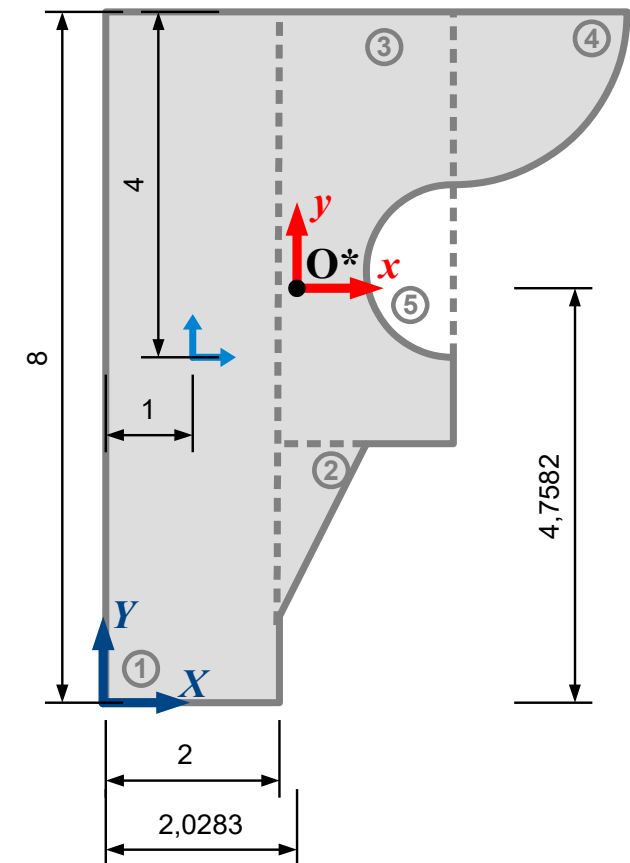


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_{xy} = [0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283)]$$



- Składowe wektora łączącego układ „stary” i „nowy” obliczamy jako **różnice odpowiednich współrzędnych końca i początku**. Kolejność odejmowania może być wybrana dowolnie, ale musi być ustalona – w obydwu nawiasach taka sama.

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

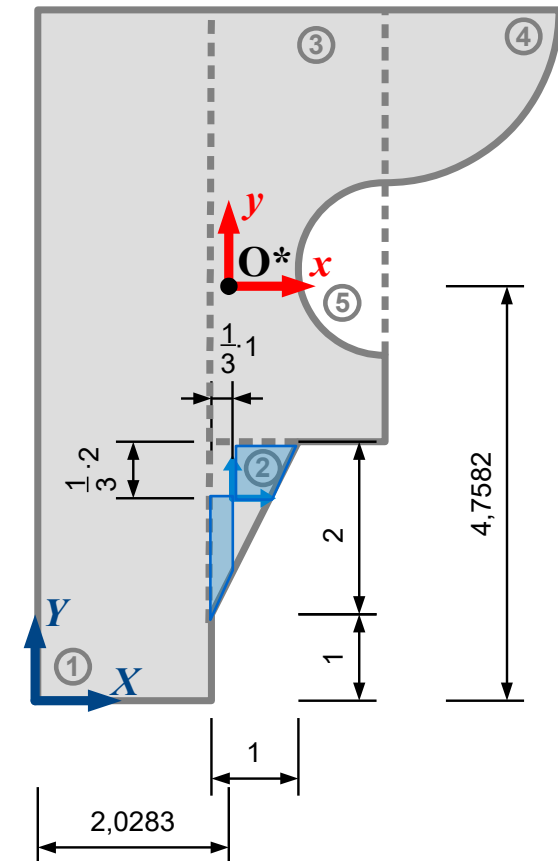
PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_{xy} = \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right]}_{= 12,4743}$$

$$+ \left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} \right]$$

- „Trapezy” są w I i III ćwiartce centralnego u. w. trójkąta, zatem moment **dewiacji jest dodatni**.



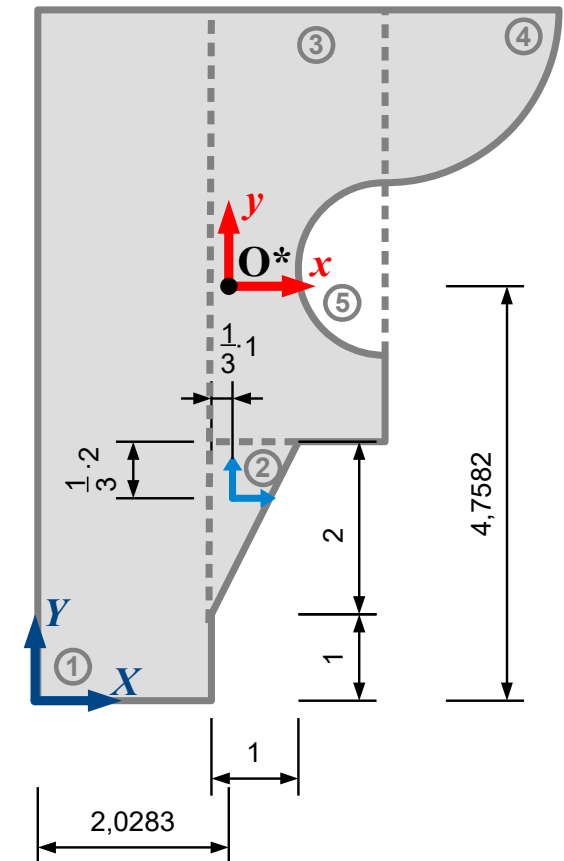
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_{xy} = \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right]}_{= 12,4743}$$

$$+ \left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right]$$



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

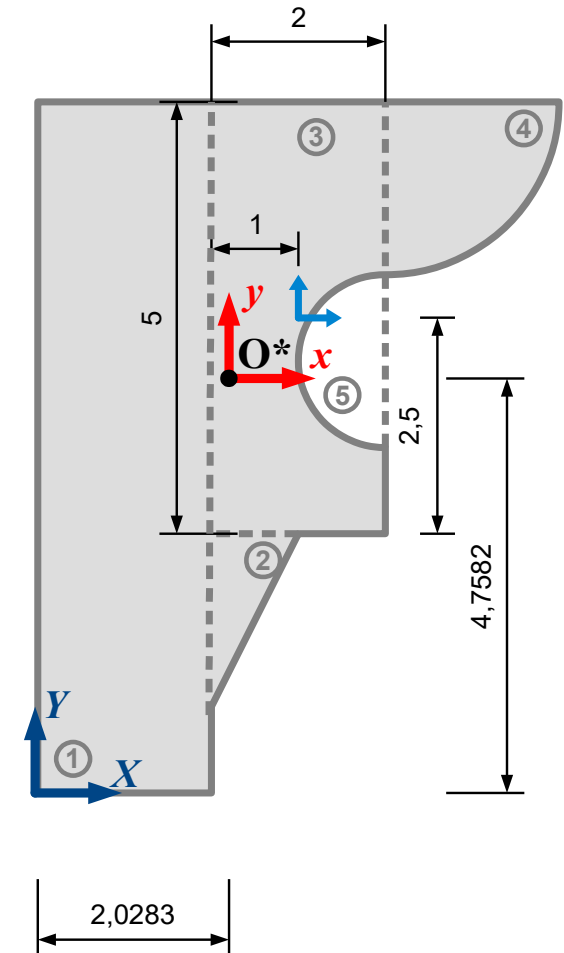
PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_{xy} = \underbrace{[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283)]}_{= 12,4743}$$

$$+ \underbrace{\left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right]}_{= -0,6841}$$

$$+ [0]$$



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

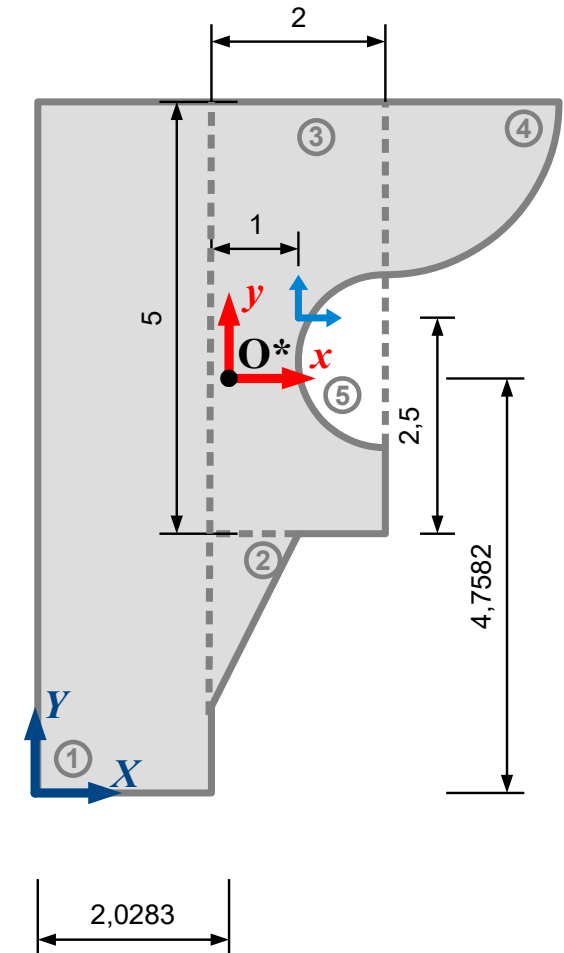
PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_{xy} = \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right]}_{= 12,4743}$$

$$+ \underbrace{\left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right]}_{= -0,6841}$$

$$+ \left[0 + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)(3 - 2,0283) \right]$$



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

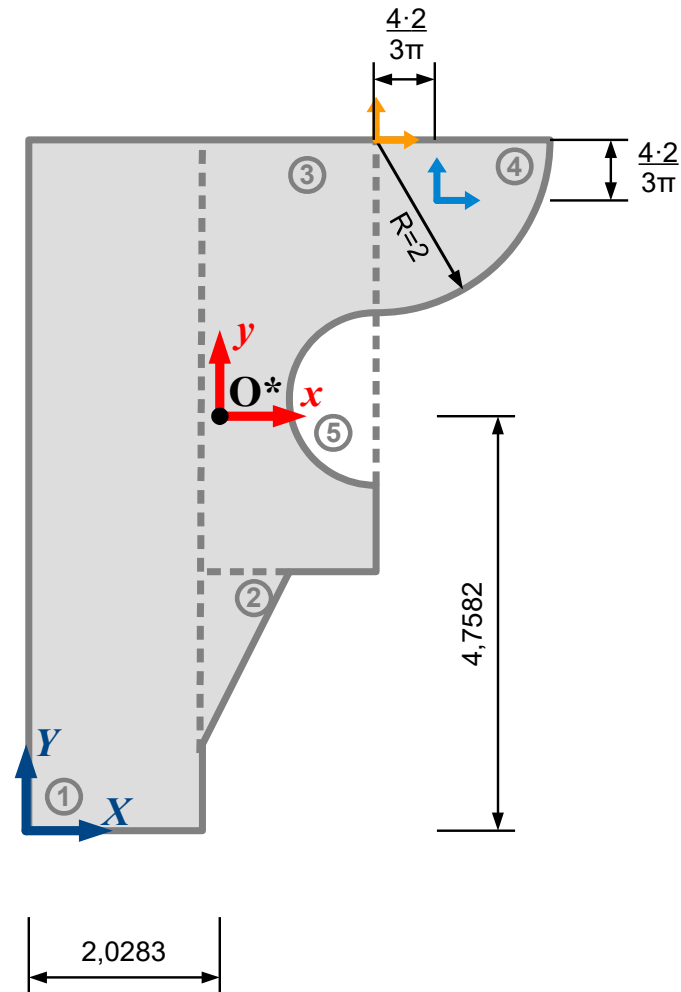
KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$I_{xy} = \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right]}_{= 12,4743}$$

$$+ \underbrace{\left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right]}_{= -0,6841}$$

$$+ \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)(3 - 2,0283) \right]}_{= 7,2082}$$

$$+ \left[-\frac{2^4}{8} \right]$$



- Moment dewiacji możemy ponownie obliczyć na 2 sposoby. Jeśli nie pamiętamy wzoru na moment centralny, możemy zapamiętać prostszy wzór na moment w układzie pomocniczym. Musimy wtedy dwukrotnie użyć tw. Steinera.
- Ćwiartka koła w całości znajduje się w IV ćwiartce pomocniczego u. w., zatem moment dewiacji jest ujemny.

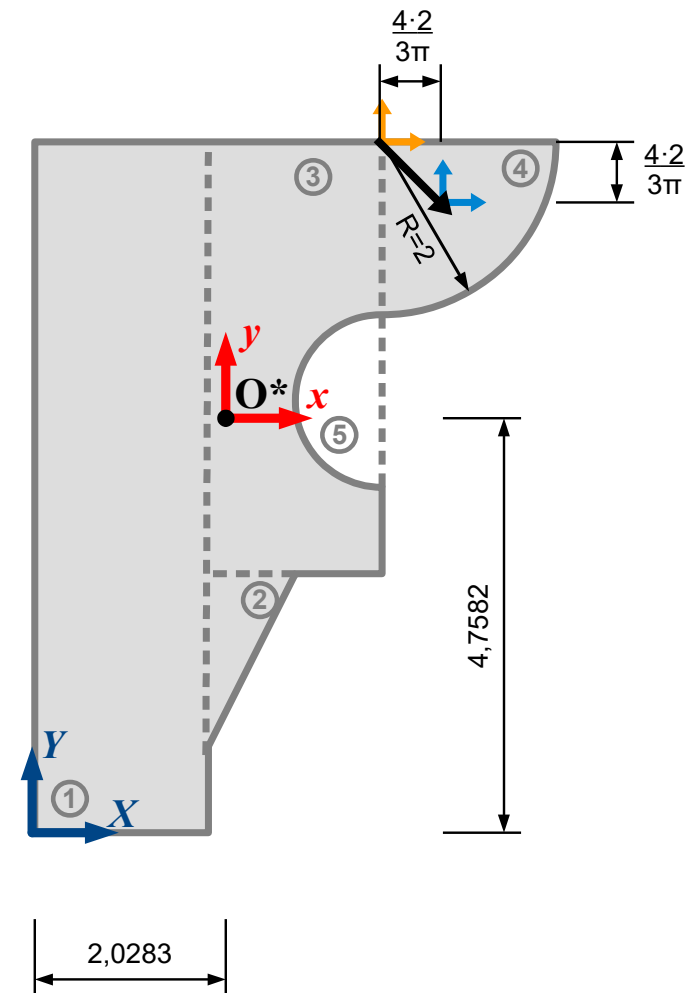
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right] \\
 &= 12,4743 \\
 + & \left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right] \\
 &= -0,6841 \\
 + & \left[0 + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)(3 - 2,0283) \right] \\
 &= 7,2082 \\
 + & \left[-\frac{2^4}{8} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \left(-\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \right] \\
 &= -2^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right)
 \end{aligned}$$

- Stosując tw. Steinera do wyznaczenia centralnego momentu dewiacji trzeba zwrócić uwagę na **znak składowych wektora łączącego układ pomocniczy i centralny**. Jeśli ćwiartka w całości znajduje się w II lub IV ćwiartce układu pomocniczego, składowe te mają różne znaki i trzeba to uwzględnić w rachunkach.
- Alternatywnie, bierzemy od razu centralny moment dewiacji.

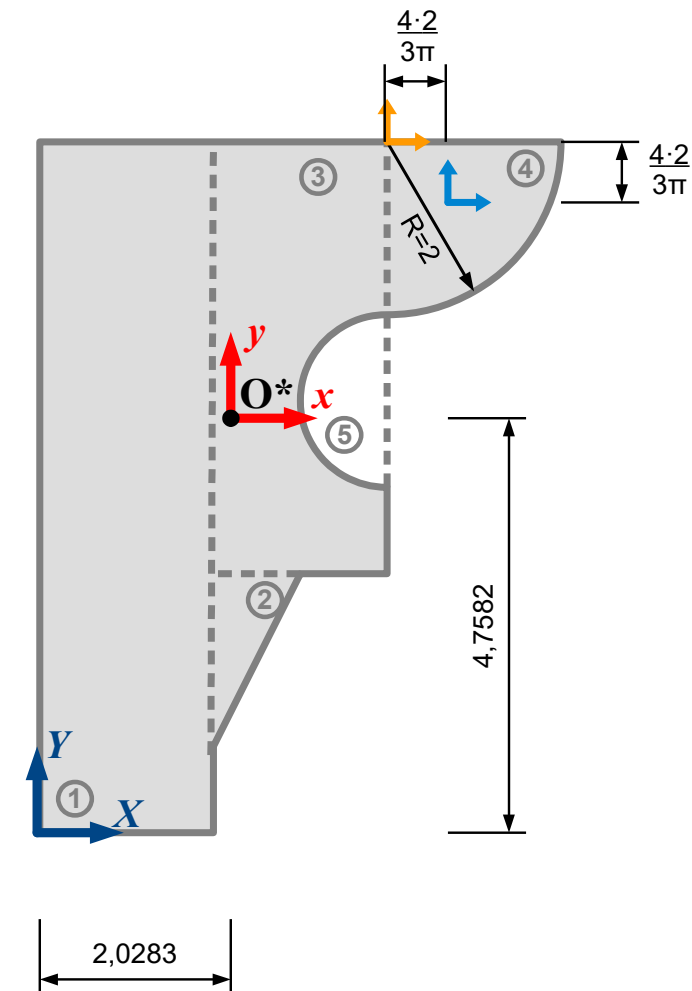


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_{xy} = & \underbrace{[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283)]}_{= 12,4743} \\
 & + \underbrace{\left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right]}_{= -0,6841} \\
 & + \underbrace{[0 + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)(3 - 2,0283)]}_{= 7,2082} \\
 & + \left[-\frac{2^4}{8} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \left(-\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right) \right]
 \end{aligned}$$



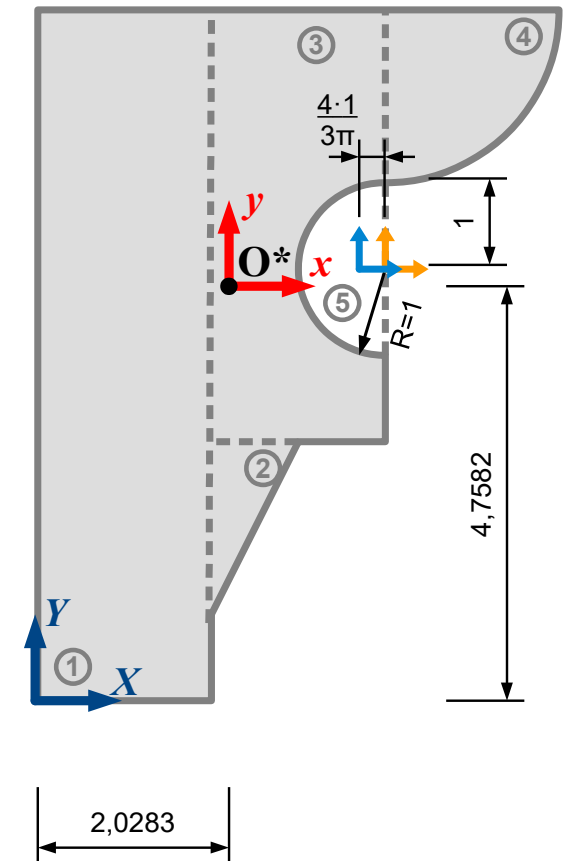
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_{xy} = & \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right]}_{= 12,4743} \\
 & + \underbrace{\left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right]}_{= -0,6841} \\
 & + \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)(3 - 2,0283) \right]}_{= 7,2082} \\
 & + \underbrace{\left[- \frac{2^4}{8} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \left(- \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right) \right]}_{= 21,4677}
 \end{aligned}$$

– [0]



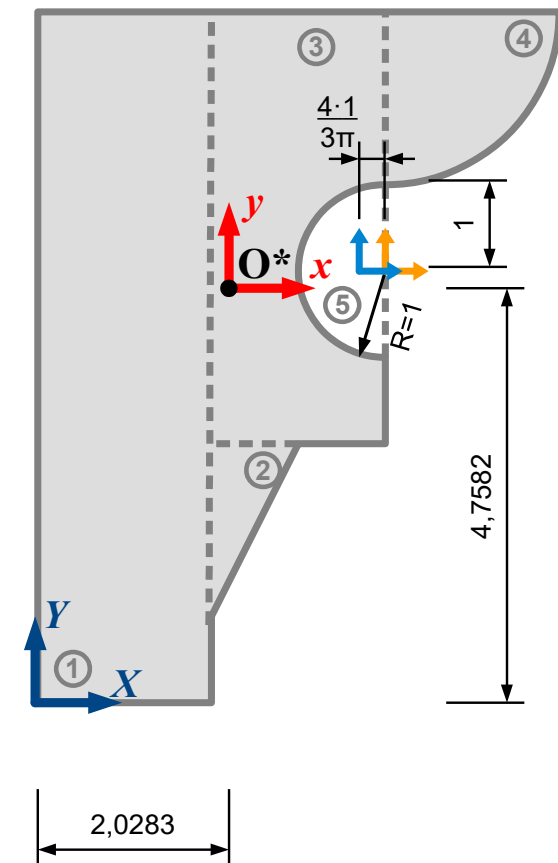
- Jeśli przynajmniej jedna z osi rozważanego układu współrzędnych jest **osią symetrii** figury, to **moment dewiacji jest zawsze zerowy**.

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_{xy} = & \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right]}_{= 12,4743} \\
 & + \underbrace{\left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right]}_{= -0,6841} \\
 & + \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)(3 - 2,0283) \right]}_{= 7,2082} \\
 & + \underbrace{\left[- \frac{2^4}{8} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \left(- \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right) \right]}_{= 21,4677} \\
 & - \underbrace{\left[0 - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(- \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \right]}_{= 0}
 \end{aligned}$$



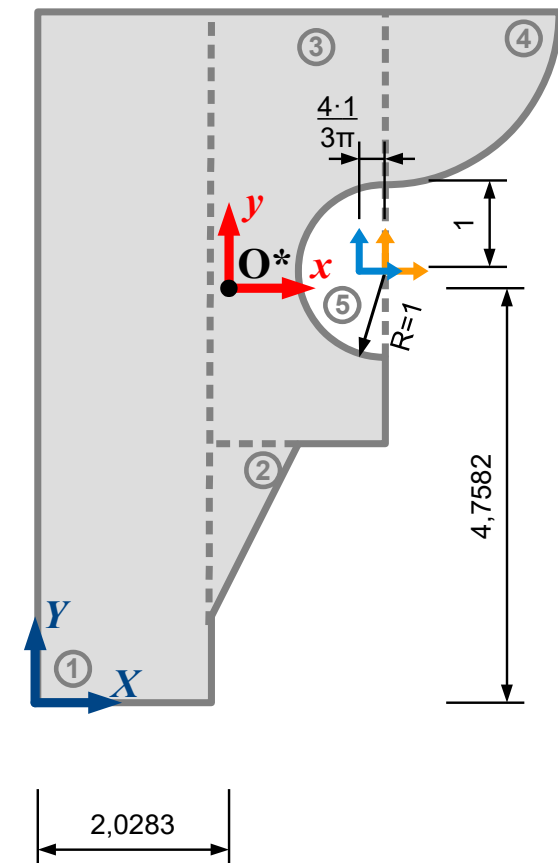
- Jeśli przynajmniej jedna z osi rozważanego układu współrzędnych jest **osią symetrii** figury, to **moment dewiacji jest zawsze zerowy**.

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_{xy} = & \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right]}_{= 12,4743} \\
 & + \underbrace{\left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right]}_{= -0,6841} \\
 & + \underbrace{\left[0 + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)(3 - 2,0283) \right]}_{= 7,2082} \\
 & + \underbrace{\left[-\frac{2^4}{8} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \left(-\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right) \right]}_{= 21,4677} \\
 & - \underbrace{\left[0 - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) (0) + \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \cdot (5 - 4,7582) \left(4 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right) \right]}_{= 0}
 \end{aligned}$$

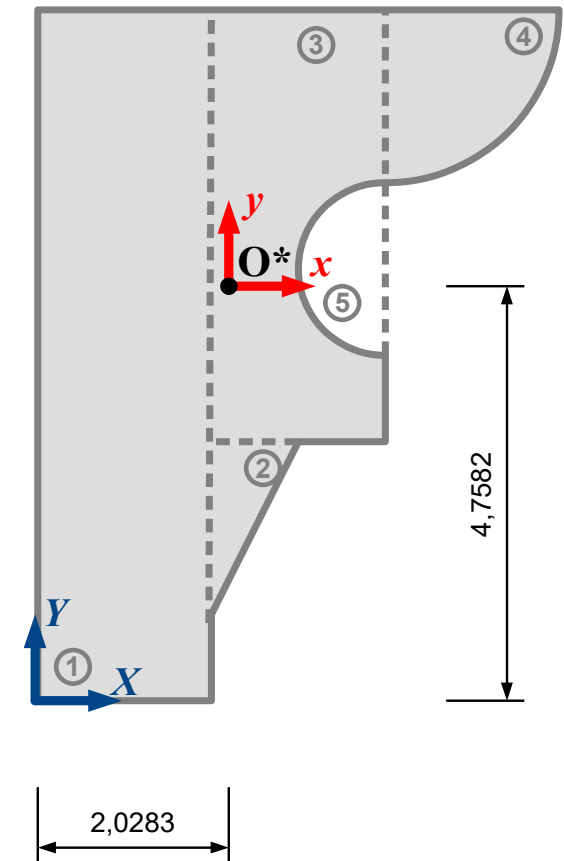


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

KROK 7 – wyznaczenie składowych tensora momentu bezwładności

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \left[0 + 2 \cdot 8 \cdot (4 - 4,7582)(1 - 2,0283) \right] \\
 &\quad = 12,4743 \\
 &+ \left[+ \frac{1^2 \cdot 2^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 4,7582 \right) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2,0283 \right) \right] \\
 &\quad = -0,6841 \\
 &+ \left[0 + 2 \cdot 5 \cdot (5,5 - 4,7582)(3 - 2,0283) \right] \\
 &\quad = 7,2082 \\
 &+ \left[-\frac{2^4}{8} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) \left(-\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(8 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 4,7582 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right) \right] \\
 &\quad = 21,4677 \\
 &- \left[0 - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3} \frac{2}{\pi} \right) (0) + \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \cdot (5 - 4,7582) \left(4 - \frac{4}{3} \frac{2}{\pi} - 2,0283 \right) \right] \\
 &\quad = 0,5877 \\
 &= 39,8783 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 1

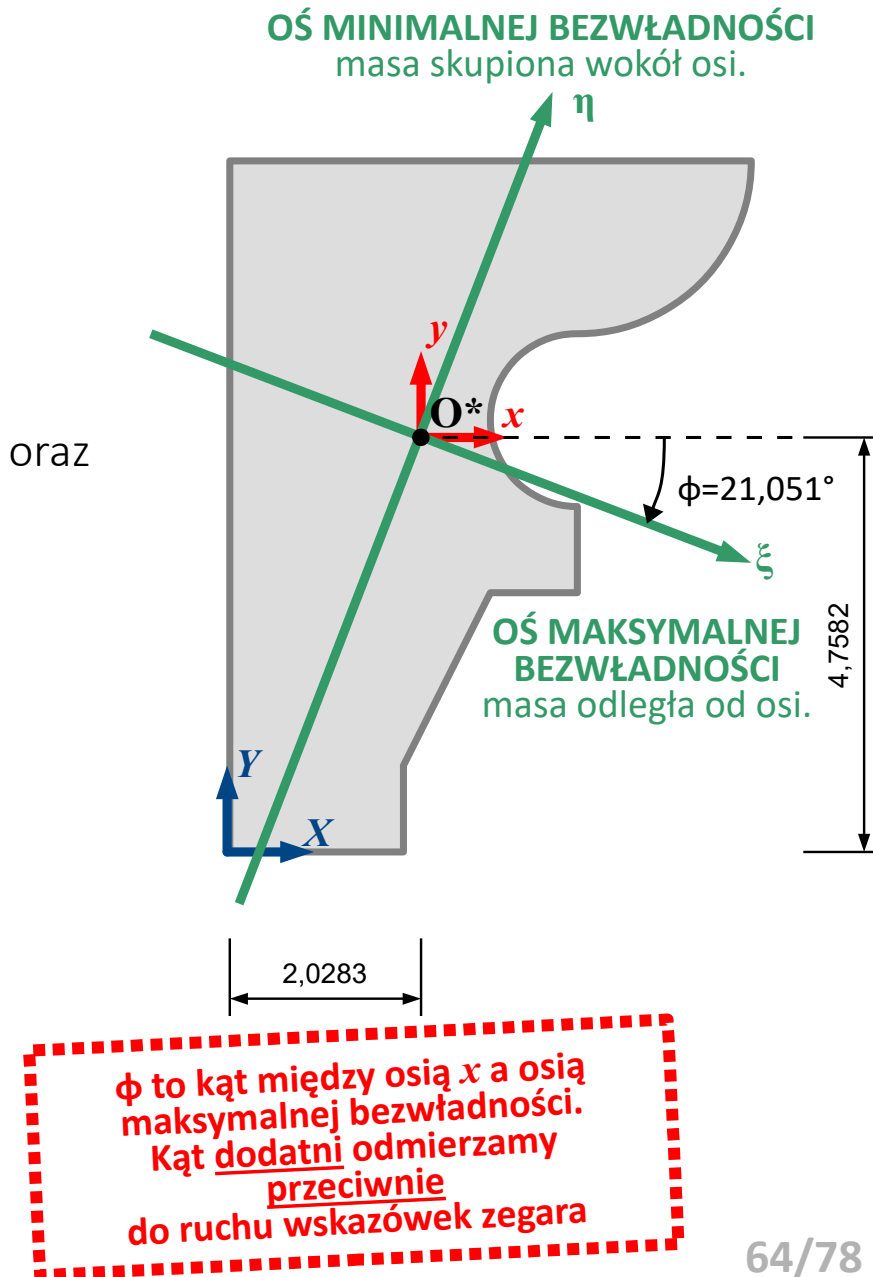
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 145,4382 & -39,8783 \\ -39,8783 & 57,1759 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

KROK 8 – wyznaczenie głównych centralnych osi bezwładności oraz głównych centralnych momentów bezwładności.

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 160,7868 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 41,8273 \text{ cm}^4$$

$$\phi = \text{arctg} \frac{I_{xy}}{I_y - I_1} = -21,051^\circ$$



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZEKROJE POPRZECZNE ELEMENTÓW NIEJEDNORODNYCH KOMPOZYTOWYCH

Jeśli element zginany wykonany jest z kilku materiałów o różnej sztywności, wtedy obliczamy **ważone charakterystyki geometryczne** przekroju. Wagą dla każdego obszaru odpowiadającego pewnemu materiałowi jest stosunek modułu Younga tego materiału do wybranego porównawczego modułu Younga.

$$A = \sum_i \left(\iint_{A_i} \frac{E_i}{E_{ref}} dA \right)$$

$$S_x = \sum_i \left(\iint_{A_i} \frac{E_i}{E_{ref}} y dA \right)$$

$$x_{O^*} = \frac{S_y}{A}$$

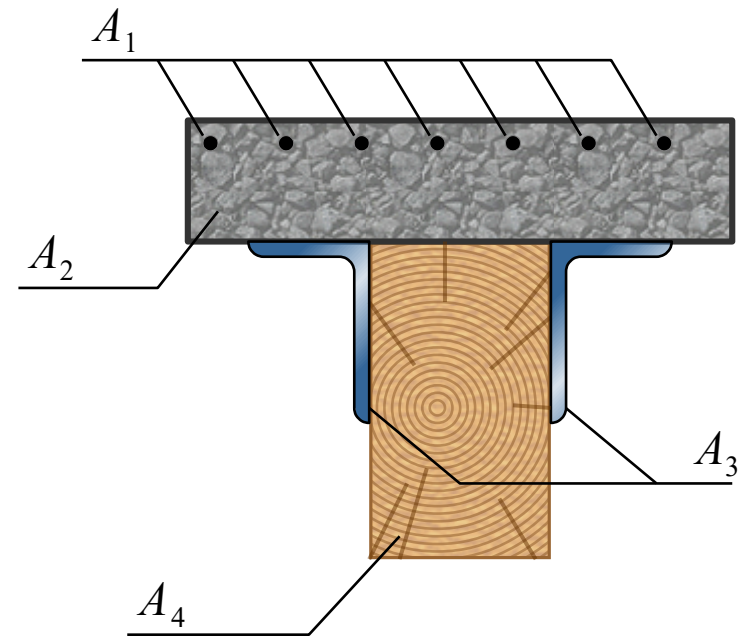
$$S_y = \sum_i \left(\iint_{A_i} \frac{E_i}{E_{ref}} x dA \right)$$

$$y_{O^*} = \frac{S_x}{A}$$

$$I_x = \sum_i \left(\iint_{A_i} \frac{E_i}{E_{ref}} y^2 dA \right)$$

$$I_y = \sum_i \left(\iint_{A_i} \frac{E_i}{E_{ref}} x^2 dA \right)$$

$$I_{xy} = \sum_i \left(\iint_{A_i} \frac{E_i}{E_{ref}} xy dA \right)$$



Sztywność względna stanowi swego rodzaju analogię dla gęstości w masowych momentach bezwładności.

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 2

- Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności przekroju żelbetowego.
Przyjąć sztywność betonu jako sztywność odniesienia.

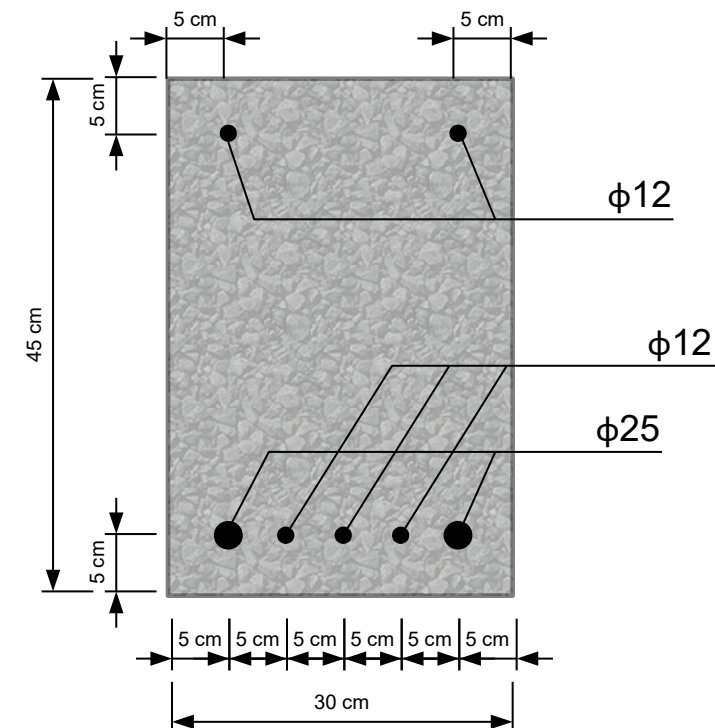
moduł Younga betonu $E_b = 30 \text{ GPa} = E_{ref}$ $\frac{E_b}{E_{ref}} = 1$

moduł Younga stali $E_s = 210 \text{ GPa}$ $\frac{E_s}{E_{ref}} = 7$

Stal „przyczynia się 7 razy bardziej” do sztywności przekroju niż beton.

UWAGA: Przekrój jest **symetryczny**. Oś symetrii jest główną centralną osią bezwładności i zawiera ona Środek ciężkości. Druga oś jest do niej prostopadła. Wystarczy, że Obliczymy moment statyczny względem osi poziomej, aby znaleźć Pionową współrzędną środka ciężkości.

Przyjmujemy wyjściowy układ współrzędnych w taki sposób, aby jego oś pionowa pokrywała się z osią symetrii.



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 2

Ważone pole powierzchni:

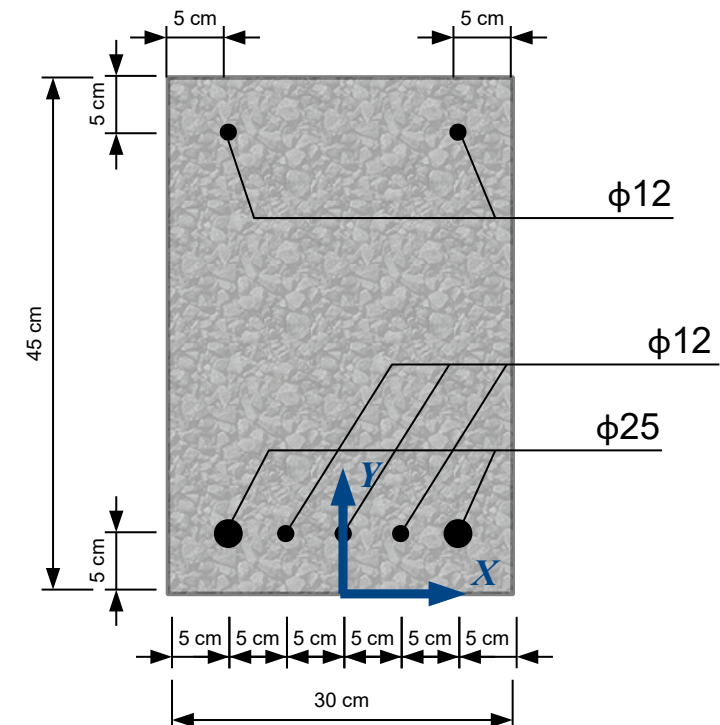
$$A = 1 \cdot \underbrace{[30 \cdot 45]}_{= 1350} + 7 \cdot \underbrace{\left[5 \cdot \frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2,5^2}{4} \right]}_{= 108,31} = 1458,31 \text{ cm}^2$$

Ważony moment statyczny:

$$S_X = 1 \cdot \underbrace{\left[30 \cdot 45 \cdot \frac{45}{2} \right]}_{= 30375} + 7 \cdot \underbrace{\left[\frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} \cdot (3 \cdot 5 + 2 \cdot 40) + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2,5^2}{4} \cdot 5 \right]}_{= 1095,71} = 31470,71 \text{ cm}^3$$

Położenie środka ciężkości:

$$Y_{o^*} = \frac{S_X}{A} = 21,58 \text{ cm}$$



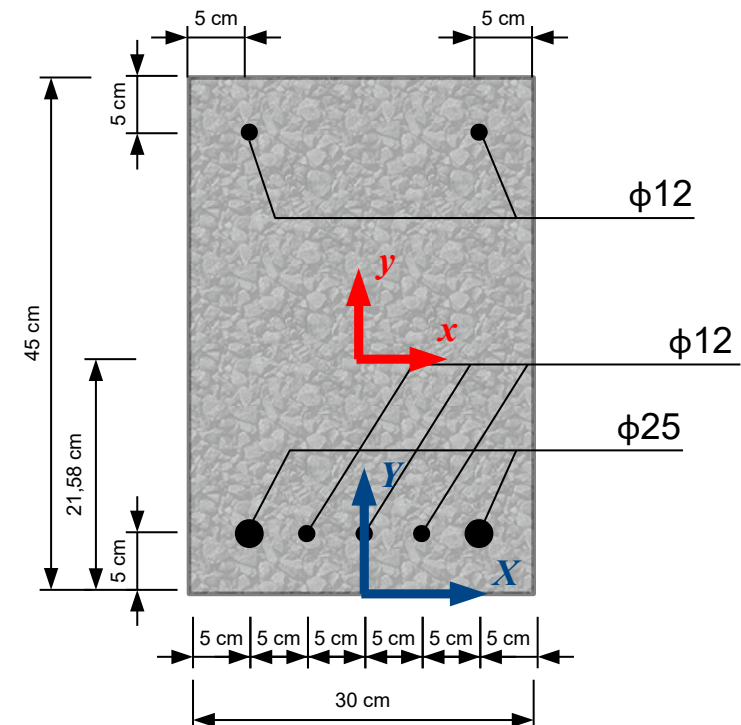
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 2

Ważony moment bezwładności:

$$\begin{aligned}
 I_X &= 1 \cdot \left[\frac{30 \cdot 45^3}{3} \right] \\
 &= 911250 \\
 &+ 7 \cdot \left[\underbrace{5 \cdot \frac{\pi \cdot 1,2^4}{64}}_{= 0,51} + \underbrace{\frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} \cdot [3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 40^2]}_{= 3703,94} \right] \\
 &= 25931,13 \\
 &+ 7 \cdot \left[\underbrace{2 \cdot \frac{\pi \cdot 2,5^4}{64}}_{= 3,84} + \underbrace{\frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} \cdot [2 \cdot 5^2]}_{= 245,44} \right] = 938926,03 \text{ cm}^4 \\
 &= 1744,90
 \end{aligned}$$

- Centralny moment bezwładności prętów zbrojeniowych jest tak mały, że z reguły pomija się go w obliczeniach.

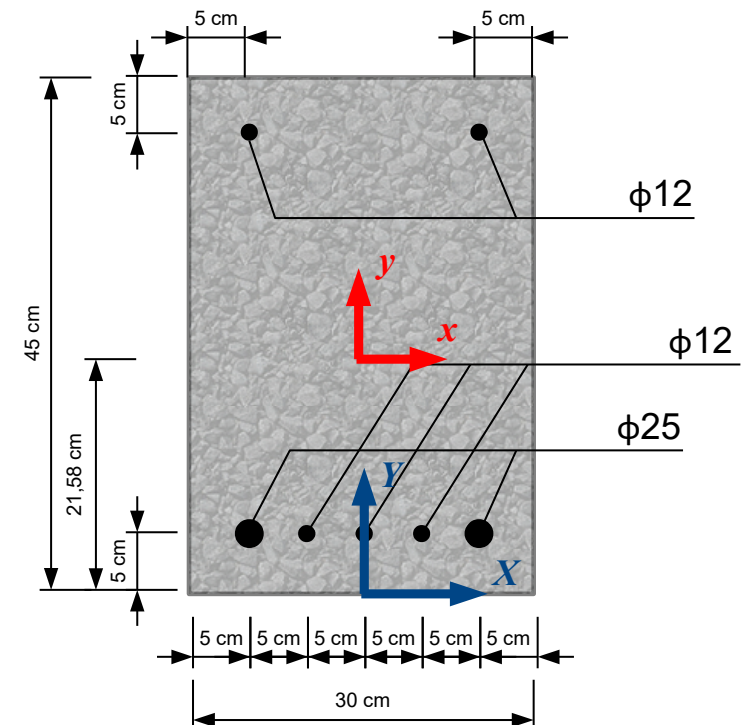


CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 2

Ważony moment bezwładności:

$$\begin{aligned}
 I_Y &= 1 \cdot \left[\frac{30^3 \cdot 45}{12} \right] \\
 &= 101250 \\
 &+ 7 \cdot \left[\underbrace{5 \cdot \frac{\pi \cdot 1,2^4}{64}}_{= 0,51} + \underbrace{\frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} \cdot [1 \cdot 0^2 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2]}_{= 282,74} \right] \\
 &= 1982,77 \\
 &+ 7 \cdot \left[\underbrace{2 \cdot \frac{\pi \cdot 2,5^4}{64}}_{= 3,84} + \underbrace{\frac{\pi \cdot 2,5^2}{4} \cdot [2 \cdot 10^2]}_{= 981,75} \right] = 110131,84 \text{ cm}^4 \\
 &= 6899,08
 \end{aligned}$$



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 2

Główne centralne momenty bezwładności:

Ponieważ przekrój jest **symetryczny**, zatem **układ osi centralnych**, z których jedna pokrywa się z osią symetrii, jest **układem głównych centralnych osi bezwładności**.

- W takim układzie **moment dewiacji jest zerowy**.

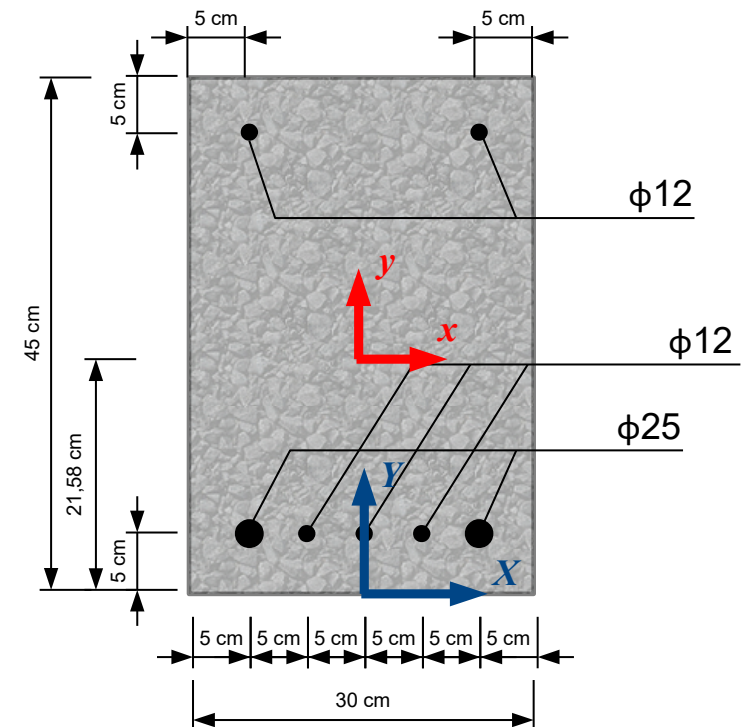
$$I_{xy} = 0 \text{ cm}^4$$

- Oś Y pokrywa się z osią y , zatem:

$$I_y = I_Y = 110131,84 \text{ cm}^4$$

- Moment względem osi x znajdujemy z **tw. Steinera** zastosowanego do całego przekroju. Wyznaczamy wartość centralną, więc bierzemy znak „-”:

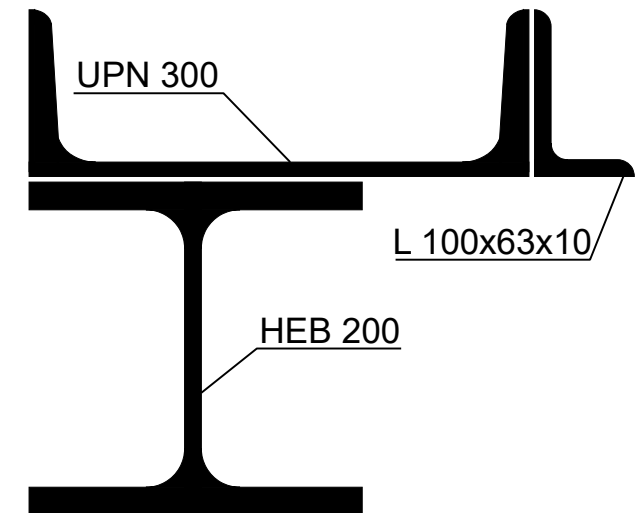
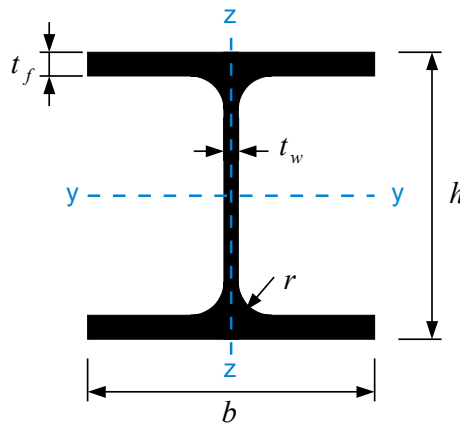
$$I_x = I_X - A \cdot Y_{O^*}^2 = 259778,27 \text{ cm}^4$$



CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

UWAGI:

- W **praktyce projektowej** z wyznaczaniem osi własnych i głównych momentów bezwładności mamy do czynienia z reguły przy prostych **przekrojach prostokątnych lub teowych (żelbet, drewno) lub przekrojach złożonych z kształtowników metalowych.**
- Zasady wyznaczania osi własnych i głównych momentów bezwładności dla kształtowników są identyczne jak to pokazano wcześniej, przy czym **wartości momentów bezwładności dla każdego z kształtowników odczytuje się z tablic.**



	h	b	t_f	t_w	r	A	I_y	I_z
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[cm ²]	[cm ⁴]	[cm ⁴]
HEB 100	100	100	10	6	12	26	449	167
HEB 120	120	120	11	6,5	12	34	864	317
HEB 140	140	140	12	7	12	43	1510	550

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR ZŁOŻONYCH

PRZYKŁAD 3:

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$e = 20,1 \text{ mm}$$

$$A_{HEB} = 78,1 \text{ cm}^2$$

$$A_C = 32,2 \text{ cm}^2$$

$$I_{y,HEB} = 5700 \text{ cm}^4$$

$$I_{y,C} = 1910 \text{ cm}^4$$

$$I_{z,HEB} = 2000 \text{ cm}^4$$

$$I_{z,C} = 148 \text{ cm}^4$$

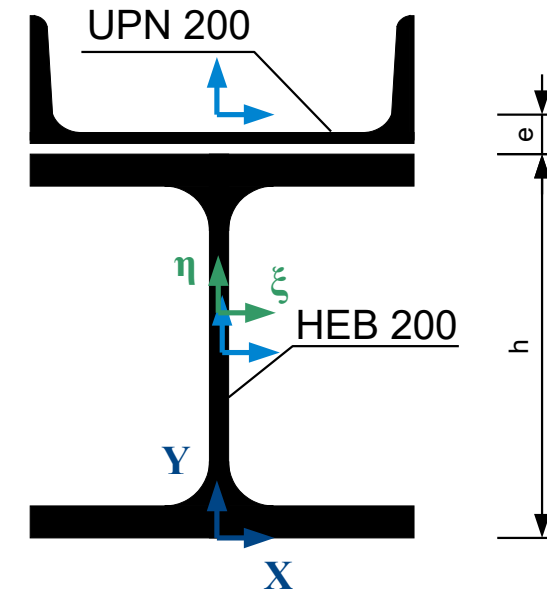
$$A = A_{HEB} + A_C = 110,3 \text{ cm}^2$$

$$S_X = \left[A_{HEB} \cdot \frac{h}{2} \right] + [A_C \cdot (h+e)] = 148,72 \text{ cm}^3$$

$$Y_{O^*} = \frac{S_X}{A} = 135,06 \text{ mm}$$

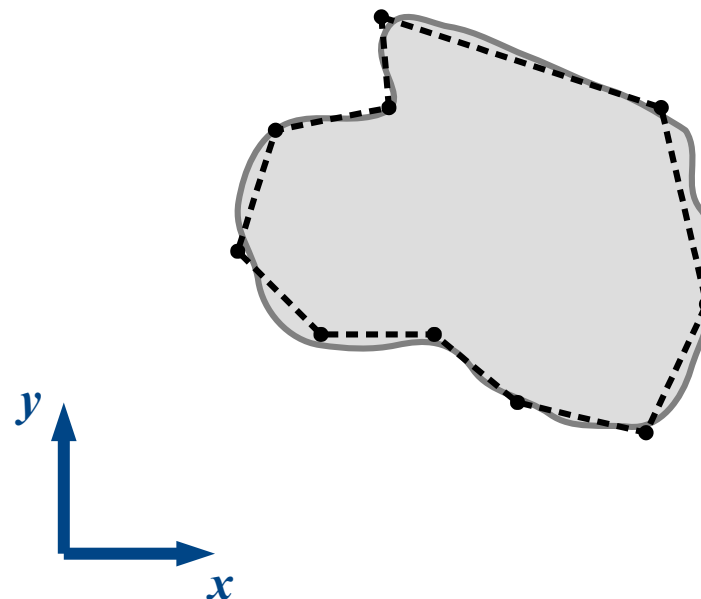
$$I_{\xi} = \left[I_{y,HEB} + A_{HEB} \cdot \left(\frac{h}{2} - Y_{O^*} \right)^2 \right] + \left[I_{z,C} + A_C \cdot (h+e - Y_{O^*})^2 \right] = 9136,65 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta} = I_{z,HEB} + I_{y,C} = 3910 \text{ cm}^4$$



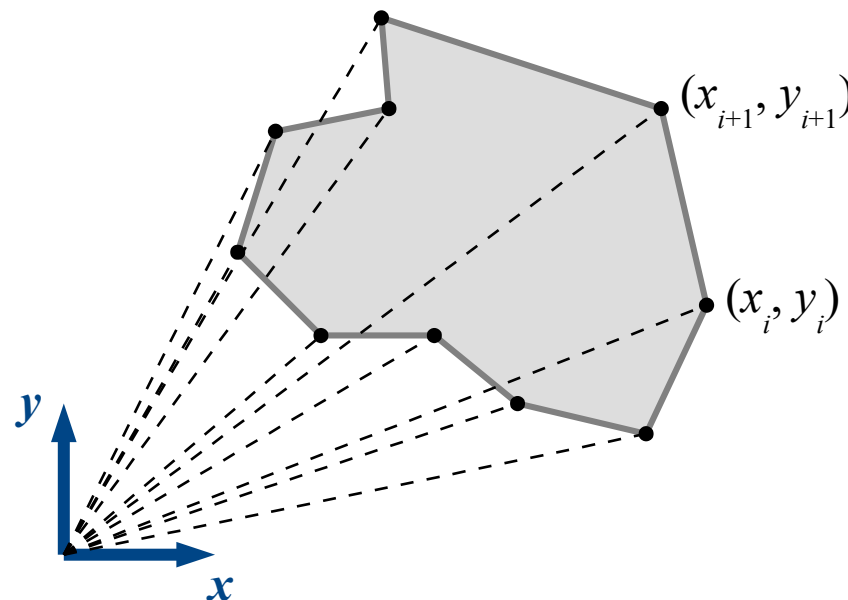
NUMERYCZNE WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK GEOMETRYCZNYCH PRZEKROJÓW PŁASKICH

- Każdą figurę płaską można przybliżyć wielokątem.



NUMERYCZNE WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK GEOMETRYCZNYCH PRZEKROJÓW PŁASKICH

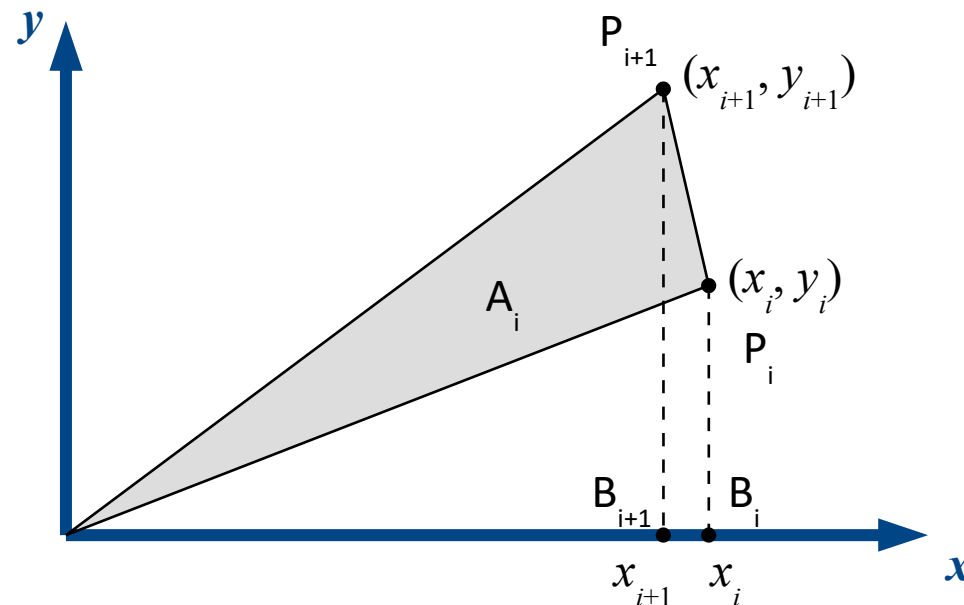
- Każdy wielokąt można przedstawić jako pewną sumę trójkątów o wspólnym wierzchołku w początku przyjętego układu współrzędnych. Niektóre z tych trójkątów będą dodawane inne odejmowane.



NUMERYCZNE WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK GEOMETRYCZNYCH PRZEKROJÓW PŁASKICH

- Każdy z takich trójkątów można zapisać jako odpowiednią **sumę trójkątów prostokątnych**, dla których znamy wzory na wszystkie charakterystyki geometryczne.

$$\iint_{A_i} f(x, y) dA = \iint_{OB_{i+1}P_{i+1}} f(x, y) dA + \iint_{B_{i+1}B_iP_iP_{i+1}} f(x, y) dA - \iint_{OB_iP_i} f(x, y) dA$$



NUMERYCZNE WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK GEOMETRYCZNYCH PRZEKROJÓW PŁASKICH

$$A = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} (X_i Y_{i+1} - X_{i+1} Y_i) \right]$$

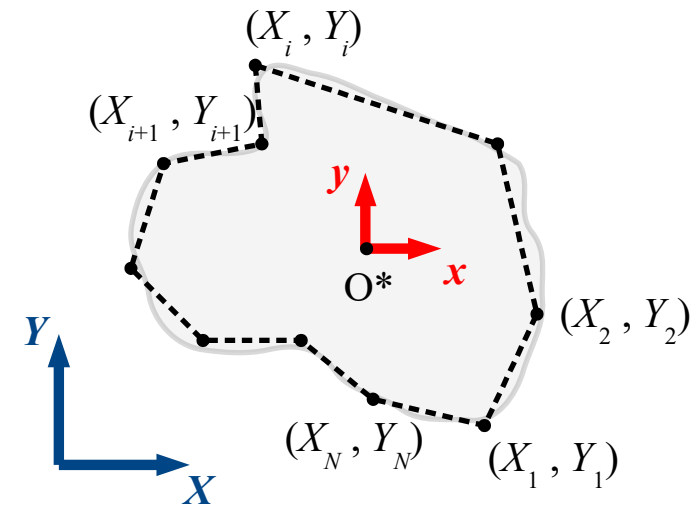
$$S_X = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{6} (X_i Y_{i+1} - X_{i+1} Y_i) (Y_i + Y_{i+1}) \right]$$

$$S_Y = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{6} (X_i Y_{i+1} - X_{i+1} Y_i) (X_i + X_{i+1}) \right]$$

$$I_X = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{12} (X_i Y_{i+1} - X_{i+1} Y_i) (Y_i^2 + Y_i Y_{i+1} + Y_{i+1}^2) \right]$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{12} (X_i Y_{i+1} - X_{i+1} Y_i) (X_i^2 + X_i X_{i+1} + X_{i+1}^2) \right]$$

$$I_{XY} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{24} (X_i Y_{i+1} - X_{i+1} Y_i) (2 X_i Y_i + X_i Y_{i+1} + X_{i+1} Y_i + 2 X_{i+1} Y_{i+1}) \right]$$



przy czym $X_{N+1} = X_1$ $Y_{N+1} = Y_1$

NUMERYCZNE WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK GEOMETRYCZNYCH PRZEKROJÓW PŁASKICH

Położenie środka ciężkości:

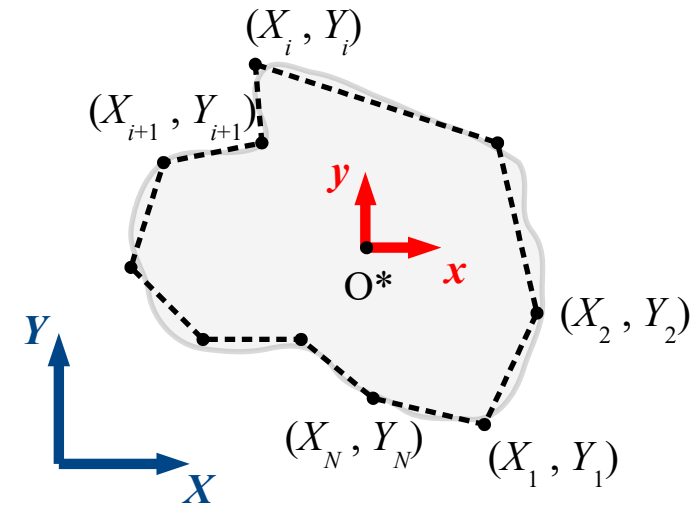
$$X_{O^*} = \frac{S_Y}{A}, \quad Y_{O^*} = \frac{S_X}{A}$$

Centralne momenty bezwładności:

$$I_x = I_X - A \cdot (Y_{O^*})^2$$

$$I_y = I_Y - A \cdot (X_{O^*})^2$$

$$I_{xy} = I_{XY} - A \cdot X_{O^*} Y_{O^*}$$



Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ