MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

RACHUNEK TENSOROWY

CO TO JEST TENSOR?

Tensor n-wymiarowy rzędu r:

- **obiekt geometryczny w przestrzeni n-wymiarowej** (uogólnienie skalara i wektora)
- reprezentowany w ustalonym układzie współrzędnych przez n^r liczb (składowych)
- **przy dowolnej zmianie układu współrzędnych** jego **składowe transformują się zawsze liniowo** – każda składowa tensora w nowym układzie współrzędnych (ξ_1, ξ_2, ξ_3) jest kombinacją liniową składowych tego tensora w starym układzie współrzędnych (x_1, x_2, x_3), czyli sumą pierwszych potęg tych starych składowych, przemnożonych przez stałe (w ustalonym punkcie) współczynniki.
- Składowe tensora mogą mieć charakter **kowariantny** („*współzmienniczy*” – ich reguła transformacyjna jest taka jak reguła transformacyjna wektorów bazowych) – **kontrawariantny** („*przeciwzmienniczy*” – reguła transformacyjna jest inna) lub **mieszany**. Wektory „normalne” mają składowe kontrawariantne – nimi będziemy się zajmować.
- Jeśli rozważamy **tylko obroty układów współrzędnych**, wtedy **wzór transformacyjny** dla wszystkich typów składowych jest taki sam i ma postać:

$$\boxed{T'_{i_1 i_2 \ldots i_r}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j_1}^{n} \sum_{j_2}^{n} \ldots \sum_{j_r}^{n} \left[\frac{\partial \xi_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial \xi_{i_2}}{\partial x_{j_2}} \ldots \frac{\partial \xi_{i_r}}{\partial x_{j_r}} T_{j_1 j_2 \ldots j_r}(\mathbf{x}) \right]}$$

CO TO JEST TENSOR?

- Będziemy zajmować się **tensorami 3-wymiarowymi**.
- Przykłady:
  - Tensor rzędu 0 – skalar (liczba)

    Reprezentacja: T

    Reguła transformacyjna: We wszystkich układach współrzędnych skalar jest taki sam. To **niezmiennik**.

    PRZYKŁADY: gęstość, temperatura, ładunek elektryczny

CO TO JEST TENSOR?

- Tensor rzędu 1 – wektor

Reprezentacja: $[T_1, T_2, T_3]$ (macierz jednokolumnowa / jednowierszowa)

Reguła transformacyjna:

$$T'_i = \sum_{i=1}^{3} A_{ij} T_j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T'_1 = A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 \\ T'_2 = A_{21}T_1 + A_{22}T_2 + A_{23}T_3 \\ T'_3 = A_{31}T_1 + A_{32}T_2 + A_{33}T_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ T'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁADY: wektory położenia, przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia, siły

UWAGA:

- „wektory" **prędkości kątowej** i **momentu siły** nie są wektorami w powyższym sensie!!! Nazywamy je **pseudowektorami**.
- Przy transformacji układu współrzędnych, która **zmienia orientację układu** (np. odbicie lustrzane), **pseudowektory zmieniają swój zwrot na przeciwny**:

$$\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3] \qquad \mathbf{r} = [x_1, x_2, x_3] \qquad \mathbf{F} \times \mathbf{r} = [F_2 x_3 - F_3 x_2 \,,\, F_3 x_1 - F_1 x_3 \,,\, F_1 x_2 - F_2 x_1]$$

$$\mathbf{F}' = [-F_1, -F_2, -F_3] \qquad \mathbf{r}' = [-x_1, -x_2, -x_3] \qquad \mathbf{F}' \times \mathbf{r}' = [F_2 x_3 - F_3 x_2 \,,\, F_3 x_1 - F_1 x_3 \,,\, F_1 x_2 - F_2 x_1]$$

$$\mathbf{F}' \times \mathbf{r}' = \mathbf{F} \times \mathbf{r} = \mathbf{M} = -\mathbf{M}' \neq \mathbf{M}'$$

CO TO JEST TENSOR?

- Tensor rzędu 2

Reprezentacja:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

(macierz kwadratowa)

Reguła transformacyjna:

$$T'_{ij} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} A_{im} A_{jn} T_{mn} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} T'_{11} = {} & A_{11}A_{11}T_{11} + A_{11}A_{12}T_{12} + A_{11}A_{13}T_{13} + \\ & A_{12}A_{11}T_{21} + A_{12}A_{12}T_{22} + A_{12}A_{13}T_{23} + \\ & A_{13}A_{11}T_{31} + A_{13}A_{12}T_{32} + A_{13}A_{13}T_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'_{12} = {} & A_{11}A_{21}T_{11} + A_{11}A_{22}T_{12} + A_{11}A_{23}T_{13} + \\ & A_{12}A_{21}T_{21} + A_{12}A_{22}T_{22} + A_{12}A_{23}T_{23} + \\ & A_{13}A_{21}T_{31} + A_{13}A_{22}T_{32} + A_{13}A_{23}T_{33} \end{aligned}$$

$$\dots$$

PRZYKŁADY: tensor momentu bezwładności, tensor naprężenia, tensor odkształcenia, tensor energii-pędu (teoria względności), tensor metryczny (geometria Riemanna)

CO TO JEST TENSOR?

- Tensor rzędu 3

Reprezentacja:

$$\begin{bmatrix} T_{111} & T_{112} & T_{113} \\ T_{121} & T_{122} & T_{123} \\ T_{131} & T_{132} & T_{133} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T_{211} & T_{212} & T_{213} \\ T_{221} & T_{222} & T_{223} \\ T_{231} & T_{232} & T_{233} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T_{311} & T_{312} & T_{313} \\ T_{321} & T_{322} & T_{323} \\ T_{331} & T_{332} & T_{333} \end{bmatrix}$$

(macierz sześcienna)

Reguła transformacyjna:

$$T'_{ijk} = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\sum_{r=1}^{3} A_{ip}A_{jq}A_{kr}T_{pqr} \qquad \Leftrightarrow$$

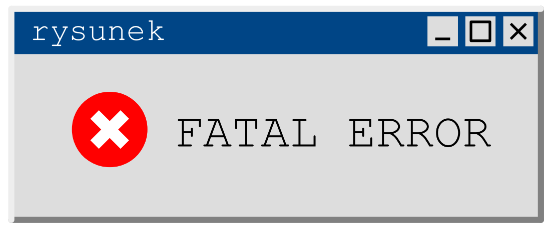
$$\begin{aligned} T'_{123} = {} & A_{11}A_{21}A_{31}T_{111} + A_{11}A_{21}A_{32}T_{112} + A_{11}A_{21}A_{33}T_{113} + A_{11}A_{22}A_{31}T_{121} + A_{11}A_{22}A_{32}T_{122} + \\ & A_{11}A_{22}A_{33}T_{123} + A_{11}A_{23}A_{31}T_{131} + A_{11}A_{23}A_{32}T_{132} + A_{11}A_{23}A_{33}T_{133} + A_{12}A_{21}A_{31}T_{211} + \\ & A_{12}A_{21}A_{32}T_{212} + A_{12}A_{21}A_{33}T_{213} + A_{12}A_{22}A_{31}T_{221} + A_{12}A_{22}A_{32}T_{222} + A_{12}A_{22}A_{33}T_{223} + \\ & A_{12}A_{23}A_{31}T_{231} + A_{12}A_{23}A_{32}T_{232} + A_{12}A_{23}A_{33}T_{233} + A_{13}A_{21}A_{31}T_{311} + A_{13}A_{21}A_{32}T_{312} + \\ & A_{13}A_{21}A_{33}T_{313} + A_{13}A_{22}A_{31}T_{321} + A_{13}A_{22}A_{32}T_{322} + A_{13}A_{22}A_{33}T_{323} + A_{13}A_{23}A_{31}T_{331} + \\ & A_{13}A_{23}A_{32}T_{332} + A_{13}A_{23}A_{33}T_{333} \end{aligned}$$

PRZYKŁADY: tensor piezoelektryczny

CO TO JEST TENSOR?

- Tensor rzędu 4

Reprezentacja:



(macierz czterowymiarowa)

Reguła transformacyjna:

$$T'_{ijkl} = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} A_{ip} A_{jq} A_{kr} A_{ls} T_{pqrs}$$

PRZYKŁADY: tensor sztywności, tensor podatności, tensor zredukowanych stałych materiałowych

CO TO JEST TENSOR?

UWAGI:

- Możemy też rozpatrywać **funkcje, które każdemu punktowi przestrzeni przypisują tensor**. Funkcje takie nazywamy polami tensorowymi.

- Poza skalarami i wektorami najczęściej będziemy posługiwać się **tensorami drugiego rzędu**.

- **PRZYKŁAD**: równania **teorii sprężystości** pozwolą nam wyznaczyć pole **tensora naprężenia** na podstawie pól wektorowych sił i przemieszczeń zadanych dla układu mechanicznego. Składowe tensorowego pola naprężenia porównywać będziemy z wytrzymałością materiału.

CO TO JEST TENSOR?

- **Tensor drugiego rzędu** utożsamiać możemy z **macierzą kwadratową**, taką że w wyniku mnożenia tej macierzy przez wektor otrzymamy wektor:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

Stwierdzenie powyższe jest prawdziwe gdy:

- przez **wektor** rozumiemy nie byle jaką macierz kolumnową, ale **obiekt geometryczny, który transformuje się przy zmianie układu współrzędnych w ściśle określony sposób** (reguła transformacyjna dla tensorów 1 rzędu)
- zależność ta **obowiązuje w dowolnym układzie współrzędnych**, ma więc charakter **absolutny**. Aby powołać się na ten związek nie musimy odwoływać się do składowych tych obiektów w jakimkolwiek układzie współrzędnych.

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

CO TO JEST TENSOR?

W pewnym układzie współrzędnych (x,y,z) związek między wektorami możemy zapisać w postaci

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}}_{[T^x]} \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{[v^x]} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}}_{[w^x]} \qquad \Leftrightarrow \qquad [T^x][v^x]=[w^x]$$

Przy **zmianie układu współrzędnych** $(x,y,z) \rightarrow (\xi,\eta,\zeta)$, składowe wektorów transformują się następująco:

$$[v^\xi] = [A_x^\xi][v^x] \quad \Leftrightarrow \quad [v^x] = [A_x^\xi]^\mathrm{T}[v^\xi]$$

$$[w^\xi] = [A_x^\xi][w^x] \quad \Leftrightarrow \quad [w^x] = [A_x^\xi]^\mathrm{T}[w^\xi]$$

gdzie:

$$[A_x^\xi] = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix}$$

macierz przejścia. Macierz ortogonalna: $[A_x^\xi]^{-1} = [A_x^\xi]^\mathrm{T}$

CO TO JEST TENSOR?

$$[T^x][v^x]=[w^x]$$

$$[T^x][A_x^\xi]^{\mathrm{T}}[v^\xi]=[A_x^\xi]^{\mathrm{T}}[w^\xi] \qquad \Big/ ([A_x^\xi]^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot$$

$$\underbrace{([A_x^\xi]^{\mathrm{T}})^{-1}}_{=([A_x^\xi]^{-1})^{-1}=[A_x^\xi]}\,[T^x][A_x^\xi]^{\mathrm{T}}[v^\xi]=\underbrace{([A_x^\xi]^{\mathrm{T}})^{-1}[A_x^\xi]^{\mathrm{T}}}_{=[1]}[w^\xi]$$

$$\underbrace{[A_x^\xi][T^x][A_x^\xi]^{\mathrm{T}}}_{[T^\xi]}[v^\xi]=[w^\xi]$$

$$[T^\xi][v^\xi]=[w^\xi]$$

Związek będzie **obowiązywał w dowolnym innym układzie kartezjańskim**, jeśli

$$[T^\xi]=[A_x^\xi][T^x][A_x^\xi]^{\mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad [T^\xi]_{ij}=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}[A_x^\xi]_{im}[T^x]_{mn}[A_x^\xi]^{\mathrm{T}}_{nj}$$

tj. **gdy elementy macierzy transformować się będą tak, jak składowe tensora**:

$$\boxed{[T^\xi]_{ij}=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}[A_x^\xi]_{im}[A_x^\xi]_{jn}[T^x]_{mn}}$$

czy tak rzeczywiście jest?

CO TO JEST TENSOR?

- Widzimy, że **związek między macierzowymi reprezentacjami wektorów** – równanie macierzowe – **obowiązuje w analogicznej postaci w każdym układzie współrzędnych**, o ile tylko **elementy wszystkich macierzy transformują się w ściśle określony sposób** – jest to właśnie tensorowa reguła transformacyjna.

- To właśnie jest jedną z kluczowych cech rachunku tensorowego – **związek tensorowy wyprowadzony w jednym układzie współrzędnych obowiązuje we wszystkich innych układach** współrzędnych.

- Związek taki ma charakter absolutny, **niezależny od układu współrzędnych**. Jest ważna cecha, bo **prawa fizyki chcemy formułować tak, aby obowiązywały niezależnie od stosowanego układu współrzędnych.** Dlatego tensory i rachunek tensorowy stają się najodpowiedniejszym narzędziem fizyki matematycznej.

CO TO JEST TENSOR?

	Notacja wskaźnikowa (działania na składowych tensorów w przyjętym ukł. wsp.)	**Notacja macierzowa** (działania na macierzach reprezentacji tensorów w przyjętym ukł. wsp.)	**Notacja absolutna** (działania tensorach bez odniesienia do jakiejkolwiek reprezentacji lub składowych)
skalar	α	α	α
wektor	v_i	$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$	$\mathbf{v}$
tensor	T_{ij}	$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$	$\mathbf{T}$
działanie tensora na wektor	$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = p_i$	$[\sigma][n] = [p] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p}$
iloczyn skalarny wektorów	$\alpha = \sum_{j=1}^{3} v_i w_i$	$\alpha = [v]^{\mathrm{T}}[w] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$	$\alpha = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
gradient wektora	$F_{ij} = X_{i,j} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$	$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$	$\mathbf{F} = \mathbf{X} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}$

dr inż. Paweł Szeptyński

LOKALNA BAZA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

- **Układ współrzędnych** – odwzorowanie, które punktom w przestrzeni fizycznej **przyporządkowuje w sposób jednoznaczny** ciąg liczb **– jego** współrzędne.

$$\mathrm{P}\in E^3 \rightarrow (x_P, y_P, z_P)$$

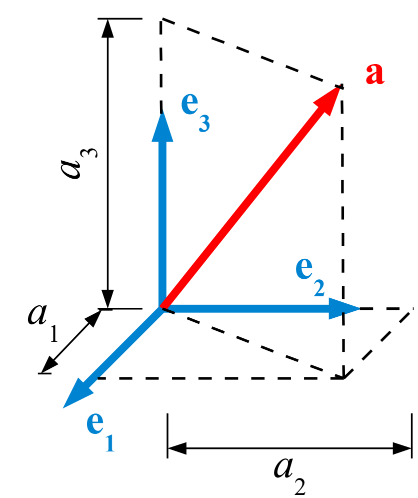
UWAGA: Współrzędne punktu nie określają jeszcze żadnego wektora

przestrzeń fizyczna
≠
przestrzeń wektorowa

- **Baza przestrzeni wektorowej (liniowej)** – zbiór liniowo niezależnych wektorów, takich że **dowolny wektor w przestrzeni wektorowej można zapisać jako kombinację liniową wektorów bazy**. Współczynniki **tej kombinacji** nazywamy składowymi wektora w danej bazie.

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} : \underset{\mathbf{a}\in V}{\forall} \ \underset{a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}}{\exists!} : \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

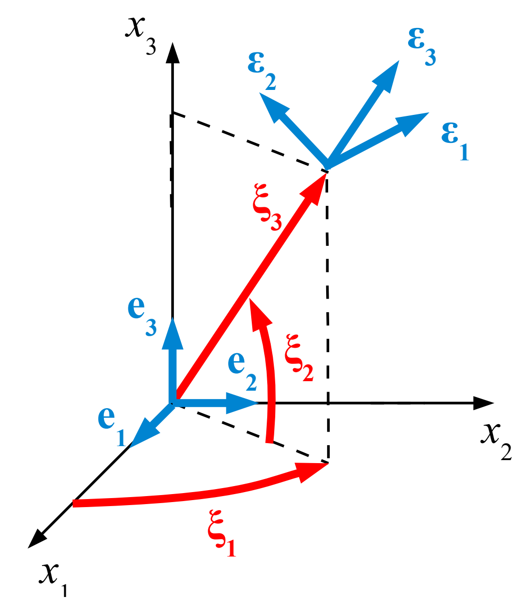
UWAGA: Składowe wektora nie wyznaczają jeszcze żadnego punktu.



Możemy umówić się, że **współrzędne** (w ustalonym układzie współrzędnych) danego **punktu utożsamiamy ze składowymi** (w ustalonej bazie) **wektora** przypisanego temu punktowi (np. wektor wodzący punktu względem przyjętego punktu odniesienia). **Tak robimy zazwyczaj w układach** kartezjańskich. W ogólniejszych przypadkach, aby określić **związek między współrzędnymi punktów a składowymi wektorów** musimy zdefiniować strukturę algebraiczną zwaną przestrzenią afiniczną.

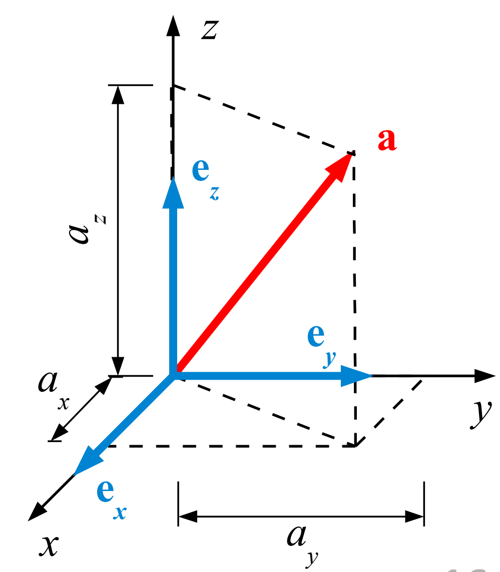
LOKALNA BAZA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Krzywą w przestrzeni, wzdłuż której zmienia się wartość ustalonej współrzędnej ξ_i, a wartości pozostałych współrzędnych są stałe, nazywamy **linią współrzędnej** ξ_i. W każdym punkcie przestrzeni możemy wyznaczyć **wektory styczne do każdej z linii współrzędnych przechodzących przez ten punkt**. Taki układ wektorów stycznych nazywamy **bazą lokalną przyjętego układu współrzędnych w danym punkcie** – jest ona bazą przestrzeni wektorowej.



$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \left[\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_i}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_i} \right] \quad \text{(składowe w bazie } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}\text{)}$$

W przypadku **układu kartezjańskiego baza lokalna jest w każdym punkcie taka sama** – linie ustalonej współrzędnej są w każdym punkcie równoległe, a linie różnych współrzędnych są do siebie w każdym punkcie prostopadłe.



Dowolny wektor możemy zapisać jako kombinację liniową wektorów równoległych do linii współrzędnych (osi) układu kartezjańskiego

ILOCZYN TENSOROWY WEKTORÓW - DIADY

Wprowadźmy **działanie** iloczynu tensorowego (iloczynu diadycznego) wektorów, zdefiniowanego w ustalonej bazie następująco:

$$\otimes : (\mathrm{V} \times \mathrm{V}) \ni (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \in \mathrm{T}^2 : \quad T_{ij} = v_i w_j$$

Jest to działanie:

- **łączne** $\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}$
- **nieprzemienne** $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \neq \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})^{\mathrm{T}}$
- **rozdzielne względem dodawania i odejmowania wektorów** $\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \pm \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \pm (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w})$
- **zgodne z mnożeniem wektorów przez skalar** $\mathbf{v} \otimes (\alpha \mathbf{w}) = \alpha (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$

Dla dwójki wektorów, które w pewnej bazie mają składowe

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

ich **iloczyn tensorowy** reprezentuje macierz:

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{bmatrix}$$

UWAGA: Iloczyn tensorowy można zdefiniować bez odniesienia do jakiejkolwiek bazy.

POLIBAZA PRZESTRZENI TENSOROWEJ

W przyjętej bazie dowolne 2 wektory można zapisać w postaci:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e_1} + v_2 \mathbf{e_2} + v_3 \mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e_1} + w_2 \mathbf{e_2} + w_3 \mathbf{e_3}$$

Ich **iloczyn tensorowy**:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = {} & v_1 w_1 (\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e_1}) + v_1 w_2 (\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e_2}) + v_1 w_3 (\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e_3}) \\ & + v_2 w_1 (\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e_1}) + v_2 w_2 (\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e_2}) + v_2 w_3 (\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e_3}) \\ & + v_3 w_1 (\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e_1}) + v_3 w_2 (\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e_2}) + v_3 w_3 (\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e_3}) = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- W sposób naturalny pojawia się „**baza w przestrzeni tensorów 2 rzędu**”. **Dowolny tensor 2 rzędu można zapisać w postaci kombinacji liniowej diad wektorów bazowych** – diady te stanowią bazę przestrzeni tensorowej. Nazywać ją będziemy polibazą.

- **Przestrzeń tensorów z działaniem ich dodawania i mnożenia ich przez skalar** jest przestrzenią liniową (wektorową). Wymiar przestrzeni n-wymiarowych tensorów rzędu r jest równy n^r. W takiej przestrzeni istnieje baza n^r tensorów – może to być polibaza diad wektorów bazowych. Dowolny inny tensor można zapisać jako ich kombinację liniową. Współczynniki tej kombinacji są dla danego tensora jednoznaczne i nazywamy je składowymi tensora w tej bazie.

POLIBAZA PRZESTRZENI TENSOROWEJ

Rozkład wektora w bazie:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Rozkład tensora w polibazie:

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} T_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{33} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

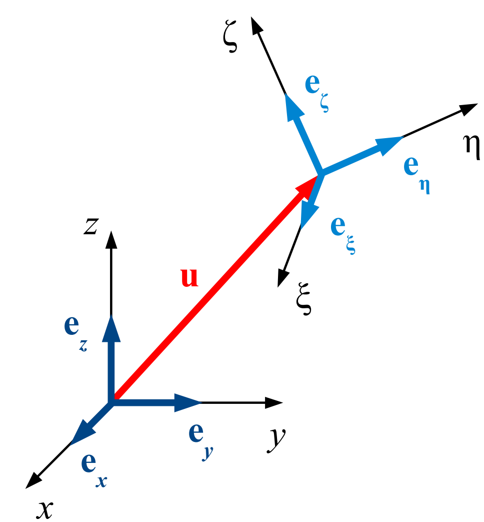
ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

- Z każdym układem współrzędnych możemy związać pewną bazę wektorów i polibazę tensorów.
- Zmiana układu współrzędnych pociąga za sobą zmianę bazy i odpowiadającej im polibazy.
- Zmiana bazy pociąga za sobą zmianę wartości składowych wektorów.
- **Jak zmieniają się składowe tensorów przy zmianie układu współrzędnych?**

Ograniczymy nasze rozważania jedynie do układów kartezjańskich (prostokątnych), które wyznaczają odpowiednie bazy ortonormlane, tj. bazy złożone z **wektorów prostopadłych** (ortogonalnych) i **jednostkowych** (znormalizowanych).

Dowolny układ kartezjański można otrzymać z dowolnego innego układu kartezjańskiego za pomocą przekształcenia będącego **złożeniem** przesunięcia (translacji) i obrotu:

$$\begin{cases} \xi = A_x^{\xi} x + A_y^{\xi} y + A_z^{\xi} z + u_{\xi} \\ \eta = A_x^{\eta} x + A_y^{\eta} y + A_z^{\eta} z + u_{\eta} \\ \zeta = A_x^{\zeta} x + A_y^{\zeta} y + A_z^{\zeta} z + u_{\zeta} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad [\xi] = [A_x^{\xi}][x] + [u]$$



$[A_x^{\xi}]^{-1} = [A_x^{\xi}]^{\mathrm{T}}$ - macierz ortogonalna.

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

- Zmiana układu współrzędnych:

$$\begin{cases} \xi = A_x^\xi x + A_y^\xi y + A_z^\xi z + u_\xi \\ \eta = A_x^\eta x + A_y^\eta y + A_z^\eta z + u_\eta \\ \zeta = A_x^\zeta x + A_y^\zeta y + A_z^\zeta z + u_\zeta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad [\xi] = [A_x^\xi][x] + [u]$$

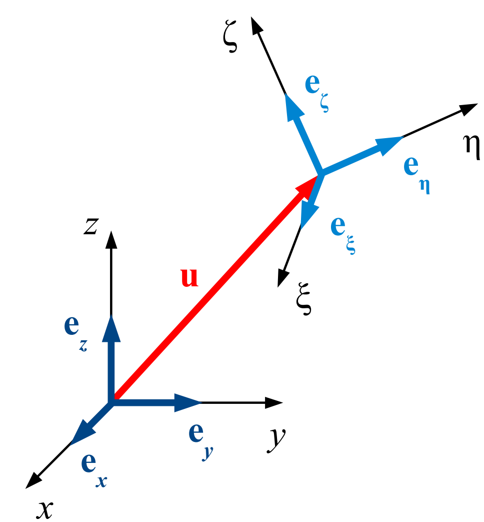
- Transformacja odwrotna:

$$\begin{cases} x = A_x^\xi \xi + A_x^\eta \eta + A_x^\zeta \zeta + w_x \\ y = A_y^\xi \xi + A_y^\eta \eta + A_y^\zeta \zeta + w_y \\ z = A_z^\xi \xi + A_z^\eta \eta + A_z^\zeta \zeta + w_z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad [x] = [A_x^\xi]^{\mathrm{T}}[\xi] + [w]$$

gdzie $[w] = -[A_x^\xi][u]$

dla przekształcenia ortogonalnego zachodzi np.:
(tak samo dla każdej pary współrzędnej starej i nowej)

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$



ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

- **Baza lokalna nowego układu współrzędnych** (przesuniętego i obróconego układu kartezjańskiego) **jest taka sama w każdym punkcie**.
- Składowe wektorów nowej bazy $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$ i starej bazy $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ w starej bazie są równe:

$$\mathbf{e}_\xi = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right] = [A_x^\xi, A_y^\xi, A_z^\xi] \qquad \mathbf{e}_x = [1\ ,\ 0\ ,\ 0]$$

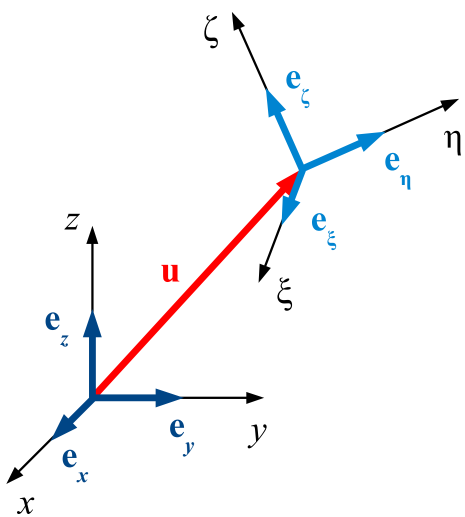
$$\mathbf{e}_\eta = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right] = [A_x^\eta, A_y^\eta, A_z^\eta] \qquad \mathbf{e}_y = [0\ ,\ 1\ ,\ 0]$$

$$\mathbf{e}_\zeta = \left[\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right] = [A_x^\zeta, A_y^\zeta, A_z^\zeta] \qquad \mathbf{e}_z = [0\ ,\ 0\ ,\ 1]$$

UWAGA: Na zmianę bazy wpływa tylko obrót. Przesunięcie zmienia współrzędne punktów ale nie zmienia bazy a zatem i składowych wektorów i tensorów.

Macierz przejścia:

$$[A_x^\xi] = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix}$$



ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

- Wiemy, jak zmieniają się współrzędne punktów.
- Wiemy jak wyznaczyć nową bazę po zmianie układu współrzędnych.
- **Jak wyznaczyć składowe dowolnego wektora w nowej bazie po zmianie układu współrzędnych?**

Dowolny wektor można rozpisać w bazie ortonormalnej rzutując go na kierunki wektorów bazowych.

$$\mathbf{v} = \underbrace{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_x\right)}_{v_x}\mathbf{e}_x + \underbrace{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_y\right)}_{v_y}\mathbf{e}_y + \underbrace{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_z\right)}_{v_z}\mathbf{e}_z$$

Taki rozkład można zrobić również dla wektorów nowej bazy.
Wektory transformują się następująco:

macierz wektorów

macierz liczb

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\xi &= \left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x\right)\mathbf{e}_x + \left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y\right)\mathbf{e}_y + \left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z\right)\mathbf{e}_z\\
\mathbf{e}_\eta &= \left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x\right)\mathbf{e}_x + \left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y\right)\mathbf{e}_y + \left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z\right)\mathbf{e}_z\\
\mathbf{e}_\zeta &= \left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x\right)\mathbf{e}_x + \left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y\right)\mathbf{e}_y + \left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}
\quad\Leftrightarrow\quad
\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{e}_\xi\\ \mathbf{e}_\eta\\ \mathbf{e}_\zeta\end{bmatrix}}_{[\mathbf{e}^\xi]} = \underbrace{\begin{bmatrix}\left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x\right) & \left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y\right) & \left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z\right)\\ \left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x\right) & \left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y\right) & \left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z\right)\\ \left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x\right) & \left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y\right) & \left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z\right)\end{bmatrix}}_{[A^\xi_x]} \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{e}_x\\ \mathbf{e}_y\\ \mathbf{e}_z\end{bmatrix}}_{[\mathbf{e}^x]}$$

UWAGA: Wektory (ale – póki co – jeszcze nie ich składowe) transformują się przy zmianie układu współrzędnych za pomocą tej samej macierzy odwzorowania co same współrzędne. Mówimy, że **wektory transformują się kowariantnie** (współzmienniczo) **do współrzędnych**. Dla „zwykłych wektorów" **tak jest tylko przy transformacjach ortogonalnych** (**obrotach**). Przy dowolnych innych transformacjach współrzędnych kowariantnie transformują się tzw. kowektory (np. gradient funkcji.), a wektory transformują się kontrawariantnie, tj. za pomocą macierzy $\left([A^\xi_x]^\mathrm{T}\right)^{-1}$ - akurat dla obrotów macierz ta jest taka sama jak $[A^\xi_x]$.

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Składowe dowolnego wektora w nowej bazie możemy rozpisać w następujący sposób:

$$v_\xi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_\xi = \mathbf{v}\cdot[(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x)\mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y)\mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z] = (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x)\underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_x)}_{v_x} + (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y)\underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_y)}_{v_y} + (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z)\underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_z)}_{v_z} =$$

$$= (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x)v_x + (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y)v_y + (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z)v_z$$

$$v_\eta = (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x)v_x + (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y)v_y + (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z)v_z$$

$$v_\zeta = (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x)v_x + (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y)v_y + (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z)v_z$$

Składowe wektorów **transformują się następująco**:

$$\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [v^\xi] = [A^\xi_x][v^x]$$

UWAGA: Reguła transformacyjna składowych wektorów jest taka sama jak samych wektorów oraz współrzędnych. To cecha rozważanego przez nas przekształcenia układu współrzędnych – **obrotu danego macierzą ortogonalną** – oraz możliwości wyrażenia jej przez iloczyny skalarne wektorów nowej i starej bazy. W ogólniejszych przypadkach (krzywoliniowe przekształcenia współrzędnych, przestrzenie nieeuklidesowe itp.) zależność taka nie zachodzi.

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Dowolną diadę możemy rozpisać następująco:

- diada równoimienna, np.:

$$[\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x] = [(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)\mathbf{e}_\xi + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)\mathbf{e}_\eta + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)\mathbf{e}_\zeta] \otimes [(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)\mathbf{e}_\xi + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)\mathbf{e}_\eta + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)\mathbf{e}_\zeta] =$$

$$= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)[\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)[\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\eta] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)[\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\zeta] +$$
$$= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)[\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\xi] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)[\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\eta] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)[\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\zeta] +$$
$$= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)[\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\xi] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)[\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\eta] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)[\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\zeta]$$

- diada różnoimienna, np.:

$$[\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y] = [(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)\mathbf{e}_\xi + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)\mathbf{e}_\eta + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)\mathbf{e}_\zeta] \otimes [(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)\mathbf{e}_\xi + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta)\mathbf{e}_\eta + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\zeta)\mathbf{e}_\zeta] =$$

$$= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)[\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta)[\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\eta] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\zeta)[\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\zeta] +$$
$$= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)[\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\xi] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta)[\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\eta] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\zeta)[\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\zeta] +$$
$$= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)[\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\xi] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta)[\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\eta] + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\zeta)[\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\zeta]$$

W podobny sposób możemy rozpisać wszystkie diady.

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Rozkłady te możemy następnie podstawić do **rozkładu tensora w polibazie odpowiadającej staremu układowi współrzędnych**:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= T_{xx}(\mathbf{e}_x\otimes\mathbf{e}_x) + T_{xy}(\mathbf{e}_x\otimes\mathbf{e}_y) + \ldots + T_{zz}(\mathbf{e}_z\otimes\mathbf{e}_z) = \\ &= T_{xx}\Big[(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_\xi\otimes\mathbf{e}_\xi) + (\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_\xi\otimes\mathbf{e}_\eta) + \ldots + (\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_\zeta\otimes\mathbf{e}_\zeta)\Big] + \\ &+ T_{xy}\Big[(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_\xi\otimes\mathbf{e}_\xi) + (\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_\xi\otimes\mathbf{e}_\eta) + \ldots + (\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_\zeta\otimes\mathbf{e}_\zeta)\Big] + \\ &+ \ldots + \\ &+ T_{zz}\Big[(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_\xi\otimes\mathbf{e}_\xi) + (\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\eta)(\mathbf{e}_\xi\otimes\mathbf{e}_\eta) + \ldots + (\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\zeta)(\mathbf{e}_\zeta\otimes\mathbf{e}_\zeta)\Big]\end{aligned}$$

a następnie **porównać z rozkładem tensora w polibazie odpowiadającej nowemu układowi współrzędnych**:

$$\mathbf{T} = T_{\xi\xi}(\mathbf{e}_\xi\otimes\mathbf{e}_\xi) + T_{\xi\eta}(\mathbf{e}_\xi\otimes\mathbf{e}_\eta) + \ldots + T_{\zeta\zeta}(\mathbf{e}_\zeta\otimes\mathbf{e}_\zeta)$$

Ponieważ **współczynniki rozkładu tensora w polibazie są określone jednoznacznie**, to **współczynniki przy tych samych diadach** w obydwu wyrażeniach **muszą być takie same**.

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

współczynniki przy $(\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi)$:

$$\begin{aligned} T_{\xi\xi} = {} & (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{xx} + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{xy} + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{xz} + \\ & + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{yx} + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{yy} + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{yz} + \\ & + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{zx} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{zy} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi) T_{zz} \end{aligned}$$

współczynniki przy $(\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\eta)$:

$$\begin{aligned} T_{\xi\eta} = {} & (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{xx} + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{xy} + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{xz} + \\ & + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{yx} + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{yy} + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{yz} + \\ & + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{zx} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{zy} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi)(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\eta) T_{zz} \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_x & \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_y & \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z & \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} T_{\xi\xi} & T_{\xi\eta} & T_{\xi\zeta} \\ T_{\eta\xi} & T_{\eta\eta} & T_{\eta\zeta} \\ T_{\zeta\xi} & T_{\zeta\eta} & T_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix}$$

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

:

$$T'_{ij} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \underbrace{(\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e}_m)}_{A_{im}} \underbrace{(\mathbf{e'}_j \cdot \mathbf{e}_n)}_{A_{jn}} T_{mn} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{T'_{ij} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_m} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_n} T_{mn}}_{\text{reguła transformacyjna dla tensorów 2 rzędu.}}$$

W notacji macierzowej związek powyższy można zapisać jako mnożenie odpowiednich macierzy. Mnożenie macierzy realizowane jest przez sumowanie, względem sąsiednich wskaźników, np.:

$$[A][B]=[C] \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1} A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$$

Związek powyższy można interpretować jako **mnożenie lewostronne macierzy** $[T_{mn}]$ **przez macierz** $[A_{im}]$ i **mnożenie prawostronne macierzy** $[T_{mn}]$ **przez transpozycję** (zmiana kolejności wskaźników) **macierzy** $[A_{jn}]$:

$$[T^{\xi}] = [A_x^{\xi}][T^x][A_x^{\xi}]^{\mathrm{T}}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

- DODAWANIE I ODEJMOWANIE TENSORÓW $+: \quad (\mathrm{T}^p \times \mathrm{T}^p) \ni (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \;\rightarrow\; (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C} \in \mathrm{T}^p$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \pm B_1 \\ A_2 \pm B_2 \\ A_3 \pm B_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} & A_{13} \pm B_{13} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} & A_{23} \pm B_{23} \\ A_{31} \pm B_{31} & A_{32} \pm B_{32} & A_{33} \pm B_{33} \end{bmatrix}$$

Dodawaniu i odejmowaniu tensorów odpowiada **dodawanie i odejmowanie macierzy**.

W ustalonej bazie dodajemy lub odejmujemy odpowiadające sobie składowe.

Dodawać i odejmować możemy tylko tensory tego samego rzędu (i typu)

- **dodawanie** i **odejmowanie** tensorów jest **łączne:** $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \pm \mathbf{C} = \mathbf{A} \pm (\mathbf{B} \pm \mathbf{C})$
- **dodawanie** tensorów jest **przemienne:** $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- **odejmowanie** tensorów jest **nieprzemienne**: $\mathbf{A} - \mathbf{B} \neq \mathbf{B} - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B})$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

- MNOŻENIE TENSORÓW PRZEZ SKALAR $(\mathbb{R}\times \mathrm{T}^{p}) \ni (\alpha, \mathbf{A}) \;\rightarrow\; \alpha\,\mathbf{A} = \mathbf{B} \in \mathrm{T}^{p}$

$$\alpha \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, A_1 \\ \alpha\, A_2 \\ \alpha\, A_3 \end{bmatrix} \qquad \alpha \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, A_{11} & \alpha\, A_{12} & \alpha\, A_{13} \\ \alpha\, A_{21} & \alpha\, A_{22} & \alpha\, A_{23} \\ \alpha\, A_{31} & \alpha\, A_{23} & \alpha\, A_{33} \end{bmatrix}$$

Mnożeniu tensora przez skalar odpowiada **mnożenie macierzy przez liczbę**.

W ustalonej bazie mnożymy wszystkie składowe przez skalar.

Mnożenie tensora przez skalar jest

- rozdzielne względem dodawania i odejmowania tensorów $\alpha(\mathbf{A}\pm\mathbf{B}) = \alpha\,\mathbf{A} \pm \alpha\,\mathbf{B}$
- rozdzielne względem dodawania i odejmowania skalarów $(\alpha\pm\beta)\mathbf{A} = \alpha\,\mathbf{A} \pm \beta\,\mathbf{A}$
- zgodne z mnożeniem skalarów $\alpha(\beta\,\mathbf{A}) = (\alpha\,\beta)\mathbf{A}$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

- NASUNIĘCIE TENSORÓW $\left(\mathrm{T}^{p}\times\mathrm{T}^{q}\right)\ni\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)\ \rightarrow\ \mathbf{A}\,\mathbf{B}=\mathbf{C}\in\mathrm{T}^{(p+q-2)}$

Nasunięciu tensorów 2 rzędu odpowiada **mnożenie macierzy**.

Nasunięcie wektora na tensor 2 rzędu daje wektor.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_1+A_{12}B_2+A_{13}B_3 \\ A_{21}B_1+A_{22}B_2+A_{23}B_3 \\ A_{31}B_1+A_{32}B_2+A_{33}B_3 \end{bmatrix}$$

Nasunięcie dwóch tensorów 2 rzędu daje tensor 2 rzędu:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31}\right) & \left(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32}\right) & \left(A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}+A_{13}B_{33}\right) \\ \left(A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31}\right) & \left(A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32}\right) & \left(A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}+A_{23}B_{33}\right) \\ \left(A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21}+A_{33}B_{31}\right) & \left(A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22}+A_{33}B_{32}\right) & \left(A_{31}B_{13}+A_{32}B_{23}+A_{33}B_{33}\right) \end{bmatrix}$$

Nasunięcie tensorów jest

- rozdzielne względem dodawania i odejmowania tensorów: $\mathbf{A}\left(\mathbf{B}\pm\mathbf{C}\right)=\mathbf{A}\,\mathbf{B}\pm\mathbf{A}\,\mathbf{C}$
- nieprzemienne: $\mathbf{A}\,\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\,\mathbf{A}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

- ILOCZYN SKALARNY TENSORÓW $\quad \cdot : \quad (\mathrm{T}^p \times \mathrm{T}^p) \ni (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + A_{13} B_{13} + A_{21} B_{21} + A_{22} B_{22} + A_{23} B_{23} + A_{31} B_{31} + A_{32} B_{32} + A_{33} B_{33}$$

W ustalonej bazie **dodajemy do siebie iloczyny odpowiadających sobie składowych.**

Mnożeniu skalarnemu wektorów odpowiada mnożenie macierzy i transpozycji macierzy.

Mnożyć skalarnie możemy tylko tensory tego samego rzędu.

Mnożenie skalarne tensorów jest

- przemienne $\quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- rozdzielne względem dodawania i odejmowania tensorów $\quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \pm \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- zgodne z mnożeniem skalarów $\quad \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \alpha (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

- ILOCZYN TENSOROWY TENSORÓW $\otimes : \; \left(\mathrm{T}^{p} \times \mathrm{T}^{q}\right) \ni (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \;\rightarrow\; \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{C} \in \mathrm{T}^{(p+q)}$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix}$$

Mnożenie tensorowe tensorów jest

- łączne $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$
- nieprzemienne $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\mathrm{T}}$
- rozdzielne względem dodawania i odejmowania tensorów $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \pm (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})$
- zgodne z mnożeniem skalarów $\mathbf{A} \otimes (\alpha \mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \alpha (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$

TENSORY JAKO ODWZOROWANIA LINIOWE

- Nasunięcie wektora i tensora daje wektor – każda składowa nowego wektora jest kombinacją liniową składowych wyjściowego wektora, a współczynnikami tej kombinacji są składowe tensora.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

- **Pełne nasunięcie** tensora rzędu p i rzędu $(p+q)$ (sumowanie względem wszystkich wskaźników tensora niższego rzędu) daje nam tensor rzędu q. **Tensor rzędu $(p+q)$ utożsamiamy z odwzorowaniem liniowym przeprowadzającym tensory rzędu p w tensory rzędu q.** Dla $\mathbf{x} \in \mathrm{T}^p \quad \mathbf{y} \in \mathrm{T}^q \quad \mathbf{A} \in \mathrm{T}^{(p+q)}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad y_{i_1 i_2 \ldots i_q} = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \ldots \sum_{j_p} A_{i_1 i_2 \ldots i_q j_1 j_2 \ldots j_p} x_{j_1 j_2 \ldots j_p}$$

LINIOWE ZWIĄZKI TENSOROWE W FIZYCE

- **Mechanika bryły sztywnej**

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega}$$

$\mathbf{L}$ - pseudowektor momentu pędu (tensor 1 rzędu)

$\mathbf{I}$ - tensor momentu bezwładności (tensor 2 rzędu)

$\boldsymbol{\omega}$ - pseudowektor prędkości kątowej

- **Mechanika ciał odkształcalnych**

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}$$

$\mathbf{p}$ - wektor naprężenia (tensor 1 rzędu)

$\boldsymbol{\sigma}$ - tensor naprężenia (tensor 2 rzędu)

$\mathbf{n}$ - normalna zewnętrzna powierzchni myślowego rozcięcia materiału (tensor 1 rzędu)

- **Elektromagnetyzm**

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{E}$$

$\mathbf{D}$ - wektor indukcji elektrycznej (tensor 1 rzędu)

$\boldsymbol{\beta}$ - tensor przenikalności elektrycznej (tensor 2 rzędu)

$\mathbf{E}$ - wektor natężenia pola elektrycznego (tensor 1 rzędu)

LINIOWE ZWIĄZKI TENSOROWE W FIZYCE

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}\ \mathrm{d}\mathbf{X}$$

$\mathrm{d}\mathbf{x}$ - wektor reprezentujący włókno materialne po deformacji (tensor 1 rzędu)

$\mathbf{I}$ - gradient deformacji (tensor 2 rzędu)

$\mathrm{d}\mathbf{X}$ - wektor reprezentujący włókno materialne przed deformacją (tensor 1 rzędu)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ - tensor naprężenia (tensor 2 rzędu)

$\mathbf{S}$ - tensor sztywności (tensor 4 rzędu)

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - tensor odkształcenia (tensor 2 rzędu)

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$\mathbf{D}$ - wektor indukcji elektrycznej (tensor 1 rzędu)

$\mathbf{e}$ - tensor piezoelektryczny (tensor 3 rzędu)

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - tensor odkształcenia (tensor 2 rzędu)

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ