MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

ZAGADNIENIE WŁASNE SYMETRYCZNEGO TENSORA DRUGIEGO RZĘDU

ZAGADNIENIE WŁASNE

Nasunięcie **wektora i tensora** daje w wyniku **wektor**. Działanie to realizuje zatem odwzorowanie przestrzeni wektorów w samą siebie (automorfizm) – **każdemu wektorowi przypisuje wektor**.

$$L: \quad \mathrm{V} \ni \mathbf{w} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}\,\mathbf{w} = \mathbf{v} \in \mathrm{V}$$

Tensor realizujący to odwzorowanie może być z tym odwzorowaniem utożsamiany. Odwzorowanie to jest **liniowe**, tj.

$$L(\alpha_1\mathbf{w_1}+\alpha_2\mathbf{w_2}) = \mathbf{T}(\alpha_1\mathbf{w_1}+\alpha_2\mathbf{w_2}) = \alpha_1\mathbf{T}\,\mathbf{w_1} + \alpha_1\mathbf{T}\,\mathbf{w_1} = \alpha_1 L(\mathbf{w_1}) + \alpha_1 L(\mathbf{w_1})$$

Interesuje nas następujące zagadnienie. **Czy istnieją takie wektory $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, które odwzorowywane są w wektory do nich równoległe**, tj.:

$$\boxed{\mathbf{T}\,\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{w}}$$

Zagadnienie wyznaczenia takich wektorów $\mathbf{w}$ oraz takich wartości λ, dla których zachodzi powyższa zależność nazywamy **zagadnieniem własnym tensora** (odwzorowania liniowego / macierzy). Liczbę λ nazywamy wartością własną, a wektor $\mathbf{w}$ nazywamy wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.

ZAGADNIENIE WŁASNE

Gdzie spotykamy się z zagadnieniem własnym:

- tensor momentu bezwładności **–** wektory własne i wartości własne tego tensora określają **główne centralne osie bezwładności przekrojów zginanych** oraz ich **sztywność na zginanie**.
- tensory naprężenia i odkształcenia – za pomocą wartości własnych tych tensorów formułuje się **warunki wytrzymałości materiału** (hipotezy wytężenia).
- macierz $\mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-1}$, gdzie $\mathbf{K}$ – macierz sztywności, $\mathbf{M}$ – macierz mas dyskretnego układu mechanicznego o wielu stopniach swobody (przybliżenie rzeczywistych, trójwymiarowych układów ciągłych) – pierwiastki jej wartości własnych wyznaczają **częstotliwości rezonansowe**, a wektory własne określają **postać drgań układu**.
- operatory różniczkowe – ich wartości własne i wektory własne pozwalają wyznaczyć rozwiązania równań i układów równań różniczkowych.
- w **mechanice kwantowej** wartości własne operatorów wielkości obserwowalnych (obserwabli, np. położenia, pędu) są jedynymi dopuszczalnymi wartościami, jakie mogą być dla tych wielkości zaobserwowane w wyniku pomiaru.

ZAGADNIENIE WŁASNE

INTERPRETACJA ZAGADNIENIA WŁASNEGO

W pewnej ustalonej bazie $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, możemy napisać:

$$\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\,\mathbf{e}_j) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \delta_{im} T_{mn} \delta_{nj} = T_{ij} \qquad \text{gdzie} \qquad \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad k \neq l \\ 1 & \Leftrightarrow \quad k = l \end{cases}$$

Przykładowo:

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{T}\,\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} = T_{12}$$

Funkcja argumentu wektorowego $\mathbf{e}_i$

$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\,\mathbf{e}_i) = T_{ii}$$

przypisuje wektorowi $\mathbf{e}_i$ składową T_{ii} z przekątnej głównej tensora $\mathbf{T}$, która odpowiada i-tej osi rozważanego układu współrzędnych. Możemy poszukiwać ekstremum tej funkcji z uwagi na wektor $\mathbf{e}_{i'}$, tj. **poszukiwać takiej orientacji i-tej osi układu współrzędnych, dla której T_{ii} przyjmuje wartość ekstremalną**.

ZAGADNIENIE WŁASNE

INTERPRETACJA ZAGADNIENIA WŁASNEGO

Poszukujemy ekstremum warunkowego funkcji $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{T}\,\mathbf{w})$ przy warunku $|\mathbf{w}| = \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = 1$

Korzystamy z **metody współczynników nieoznaczonych Lagrange'a**. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum będzie zerowanie się pochodnej pomocniczej funkcji zdefiniowanej następująco

$$g(\mathbf{w},\lambda) = f(\mathbf{w}) - \lambda(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - 1)$$

Pochodną tą obliczamy jako tzw. **pochodną Gâteaux** – uogólnienie pochodnej kierunkowej na funkcje o argumentach np. wektorowych, tensorowych:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} g(\mathbf{w}+\alpha\,\mathbf{h})\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\Big[(\mathbf{w}+\alpha\,\mathbf{h})\cdot\mathbf{T}(\mathbf{w}+\alpha\,\mathbf{h}) - \lambda\big((\mathbf{w}+\alpha\,\mathbf{h})\cdot(\mathbf{w}+\alpha\,\mathbf{h})-1\big)\Big]\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\Big[\mathbf{w}\cdot\mathbf{T}\,\mathbf{w} + \alpha\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\,\mathbf{w} + \alpha\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{T}\,\mathbf{h} + \alpha^2\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\,\mathbf{h} - \lambda\big(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \alpha\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{h} + \alpha\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{w} + \alpha^2\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{h} - 1\big)\Big]\bigg|_{\alpha=0} = \ldots$$

Dla tensora symetrycznego:

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\,\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} h_i T_{ij} w_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} h_i T_{ji} w_j = \mathbf{w}\cdot\mathbf{T}\,\mathbf{h}$$

ZAGADNIENIE WŁASNE

INTERPRETACJA ZAGADNIENIA WŁASNEGO

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\mathbf{w}\cdot\mathbf{T}\mathbf{w} + 2\alpha\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\mathbf{w} + \alpha^2\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\mathbf{h} - \lambda\left(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + 2\alpha\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{h} + \alpha^2\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{h} - 1\right)\right]\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \left[2\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\mathbf{w} + 2\alpha\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\mathbf{h} - \lambda\left(2\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{h} + 2\alpha\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}\right)\right]\Big|_{\alpha=0} = \underbrace{2\left[\mathbf{T}\mathbf{w} - \lambda\,\mathbf{w}\right]}_{\partial_{\mathbf{w}} g}\cdot\mathbf{h} = 0 \quad \underset{\mathbf{h}}{\forall}$$

Związek ten ma być **prawdziwy dla dowolnie wybranego wektora $\mathbf{h}$** (jest to kierunek przyrostu argumentu $\mathbf{w}$). Jest to możliwe tylko wtedy, gdy **operator pochodnej Gâteaux jest tożsamościowo równy 0**:

$$\partial_{\mathbf{w}} g = 2\left(\mathbf{T}\mathbf{w} - \lambda\,\mathbf{w}\right) = 0$$

$$\boxed{\mathbf{T}\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{w}}$$

Kierunki własne są kierunkami, dla których odpowiadające im składowe jednoimienne (na przekątnej głównej) spełniają warunek konieczny istnienia ich ekstremum. Są to zatem **kierunki stacjonarne** (pochodna jest zerowa). Mogą okazać się **kierunkami ekstremalnych wartości składowych na przekątnej głównej**.

ZAGADNIENIE WŁASNE

TWIERDZENIE 1

Wartości własne rzeczywistego symetrycznego tensora są rzeczywiste.

DOWÓD:

Przypuśćmy, że znaleźliśmy zespoloną wartość własną i odpowiadający jej zespolony wektor własny:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{w} \qquad \text{gdzie} \qquad \lambda = \alpha + \beta\,\mathrm{i}\,, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1\,\mathrm{i} \\ a_2 + b_2\,\mathrm{i} \\ a_3 + b_3\,\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{i}^2 = -1$$

Iloczyn skalarny wektora zespolonego i wektora do niego sprzężonego jest liczbą rzeczywistą:

$$\mathbf{w}\cdot\overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1\,\mathrm{i} & a_2 + b_2\,\mathrm{i} & a_3 + b_3\,\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - b_1\,\mathrm{i} \\ a_2 - b_2\,\mathrm{i} \\ a_3 - b_3\,\mathrm{i} \end{bmatrix} = \left(a_1^2 + b_1^2\right) + \left(a_2^2 + b_2^2\right) + \left(a_3^2 + b_3^2\right) = w \in \mathbb{R}$$

ZAGADNIENIE WŁASNE

DOWÓD c.d.:

Możemy napisać:

$$\lambda\, w = \lambda\, \overline{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}}\cdot(\lambda\,\mathbf{w}) = \overline{\mathbf{w}}\cdot(\mathbf{T}\,\mathbf{w})$$

Korzystając z własności sprzężenia zespolonego, dla tensora symetrycznego możemy napisać:

$$\overline{\mathbf{w}}\cdot(\mathbf{T}\,\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \overline{w}_i T_{ij} w_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \overline{w}_i \overline{T}_{ij} w_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \overline{w}_i \overline{T}_{ji} w_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \overline{(w_i T_{ji})}\, w_j = \mathbf{w}\cdot\overline{(\mathbf{T}\,\mathbf{w})}$$

Ponieważ $\mathbf{w}$ jest wektorem własnym, zatem:

$$\mathbf{w}\cdot\overline{(\mathbf{T}\,\mathbf{w})} = \mathbf{w}\cdot\overline{(\lambda\,\mathbf{w})} = \overline{\lambda}\,\mathbf{w}\cdot\overline{\mathbf{w}} = \overline{\lambda}\, w$$

Mamy zatem:

$$\lambda\, w = \overline{\lambda}\, w$$

Ponieważ $\mathbf{w} \neq 0$, zatem $w \neq 0$, więc musi zachodzić:

$$\lambda = \overline{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha+\beta\,\mathrm{i}) = (\alpha-\beta\,\mathrm{i}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\overline{\lambda} \\ \mathrm{Im}\,\lambda = \mathrm{Im}\,\overline{\lambda} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \alpha \\ \beta = -\beta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

■QED

ZAGADNIENIE WŁASNE

TWIERDZENIE 2

Tensor rzeczywisty, który ma rzeczywistą wartość własną, ma odpowiadający jej rzeczywisty wektor własny.

DOWÓD:
Przypuśćmy, że znaleźliśmy rzeczywistą wartość własną i odpowiadający jej zespolony wektor własny:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{w}$$

Po dokonaniu obustronnego sprzężenia zespolonego, możemy napisać:

$$\overline{\mathbf{T}\,\mathbf{w}} = \overline{\lambda\,\mathbf{w}}$$
$$\overline{\mathbf{T}}\,\overline{\mathbf{w}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{w}}$$

Ale zarówno tensor $\mathbf{T}$ jak i wartość własna λ są rzeczywiste, zatem

$$\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{T}\,,\quad \overline{\lambda} = \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{w}} = \lambda\,\overline{\mathbf{w}}$$

W takim razie wektor $\overline{\mathbf{w}}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości λ. Możemy zatem napisać

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}}) = \mathbf{T}\,\mathbf{w} + \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{w}} = \lambda\,\mathbf{w} + \lambda\,\overline{\mathbf{w}} = \lambda(\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}})$$

W takim razie wektor $(\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}})$ również jest wektorem własnym odpowiadającym wartości λ.

ZAGADNIENIE WŁASNE

DOWÓD c.d.:

$$\mathbf{T}\left(\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}}\right)=\lambda\left(\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}}\right)$$

Dla dowolnego zespolonego wektora $\mathbf{w}$, wektor $(\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}})$ jest rzeczywisty:

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} \\ a_2+b_2\mathrm{i} \\ a_3+b_3\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \left(\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}}\right)=\begin{bmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} \\ a_2+b_2\mathrm{i} \\ a_3+b_3\mathrm{i} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1-b_1\mathrm{i} \\ a_2-b_2\mathrm{i} \\ a_3-b_3\mathrm{i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

■QED

UWAGI:

- Wektor własny przemnożony przez dowolny skalar (rzeczywisty lub zespolony) jest również wektorem własnym.

$$\mathbf{T}\,\mathbf{v}=\mathbf{T}\left(\alpha\,\mathbf{w}\right)=\alpha\left(\mathbf{T}\,\mathbf{w}\right)=\lambda\left(\alpha\,\mathbf{w}\right)=\lambda\,\mathbf{v}$$

- W szczególności jeśli mamy jakiś rzeczywisty wektor własny $\mathbf{w}$, to zespolony wektor $\mathrm{i}\mathbf{w}$ też jest wektorem własnym odpowiadającym tej samej wartości własnej.

ZAGADNIENIE WŁASNE

TWIERDZENIE 3

Jeśli dla pewnych dwóch wartości własnych zachodzi $\lambda_1 \neq \lambda_2$, wtedy iloczyn skalarny odpowiadających im wektorów własnych **tensora symetrycznego** jest zerowy, tj. kierunki własne odpowiadające różnym wartościom własnym tensora symetrycznego są prostopadłe.

DOWÓD:
Przypuśćmy, że znaleźliśmy dwie wartości własne i odpowiadające im wektory własne:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{w}^{(1)} = \lambda_1\,\mathbf{w}^{(1)}$$

$$\mathbf{T}\,\mathbf{w}^{(2)} = \lambda_2\,\mathbf{w}^{(2)}$$

Obliczmy iloczyny skalarne:

$$\mathbf{w}^{(1)}\cdot\left(\mathbf{T}\,\mathbf{w}^{(2)}\right) = \lambda_2\,\mathbf{w}^{(1)}\cdot\mathbf{w}^{(2)}$$

$$\mathbf{w}^{(2)}\cdot\left(\mathbf{T}\,\mathbf{w}^{(1)}\right) = \lambda_1\,\mathbf{w}^{(1)}\cdot\mathbf{w}^{(2)}$$

Dla tensora symetrycznego:

$$\mathbf{w}^{(1)}\cdot\left(\mathbf{T}\,\mathbf{w}^{(2)}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} w_i^{(1)} T_{ij} w_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} w_i^{(1)} T_{ji} w_j^{(2)} = \mathbf{w}^{(2)}\cdot\left(\mathbf{T}\,\mathbf{w}^{(1)}\right)$$

Mamy zatem

$$\lambda_1\,\mathbf{w}^{(1)}\cdot\mathbf{w}^{(2)} = \lambda_2\,\mathbf{w}^{(1)}\cdot\mathbf{w}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbf{w}^{(1)}\cdot\mathbf{w}^{(2)} = 0 \quad \overset{(\lambda_1\neq\lambda_2)}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{w}^{(1)}\cdot\mathbf{w}^{(2)} = 0$$

■QED

RÓWNANIE WIEKOWE I JEGO PIERWIASTKI – WARTOŚCI WŁASNE

- Wiemy, że wektory własne spełniają zależność:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{w} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{1})\,\mathbf{w} = \mathbf{0} \qquad \text{gdzie} \qquad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Powyższe równanie wektorowe jest równoważne **układowi równań liniowych**:

$$\begin{cases} (T_{11} - \lambda)\,w_1 + T_{12}\,w_2 + T_{13}\,w_3 = 0 \\ T_{21}\,w_1 + (T_{22} - \lambda)\,w_2 + T_{23}\,w_3 = 0 \\ T_{31}\,w_1 + T_{32}\,w_2 + (T_{33} - \lambda)\,w_3 = 0 \end{cases}$$

- Jest to **układ równań jednorodnych** (prawe strony są równe 0). Taki układ **posiada niezerowe rozwiązanie** tylko wtedy, jeśli **wyznacznik macierzy współczynników jest równy 0**.

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{1}) = 0$$

- Rozwiązań takich (wektorów $\mathbf{w}$) jest **nieskończenie wiele**. **Każdy wektor równoległy do osi własnej jest wektorem własnym** – wektory mają ten sam kierunek, ale mogą mieć różne zwroty i długości.

RÓWNANIE WIEKOWE I JEGO PIERWIASTKI – WARTOŚCI WŁASNE

$$\det\left(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (T_{11}-\lambda) & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & (T_{22}-\lambda) & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & (T_{33}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Po rozpisaniu:

$$(T_{11}-\lambda)(T_{22}-\lambda)(T_{33}-\lambda) + T_{23}T_{31}T_{12} + T_{32}T_{13}T_{21}$$
$$- T_{23}T_{32}(T_{11}-\lambda) - T_{31}T_{13}(T_{22}-\lambda) - T_{12}T_{21}(T_{33}-\lambda) = 0$$

Dla tensora symetrycznego

$$(T_{11}-\lambda)(T_{22}-\lambda)(T_{33}-\lambda) + 2T_{23}T_{31}T_{12} + - T_{23}^2(T_{11}-\lambda) - T_{31}^2(T_{22}-\lambda) - T_{12}^2(T_{33}-\lambda) = 0$$

Jest to równanie trzeciego stopnia. Nazywamy je równaniem wiekowym.

RÓWNANIE WIEKOWE I JEGO PIERWIASTKI – WARTOŚCI WŁASNE

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda_2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

Współczynniki równania wiekowego są **niezmiennikami**, tj. niezależnie od tego, w jakim układzie współrzędnych byłyby wyznaczane, ich wartość zawsze jest taka sama.

- PIERWSZY NIEZMIENNIK TENSORA **–** ślad tensora (ang. „*trace*”)

$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{T}) = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

- DRUGI NIEZEMIENNIK TENSORA

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}(\mathbf{T}))^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{T}^2)\right] = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32}) + (T_{33}T_{11} - T_{31}T_{13}) + (T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21})$$

- TRZECI NIEZMIENNIK TENSORA **–** wyznacznik tensora (ang. „*determinant*”)

$$I_3 = \det(\mathbf{T}) = \frac{1}{6}\left[(\mathrm{tr}(\mathbf{T}))^3 - 3\,\mathrm{tr}(\mathbf{T})\,\mathrm{tr}(\mathbf{T}^2) + 2\,\mathrm{tr}(\mathbf{T}^3)\right]$$

RÓWNANIE WIEKOWE I JEGO PIERWIASTKI – WARTOŚCI WŁASNE

$$\boxed{-\lambda^3 + I_1 \lambda_2 - I_2 \lambda + I_3 = 0}$$

Równanie wiekowe jest **równaniem algebraicznym 3-go stopnia** (równaniem sześciennym). Podobnie, jak dla równania kwadratowego, istnieją ogólne wzory na pierwiastki tego równania (np. wzory Cardano).

Obliczamy:

- dewiator tensora: $$\mathbf{D_T} = \mathbf{T} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{1} = \begin{bmatrix} (T_{11} - I_1/3) & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & (T_{22} - I_1/3) & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & (T_{33} - I_1/3) \end{bmatrix}$$
- niezmienniki dewiatora:

$$J_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\mathbf{D_T^2}\right) = \frac{1}{6}\left[(T_{22} - T_{33})^2 + (T_{33} - T_{11})^2 + (T_{11} - T_{22})^2\right] + (T_{23} T_{32} + T_{31} T_{13} + T_{12} T_{21})$$

$$\begin{aligned} J_3 = \det\left(\mathbf{D_T}\right) = & \left(T_{11} - \frac{1}{3} I_1\right)\left(T_{22} - \frac{1}{3} I_1\right)\left(T_{33} - \frac{1}{3} I_1\right) + T_{23} T_{31} T_{12} + T_{32} T_{13} T_{21} \\ & - T_{23} T_{32}\left(T_{11} - \frac{1}{3} I_1\right) - T_{31} T_{13}\left(T_{22} - \frac{1}{3} I_1\right) - T_{12} T_{21}\left(T_{33} - \frac{1}{3} I_1\right) \end{aligned}$$

RÓWNANIE WIEKOWE I JEGO PIERWIASTKI – WARTOŚCI WŁASNE

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda_2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

Wyróżnik równania sześciennego: $\Delta = \frac{1}{4} J_3^2 - \frac{1}{27} J_2^3$

Przypadek 1) – $\Delta < 0$ – **trzy różne pierwiastki rzeczywiste**

$$\lambda_k = p + q\sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}(k-1)\pi\right), \quad k=1,2,3$$

$$p = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3}(T_{11}+T_{22}+T_{33})$$

$$q = \sqrt{2 J_2} = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{D}_\mathbf{T}^2)} = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(T_{22}-T_{33})^2+(T_{33}-T_{11})^2+(T_{11}-T_{22})^2\right]+2(T_{23}T_{32}+T_{31}T_{13}+T_{12}T_{21})}$$

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right)$$

RÓWNANIE WIEKOWE I JEGO PIERWIASTKI – WARTOŚCI WŁASNE

$$-\lambda^3 + I_1\lambda_2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

Wyróżnik równania sześciennego: $\Delta = \frac{1}{4}J_3^2 - \frac{1}{27}J_2^3$

Przypadek 2) – $\Delta = 0,\ J_3 \neq 0$ – **rzeczywisty pierwiastek podwójny i rzeczywisty pierwiastek pojedynczy**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = p - \sqrt[3]{\frac{J_3}{2}}, \qquad \lambda_3 = p + 2\sqrt[3]{\frac{J_3}{2}}$$

Przypadek 3) – $\Delta = 0,\ J_3 = 0$ – **rzeczywisty pierwiastek potrójny**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = p$$

Przypadek 4) – $\Delta > 0$ – **jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa sprzężone pierwiastki zespolone.**

Nie zachodzi dla tensorów symetrycznych.

WYZNACZANIE WEKTORÓW WŁASNYCH

METODA 1

- Wektory własne spełniają zależność:

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

- Powyższe równanie wektorowe jest równoważne **układowi równań liniowych**:

$$\begin{cases} (T_{11}-\lambda)w_1 + T_{12}w_2 + T_{13}w_3 = 0 \\ T_{21}w_1 + (T_{22}-\lambda)w_2 + T_{23}w_3 = 0 \\ T_{31}w_1 + T_{32}w_2 + (T_{33}-\lambda)w_3 = 0 \end{cases}$$

- Wiemy, że **wyznacznik macierzy współczynników jest równy 0** (tak została wyznaczona wartość λ), zatem **istnieje nieskończenie wiele niezerowych rozwiązań**, tj. takich trójek $[w_1, w_2, w_3]$ (składowych wektora własnego), dla których równania powyższe są spełnione.

- Rozwiązania te wyznaczamy następująco:
  - Jeśli λ jest pojedynczą **wartością własną**, wtedy **jedną ze składowych** (np. w_1) **traktujemy jako parametr**, a pozostałe **dwie wyznaczamy z którychkolwiek dwóch niezależnych równań** tego układu.
  - Jeśli λ jest podwójną **wartością własną**, wtedy **dwie ze składowych** (np. w_1 i w_2) **traktujemy jako parametry**, a **trzecią wyznaczamy z któregokolwiek równania**.
  - Jeśli λ jest potrójną **wartością własną**, to **dowolny wektor jest wektorem własnym**.

WYZNACZANIE WEKTORÓW WŁASNYCH

METODA 2

- Wektory własne spełniają zależność:

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{w} = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (T_{11}-\lambda)w_1 + T_{12}w_2 + T_{13}w_3 = 0 \\ T_{21}w_1 + (T_{22}-\lambda)w_2 + T_{23}w_3 = 0 \\ T_{31}w_1 + T_{32}w_2 + (T_{33}-\lambda)w_3 = 0 \end{cases}$$

- Lewa strona każdego z powyższych równań może być interpretowana jako iloczyn skalarny wektora własnego i wektorów:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= [(T_{11}-\lambda) \quad T_{12} \quad T_{13}] \\ \mathbf{t}_2 &= [T_{21} \quad (T_{22}-\lambda) \quad T_{23}] \\ \mathbf{t}_3 &= [T_{31} \quad T_{32} \quad (T_{33}-\lambda)] \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{w} = 0 \end{cases}$$

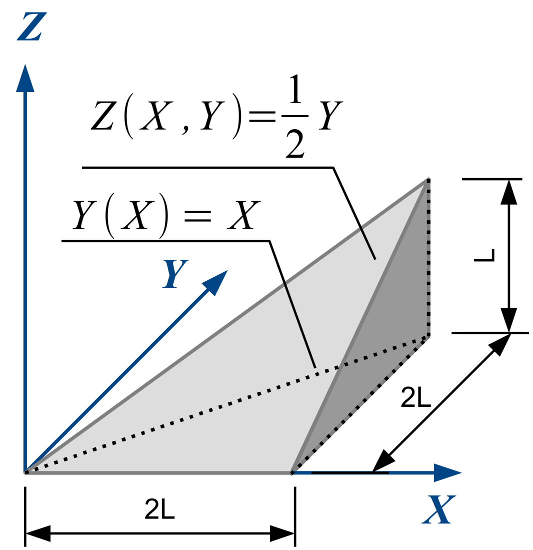
- Wektor własny $\mathbf{w}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$

- Fakt, że **wyznacznik macierzy współczynników jest zerowy** może być interpretowany w ten sposób, że **iloczyn mieszany wektorów $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ jest zerowy**, a dla niezerowych wektorów zachodzi to tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ leżą w jednej płaszczyźnie.

- Wektor własny $\mathbf{w}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$, więc jest to jakikolwiek wektor prostopadły do płaszczyzny wyznaczanej przez wektory $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ W szczególności, wektorem własnym jest iloczyn wektorowych dowolnej pary spośród wektorów $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$.

PRZYKŁADY

Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności Arcydzieła Sztuki Nowoczesnej – granitowego ostrosłupa jak na rysunku (ρ=2750 kg/m^3, L=1m).



ROZWIĄZANIE:

- Masa całkowita:

$$M = \iiint \rho \,\mathrm{d}V = \rho \int_{X=0}^{2L} \left[\int_{Y=0}^{X} \left[\int_{Z=0}^{\frac{1}{2}Y} \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = 1833{,}33\,\mathrm{kg}$$

Momenty statyczne:

$$S_{YZ} = \iiint \rho X \,\mathrm{d}V = 2750\ \mathrm{kg\cdot m}$$

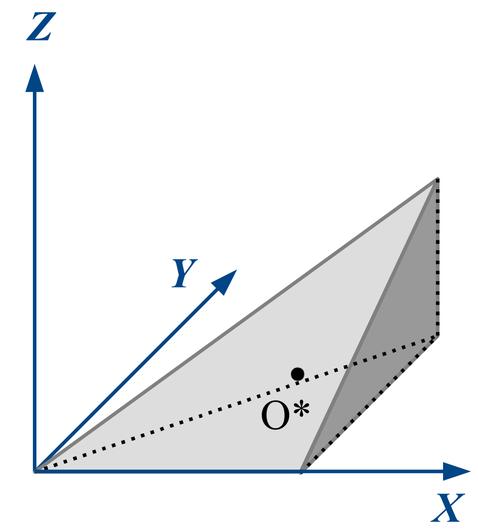
$$S_{ZX} = \iiint \rho Y \,\mathrm{d}V = 1833{,}33\ \mathrm{kg\cdot m}$$

$$S_{XY} = \iiint \rho Z \,\mathrm{d}V = 458{,}33\ \mathrm{kg\cdot m}$$

- Położenie środka ciężkości:

$$\mathbf{r}_{O^*} = [X_{O^*}, Y_{O^*}, Z_{O^*}] = \left[\frac{S_{YZ}}{M}, \frac{S_{ZX}}{M}, \frac{S_{XY}}{M} \right] = [1{,}5\ \mathrm{m}\ ;\ 1\,\mathrm{m}\ ;\ 0{,}25\,\mathrm{m}]$$

PRZYKŁADY



- Momenty bezwładności:

$$I_X = \iiint \rho \left(Y^2 + Z^2 \right) \mathrm{d}V = 2383{,}33 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_Y = \iiint \rho \left(Z^2 + X^2 \right) \mathrm{d}V = 4583{,}33 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_Z = \iiint \rho \left(X^2 + Y^2 \right) \mathrm{d}V = 6600{,}00 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

- Momenty dewiacji:

$$I_{YZ} = \iiint \rho \, YZ \, \mathrm{d}V = 550{,}00 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_{ZX} = \iiint \rho \, ZX \, \mathrm{d}V = 733{,}33 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_{XY} = \iiint \rho \, XY \, \mathrm{d}V = 2933{,}33 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

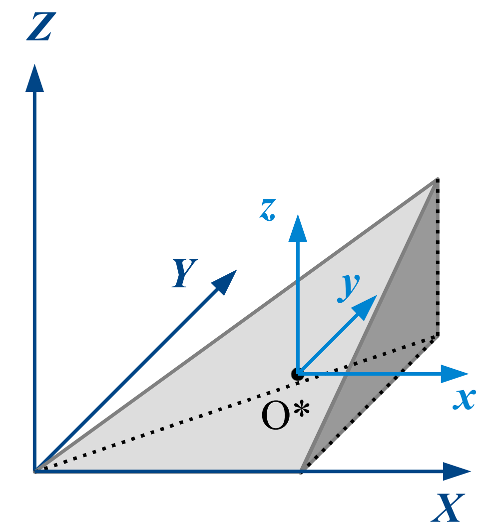
PRZYKŁADY

- Centralne momenty bezwładności:

$$I_x = I_X - M\left(Y_{O^*}^2 + Z_{O^*}^2\right) = 435{,}417\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_y = I_Y - M\left(Z_{O^*}^2 + X_{O^*}^2\right) = 343{,}750\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_z = I_Z - M\left(X_{O^*}^2 + Y_{O^*}^2\right) = 641{,}667\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$



- Centralne momenty dewiacji:

$$I_{yz} = I_{YZ} - M\left(Y_{O^*} Z_{O^*}\right) = 91{,}6667\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

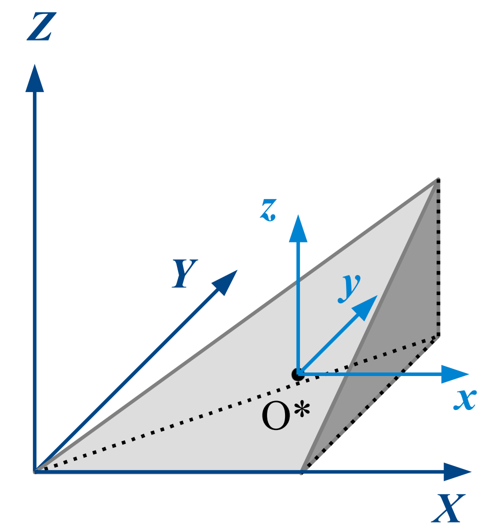
$$I_{zx} = I_{YZ} - M\left(Z_{O^*} X_{O^*}\right) = 45{,}8333\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_{xy} = I_{XY} - M\left(X_{O^*} Y_{O^*}\right) = 183{,}333\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

PRZYKŁADY

- Tensor momentu bezwładności względem osi centralnych

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 435{,}417 & -183{,}333 & -45{,}8333 \\ -183{,}333 & 343{,}750 & -91{,}6667 \\ -45{,}8333 & -91{,}6667 & 641{,}667 \end{bmatrix} \mathrm{kg\cdot m^2}$$



- Niezmienniki tensora

$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{I}) = 1420{,}80\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}(\mathbf{I}))^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{I^2})\right] = 6{,}05526\cdot 10^5 (\mathrm{kg\cdot m^2})^2$$

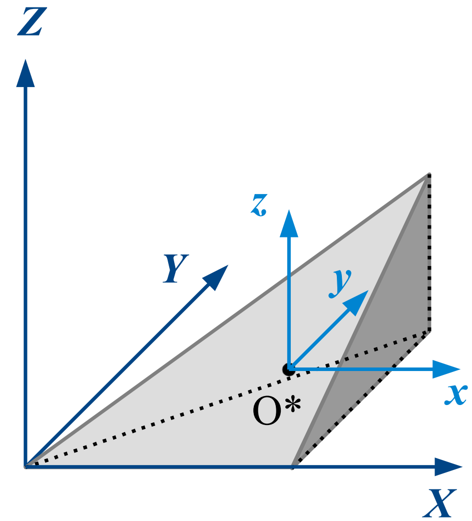
$$I_3 = \det(\mathbf{I}) = 6{,}85529\cdot 10^7 (\mathrm{kg\cdot m^2})^3$$

- Równanie wiekowe

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

$$-\lambda^3 + (1420{,}80)\lambda^2 - (6{,}05526\cdot 10^5)\lambda + (6{,}85529\cdot 10^7) = 0$$

PRZYKŁADY



- Niezmienniki dewiatora

$$J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}I_1\mathbf{1}\right)^2\right] = 67397{,}2\ (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2)^2$$

$$J_3 = \det\left[\mathbf{I} - \frac{1}{3}I_1\mathbf{1}\right] = -5{,}76174\cdot 10^6\ (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2)^3$$

- Wyróżnik równania wiekowego

$$\Delta = \frac{1}{4}J_3^2 - \frac{1}{27}J_2^3 = -3{,}03927\cdot 10^{12} < 0$$ – trzy różne pierwiastki rzeczywiste

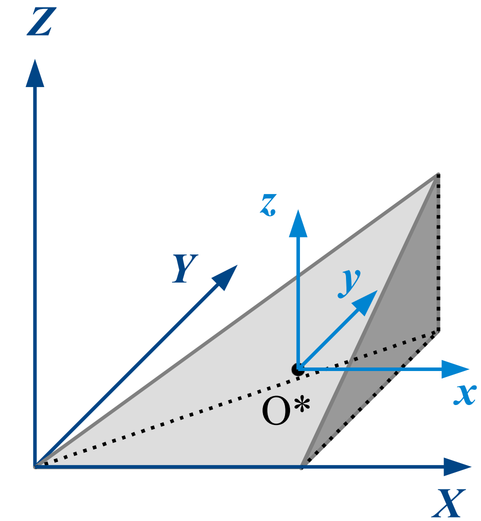
PRZYKŁADY

- Niezmienniki

Miara składowej aksjatorowej: $p = \frac{1}{3} I_1 = 473{,}611 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$

Miara składowej dewiatorowej: $q = \sqrt{2 J_2} = 367{,}144 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$

Kąt orientujący składową dewiatorową: $\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) = 0{,}8658 \, \mathrm{rad}$



- Wartości własne

$$\lambda_k = p + q\sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}(k-1)\pi \right), \quad k = 1,2,3$$

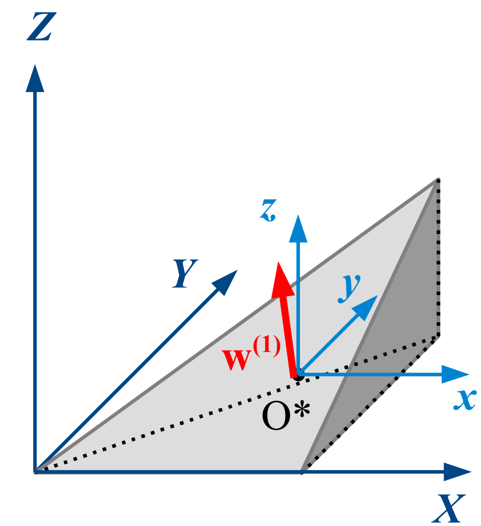
$$\lambda_1 = 667{,}873 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$
$$\lambda_2 = 178{,}758 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$
$$\lambda_3 = 574{,}203 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

UWAGA: Przenumerujemy wartości własne. Z reguły numeruje się je od największej do najmniejszej lub na odwrót.

$$\lambda_1 = 667{,}873 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$
$$\lambda_2 = 574{,}203 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$
$$\lambda_3 = 178{,}758 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

PRZYKŁADY

- Wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_1 = 667{,}873\ \mathrm{kg \cdot m^2}$



$$\left(\mathbf{I} - \lambda_1 \mathbf{1}\right)\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} (435{,}417-667{,}873) & -183{,}333 & -45{,}8333 \\ -183{,}333 & (343{,}750-667{,}873) & -91{,}6667 \\ -45{,}8333 & -91{,}6667 & (641{,}667-667{,}873) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -232{,}456 & -183{,}333 & -45{,}8333 \\ -183{,}333 & -324{,}123 & -91{,}6667 \\ -45{,}8333 & -91{,}6667 & -26{,}206 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektor własny:

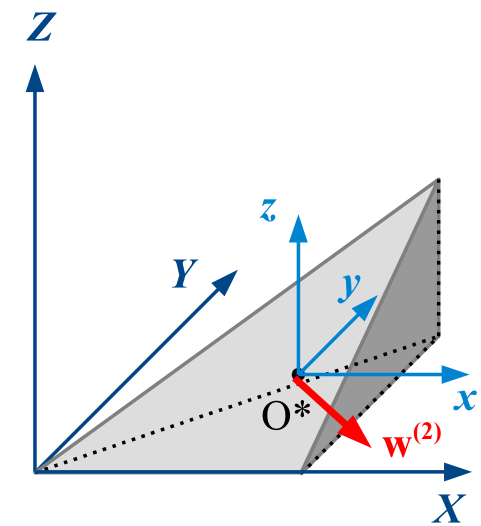
$$\begin{array}{rl} \times & \begin{bmatrix} -232{,}456 & -183{,}333 & -45{,}8333 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -183{,}333 & -324{,}123 & -91{,}6667 \end{bmatrix} \\ \hline \mathbf{v}^{(1)} = & \begin{bmatrix} 1949{,}90 & -12905{,}7 & 41733{,}3 \end{bmatrix} \end{array}$$

unormowany wektor własny:

$$\mathbf{w}^{(1)} = \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\left|\mathbf{v}^{(1)}\right|} = \frac{\begin{bmatrix} 1949{,}90 & -12905{,}7 & 41733{,}3 \end{bmatrix}}{\sqrt{(1949{,}90)^2 + (-12905{,}7)^2 + (41733{,}3)^2}} = \begin{bmatrix} 0{,}0446 & -0{,}2951 & 0{,}9544 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁADY

- Wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_2 = 574{,}203\ \mathrm{kg\cdot m^2}$



$$\left(\mathbf{I} - \lambda_2 \mathbf{1}\right)\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} (435{,}417-574{,}203) & -183{,}333 & -45{,}8333 \\ -183{,}333 & (343{,}750-574{,}203) & -91{,}6667 \\ -45{,}8333 & -91{,}6667 & (641{,}667-574{,}203) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -138{,}786 & -183{,}333 & -45{,}8333 \\ -183{,}333 & -230{,}453 & -91{,}6667 \\ -45{,}8333 & -91{,}6667 & 67{,}464 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektor własny:

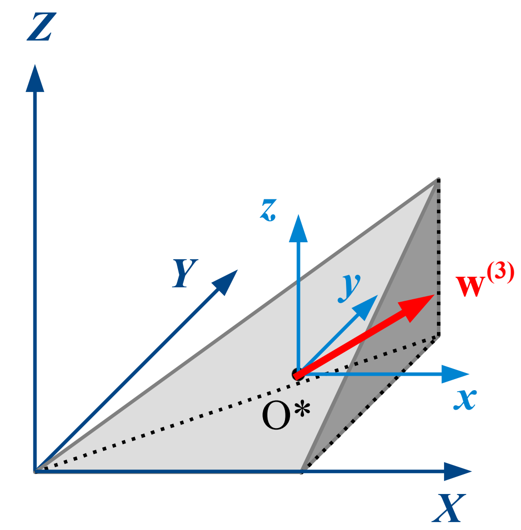
$$\begin{array}{rl} \times & \begin{bmatrix} -138{,}786 & -183{,}333 & -45{,}8333 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -183{,}333 & -230{,}453 & -91{,}6667 \end{bmatrix} \\ \hline \mathbf{v}^{(2)} = & \begin{bmatrix} 6243{,}11 & -4319{,}30 & -1627{,}34 \end{bmatrix} \end{array}$$

unormowany wektor własny:

$$\mathbf{w}^{(2)} = \frac{\mathbf{v}^{(2)}}{|\mathbf{v}^{(2)}|} = \frac{\begin{bmatrix} 6243{,}11 & -4319{,}30 & -1627{,}34 \end{bmatrix}}{\sqrt{(6243{,}11)^2 + (-4319{,}30)^2 + (-1627{,}34)^2}} = \begin{bmatrix} 0{,}8041 & -0{,}5563 & -0{,}2096 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁADY

- Wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_3 = 178{,}758\ \mathrm{kg \cdot m^2}$



- Wektor $\mathbf{w}^{(3)}$ jest prostopadły do $\mathbf{w}^{(1)}$ i $\mathbf{w}^{(2)}$.
- Wektor $\mathbf{w}^{(3)}$ może być wyznaczony jako **iloczyn wektorowy** $\mathbf{w}^{(1)}$ i $\mathbf{w}^{(2)}$.
- Skoro $\mathbf{w}^{(1)}$ i $\mathbf{w}^{(2)}$ są unormowane, z tego wynika, że

$$\left|\mathbf{w}^{(3)}\right| = \left|\mathbf{w}^{(1)} \times \mathbf{w}^{(2)}\right| = \underbrace{\left|\mathbf{w}^{(1)}\right|}_{=1} \cdot \underbrace{\left|\mathbf{w}^{(2)}\right|}_{=1} \cdot \underbrace{\sin \underbrace{\sphericalangle\left(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}\right)}_{=90^\circ}}_{=1} = 1$$

a zatem $\mathbf{w}^{(3)}$ też jest **unormowany**.

- Z własności iloczynu wektorowego wynika, że trójka $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{w}^{(2)}$, $\mathbf{w}^{(3)}$ stanowi **trójkę prawoskrętną**, zatem określa kierunki i zwroty osi **prawoskrętnego kartezjańskiego układu współrzędnych**.

$$\times \begin{array}{l} \mathbf{w}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}0446 & -0{,}2951 & 0{,}9544 \end{bmatrix} \\ \mathbf{w}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}8041 & -0{,}5563 & -0{,}2096 \end{bmatrix} \\ \hline \mathbf{w}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}5928 & 0{,}7768 & 0{,}2125 \end{bmatrix} \end{array}$$

PRZYKŁADY

- Wartości własne i odpowiadające im wektory własne:

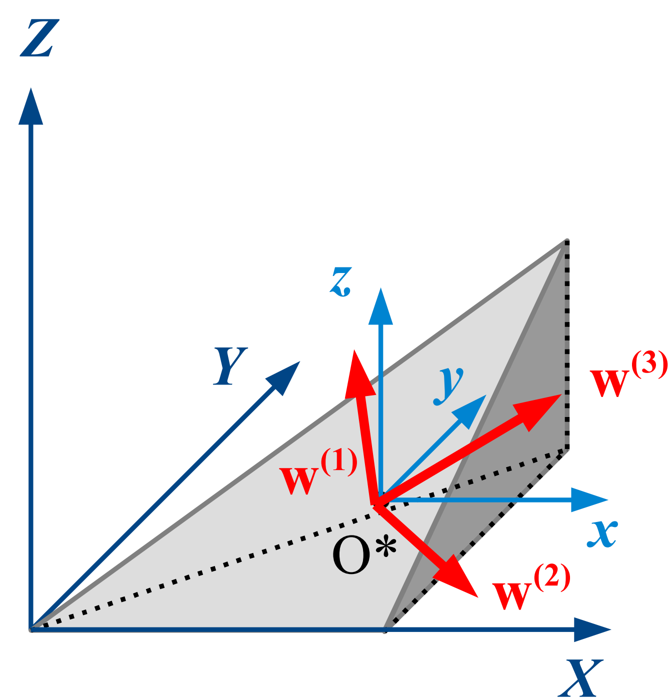
$$\lambda_1 = 667{,}873\ \mathrm{kg\cdot m^2} \qquad \mathbf{w}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}0446 & -0{,}2951 & 0{,}9544 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 574{,}203\ \mathrm{kg\cdot m^2} \qquad \mathbf{w}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}8041 & -0{,}5563 & -0{,}2096 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 178{,}758\ \mathrm{kg\cdot m^2} \qquad \mathbf{w}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}5928 & 0{,}7768 & 0{,}2125 \end{bmatrix}$$

- Macierz przejścia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}0446 & -0{,}2951 & 0{,}9544 \\ 0{,}8041 & -0{,}5563 & -0{,}2096 \\ 0{,}5928 & 0{,}7768 & 0{,}2125 \end{bmatrix}$$



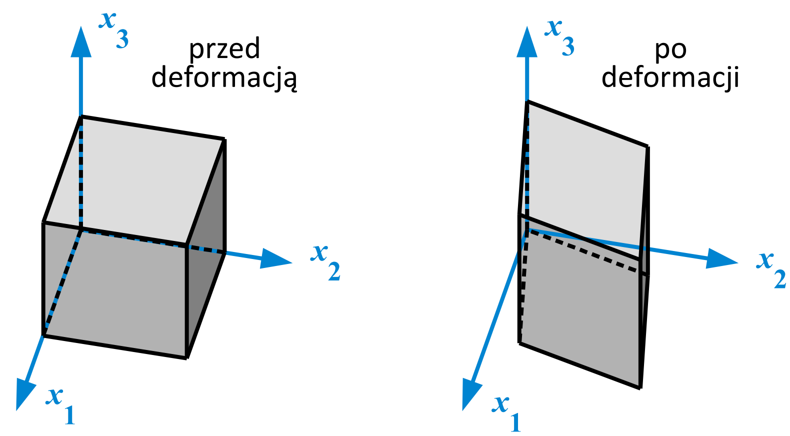
- Składowe w układzie osi własnych:

$$[I^{\xi}] = [A_x^{\xi}][I^x][A_x^{\xi}]^{\mathrm{T}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}0446 & -0{,}2951 & 0{,}9544 \\ 0{,}8041 & -0{,}5563 & -0{,}2096 \\ 0{,}5928 & 0{,}7768 & 0{,}2125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 435{,}417 & -183{,}333 & -45{,}8333 \\ -183{,}333 & 343{,}750 & -91{,}6667 \\ -45{,}8333 & -91{,}6667 & 641{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0446 & 0{,}8041 & 0{,}5928 \\ -0{,}2951 & -0{,}5563 & 0{,}7768 \\ 0{,}9544 & -0{,}2096 & 0{,}2125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 667{,}873 & 0 & 0 \\ 0 & 574{,}203 & 0 \\ 0 & 0 & 178{,}758 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁADY

Kostka sześcienna uległa deformacji. Każdy z punktów doznał przemieszczenia opisanego polem wektorowym

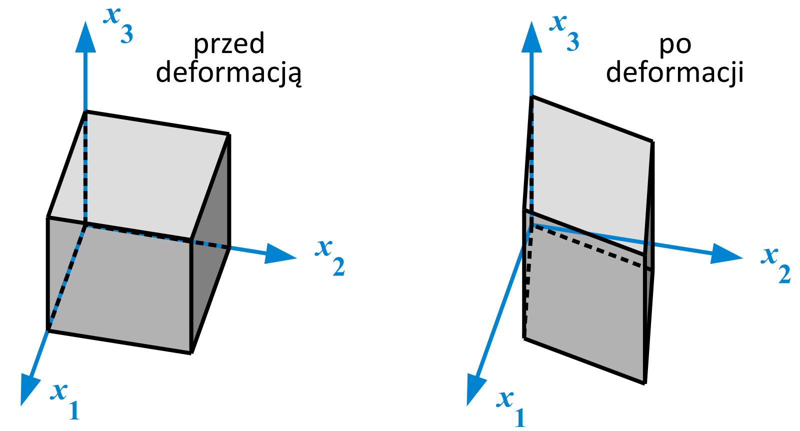


$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}038\,x_1 + 0{,}216\,x_2 \\ 0{,}216\,x_1 - 0{,}088\,x_2 \\ 0{,}2\,x_3 \end{bmatrix}$$

gdzie współrzędne x_1 , x_2 , x_3 oznaczają współrzędne punktu materialnego kostki przed deformacją.

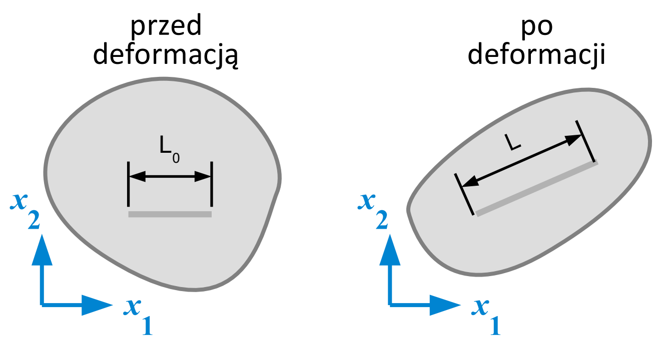
PRZYKŁADY

W teorii sprężystości definiuje się **tensor odkształcenia**, którego składowe określają równania:



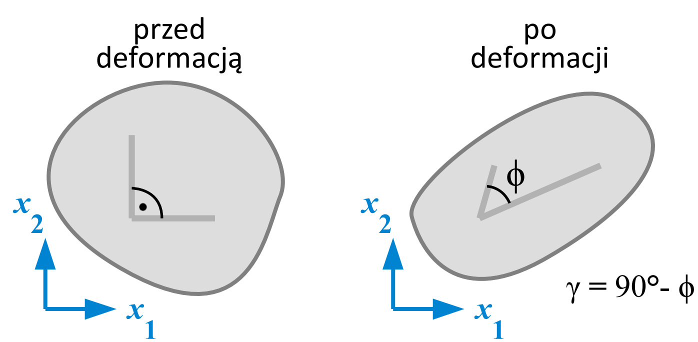
$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

Składowa jednoimienna (na przekątnej głównej) E_{ii} jest miarą **wydłużenia względnego włókna materialnego**, które przed deformacją było równoległe do i-tej osi przyjętego układu współrzędnych. Nazywamy ją odkształceniem liniowym.



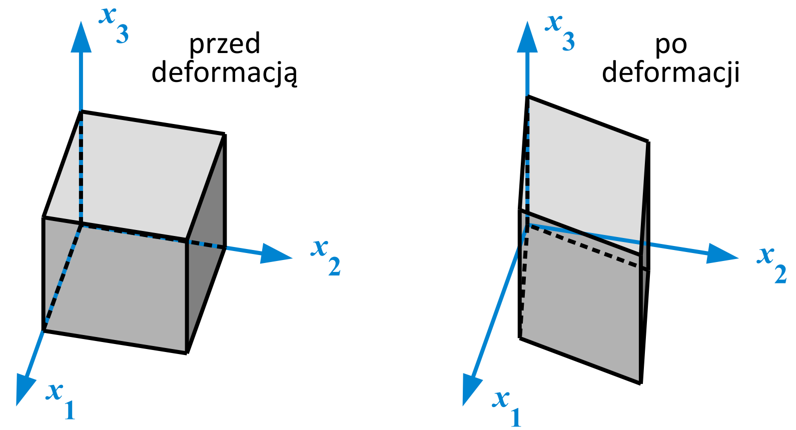
$$E_{11} \approx \frac{L - L_0}{L_0}$$

Składowa różnoimienna (poza przekątną główną) $E_{ij}\ (i \neq j)$ jest **miarą kąta, o jaki zmieni się kąt zawarty między dwoma włóknami materialnymi, które przed deformacją były prostopadłe** i równoległe jedno do i-tej, drugie do j-tej osi przyjętego układu współrzędnych. Nazywamy ją odkształceniem postaciowym.



$$E_{12} \approx \frac{\gamma}{2}$$

PRZYKŁADY



Pole przemieszczenia:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}038\,x_1 + 0{,}216\,x_2 \\ 0{,}216\,x_1 - 0{,}088\,x_2 \\ 0{,}2\,x_3 \end{bmatrix}$$

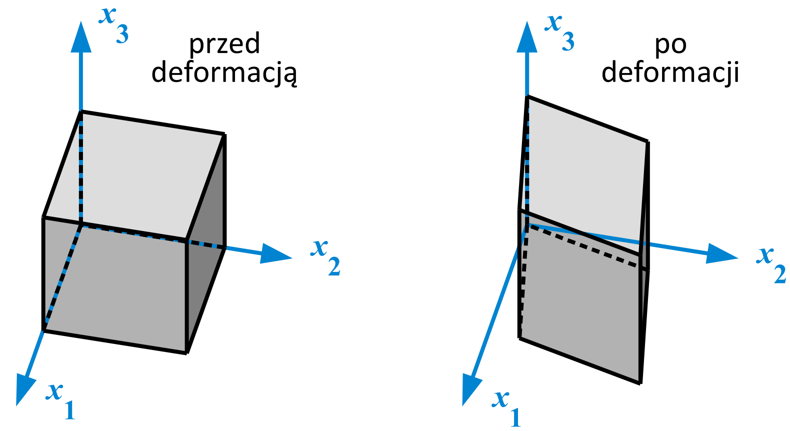
Tensor odkształcenia:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}06205 & 0{,}2106 & 0 \\ 0{,}2106 & -0{,}0608 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}22 \end{bmatrix}$$

Osie własne tensora odkształcenia wskazują orientacje włókien materialnych, które wskutek deformacji ulegają wydłużeniu lub skróceniu, ale pozostają względem siebie prostopadłe (brak odkształceń postaciowych). Miarą **wydłużenia względnego** tych włókien są **wartości własne tensora odkształcenia**.

PRZYKŁADY



- Tensor odkształcenia:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0{,}06205 & 0{,}2106 & 0 \\ 0{,}2106 & -0{,}0608 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}22 \end{bmatrix}$$

- Niezmienniki:

$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{E}) = 0{,}22125$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}(\mathbf{E}))^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{E}^2)\right] = -0{,}04785$$

$$I_3 = \det(\mathbf{E}) = -0{,}01059$$

- Równanie wiekowe:

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

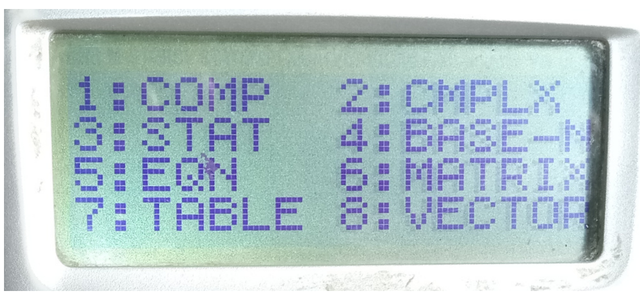
$$-\lambda^3 + (0{,}22125)\lambda^2 - (-0{,}04785)\lambda + (-0{,}01059) = 0$$

PRZYKŁADY

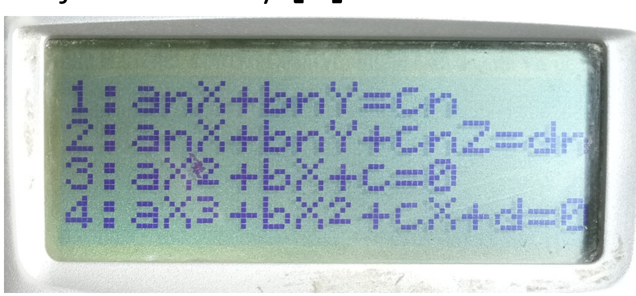
- Równanie wiekowe:

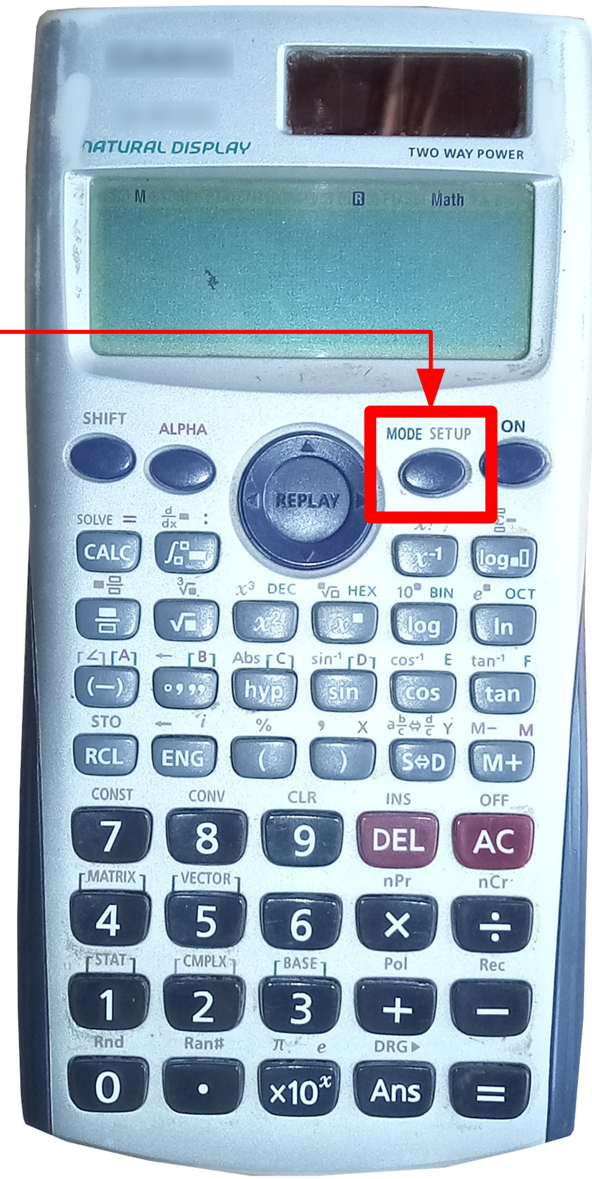
  Możemy je rozwiązać numerycznie przy użyciu komputera lub kalkulatora naukowego.

  - Przyciskamy **[MODE]**



  - Wybieramy tryb rozwiązywania równań (EQN)
    Tutaj: wciskamy **[5]**

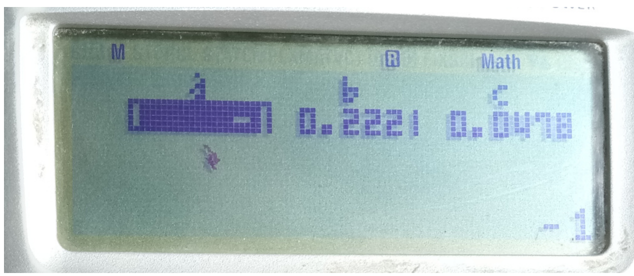


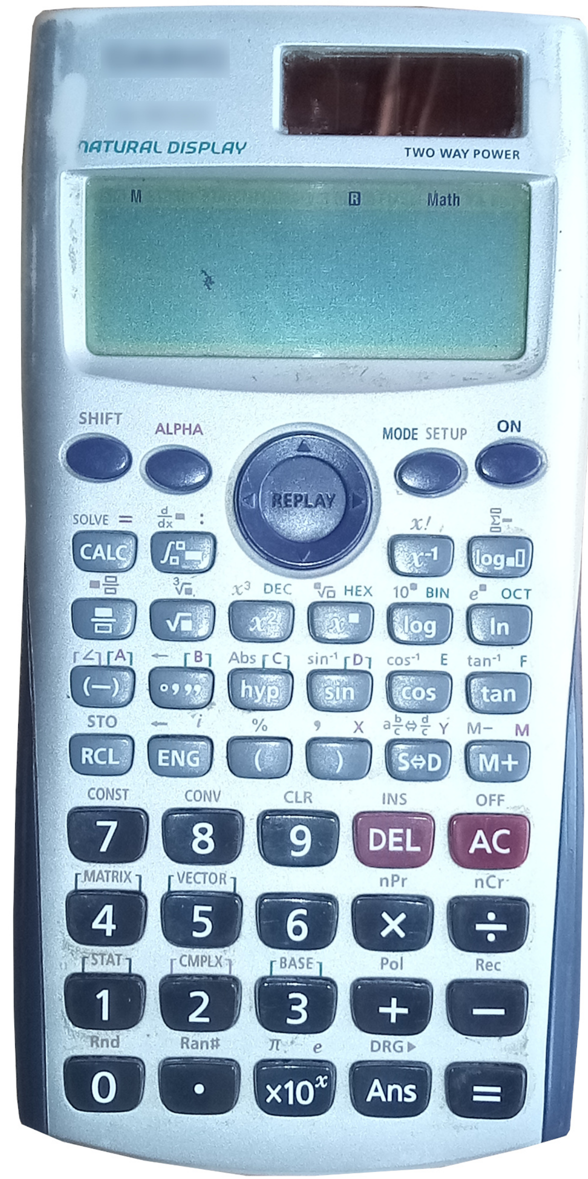


  - Wybieramy równanie sześcienne. Tutaj: wciskamy **[4]**

PRZYKŁADY

- Wpisujemy współczynniki równania. Wpisaną wartość potwierdzamy wciśnięciem **[=]**. Strzałkami przechodzimy do kolejnych współczynników.





UWAGI:

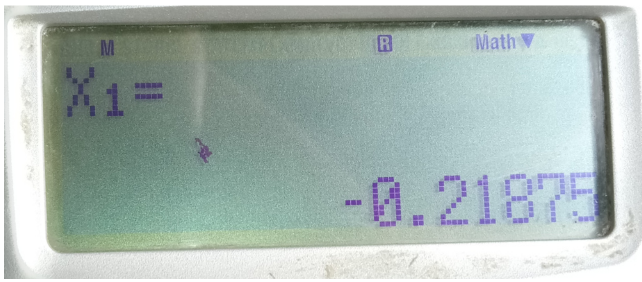
- Pamiętamy o znakach współczynników i znakach przy współczynnikach w równaniu wiekowym.

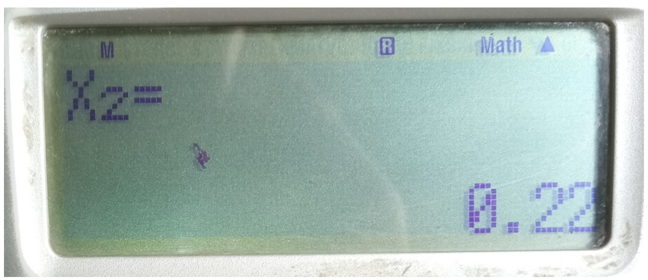
- Rozwiązanie jest wrażliwe na zaokrąglenia. Jeśli mamy niezmienniki w formie np. ułamka prostego, to możemy wpisać je w takiej postaci do kalkulatora. Mimo że wyświetli się zaokrąglony wynik dziesiętny, w pamięci kalkulatora zapisane jest dłuższe rozwinięcie.

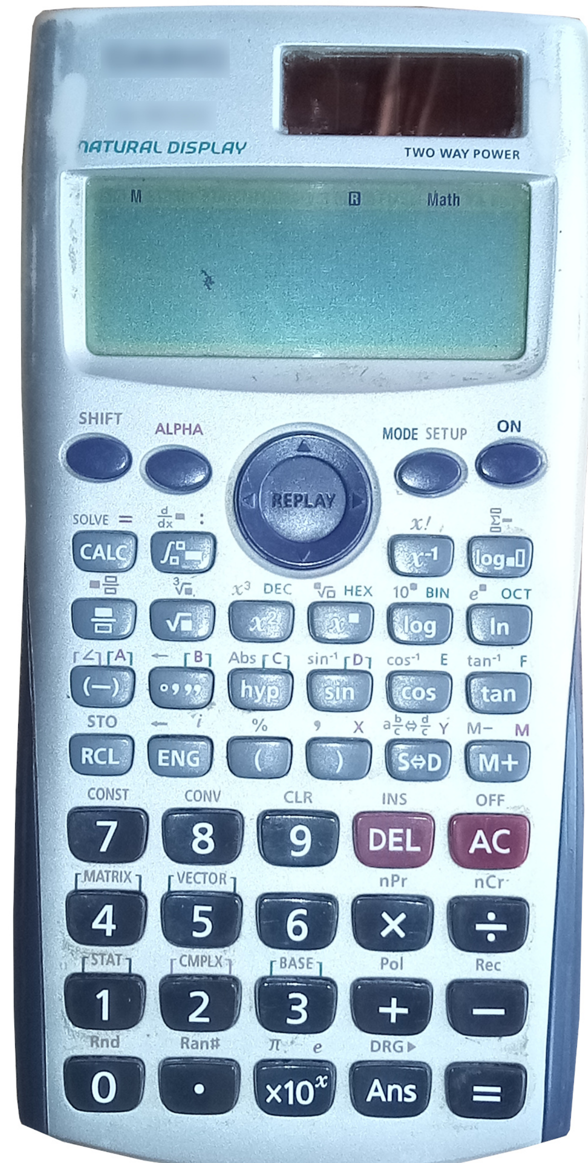
- Po potwierdzeniu wpisania ostatniego współczynnika ponownie wciskamy **[=]**

PRZYKŁADY

- Na wyświetlaczu pojawiają się kolejne pierwiastki, które przeglądać możemy za pomocą strzałek.







Otrzymaliśmy tylko **dwa różne pierwiastki** ($\Delta = 0,\ J_3 \neq 0$). Pierwszy pierwiastek jest pierwiastkiem pojedynczym, drugi – podwójnym.

$$\lambda_1 = -0{,}21875$$
$$\lambda_2 = 0{,}22$$
$$\lambda_3 = 0{,}22$$

PRZYKŁADY

- Wektor własny odpowiadający pojedynczej wartości własnej $\lambda_1 = -0{,}21875$

$$\left(\mathbf{E} - \lambda_1 \mathbf{1}\right)\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}06205-(-0{,}21875) & 0{,}2106 & 0 \\ 0{,}2106 & 0{,}0608-(-0{,}21875) & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}22-(-0{,}21875) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}2808 & 0{,}2106 & 0 \\ 0{,}2106 & 0{,}15795 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}43875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązujemy nieoznaczony układ równań. Przyjmujemy jedną z niewiadomych za parametr, np. $w_1^{(1)} = \alpha$

Wybieramy dwa niezależne równania, aby wyznaczyć pozostałe składowe

Pierwsze równania są zależne (współczynniki są proporcjonalne). Wybieramy np. 1-sze i 3-cie równanie.

$$\begin{bmatrix} 0{,}2808 & 0{,}2106 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}43875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0{,}2808\,\alpha + 0{,}2106\, w_2^{(1)} = 0 \\ 0{,}43875\, w_3^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w_2^{(1)} = -1{,}3333\,\alpha \\ w_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

PRZYKŁADY

- Wektor własny odpowiadający pojedynczej wartości własnej $\lambda_1 = -0{,}21875$

Wszystkie wektory własne odpowiadające pierwszej wartości własnej należą do jednoparametrowej rodziny wektorów.

$$\mathbf{w}^{(1)} = [\alpha \ ; -1{,}3333\,\alpha \ ; \ 0]$$

Możemy wybrać dowolny z nich poza wektorem zerowym. Np, możemy przyjąć $\alpha = 1$

$$\mathbf{w}^{(1)} = [1 \ ; -1{,}3333 \ ; \ 0]$$

Jeśli chcemy potem z wektorów własnych zbudować macierz przejścia, to wektor ten musi być unormowany, przyjmiemy zatem ostatecznie:

$$\mathbf{w}^{(1)} = \frac{[1 \ ; -1{,}3333 \ ; \ 0]}{\sqrt{1^2 + (-1{,}3333)^2 + 0^2}} = [0{,}6 \ ; -0{,}8 \ ; \ 0]$$

PRZYKŁADY

- Wektor własny odpowiadający podwójnej wartości własnej $\lambda_2 = \lambda_3 = 0{,}22$

$$\left(\mathbf{E} - \lambda_2 \mathbf{1}\right)\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}06205 - 0{,}22 & 0{,}2106 & 0 \\ 0{,}2106 & 0{,}0608 - 0{,}22 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}22 - 0{,}22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}15795 & 0{,}2106 & 0 \\ 0{,}2106 & -0{,}2808 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązujemy nieoznaczony układ równań. Ponieważ wartość własna jest podwójnym pierwiastkiem równania wiekowego, zatem dwie spośród składowych wektora własnego przyjmujemy jako parametr, a trzecią wyznaczamy na podstawie jednego z równań.

Jednym z parametrów musi być $w_3^{(2)}$, ponieważ trzecie równanie jest spełnione dla dowolnej wartości tej składowej. Niech drugim parametrem będzie $w_1^{(2)}$.

Wybieramy którekolwiek z równań, z których da się wyznaczyć ostatnią składową, np. równanie 1.

PRZYKŁADY

- Wektor własny odpowiadający podwójnej wartości własnej $\lambda_2 = \lambda_3 = 0{,}22$

$$\begin{bmatrix} -0{,}15795 & 0{,}2106 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ w_2^{(2)} \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}15795\,\alpha + 0{,}2106\,w_2^{(2)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_2^{(2)} = 0{,}75\,\alpha$$

Wszystkie wektory własne odpowiadające podwójnej wartości własnej należą do dwuparametrowej rodziny wektorów.

$$\mathbf{w}^{(2)} = [\alpha \,;\, 0{,}75\,\alpha \,;\, \beta]$$

Możemy wybrać dowolny z nich poza wektorem zerowym. Np, możemy przyjąć $\alpha = 0\,,\;\; \beta = 1$

$$\mathbf{w}^{(2)} = [0 \,;\, 0 \,;\, 1]$$

Wektor ten jest już unormowany. Trzeci wektor własny możemy wyznaczyć wybierając jakieś inne wartości parametrów α i β. Możemy jednak wyznaczyć go – tak jak ostatnio – jako iloczyn wektorowy pozostałych wektorów własnych:

$$\times \begin{array}{l} \mathbf{w}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{w}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \mathbf{w}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

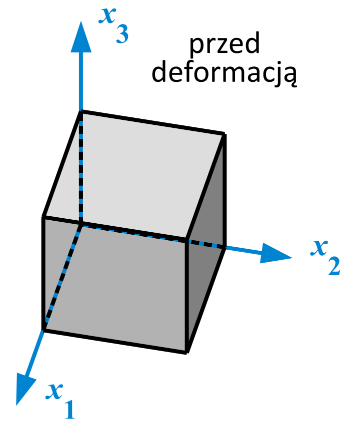
PRZYKŁADY

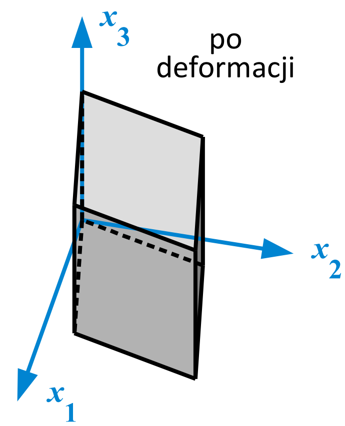
- Wartości własne i odpowiadające im wektory własne:

$$\lambda_1 = -0{,}21875 \qquad \mathbf{w}^{(1)} = [0{,}6\ ;\ -0{,}8\ ;\ 0]$$

$$\lambda_2 = 0{,}22 \qquad \mathbf{w}^{(2)} = [0\ ;\ 0\ ;\ 1]$$

$$\lambda_3 = 0{,}22 \qquad \mathbf{w}^{(3)} = \begin{bmatrix}-0{,}8 & -0{,}6 & 0\end{bmatrix}$$





- Macierz przejścia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \end{bmatrix}$$

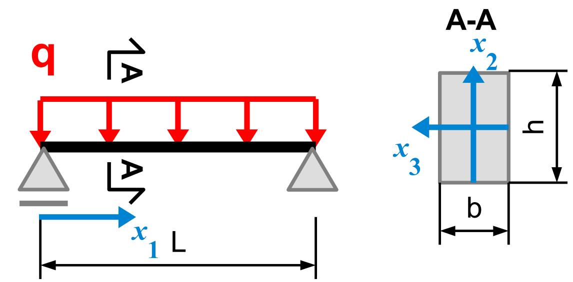
- Składowe w układzie osi własnych:

$$[E^{\xi}] = [A_x^{\xi}][E^x][A_x^{\xi}]^{\mathrm{T}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}06205 & 0{,}2106 & 0 \\ 0{,}2106 & -0{,}0608 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0 & -0{,}80 \\ -0{,}8 & 0 & -0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}21875 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}22 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}22 \end{bmatrix}$$

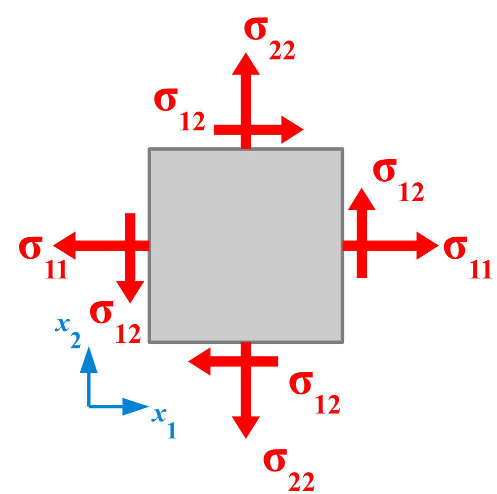
PRZYKŁADY

Wyznaczyć kierunki naprężeń głównych w belce o przekroju prostokątnym, podpartej przegubowo i obciążonej jednorodnym obciążeniem ciągłym.



Stan naprężenia w punkcie opisywany jest symetrycznym tensorem 2 rzędu – tensorem naprężenia. W przypadku dwuwymiarowym ma on postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

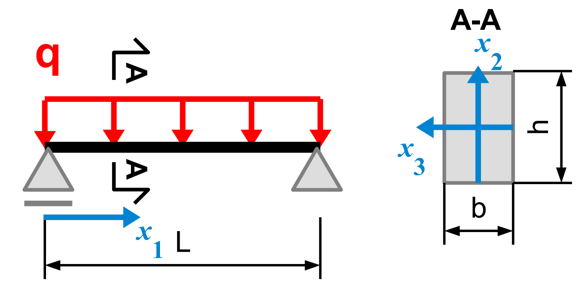


Składowa jednoimienna σ_{ii} określa wartość naprężenia normalnego (dodatnie – **rozciągającego**, ujemne – **ściskającego**) na kierunku i-tej osi przyjętego układu współrzędnych.

Składowa różnoimienna σ_{ij} $(i \neq j)$ określa wartość naprężeń stycznych (**ścinających**) wzdłuż kierunków i-tej i j-tej osi przyjętego układu współrzędnych.

PRZYKŁADY

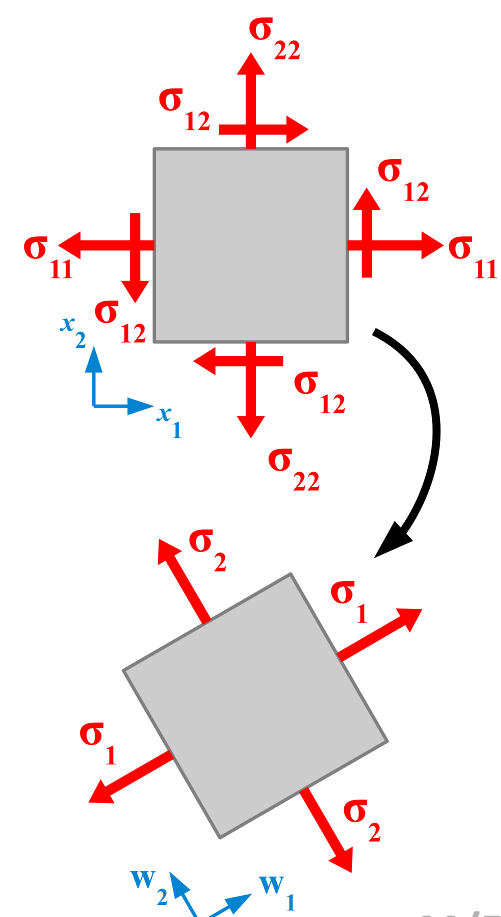
Kierunki własne tensora naprężenia nazywamy trajektoriami naprężeń głównych.



- Są to takie kierunki w materialne, wzdłuż których materiał jest tylko ściskany lub rozciągany, nie jest zaś ścinany.

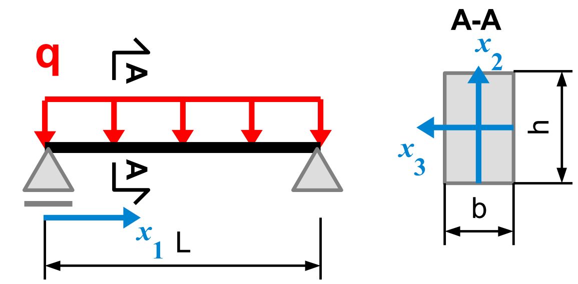
- Wzdłuż tych kierunków pojawiają się ekstremalne naprężenia – maksymalne (największe naprężenia rozciągające) i minimalne (największe naprężenia ściskające)

- Trajektorie naprężeń głównych wykorzystywane są np. w **konstrukcjach żelbetowych**. Beton ma dużą wytrzymałość na ściskanie ale małą na rozciąganie. Tam, gdzie beton jest **rozciągany** dajemy **zbrojenie**. Kształt idealnych prętów zbrojeniowych pokrywa się z trajektoriami naprężeń rozciągających. Trudno jest jednak wykonać taki pręt, więc prosty pręt wygina się tylko w niektórych miejscach.



PRZYKŁADY

- zagadnienie własne dla dwuwymiarowego, symetrycznego tensora 2 rzędu.



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

- wartości własne

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

- wektory własne

$$\mathbf{w}^{(1)} = [\cos\phi\ ;\ \sin\phi]$$

$$\mathbf{w}^{(2)} = [-\sin\phi\ ;\ \cos\phi]$$

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{\sigma_{12}}{I_1 - \sigma_{22}}$$

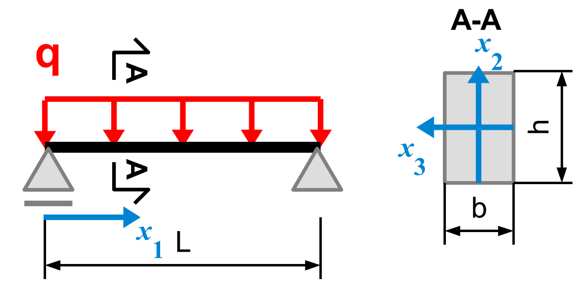
- tangens kąta zawartego między osią poziomą, a kierunkiem naprężeń maksymalnych.

- macierz przejścia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

PRZYKŁADY

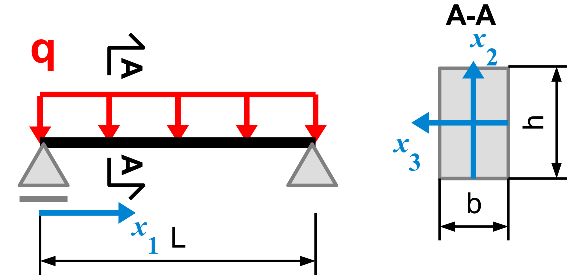
- belka o przekroju prostokątnym, podparta przegubowo i obciążona jednorodnym obciążeniem ciągłym



- rozkład momentów zginających: $$M_y(x) = \frac{qx}{2}(L-x)$$
- rozkład siły poprzecznej: $$Q_z(x) = q\left(\frac{L}{2}-x\right)$$
- naprężenia normalne: $$\sigma_{11}(x,z) = \frac{M_y(x)}{I_y}z = \frac{6q}{bh^3}zx(L-x)$$
$$\sigma_{22}(x,z)=0$$
- naprężenia styczne: $$\sigma_{12}(x,z) = \frac{Q_z(x)S_y(z)}{bI_y} = \frac{6q}{bh^3}\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)$$
- naprężenia główne $$\sigma_{max} = \frac{3q}{bh^3}\left[zx(L-x)+\sqrt{z^2x^2(L-x)^2+4\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)^2}\right]$$
$$\sigma_{min} = \frac{3q}{bh^3}\left[zx(L-x)-\sqrt{z^2x^2(L-x)^2+4\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)^2}\right]$$

PRZYKŁADY

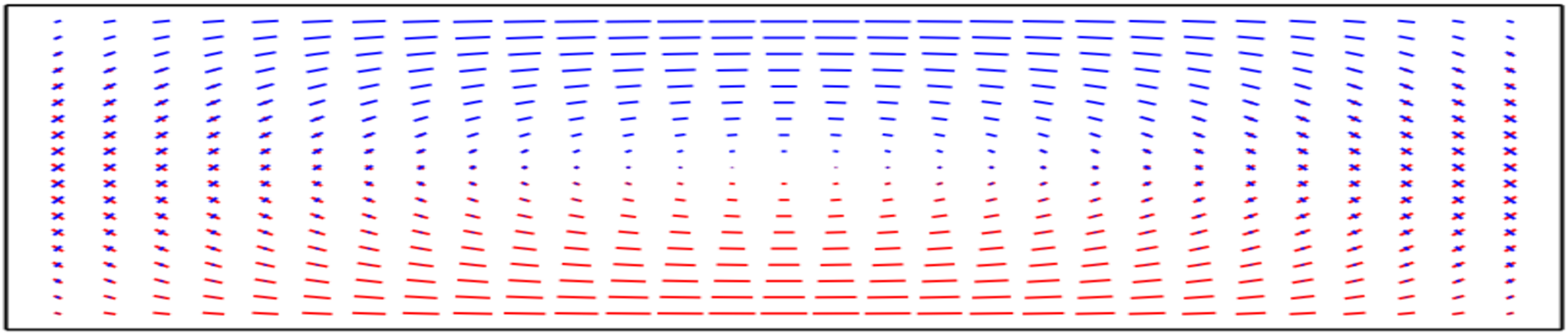
- kąt między osią poziomą a kierunkiem naprężeń maksymalnych



$$\mathrm{tg}\,\phi=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{max}-\sigma_{22}}=\frac{4\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)}{zx(L-x)+\sqrt{z^2x^2(L-x)^2+4\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)^2}}$$

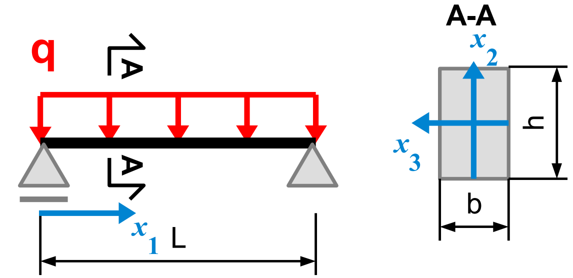
(Kierunek naprężeń minimalnych jest w każdym punkcie prostopadły do kierunku naprężeń maksymalnych)

- wykres „krzyżów” - trajektorie naprężeń głównych (rysunek rozciągnięty w pionie). Kierunek kreski to kierunek naprężenia; długość kreski jest proporcjonalna do wielkości naprężenia; niebieski – ściskanie; czerwony – rozciąganie.



PRZYKŁADY

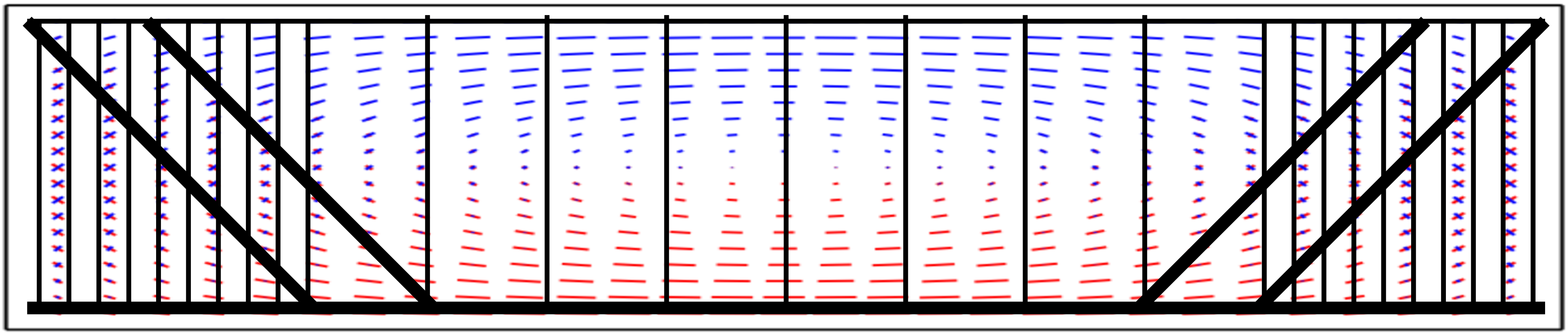
- kąt między osią poziomą a kierunkiem naprężeń maksymalnych



$$\operatorname{tg}\phi=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{max}-\sigma_{22}}=\frac{4\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)}{zx(L-x)+\sqrt{z^2x^2(L-x)^2+4\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)^2}}$$

(Kierunek naprężeń minimalnych jest w każdym punkcie prostopadły do kierunku naprężeń maksymalnych)

- wykres „krzyżów” - trajektorie naprężeń głównych (rysunek rozciągnięty w pionie). Kierunek kreski to kierunek naprężenia; długość kreski jest proporcjonalna do wielkości naprężenia; niebieski – ściskanie; czerwony – rozciąganie.



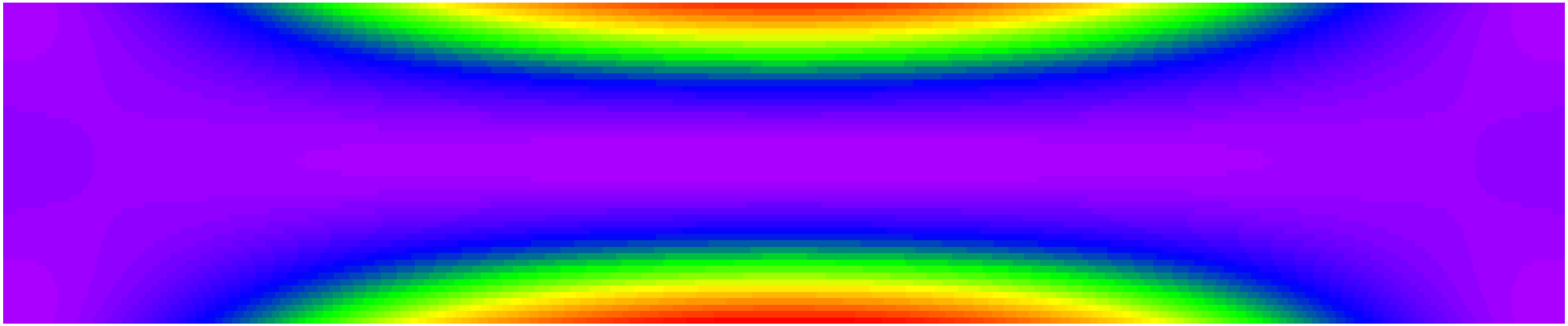
PRZYKŁADY

- wytężenie materiału – najpowszechniej wykorzystywanym w praktyce **kryterium stanu granicznego** (**warunkiem wytrzymałości**, **hipotezą wytężenia**) jest tzw. **warunek Hubera – Misesa**, zgodnie z którym zniszczenie (np. pęknięcie, uplastycznienie) materiału zajdzie w pewnym punkcie w chwili, gdy stan naprężenia w tym punkcie spełniać będzie poniższą równość:

$$\phi_f = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2\right]=\phi_{f,\lim}$$

gdzie G to moduł Kirchhoffa, a $\phi_{f,\lim}$ to pewna wartość graniczna. Lewa strona powyższego warunku ma interpretację **gęstości energii odkształcenia postaciowego**. Wielkość ta może być uważana za miarę wytężenia materiału. U nas:

$$\phi_f = \frac{(\sigma_{max}-\sigma_{min})^2}{12G} = \frac{1}{12G}\left(\frac{6q}{bh^3}\right)^2\left[z^2x^2(L-x)^2+4\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)^2\right]$$



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ