MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

DRGANIA SWOBODNE UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

ZAGADNIENIA DYNAMICZNE W MECHANICE KONSTRUKCJI

- W przypadku większości budowli nie zachodzi potrzeba projektowania ich z uwagi na obciążenia dynamiczne, a jedynie **statyczne** (obciążenia grawitacyjne, parcie gruntu itp.)

- Istnieją jednak konstrukcje, które wymagają **analizy dynamiczne**j:
  - budynki na terenach narażonych na drgania **sejsmiczne** i **parasejsmiczne**
  - hale **przemysłowe**
  - **fundamenty pod maszyny**
  - **konstrukcje wiotkie**, podatne na drgania (kładki dla pieszych, maszty)

- Oszacowanie wielkości drgań jest konieczne zawsze, gdy na konstrukcję oddziałują **czynniki o charakterze dynamicznym**, takie jak:
  - **czynniki sejsmiczne i parasejsmiczn**e – drgania komunikacyjne, górnicze, trzęsienia ziemi
  - **wiatr**
  - obciążenia **udarowe** (uderzenia)
  - **drgania przekazywane przez maszyny**

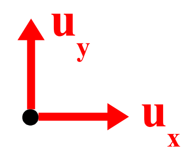
- **Nadmierne drgania** są **szkodliwe dla zdrowia i samopoczucia ludzi** (PN-B-02171) a także dla **stanu technicznego budynków** (PN-B-02170) i ich wyposażenia.

- Analiza dynamiczna konstrukcji zaczyna się od wyznaczenia jej **charakterystyki dynamicznej** – **częstości drgań własnych** oraz parametrów **tłumienia**.

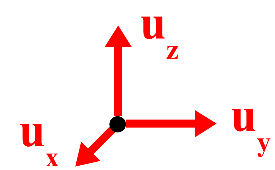
UKŁAD O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Liczba stopni swobody – najmniejsza liczba niezależnych parametrów, które umożliwiają wyznaczenie w sposób jednoznaczny położenia każdego punktu układu mechanicznego w każdej chwili.

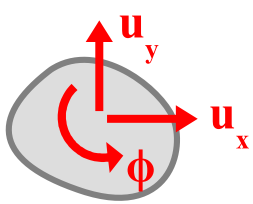
- punkt na płaszczyźnie - LSS = 2



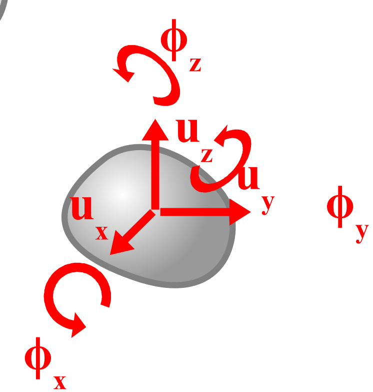
- punkt w przestrzeni - LSS = 3



- bryła sztywna na płaszczyźnie - LSS = 3



- bryła sztywna w przestrzeni - LSS = 6

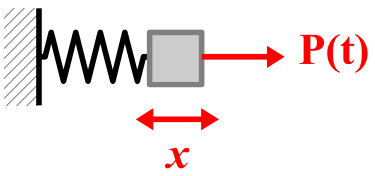


UKŁAD O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Układ o jednym stopniu swobody – układ mechaniczny, którego stan (położenie wszystkich punktów) w każdej chwili można opisać pojedynczą funkcją czasu.

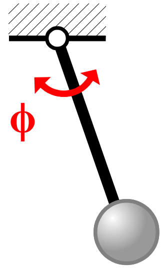
- masa na sprężynie

$$m\ddot{x} + kx = P(t)$$



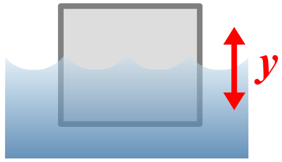
- wahadło

$$m\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\sin\phi = 0$$



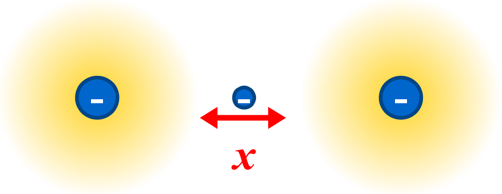
- Ciało częściowo zanurzone w wodzie

$$m\ddot{y} + \left(\rho_{H_2O}A\right)y = mg$$



- Ładunek próbny między dwoma silnymi źródłami pola elektrycznego

$$m\ddot{x} + k_e Q q\left(\frac{1}{(L-x)^2} - \frac{1}{(L+x)^2}\right) = 0$$



UKŁAD O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Układ o jednym stopniu swobody – układ mechaniczny, którego stan (położenie wszystkich punktów) w każdej chwili można opisać pojedynczą funkcją czasu.

- masa na sprężynie

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = P(t)}$$

- wahadło

$$m\ddot{\phi} + \underbrace{\frac{g}{L}}_{k}\underbrace{\sin\phi}_{\approx\phi} = 0 \xrightarrow{\phi\to 0} m\ddot{\phi} + k\phi = 0$$

- Ciało częściowo zanurzone w wodzie

$$m\ddot{y} + \underbrace{\left(\rho_{H_2O}A\right)}_{k} y = mg \longrightarrow m\ddot{y} + ky = mg$$

- Ładunek próbny między dwoma silnymi źródłami pola elektrycznego

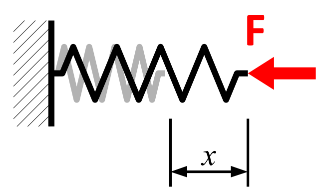
$$m\ddot{x} + \underbrace{k_e Q q}_{\frac{L^3}{4}k}\underbrace{\left(\frac{1}{(L-x)^2} - \frac{1}{(L+x)^2}\right)}_{\approx\frac{4}{L^3}x} = 0 \xrightarrow{x\to 0} m\ddot{x} + kx = 0$$

SZTYWNOŚĆ UKŁADU

Dla **wszystkich układów** liniowo-sprężystych **przemieszczenie** w ustalonym punkcie **jest zawsze wprost proporcjonalne do wielkości przyłożonego obciążenia** ustalonego typu. **Stosunek siły i przemieszczenia** określa sztywność układu.

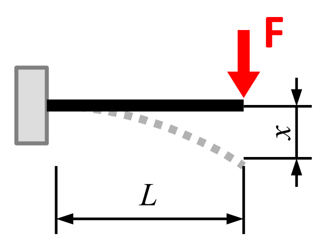
$$\boxed{k = \frac{F}{x}}$$

- sprężyna (prawo Hooke'a)



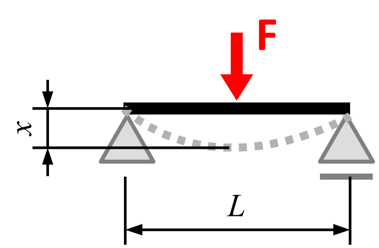
$$k = \frac{F}{x}$$

- belka wspornikowa



$$k = \frac{3\,EI}{L^3}$$

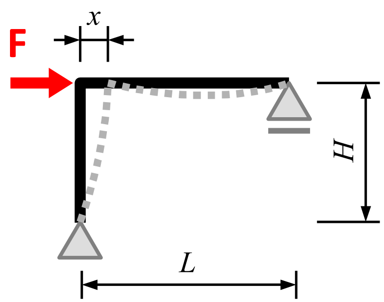
- belka swobodnie podparta



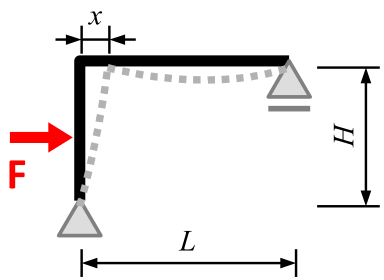
$$k = \frac{48\,EI}{L^3}$$

SZTYWNOŚĆ UKŁADU

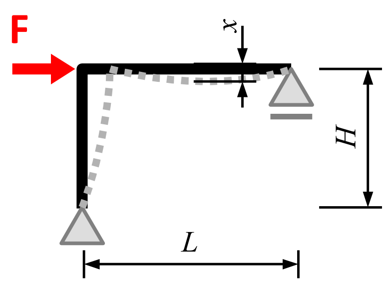
- rama



$$k = \frac{EI}{H^2}\cdot\left(\frac{1}{3}H + \frac{1}{3}L\right)^{-1}$$

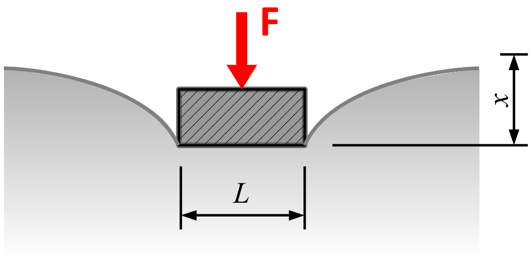


$$k = \frac{EI}{H^2}\cdot\left(\frac{13}{48}H + \frac{1}{6}L\right)^{-1}$$



$$k = \frac{16\,EI}{H\,L^2}$$

- sztywny stempel wciskany w półpłaszczyznę sprężystą

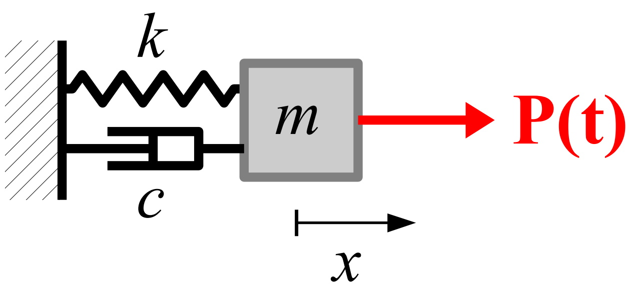


$$k = \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\ln\left(\frac{L}{2}\right)}$$

RÓWNANIE RUCHU UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Modelem dowolnego **układu o jednym stopniu swobody** (w **odpowiednio małym zakresie przemieszczeń**) może być masa na sprężynie z tłumikiem i zewnętrzną siłą wymuszającą:

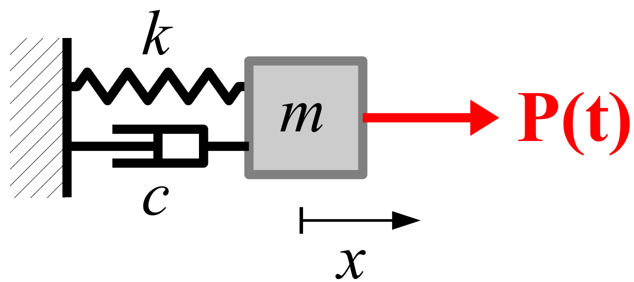
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$$

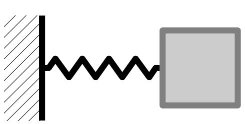


x	– wychylenie od położenia równowagi	$[x] = \mathrm{m}$
m	– masa układu	$[m] = \mathrm{kg}$
k	– sztywność układu	$[k] = \mathrm{N/m}$
c	– współczynnik tłumienia	$[c] = \mathrm{N{\cdot}s/m}$
$P(t)$	– zewnętrzna siła wymuszająca	$[P] = \mathrm{N}$

RÓWNANIE RUCHU UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

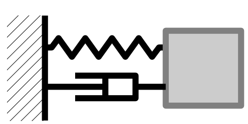
$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)}$$





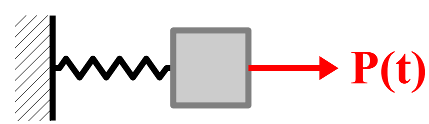
drgania nietłumione swobodne

$$m\ddot{x} + kx = 0$$



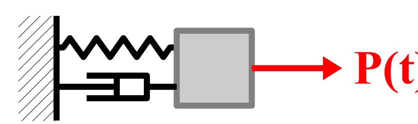
drgania tłumione swobodne

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



drgania nietłumione wymuszone

$$m\ddot{x} + kx = P(t)$$



drgania tłumione wymuszone

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$$

RÓWNANIE RUCHU UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Równanie ruchu układu o jednym stopniu swobody to

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$$

- równanie różniczkowe zwyczajne – **funkcja zależy od jednej zmiennej niezależnej** (czas)
- drugiego rzędu – pochodna najwyższego rzędu to **pochodna rzędu 2**
- liniowe – zależy tylko od **1-szych potęg funkcji i jej pochodnych**
- o stałych współczynnikach - **współczynniki są niezależne od czasu**

Aby rozwiązanie równania było jednoznaczne, należy podać warunki początkowe:

- położenie początkowe: $x(t_0) = x_0$
- prędkość początkowa: $\dot{x}(t_0) = v_0$

Jeśli tylko **funkcja** $P(t)$ **jest** ciągłą funkcją zmiennej t w pewnym przedziale (t_0, t_1)**,**
to **rozwiązanie** tak postawionego zadania istnieje **i jest** jednoznaczne **w tym przedziale.**

RÓWNANIE RUCHU UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Jeśli układ poddany jest działaniu siły wymuszającej ruch, wtedy w równaniu występuje **człon niezależny od funkcji niewiadomej oraz od jej pochodnych**. Takie równanie nazywamy **równaniem niejednorodnym**:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$$

Jeśli człon taki nie występuje (ruch swobodny), równanie nazywamy **równaniem jednorodnym**:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Rozwiązanie niejednorodnego równania liniowego (**całka ogólna równania niejednorodnego** – **CORN**) jest sumą:

- rozwiązania ogólnego odpowiedniego równania jednorodnego (**całka ogólna równania jednorodnego** – **CORJ**)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{OJ}(t)$$

- dowolnego rozwiązania równania niejednorodnego (**całka szczególna równania niejednorodnego** – **CSRN**)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(T) \qquad \rightarrow \qquad x_{SN}(t)$$

$$\boxed{x(t) = x_{OJ}(t) + x_{SN}(t)}$$

RÓWNANIE RUCHU UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Całkę ogólną jednorodnego liniowego równania o stałych współczynnikach

$$a_0 x + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \ldots + a_N \frac{\mathrm{d}^N x}{\mathrm{d}t^N} = 0$$

wyznaczamy następująco:

1) Zakładamy rozwiązanie w postaci funkcji wykładniczej: $x(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = r^n e^{rt}$

2) Podstawiamy założone rozwiązanie do równania $\left(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_N r^N\right) e^{rt} = 0$

3) Równanie to będzie spełnione wtedy, gdy **spełnione będzie** równanie charakterystyczne:

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_N r^N = 0$$

4) **Pierwiastki równania charakterystycznego** są takimi wykładnikami r, dla których funkcja $x(t) = e^{rt}$ spełnia wyjściowe równanie różniczkowe. **Pierwiastków takich i odpowiadających im funkcji jest** N.

5) CORJ jest kombinacją liniową wszystkich tych funkcji. **Współczynniki** tej kombinacji to stałe całkowania:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_N e^{r_N t}}$$

RÓWNANIE RUCHU UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Równanie charakterystyczne jest **równaniem algebraicznym N-tego stopnia**, gdzie N jest rzędem wyjściowego równania różniczkowego. Równanie charakterystyczne:

- posiada dokładnie N **pierwiastków** – mogą być **rzeczywiste** lub **zespolone,**
- **stopnia nieparzystego** ma przynajmniej **1 pierwiastek rzeczywisty,**
- ma zawsze **parzystą liczbę pierwiastków zespolonych** – są one **parami sprzężone** ze sobą.

UWAGA:

- **Istnieją wzory na pierwiastki równań stopnia 4 i mniejszego** (równanie liniowe, równanie kwadratowe, równanie sześcienne – **wzory Cardano**, równanie 4 stopnia – **wzory Ferrari**). **Dla równań stopnia 5 i większego pierwiastków nie da się w ogólnym przypadku wyrazić przez współczynniki równania za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych** (tw. Abela – Rufiniego)

RÓWNANIE RUCHU UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

FUNKCJE ODPOWIADAJĄCE **RZECZYWISTYM** PIERWIASTKOM RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNEGO

- pojedynczy pierwiastek rzeczywisty $r_1 \in \mathbb{R}$

$$x_1(t) = e^{r_1 t}$$

- k-krotny pierwiastek rzeczywisty $r_1 \in \mathbb{R}$ $\quad r_1 = r_2 = \ldots = r_k$

$$x_1(t) = e^{r_1 t} \qquad x_2(t) = t\, e^{r_1 t} \qquad x_3(t) = t^2 e^{r_1 t} \qquad \ldots \qquad x_k(t) = t^{(k-1)} e^{r_1 t}$$

RÓWNANIE RUCHU UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

FUNKCJE ODPOWIADAJĄCE **ZESPOLONYM** PIERWIASTKOM RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNEGO

Dla pierwiastka zespolonego wykorzystujemy **wzór Eulera**:

$$e^{(b\mathrm{i})t} = \cos(bt) + \mathrm{i}\cdot\sin(bt)$$

$$e^{(a+b\mathrm{i})t} = e^{at}e^{(b\mathrm{i})t} = e^{at}\left[\cos(bt) + \mathrm{i}\cdot\sin(bt)\right]$$

Funkcja taka ma **dwie części** (**rzeczywistą** i **urojoną**) i **każda z nich niezależnie spełnia równanie różniczkowe** – jedna w zbiorze funkcji rzeczywistych, druga w zbiorze funkcji urojonych. Ponieważ równanie jest **liniowe**, to **dowolne rozwiązanie przemnożone przez stałą jest również rozwiązaniem**. Tą stałą może być jednostka urojona – w takim razie **rozwiązanie urojone również jest rozwiązaniem w zbiorze funkcji rzeczywistych**.

- **sprzężone pierwiastki zespolone** $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \qquad r_1 = a + b\mathrm{i}\,, \quad r_2 = \overline{r_1} = a - b\mathrm{i}$

$$x_1(t) = e^{at}\cos(bt) \qquad\qquad x_2(t) = e^{at}\sin(bt)$$

- ***k*-krotny pierwiastek zespolony** $r_1, r_2, \dots r_{2k} \in \mathbb{C} \qquad r_1 = \overline{r_{k+1}} = r_2 = \overline{r_{k+2}} \;\dots\; r_k = \overline{r_{2k}}$

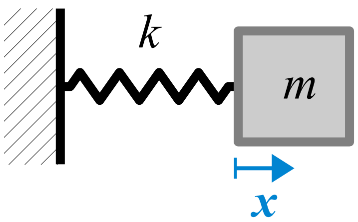
$$x_1(t) = e^{at}\cos(bt) \qquad\qquad x_{k+1}(t) = e^{at}\sin(bt)$$

$$x_2(t) = t\,e^{at}\cos(bt) \qquad\qquad x_{k+2}(t) = t\,e^{at}\sin(bt)$$

$$\dots \qquad\qquad \dots$$

$$x_k(t) = t^{(k-1)}e^{at}\cos(bt) \qquad\qquad x_{2k}(t) = t^{(k-1)}e^{at}\sin(bt)$$

DRGANIA NIETŁUMIONE SWOBODNE



Jednorodne równanie ruchu: $m\ddot{x} + kx = 0$

Z warunkami początkowymi:

$$x(t=0) = x_0$$
$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

Wprowadzamy parametr $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Nazywamy go częstością drgań własnych. $\Rightarrow$ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Zakładamy rozwiązanie w postaci: $x(t) = e^{rt}$

Równanie charakterystyczne: $r^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = -\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{-\omega_0^2} = \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2}$

Pierwiastki równania charakterystycznego:

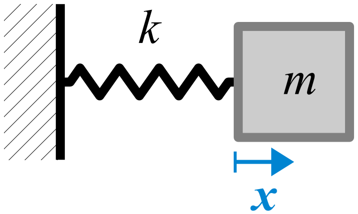
$$r_1 = \mathrm{i}\,\omega_0 \, , \quad r_2 = \overline{r_1} = -\mathrm{i}\,\omega_0$$
$$\mathrm{Re}(r_1) = \mathrm{Re}(r_2) = 0 \, , \quad \mathrm{Im}(r_1) = -\mathrm{Im}(r_2) = \omega_0$$

Całka ogólna równania jednorodnego:

$$x(t) = A_1 e^{\mathrm{Re}(r_1)t}\left[\cos\left(\mathrm{Im}(r_1)t\right)\right] + A_2 e^{\mathrm{Re}(r_1)t}\left[\sin\left(\mathrm{Im}(r_1)t\right)\right]$$

$$\boxed{x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)}$$

DRGANIA NIETŁUMIONE SWOBODNE



Stałe całkowania wyznaczamy z **warunków początkowych:**

Położenie: $$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

Prędkość: $$\dot{x}(t) = -\omega_0 A_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 A_2 \cos(\omega_0 t)$$

Stałe całkowania:

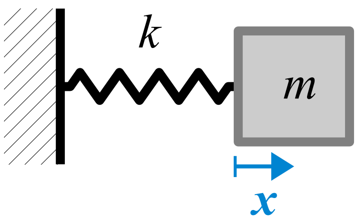
$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t=0) = A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \omega_0 A_2 = v_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = \dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}}$$

UWAGA:
- **Dodatnie wychylenie początkowe** jest po stronie **dodatnich** x.
- **Dodatnia prędkość początkowa** jest skierowana w **stronę dodatnich** x.

Rozwiązanie równania ruchu:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

DRGANIA NIETŁUMIONE SWOBODNE



Z tożsamości trygonometrycznych:

$$A\sin(\omega_0 t+\phi) = A\left[\sin(\omega_0 t)\cos\phi + \cos(\omega_0 t)\sin\phi\right]$$

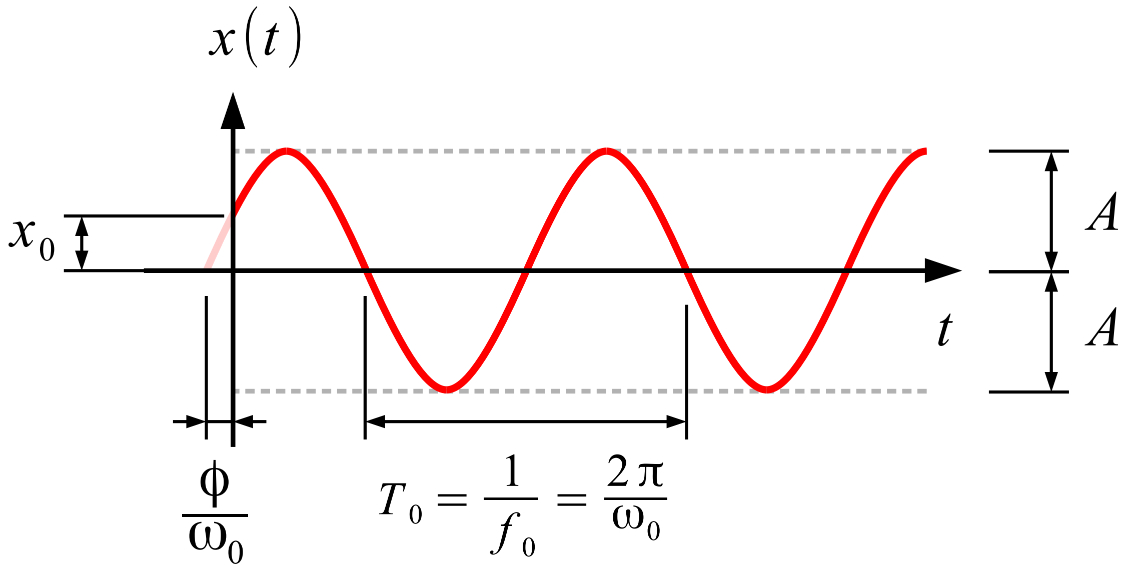
$$\left[A\sin\phi\right]\cos(\omega_0 t) + \left[A\cos\phi\right]\sin(\omega_0 t) = A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\sin(\omega_0 t)$$

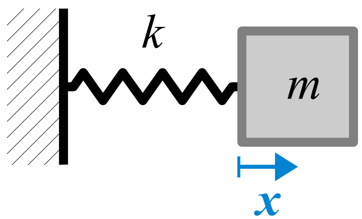
$$\begin{cases} A_1 = A\sin\phi \\ A_2 = A\cos\phi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ \operatorname{tg}\phi = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{x_0\omega_0}{v_0} \end{cases}$$

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) = A\sin(\omega_0 t+\phi)$$

W liniowym układzie sprężystym bez tłumienia oraz bez obciążenia zewnętrznego
masa, której nadano prędkość początkową lub którą wychylono z położenia równowagi
porusza się **ruchem oscylacyjnym –** wykonuje drgania harmoniczne **(sinusoidalne)**

DRGANIA NIETŁUMIONE SWOBODNE

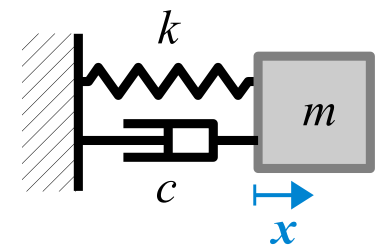




$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \\ = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

A	– amplitudа drgań	$[A] = \mathrm{m}$
ϕ	– kąt przesunięcia fazowego	$[\phi] = \mathrm{rad}$
ω_0	– częstość drgań własnych (**częstość kołowa** drgań własnych)	$[\omega_0] = \mathrm{rad/s}$
$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$	– częstotliwość drgań własnych	$[f_0] = \mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$
$T_0 = \frac{1}{f_0}$	– okres drgań własnych	$[T_0] = \mathrm{s}$

DRGANIA TŁUMIONE SWOBODNE



Jednorodne równanie ruchu: $$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Z warunkami początkowymi: $$x(t=0) = x_0$$ $$\dot{x}(t=0) = v_0$$

Wprowadzamy parametry: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ – częstość drgań własnych nietłumionych.

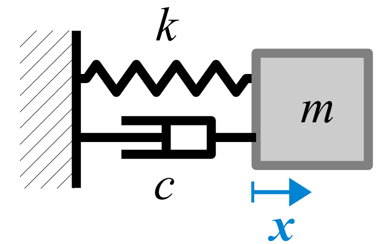
$$\gamma = \frac{1}{2\omega_0}\frac{c}{m} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{c_{kr}}$$ – ułamek tłumienia krytycznego

$$c_{kr} = 2\sqrt{km}$$ – współczynnik tłumienia krytycznego

Równanie ruchu przyjmuje postać:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\omega_0\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

DRGANIA TŁUMIONE SWOBODNE



Zakładamy rozwiązanie w postaci: $x(t) = e^{rt}$

Równanie charakterystyczne: $r^2 + 2\omega_0 \gamma r + \omega_0^2 = 0$

Wyróżnik równania charakterystycznego: $\Delta = (2\omega_0 \gamma)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\gamma^2 - 1)$

Pierwiastki równania charakterystycznego:

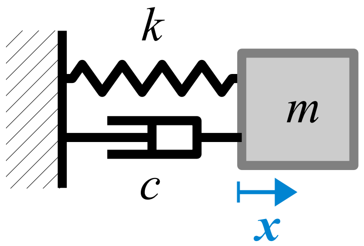
$$r_1 = \frac{-(2\omega_0\gamma) - \sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0\gamma - \omega_0\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$r_2 = \frac{-(2\omega_0\gamma) + \sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0\gamma + \omega_0\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Mamy 3 możliwości:

- **2 różne pierwiastki rzeczywiste** $\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma > 1$ „tłumienie nadkrytyczne”
- **1 podwójny pierwiastek rzeczywisty** $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 1$ „tłumienie krytyczne”
- **2 sprzężone pierwiastki zespolone** $\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \in (0; 1)$ „tłumienie podkrytyczne”

DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE NADKRYTYCZNIE



Ułamek tłumienia krytycznego: $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad c > c_{kr} = 2\sqrt{km}$

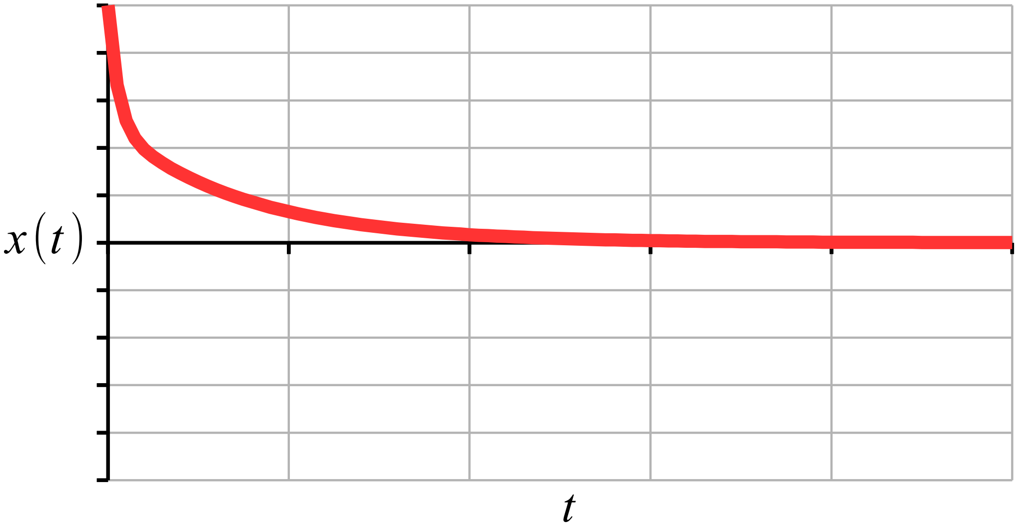
Pierwiastki równania charakterystycznego:

$$r_1 = -\underbrace{\omega_0 \gamma}_{\beta} - \sqrt{\omega_0^2 \gamma^2 - \omega_0^2} = -\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right) \quad \in \mathbb{R}$$

$$r_2 = -\underbrace{\omega_0 \gamma}_{\beta} + \sqrt{\omega_0^2 \gamma^2 - \omega_0^2} = -\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right) \quad \in \mathbb{R}$$

Całka ogólna równania jednorodnego:

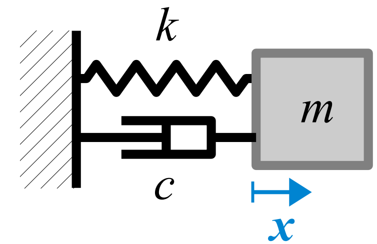
$$x(t) = A_1 e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$



Charakterystyka:

- Układ nie wykonuje drgań. Masa asymptotycznie zbliża się do położenia równowagi.

DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE NADKRYTYCZNIE



Stałe całkowania wyznaczamy z **warunków początkowych:**

Położenie: $$x(t) = A_1 e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}$$

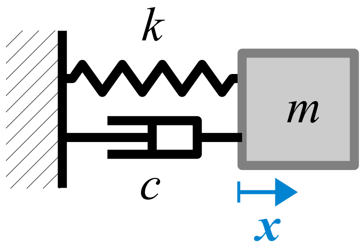
Prędkość: $$\dot{x}(t) = -\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) A_1 e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} - \left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) A_2 e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}$$

Stałe całkowania:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t=0) = A_1 + A_2 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = -\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) A_1 - \left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) A_2 = v_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_1 = \dfrac{x_0\omega_0\left[\gamma\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)-1\right]-v_0\sqrt{\gamma^2-1}}{2\omega_0\left(\gamma^2-1\right)} \\ A_2 = \dfrac{x_0\omega_0\left[\gamma\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)-1\right]+v_0\sqrt{\gamma^2-1}}{2\omega_0\left(\gamma^2-1\right)} \end{cases}}$$

DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE KRYTYCZNIE



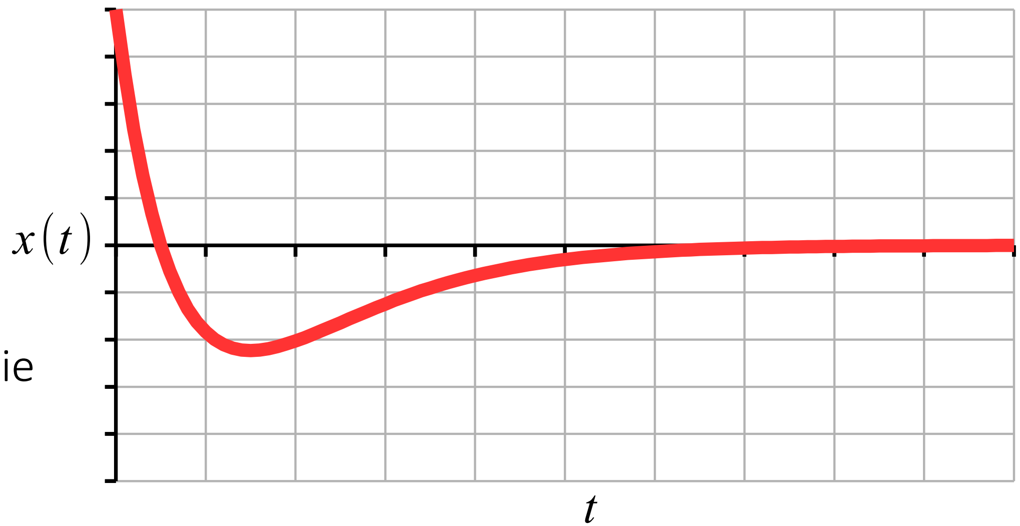
Ułamek tłumienia krytycznego: $\gamma = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = c_{kr} = 2\sqrt{km}$

Pierwiastki równania charakterystycznego:

$$r_1 = r_2 = -\underbrace{\omega_0 \gamma}_{\beta} = -\beta = -\omega_0 \quad \in \mathbb{R}$$

Całka ogólna równania jednorodnego:

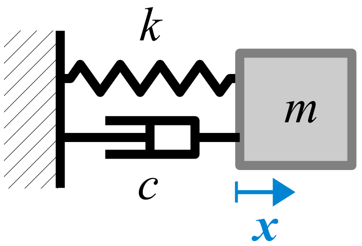
$$\boxed{x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\beta t}}$$



Charakterystyka:

- Układ nie wykonuje drgań. Masa może jednokrotnie przejść przez położenie równowagi, do którego powraca asymptotycznie .

DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE KRYTYCZNIE



Stałe całkowania wyznaczamy z **warunków początkowych:**

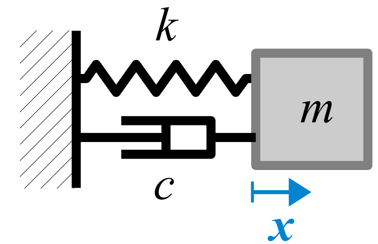
Położenie: $$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}$$

Prędkość: $$\dot{x}(t) = \left[A_2 - \beta(A_1 + A_2 t)\right]e^{-\beta t}$$

Stałe całkowania:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t=0) = A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = A_2 - \beta A_1 = v_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = v_0 + \beta x_0 \end{cases}}$$

DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE PODKRYTYCZNIE



Ułamek tłumienia krytycznego: $\gamma \in (0;1) \quad \Leftrightarrow \quad c < c_{kr} = 2\sqrt{km}$

Pierwiastki równania charakterystycznego:

$$r_1 = -\underbrace{\omega_0 \gamma}_{\beta} - \underbrace{\omega_0 \sqrt{1-\gamma^2}}_{\omega_d}\,\mathrm{i} = -\beta - \omega_d \mathrm{i} \quad \in \mathbb{C}$$

$$r_2 = -\underbrace{\omega_0 \gamma}_{\beta} + \underbrace{\omega_0 \sqrt{1-\gamma^2}}_{\omega_d}\,\mathrm{i} = -\beta + \omega_d \mathrm{i} \quad \in \mathbb{C}$$

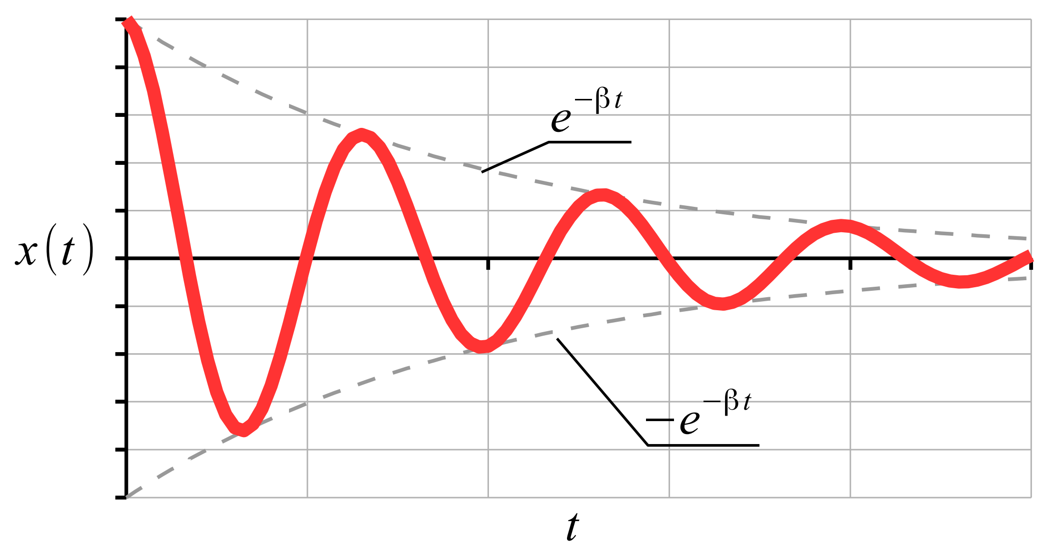
$$r_1 = \overline{r_2}$$

$$\mathrm{Re}(r_1) = \mathrm{Re}(r_2) = -\beta$$

$$\mathrm{Im}(r_1) = -\mathrm{Im}(r_2) = \omega_d$$

Całka ogólna równania jednorodnego:

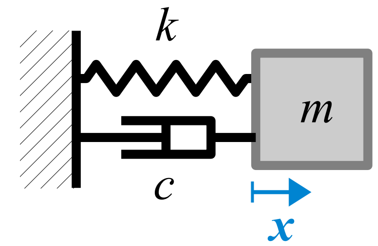
$$\boxed{x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right]}$$



Charakterystyka:

- Układ wykonuje oscylacje gasnące.

DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE PODKRYTYCZNIE



Stałe całkowania wyznaczamy z **warunków początkowych:**

Położenie: $$x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right]$$

Prędkość: $$x(t) = e^{-\beta t}\left[(\omega_d A_2 - \beta A_1)\cos(\omega_d t) - (\omega_d A_1 + \beta A_2)\sin(\omega_d t)\right]$$

Stałe całkowania:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t=0) = A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \omega_d A_2 - \beta A_1 = v_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = \dfrac{v_0 + \beta x_0}{\omega_d} \end{cases}}$$

DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE PODKRYTYCZNIE

UWAGI:

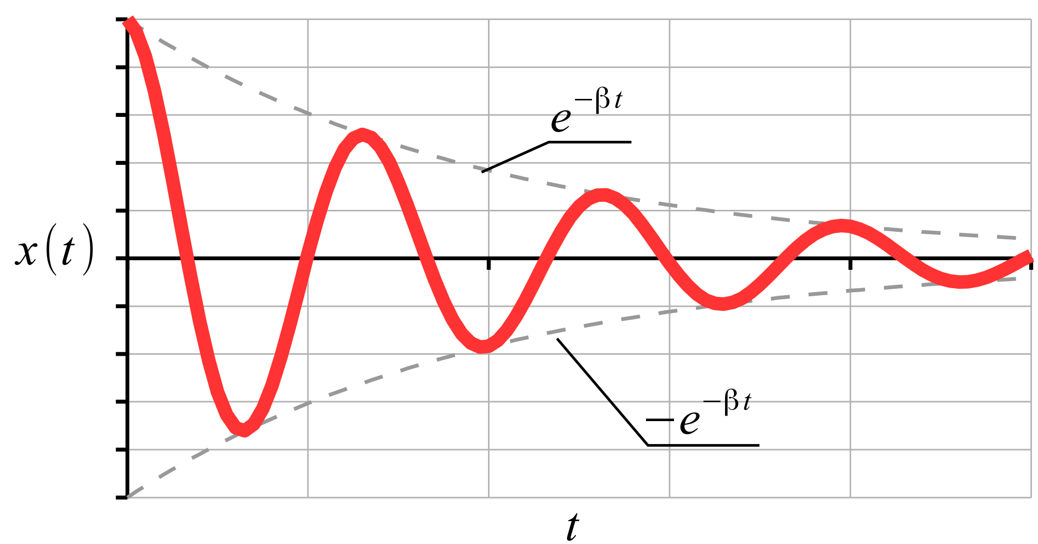
$$x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right]$$
$$= e^{-\beta t} A \sin(\omega_d t + \phi)$$

- **Częstość** (częstotliwość) **drgań własnych układu tłumionego** jest mniejsza od **częstości** (częstotliwości) **drgań własnych odpowiadającego mu układu bez tłumienia** (okres jest dłuższy)

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\gamma^2} \quad \overset{\gamma>0}{\Rightarrow} \quad \omega_d < \omega_0$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} & \text{– max. amplituda drgań} \\ \operatorname{tg}\phi = \dfrac{A_1}{A_2} & \text{- kąt przesunięcia fazowego} \end{cases}$$

- **Częstość drgań** jest **stała** w czasie.
- **Amplituda** drgań **maleje** z czasem **wykładniczo**.
- W modelu teoretycznym drgania nie gasną nigdy, choć są coraz mniejsze. W praktyce tłumienie nie ma charakteru idealnie lepkiego (wiskotycznego) – tarcie suche doprowadza w końcu do zatrzymania drgań.



MIARY TŁUMIENIA

Wprowadziliśmy do tej pory następujące **miary tłumienia:**

- współczynnik tłumienia c $\qquad [c] = \mathrm{N \cdot s/m}$
- współczynnik tłumienia krytycznego $c_{kr} = 2\sqrt{k\,m}$ $\qquad [c_{kr}] = \mathrm{N \cdot s/m}$
- ułamek tłumienia krytycznego $\gamma = \dfrac{c}{c_{kr}}$ $\qquad [\gamma] = 1$
- współczynnik tłumienia $\beta = \gamma\,\omega_0 = \dfrac{c}{2\,m}$ $\qquad [\beta] = \mathrm{rad/s}$

UWAGI:

- Stosowane oznaczenia nie są jednolite. Niekiedy zamiast symbolu c używa b lub d. Podobnie, zamiast symbolu γ używa się np. ζ lub ξ, zamiast β używa się s itd.
- Stosowane jest również rozmaite nazewnictwo. Przede wszystkim ułamek tłumienia krytycznego bywa nazywany np. bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia, liczbą tłumienia itp.
- Korzystając z różnych opracowań trzeba zachować ostrożność.

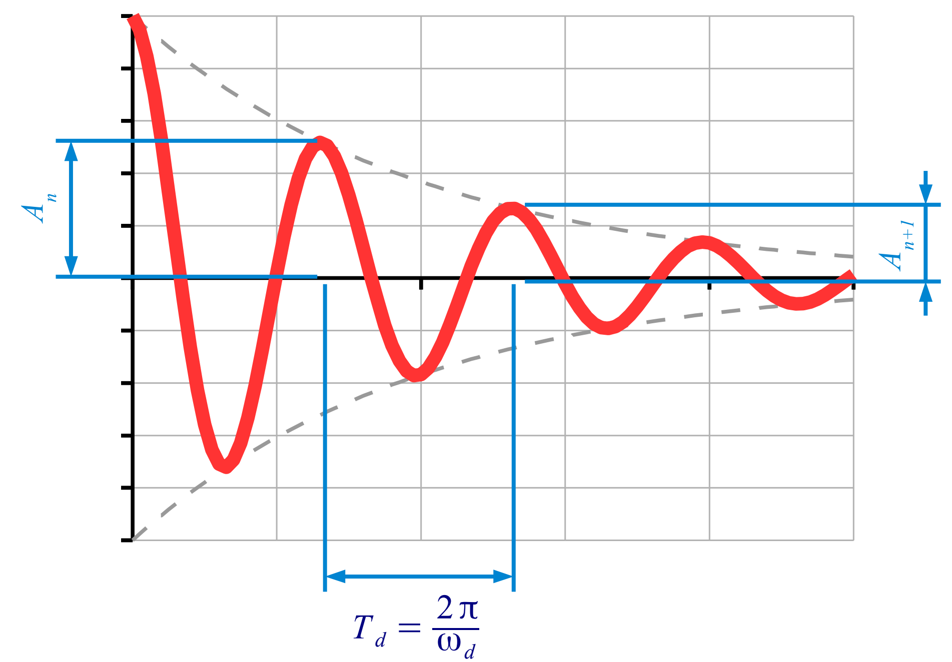
MIARY TŁUMIENIA

Miarą tłumienia podkrytycznego może być **stosunek wielkości dwóch następujących po sobie wychyleń oscylatora**.

$$A_n = x(t_0) = e^{-\beta t_0} \underbrace{\left[A_1 \cos(\omega_d t_0) + A_2 \sin(\omega_d t_0)\right]}_{=A_r}$$

$$A_{n+1} = x\left(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_d}\right) = e^{-\beta\left(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_d}\right)} \underbrace{\left[A_1 \cos(\omega_d t_0 + 2\pi) + A_2 \sin(\omega_d t_0 + 2\pi)\right]}_{=A_r}$$

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\left[-\beta t_0 + \beta\left(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_d}\right)\right]} = e^{\frac{2\pi\beta}{\omega_d}} = e^{\frac{2\pi\gamma\omega_0}{\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}}$$



Logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\boxed{\delta = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}}$$

Powyższa definicja może być wykorzystywana do wyznaczenia miary tłumienia dowolnych drgań, niekoniecznie sinusoidalnych.

MIARY TŁUMIENIA

$$\delta = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}$$

Dla $\gamma \approx 0$:

$$\delta \approx 2\pi\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \approx \frac{\delta}{2\pi}$$

Rodzaj konstrukcji	γ
belki i ramy stalowe	0,6%
kratownice stalowe	1,6%
konstrukcje cienkościenne	0,3%
belki i ramy żelbetowe	2,4%
stropy żelbetowe	4,0%
budynki żelbetowe	3,2%
elementy sprężone	0,8%
fundamenty	5,6%
konstrukcje szkieletowe z wypełnieniem murowanym	4,0%
konstrukcje murowe	4,0%
stropy i filary murowane	2,4%
budynki murowane (wys. 7÷25 m)	4,8%
ściany kamienne na zaprawie cementowej	4,8%
belki drewniane zwykłe i klejone	1,6%
stropy i belki drewniane, gwoździowane	2,4%

MIARY TŁUMIENIA

- W niektórych przypadkach łatwo jest wyznaczyć **masę** układu oraz jego **sztywność** – wynikają one wprost z **geometrii** układu oraz jego **własności sprężystych**, określonych przez tę geometrię oraz materiały, z jakiego układ mechaniczny jest wykonany.

- Większą trudnością staje się określenie tłumienia w układzie, ponieważ:
  - **model tłumienia wiskotycznego jest jedynie przybliżeniem** rzeczywistych zjawisk dyssypacji energii
  - własności lepkie materiałów konstrukcyjnych są znacznie trudniejsze w badaniu i w opisie niż własności fizyczne (masa) i sprężyste. Cechy takie jak gęstość i sztywność materiału daje się w prosty sposób scharakteryzować za pomocą zbioru tzw. stałych materiałowych (gęstość, moduł Younga itp.) Analogiczne **stałe materiałowe charakteryzujące własności lepkie są znacznie trudniejsze do wyznaczenia** a ponadto **obarczone licznymi niedokładnościami** wynikającymi ze złożoności tych zagadnień

- Jednym z możliwych sposobów oszacowania wielkości **tłumienia** w układzie jest **założenie**, że jest ono **funkcją masy i sztywności układu**. Zadowalające wyniki daje założenie modelu tłumienia Rayleigha:

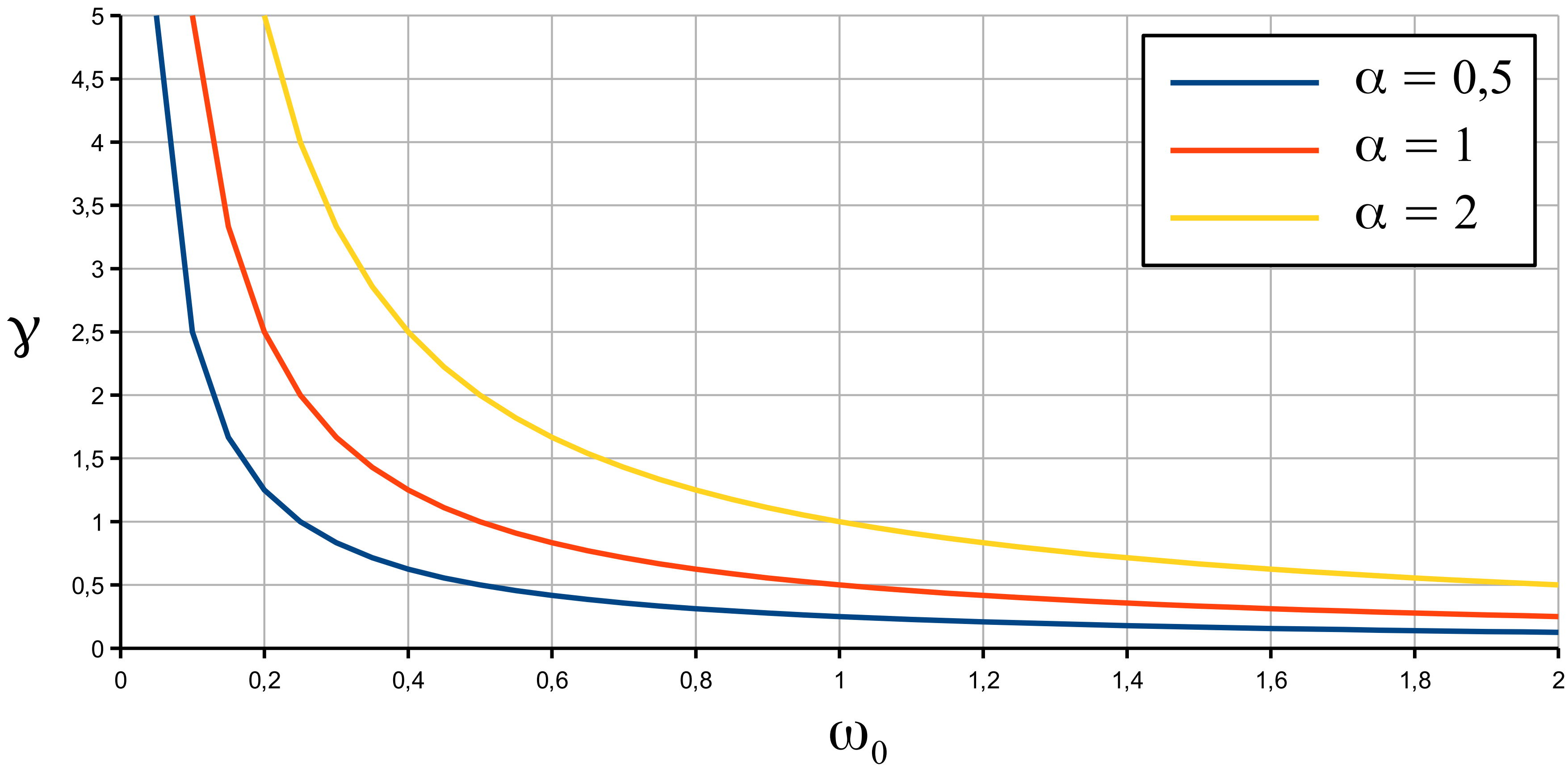
$$\boxed{c = \alpha m + \beta k}$$

Związek powyższy **nie wynika z żadnej teorii** – to jedynie **model obliczeniowy**. Parametry α i β określa się na podstawie zgodności modelu z eksperymentem lub podobieństwa układu mechanicznego do układu o znanych parametrach. **Liczba niezależnych parametrów opisujących układ spada z 3 do 2**.

MIARY TŁUMIENIA

MODEL RAYLEIGHA – tłumienie masowe (bezwładnościowe)

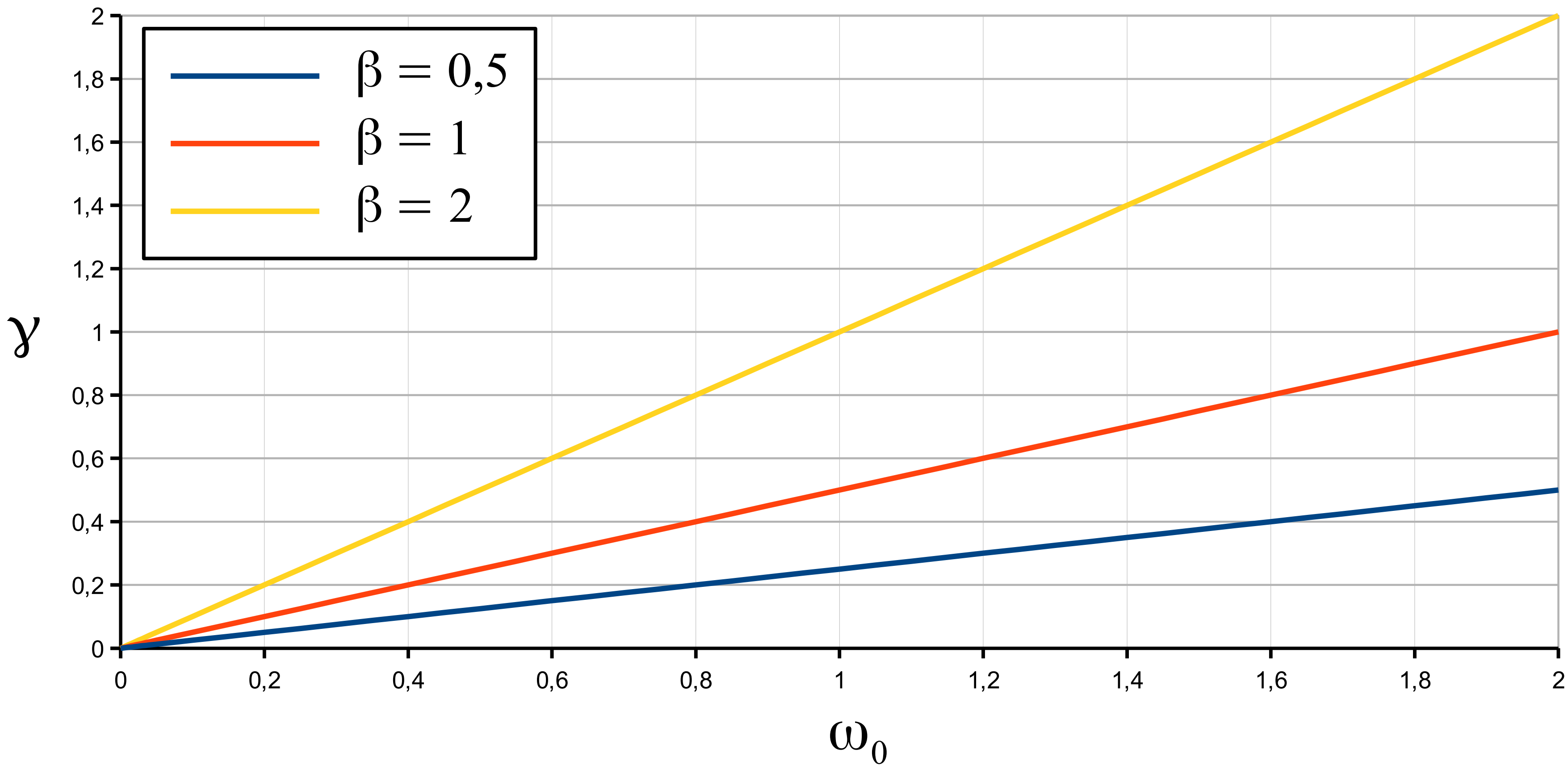
$$c = \alpha m \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{\alpha m}{2\sqrt{k m}} = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{\omega_0}}$$



MIARY TŁUMIENIA

MODEL RAYLEIGHA – tłumienie sztywnościowe

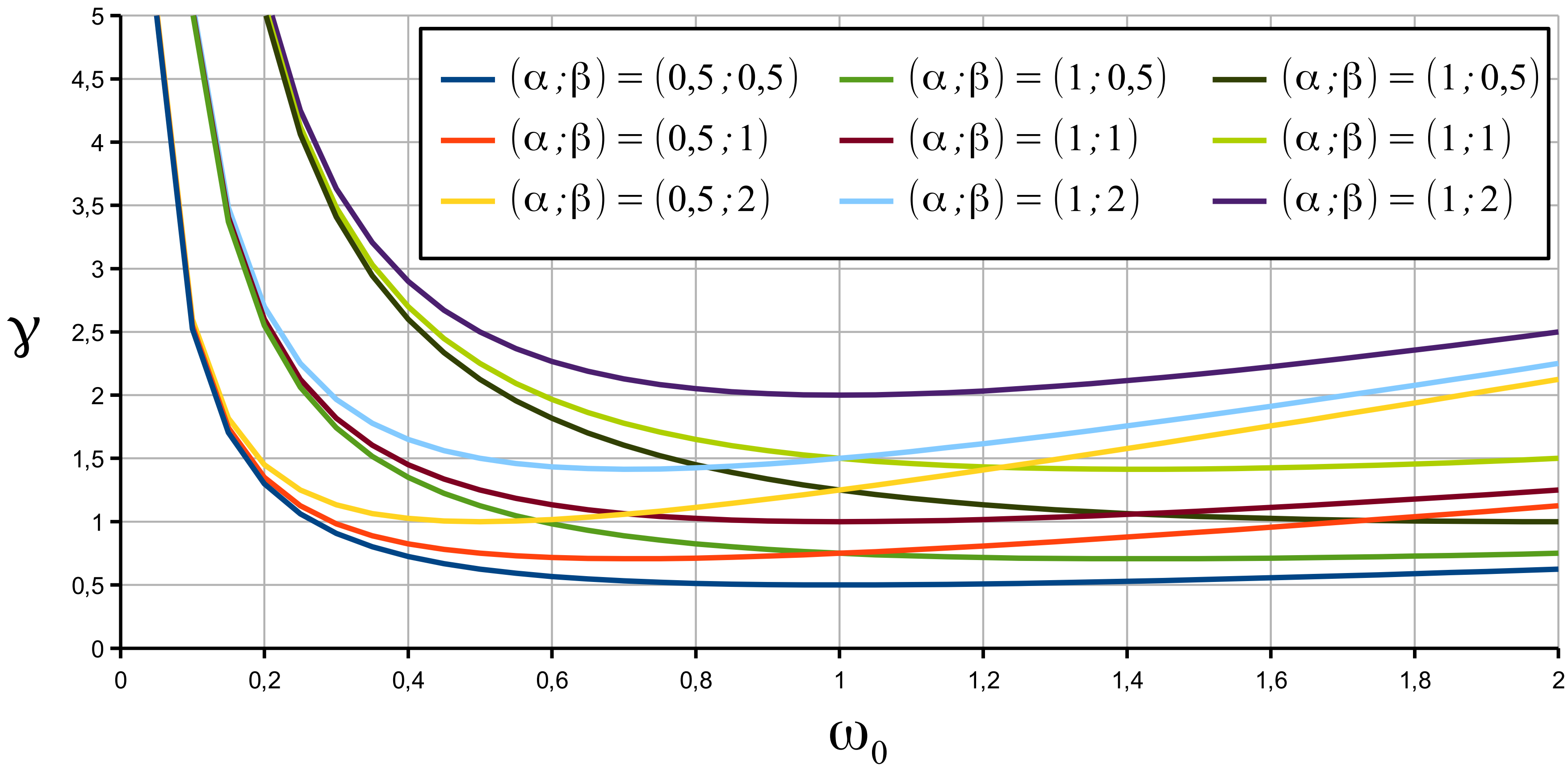
$$c = \beta k \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{\beta k}{2\sqrt{k m}} = \frac{\beta}{2}\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{\beta}{2}\omega_0}$$



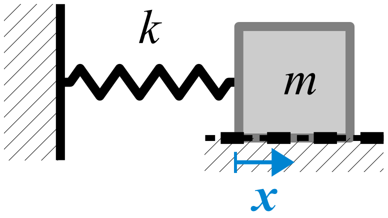
MIARY TŁUMIENIA

MODEL RAYLEIGHA – tłumienie sztywnościowo – masowe

$$c = \alpha m + \beta k \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_0} + \beta \omega_0\right)}$$



DRGANIA TŁUMIONE TARCIEM SUCHYM



Alternatywnym modelem tłumienia drgań jest tarcie suche – **siła tarcia ma stałą wartość** (np. wynikającą z docisku do powierzchni szorstkiej), **skierowaną zawsze przeciwnie do wektora prędkości** masy.

Równanie ruchu: $$m\ddot{x} + kx = \mp T$$

z **warunkami początkowymi**: $$x(t=0) = x_0$$ $$\dot{x}(t=0) = v_0$$

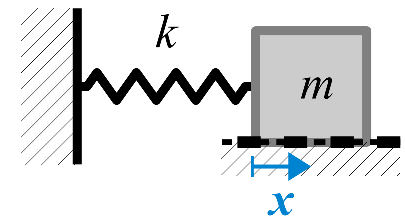
znak „+" przy sile tarcia bierzemy dla $\dot{x} < 0$.
znak „-" przy sile tarcia bierzemy dla $\dot{x} > 0$.

To równanie drgań nietłumionych z członem niejednorodnym. Jego **rozwiązanie ogólne jest sumą**:

- **CORJ** – rozwiązanie drgań nietłumionych swobodnych
- dowolnej **CSRN** – możemy ją znaleźć metodą przewidywania

$$\left.\begin{aligned} x_{og}(t) &= C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) \\ x_{sz}(t) &= C_3 = const. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_{og} + x_{sz} = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + C_3}$$

DRGANIA TŁUMIONE TARCIEM SUCHYM



Wzór opisujący rozwiązanie zmieniać się będzie wraz ze znakiem prędkości.

Zwrot prędkości zmieniać się będzie na przeciwny po osiągnięciu wychylenia maksymalnego. Prędkość w tej chwili jest równa 0.

Rozwiązanie takiego zagadnienia można skonstruować w ten sposób:

- **Zakładamy wychylenie początkowe i prędkość początkową** i **wyznaczamy rozwiązanie** odpowiadające tym warunkom początkowym (obliczamy stałe całkowania)
- **Rozwiązanie obowiązuje aż do chwili, gdy prędkość jest 0** przy najbliższym wychyleniu maksymalnym.
- **To wychylenie maksymalne oraz zerowa prędkość stanowią warunki początkowe dla rozwiązania w kolejnej fazie ruchu** – rozwiązanie to ma taką samą postać ogólną, ale inne wartości stałych całkowania i obowiązuje aż do osiągnięcia kolejnego wychylenia maksymalnego i zerowej prędkości.
- **Schemat powtarza się** aż do momentu, gdy masa będzie miała **zerową prędkość** przy takim wychyleniu, dla którego **siła sprężystości jest mniejsza od siły tarcia**. Wtedy masa **zatrzymuje się**.

DRGANIA TŁUMIONE TARCIEM SUCHYM

Ogólna postać rozwiązania w każdej fazie ruchu: $x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + C_3$

CSRN znajdujemy z warunku spełnienia równania ruchu: $m\ddot{x} + kx = \mp T \quad \Rightarrow \quad C_3 = \mp \dfrac{T}{k} = \mp \Delta_T$

FAZA 1: $t \in \left(t_0 = 0 \; ; \; t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0} \right), \quad \dot{x} < 0: \qquad x_1(t) = C_{1,1} \cos(\omega_0 t) + C_{1,2} \sin(\omega_0 t) + \Delta_T$

$$\begin{cases} x_1(t_0) = A \\ v_1(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{1,1} = A - \Delta_T \\ C_{1,2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad x_1(t_1) = -(A - 2\Delta_T)$$

FAZA 2: $t \in \left(t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0} \; ; \; t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \right), \quad \dot{x} > 0: \qquad x_2(t) = C_{2,1} \cos(\omega_0 t) + C_{2,2} \sin(\omega_0 t) - \Delta_T$

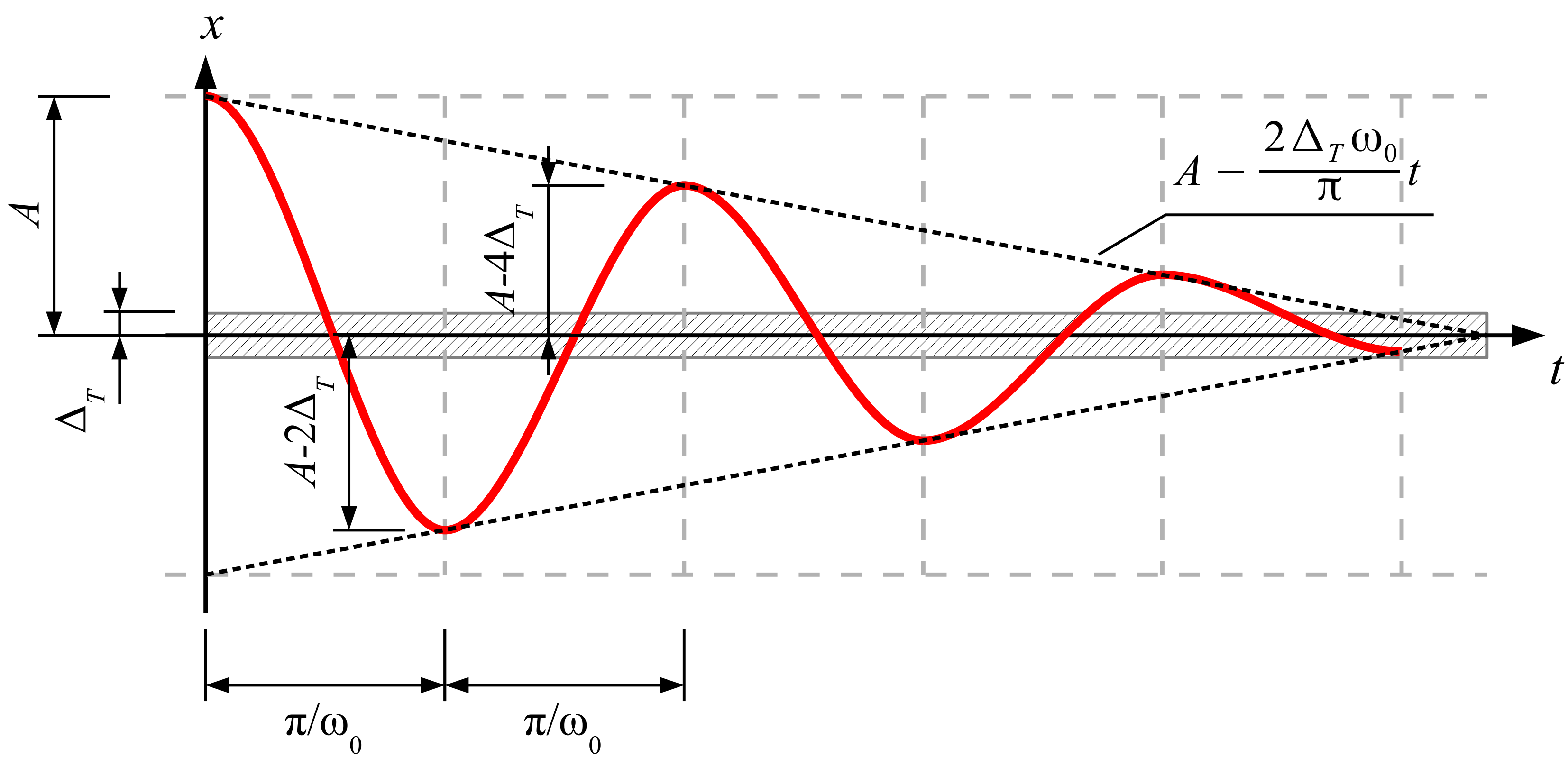
$$\begin{cases} x_2(t_1) = x_1(t_1) \\ v_2(t_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{2,1} = A - 3\Delta_T \\ C_{2,2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad x_2(t_2) = (A - 4\Delta_T)$$

FAZA 3: $t \in \left(t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \; ; \; t_3 = \dfrac{3\pi}{\omega_0} \right), \quad \dot{x} < 0: \qquad x_3(t) = C_{3,1} \cos(\omega_0 t) + C_{3,2} \sin(\omega_0 t) + \Delta_T$

$$\begin{cases} x_3(t_2) = x_2(t_2) \\ v_3(t_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{3,1} = A - 5\Delta_T \\ C_{3,2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad x_3(t_3) = -(A - 6\Delta_T)$$

...

DRGANIA TŁUMIONE TARCIEM SUCHYM



UWAGI:

- **Częstość drgań** (częstotliwość, okres) **jest stała w czasie** ruchu**.**
- **Częstość drgań** (częstotliwość, okres) **jest taki sama jak w przypadku układu nietłumionego**.
- **Amplituda** drgań **maleje liniowo w czasie** ruchu.
- Gdy masa zatrzyma się w obszarze ograniczonym takim wydłużeniom sprężyny, które równoważą siłę tarcia, ruch ustaje. Masa zatrzymuje się niekoniecznie z zerowym wychyleniem.

DRGANIA TŁUMIONE

UWAGI:

- W rzeczywistych układach mechanicznych (budynkach, maszynach), zjawiska tłumienia mają złożony charakter, a ich ścisły opis matematyczny jest praktycznie niemożliwy.
- mechanizmami tłumienia są przede wszystkim:
  - **tłumienie materiałowe** – rozpraszanie energii wskutek tarcia wewnętrznego cząstek materiału o siebie (w przybliżeniu: tłumienie lepkie)
  - **tłumienie konstrukcyjne** – rozpraszanie energii wskutek tarcia na stykach elementów konstrukcyjnych lub elementów złącza (tarcie suche).
  - **tłumienie zewnętrzne** – opór ośrodka, w którym odbywają się drgania (powietrze, grunt, woda); tłumienie wynikające z obecności celowo zastosowanych tłumików drgań.
- Tłumienie rzeczywiste daje się dobrze opisać **modelem tłumienia lepkiego** – **wygaszanie amplitudy** drgań ma z reguły rzeczywiście charakter **wykładniczy**.
- Z drugiej strony rzeczywiste tłumienie ostatecznie zawsze prowadzi do **całkowitego ustania drgań** – ma zatem cechę właściwą modelowi **tarcia suchego**.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ