

MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

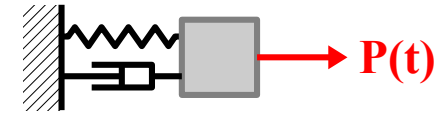
adres: p. 320 – III p. WIL

tel. 12 628 20 30

e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

DRGANIA WYMUSZONE UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

WYMUSZENIE SINUSOIDALNE W UKŁADZIE TŁUMIONYM



Drgania **wymuszone**, to drgania przy **obecności zewnętrznej siły czynnej**.

Równanie ruchu:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = P(t)$$

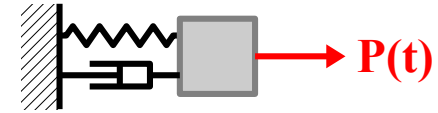
Jeśli **wartość siły wymuszającej nie zależy od aktualnego położenia masy, jej prędkości lub przyspieszenia** (i ew. dalszych pochodnych położenia względem czasu), wtedy równanie powyższe jest równaniem

- różniczkowym
- zwyczajnym
 - niewiadoma funkcja jest funkcją jednej zmiennej niezależnej
- drugiego rzędu
 - to najwyższy rząd pochodnej występującej w równaniu
- liniowym
 - funkcja i jej pochodne występują w pierwszej potęgze
- o stałych współczynnikach
 - współczynniki równania są stałe, niezależne od czasu
- niejednorodnym
 - prawa strona równania jest różna od 0

W przypadku równań **liniowych rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego** jest sumą:

- **rozwiązania ogólnego równania jednorodnego** – rozwiązanie ogólne drgań swobodnych
- **rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego** – możemy je wybrać dowolnie

WYMUSZENIE SINUSOIDALNE W UKŁADZIE TŁUMIONYM



Całka ogólna równania niejednorodnego (CORN): $x(t) = x_{OJ} + x_{SN}$

Całka ogólna równania jednorodnego (CORJ):

- drgania tłumione nadkrytycznie: $x_{OJ} = A_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$
- drgania tłumione krytycznie $x_{OJ} = (A_1 + A_2 t) e^{-\beta t}$
- drgania tłumione podkrytycznie $x_{OJ} = e^{-\beta t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$

Całka szczególna równania niejednorodnego (CSRN). W przypadku ogólnym może być bardzo trudna do wyznaczenia. Największe znaczenie praktyczne ma **zagadnienie drgań wymuszonych siłą sinusoidalnie (harmonicznie) zmienną**:

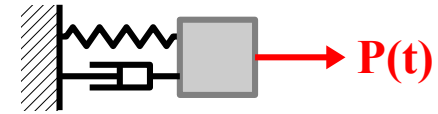
$$P(t) = P_0 \sin(\lambda t)$$

$$P_0 \quad - \text{amplituda siły wymuszającej} \quad [P_0] = \text{N}$$

$$\lambda \quad - \text{częstość kołowa siły wymuszającej} \quad [\lambda] = \text{rad/s}$$

Przewidujemy, że CSRN będzie również pewną funkcją trygonometryczną o tym samym okresie.

WYMUSZENIE SINUSOIDALNE W UKŁADZIE TŁUMIONYM



Całka szczególna równania niejednorodnego (CSRN): $x_{SN} = B_1 \cos(\lambda t) + B_2 \sin(\lambda t)$

Po podstawieniu do równania ruchu $\ddot{x} + 2\omega_0 \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m} \sin(\lambda t)$

Otrzymujemy:

$$\left[(\omega_0^2 - \lambda^2) B_1 + 2\gamma\omega_0\lambda B_2 \right] \cos(\lambda t) + \left[(\omega_0^2 - \lambda^2) B_2 - 2\gamma\omega_0\lambda B_1 \right] \sin(\lambda t) = \frac{P_0}{m} \sin(\lambda t)$$

Równanie powyższe będzie spełnione dla dowolnego t , jeśli **współczynniki przy funkcjach sinus i cosinus po obu stronach równania będą takie same**. Po prawej stronie współczynnik przy funkcji cosinus jest zerowy:

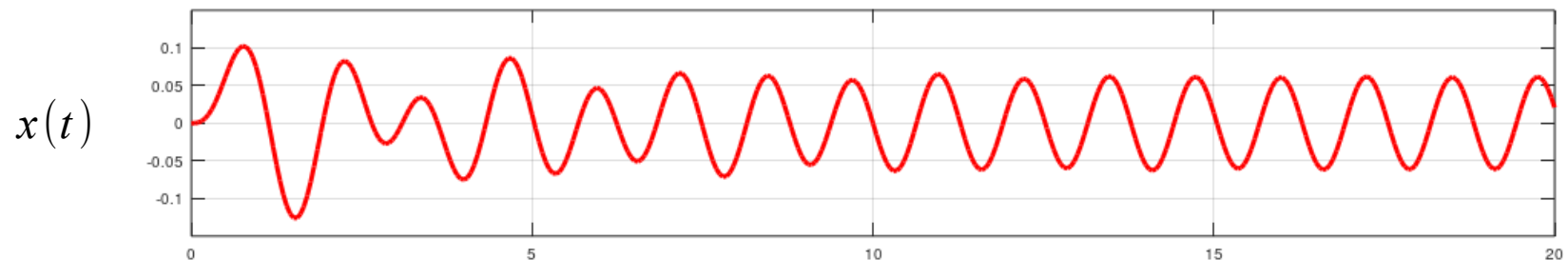
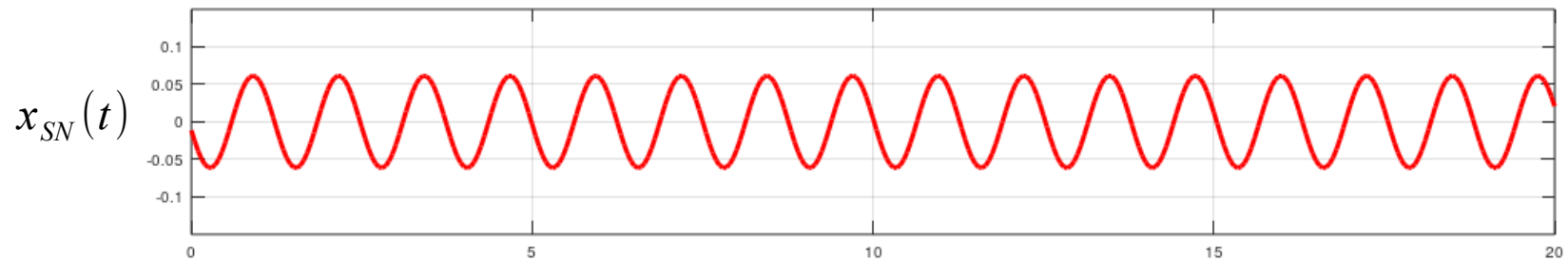
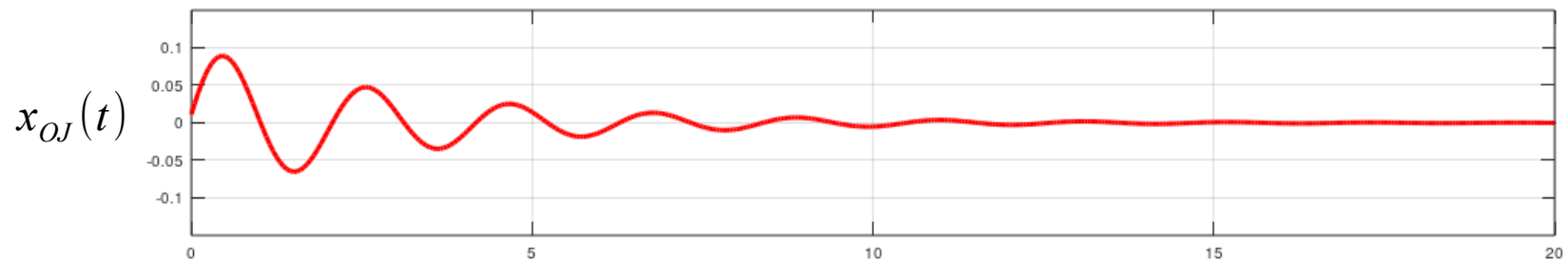
$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \lambda^2) B_1 + 2\gamma\omega_0\lambda B_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \lambda^2) B_2 - 2\gamma\omega_0\lambda B_1 = \frac{P_0}{m} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} B_1 = \frac{P}{m} \frac{(-2\gamma\omega_0\lambda)}{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2} \\ B_2 = \frac{P}{m} \frac{(\omega_0^2 - \lambda^2)}{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2\lambda^2} \end{cases}$$

WYMUSZENIE SINUSOIDALNE W UKŁADZIE TŁUMIONYM

$$x = \underbrace{B_1 \cos(\lambda t) + B_2 \sin(\lambda t)}_{x_{SN}} + e^{-\beta t} \underbrace{[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]}_{x_{OJ}}$$



WYMUSZENIE SINUSOIDALNE W UKŁADZIE TŁUMIONYM

WNIOSKI:

- Drgania odpowiadające CORJ, mające charakter drgań swobodnych wynikających z przyłożonego obciążenia i warunków początkowych, ulegają **wytlumieniu**.
- Po dostatecznie długim czasie ruch układu jest z wystarczającą dokładnością opisany **samym tylko** członem odpowiadającym CSRN.
- Drgania o ustalonej amplitudzie i częstotliwości nazywamy **drzaniami ustalonymi**, a o układzie wykonującym takie drgania mówimy, że jest w **stanie ustalonym**.
- Drgania wymuszone w stanie ustalonym opisuje CSRN:

$$x = B_1 \cos(\lambda t) + B_2 \sin(\lambda t) = A \sin(\lambda t + \phi)$$

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{P}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2 \lambda^2}} \quad - \text{amplituda drgań ustalonych}$$

$$\phi: \operatorname{tg} \phi = \frac{B_1}{B_2} \quad - \text{kąt przesunięcia fazowego drgań ustalonych}$$

REZONANS MECHANICZNY

Miarą przyrostu amplitudy drgań z uwagi na wymuszenie dynamiczne jest **współczynnik dynamiczny**, czyli stosunek maksymalnej amplitudy drgań wymuszonych siłą harmonicznie zmienną, do wychylenia układu z położenia równowagi w sytuacji, gdy maksymalna wartość siły wymuszającej przyłożona jest w sposób statyczny.

- maksymalne wychylenie statyczne:
- maksymalna amplituda drgań ustalonych:

$$A_{st} = \frac{P_0}{k} = \frac{P_0}{m \omega_0^2}$$

$$A_{dyn} = \frac{P_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4 \gamma^2 \omega_0^2 \lambda^2}}$$

Współczynnik dynamiczny:

$$\eta = \frac{A_{dyn}}{A_{st}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4 \gamma^2 \omega_0^2 \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \chi^2)^2 + 4 \gamma^2 \chi^2}}$$

dla układów nietłumionych:

$$\eta = \frac{A_{dyn}}{A_{st}} = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \lambda^2|} = \frac{1}{|1 - \chi^2|}$$

gdzie

$\chi = \frac{\lambda}{\omega_0}$ - stosunek częstości wymuszenia do częstości drgań własnych **nietłumionych** (!)

REZONANS MECHANICZNY

Dla jakiej częstości wymuszenia amplituda drgań ustalonych jest największa?

Amplituda drgań:

$$A = \frac{P_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2 \lambda^2}}$$

Poszukujemy ekstremum:

$$\frac{dA}{d\lambda} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{P_0}{m} \frac{2(\omega_0^2 - \lambda^2) \cdot (-2\lambda) + 8\lambda \gamma^2 \omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2 \lambda^2]^{3/2}} = 0$$

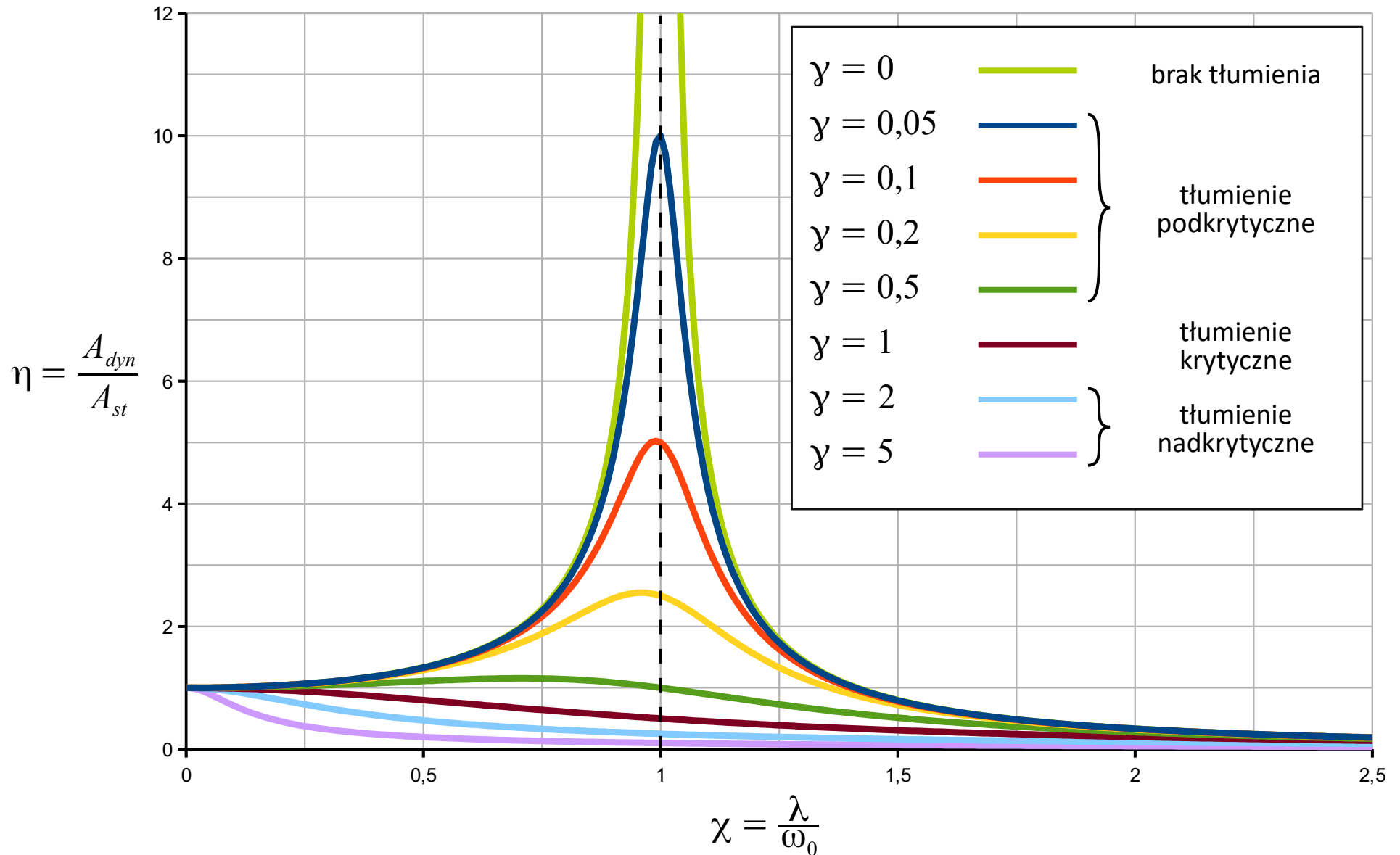
$$\lambda_{rez} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\gamma^2} \Rightarrow \eta_{max} = \frac{1}{2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2}}$$

dla układów nietłumionych:

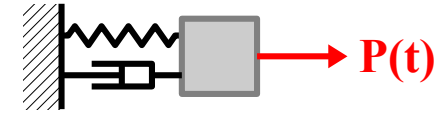
$$\lambda_{rez} = \omega_0 \Rightarrow \eta \rightarrow \infty$$

Zjawisko wzrostu amplitudy drgań wymuszonych dla określonej częstości wymuszenia nazywamy **rezonansem mechanicznym**. Częstość odpowiadającą ekstremum amplitudy to **częstość rezonansowa**.

REZONANS MECHANICZNY



REZONANS MECHANICZNY



WNIOSKI:

- Dla układów tłumionych **krytycznie** lub **nadkrytycznie** maksymalna amplituda drgań ustalonych jest zawsze mniejsza lub równa maksymalnemu wychyleniu statycznemu.
- Dla układów tłumionych **podkrytycznie** istnieje taka częstość wymuszenia (**częstość rezonansowa**), że amplituda drgań ustalonych jest większa niż maksymalne wychylenie statyczne.

- Częstość rezonansowa jest zawsze mniejsza od częstości drgań własnych: $\lambda_{rez} < \omega_d < \omega_0$

- Dla układów **nietłumionych**:

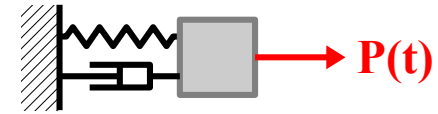
- częstość rezonansowa jest równa częstości drgań własnych: $\lambda_{rez} = \omega_0$
- amplituda drgań rezonansowych wzrasta w sposób nieograniczony

$$\lim_{\lambda \rightarrow \omega_0} \eta(\gamma=0) = \lim_{\lambda \rightarrow \omega_0} \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \lambda^2|} = \infty$$

- Dla częstości $\lambda \gg \omega_0$ amplituda drgań ustalonych jest mniejsza od wychylenia statycznego, jednak dla dużych λ siły bezwładności są coraz większe:

$$F_{bezwł} = m \ddot{x} \sim P_0 \lambda^2$$

REZONANS MECHANICZNY



WNIOSKI:

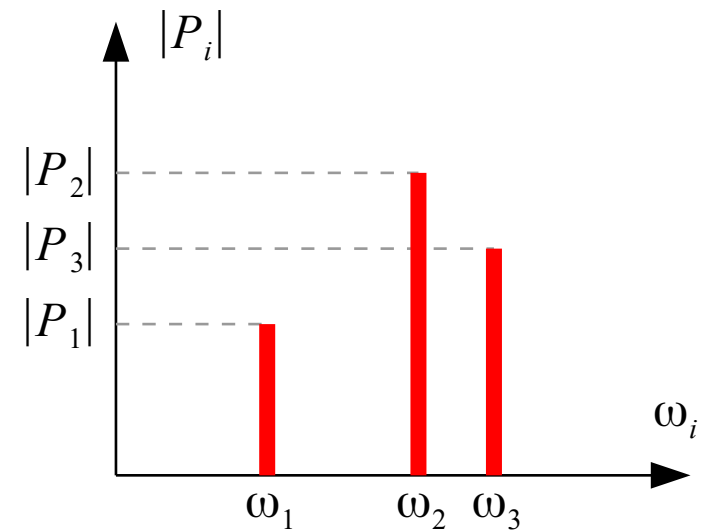
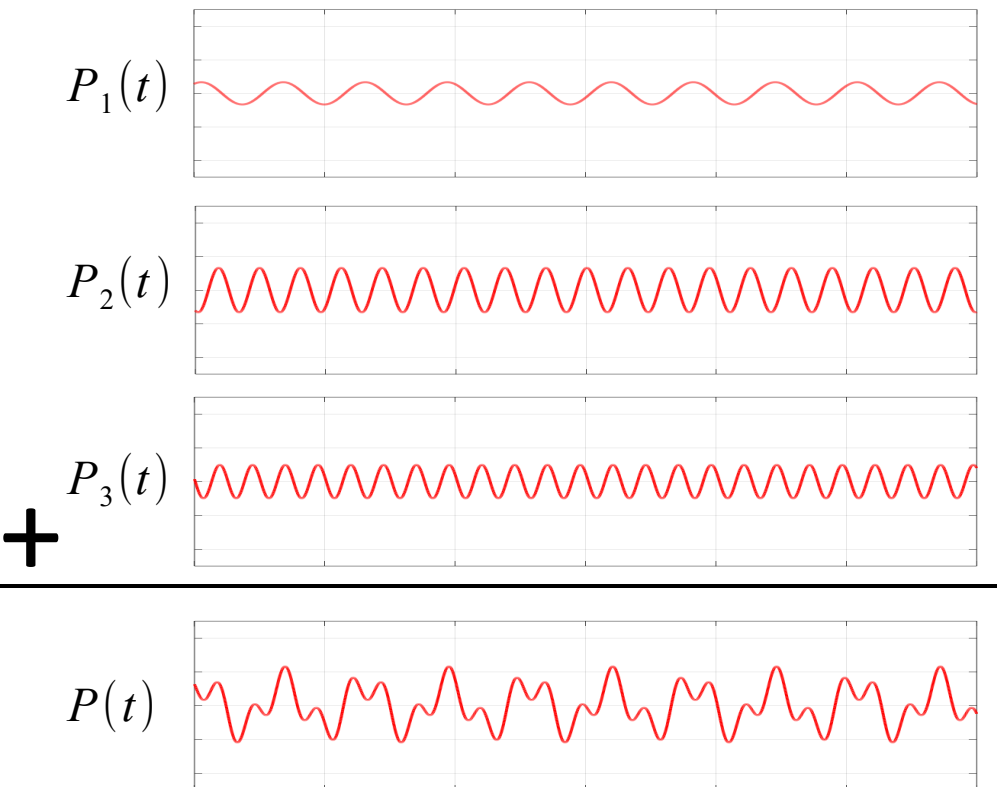
- Zjawisko **rezonansu** mechanicznego musi być brane pod uwagę przy **analizie wpływu obciążeń dynamicznych na konstrukcję**. Obciążeniami takimi są m.in.:
 - oddziaływania **sejsmiczne** i **parasejsmiczne** (górnictwo, komunikacyjne)
 - **drżania przekazywane przez ludzi lub maszyny** w obiekcie
 - obciążenie **wiatrem** (w tym: wiry Kármána, flatter aerodynamiczny)
- Oddziaływania te z reguły mają charakter **obciążeń, będących złożeniem (nieskończenie) wielu przebiegów harmonicznym o różnych częstościach**. Każdy taki przebieg nazywamy składową harmoniczną.
- Jeśli **wymuszenie harmoniczne** (np. drżania maszyny pracującej w stanie ustalonym) lub **pewna składowa harmoniczna** obciążenia złożonego **ma częstość zbliżoną do częstości drgań własnych**, istnieje niebezpieczeństwo wystąpienia **rezonansu** mechanicznego.
- Jeśli amplituda obciążenia harmonicznego (lub składowej harmonicznej) jest duża, a tłumienie w układzie małe, konieczne może okazać się **zabezpieczenie konstrukcji przed rezonansem**, np.:
 - montaż **wibroizolacji** lub **tłumików** drgań
 - **przestrojenie** konstrukcji (zmiana jej częstości drgań własnych)

WYMUSZENIE O DOWOLNYM PRZEBIEGU

Wspomniane uprzednio oddziaływania dynamiczne mogą być traktowane jako **złożenie skończonej lub nieskończonej liczby składowych obciążeń harmonicznych**:

$$P(t) = \sum_{i=1}^N P_i(t), \quad P_i(t) = P_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

Przypisanie każdej częstości składowej harmonicznej jej amplitudy i przesunięcia fazowego nazywamy **widmem częstotliwościowym** przebiegu $P(t)$.



widmo częstotliwościowe $P(t)$

WYMUSZENIE O DOWOLNYM PRZEBIEGU

Jeśli układ mechaniczny jest **liniowy**, wtedy możliwe jest wyznaczenie odpowiedzi układu poprzez **dodawanie do siebie odpowiedzi na każdą ze składowych harmonicznym wymuszenia z osobna**. Możliwość takiego **dodawania skutków sumy przyczyn** nosi nazwę **zasady superpozycji**. Wtedy, dla każdego wymuszenia $P_i(t)$ zachodzi

$$m \ddot{x}_i + c \dot{x}_i - k x_i = P_i(t) \quad i=1,2,\dots,N$$

Możemy dodać do siebie wszystkie te związki:

$$\sum_{i=1}^N (m \ddot{x}_i + c \dot{x}_i - k x_i) = \sum_{i=1}^N P_i(t)$$

Z uwagi na **liniowość** równania rządzącego zagadnieniem możemy napisać:

$$m \underbrace{\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)}_{\ddot{x}} + c \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)}_{\dot{x}} - k \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N x_i \right)}_x = \underbrace{\sum_{i=1}^N P_i(t)}_{P(t)}$$

ZASADA SUPERPOZYCJI

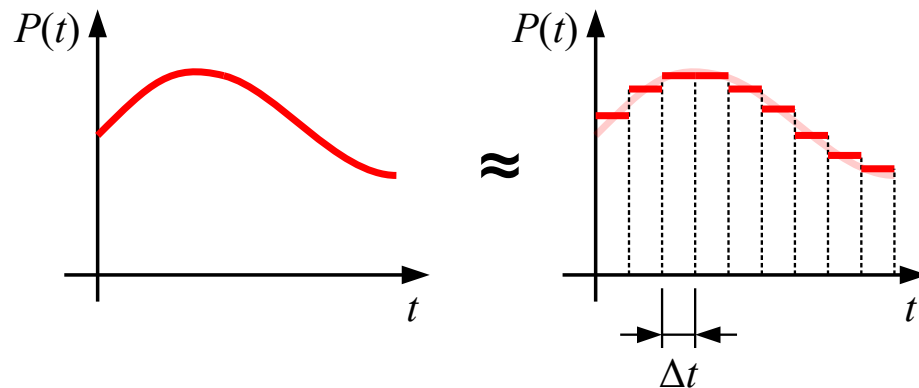
Skutek kombinacji liniowej przyczyn jest odpowiednią kombinacją liniową skutków tych przyczyn.

$$m \ddot{x}_i + c \dot{x}_i + k x_i = P_i(t), \quad i=1,\dots,N \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = P(t) \quad \text{gdzie} \quad x = \sum_{i=1}^N x_i \quad P(t) = \sum_{i=1}^N P_i(t)$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

Dowolny przebieg czasowy siły wymuszającej można przybliżyć skończoną sumą obciążeń prostokątnych:

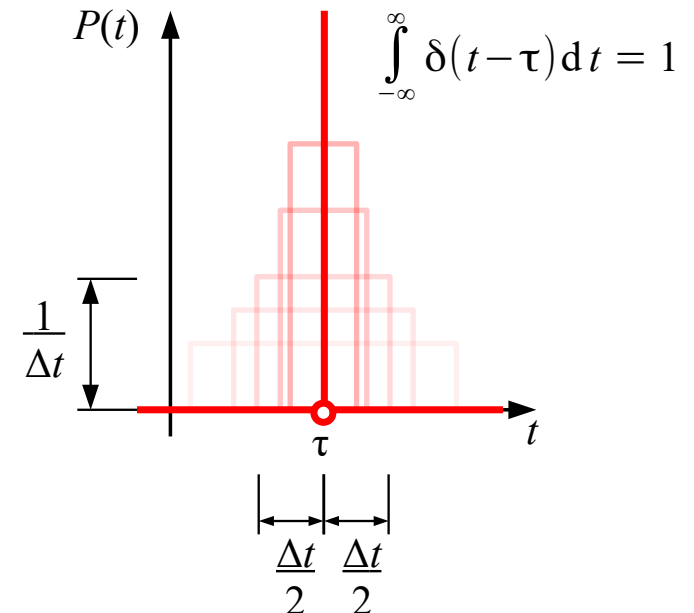


$$P(t) \approx \sum_{i=1}^N P(t_i) \delta(t-t_i)$$

Funkcję obciążenia prostokątnego można zdefiniować następująco:

$$\delta(t-\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & \Leftrightarrow |t-\tau| \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \Leftrightarrow |t-\tau| > \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \approx \delta(t-\tau) = \begin{cases} \infty & \Leftrightarrow t=\tau \\ 0 & \Leftrightarrow t \neq \tau \end{cases}$$

Przy czym od razu zakładając będziemy, że przedział Δt jest mały i dąży w granicy do 0. Graniczny przypadek powyższego odwzorowania nazywamy **dystrybucją Diraca**, a w kontekście wymuszenia nazywamy go **jednostkowym obciążeniem impulsowym**.

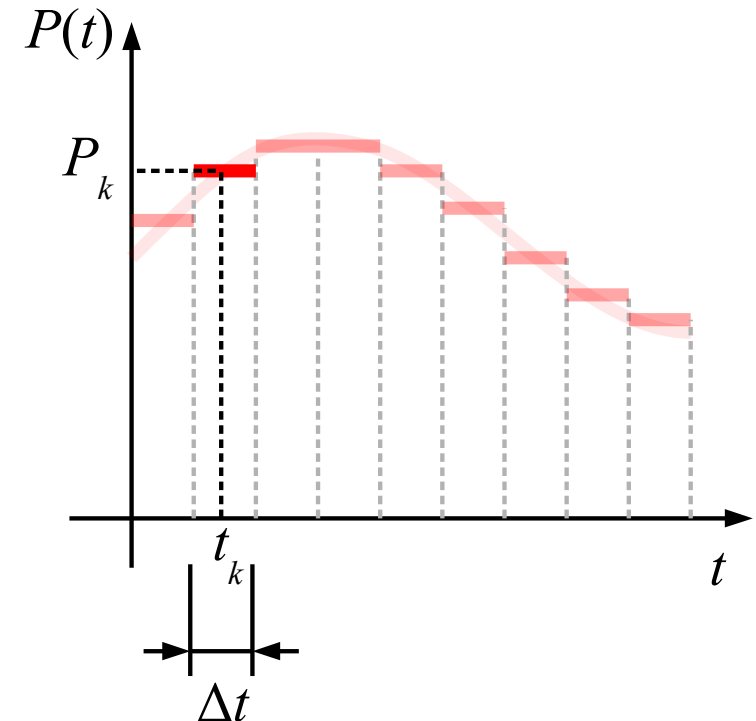


ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

Gdy $\Delta t \rightarrow 0$, wtedy liczba przedziałów stałej wartości funkcji aproksymującej rośnie do nieskończoności. Suma aproksymacyjna przyjmuje postać:

$$P(t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \frac{t_1 - t_0}{N} = \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^N \left[\underbrace{P\left(t_0 + \frac{2k-1}{2} \Delta t\right)}_{t_k} \delta\left(\underbrace{\left(t_0 + \frac{2k-1}{2} \Delta t\right) - t}_{t_k}\right) \cdot \Delta t \right] =$$

$$= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^N \left[\underbrace{P(t_k)}_{P_k} \underbrace{\delta(t_k - t)}_{=1 \text{ dla } t=t_k} \cdot \Delta t \right] = \int_{t_0}^{t_1} P(\tau) \delta(\tau - t) d\tau$$



Zauważmy, że: $\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t)$

A zatem dla dowolnej funkcji zachodzi:

$$P(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \delta(t - \tau) dt$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

$$P(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \delta(t - \tau) dt$$

Związek ten można udowodnić, obliczając całkę po prawej stronie z uwzględnieniem definicji dystrybucji delta. Ponieważ przyjmuje ona wartość niezerową jedynie w przedziale $(\tau - \Delta t/2 ; \tau + \Delta t/2)$, stąd możemy napisać:

$$\int_{t_0}^{t_1} P(t) \delta(t - \tau) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\underbrace{\int_{t_0}^{\tau - \Delta t/2} [P(t) \cdot 0] dt}_{= 0} + \int_{\tau - \Delta t/2}^{\tau + \Delta t/2} \left[P(t) \cdot \frac{1}{\Delta t} \right] dt + \underbrace{\int_{\tau + \Delta t/2}^{t_1} [P(t) \cdot 0] dt}_{= 0} \right]$$

Δt nie zależy od zmiennej całkowania, zatem:

$$\int_{t_0}^{t_1} P(t) \delta(t - \tau) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\tau - \Delta t/2}^{\tau + \Delta t/2} P(t) dt \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\int P dt \Big|_{t=\tau+\frac{\Delta t}{2}} - \int P dt \Big|_{t=\tau-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \right]$$

Ostatnie wyrażenie to granica ilorazu różnicowego całki nieoznaczonej (funkcji pierwotnej) $P(t)$, czyli $P(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_1} P(t) \delta(t - \tau) dt = \frac{d}{dt} \int P(t) dt \Big|_{t=\tau} = P(\tau)$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

Zgodnie z **zasadą superpozycji**, odpowiedź układu liniowego na kombinację liniową nieskończonej liczby (czyli **całkę**) impulsów jednostkowych możemy wyznaczyć jako odpowiednią kombinację liniową nieskończonej liczby (czyli **całkę**) odpowiedzi układu na impulsy jednostkowe (w różnych chwilach i o różnej wielkości).

$$P(t) = \int_{t_0}^{t_1} P(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{t_0}^{t_1} P(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

gdzie $h(t-\tau)$ - **odpowiedź impulsowa układu** jest rozwiązaniem poniższego zagadnienia początkowego:

$$\left. \begin{array}{l} \text{równanie ruchu:} \\ \text{z warunkami początkowymi:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = \delta(t-\tau) \\ \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{array} \right. \end{array} \Rightarrow h(t-\tau)$$

Rozwiązanie problemu drgań wymuszonych dowolnie zmienną siłą zewnętrzną dane jest **całką Duhamela**:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} P(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

Wyznaczenie odpowiedzi impulsowej

równanie ruchu: $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = \delta(t - \tau)$

z warunkami początkowymi:
$$\begin{cases} x(t_0) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia można znaleźć korzystając z definicji dystrybucji Diraca:

- dzielimy dziedzinę na 3 części:

- faza I – przed impulsem $t \in (t_0 ; t_I)$
- faza II – w czasie impulsu $t \in (t_I ; t_{II})$
- faza III – po impulsie $t \in (t_{II} ; \infty)$

$$t_I = \tau - \frac{\Delta t}{2}, \quad t_{II} = \tau + \frac{\Delta t}{2}$$

- znajdujemy rozwiązanie ogólne w każdej z tych faz:
- stałe całkowania** dobieramy w taki sposób, aby spełnione były

- warunki początkowe** $x_I(t_0) = 0, \quad \dot{x}_I(t_0) = 0$
- warunek ciągłości przemieszczenia** na granicy faz $x_I(t_I) = x_{II}(t_I), \quad x_{II}(t_{II}) = x_{III}(t_{II})$
- warunek ciągłości prędkości** na granicy faz $\dot{x}_I(t_I) = \dot{x}_{II}(t_I), \quad \dot{x}_{II}(t_{II}) = \dot{x}_{III}(t_{II})$

- stosujemy przejście graniczne $\Delta t \rightarrow 0$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

Rozważamy układ tłumiony podkrytycznie.

FAZA I: $t \in \left(0 ; \tau - \frac{\Delta t}{2}\right)$ $m \ddot{x}_I + c \dot{x}_I + k x_I = 0$ (drgania swobodne)

$$x_I(t) = e^{-\beta t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)]$$

FAZA II: $t \in \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} ; \tau + \frac{\Delta t}{2}\right)$ $m \ddot{x}_{II} + c \dot{x}_{II} + k x_{II} = \frac{1}{\Delta t} = const.$ (drgania wymuszone siłą o stałej wartości)

$$x_{II}(t) = e^{-\beta t} [C_3 \cos(\omega_d t) + C_4 \sin(\omega_d t)] + \frac{1}{k} \frac{1}{\Delta t}$$

FAZA III: $t \in \left(\tau + \frac{\Delta t}{2} ; \infty\right)$ $m \ddot{x}_{III} + c \dot{x}_{III} + k x_{III} = 0$ (drgania swobodne)

$$x_{III}(t) = e^{-\beta t} [C_5 \cos(\omega_d t) + C_6 \sin(\omega_d t)]$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych i warunków zszycia:

$$\begin{cases} x_I(t_0) = 0 \\ \dot{x}_I(t_0) = 0 \\ x_I(t_I) = x_{II}(t_I) \\ x_{II}(t_{II}) = x_{III}(t_{II}) \\ \dot{x}_I(t_I) = \dot{x}_{II}(t_I) \\ \dot{x}_{II}(t_{II}) = \dot{x}_{III}(t_{II}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = \frac{1}{k\omega_d} \frac{1}{\Delta t} e^{\beta t_I} [-\omega_d \cos(\omega_d t_I) + \beta \sin(\omega_d t_I)] \\ C_4 = \frac{1}{k\omega_d} \frac{1}{\Delta t} e^{\beta t_I} [-\omega_d \sin(\omega_d t_I) - \beta \cos(\omega_d t_I)] \\ C_5 = \frac{1}{k\omega_d} \frac{1}{\Delta t} [e^{\beta t_I} [-\omega_d \cos(\omega_d t_I) + \beta \sin(\omega_d t_I)] + e^{\beta t_{II}} [\omega_d \cos(\omega_d t_{II}) - \beta \sin(\omega_d t_{II})]] \\ C_6 = \frac{1}{k\omega_d} \frac{1}{\Delta t} [e^{\beta t_I} [-\omega_d \sin(\omega_d t_I) - \beta \cos(\omega_d t_I)] + e^{\beta t_{II}} [\omega_d \sin(\omega_d t_{II}) + \beta \cos(\omega_d t_{II})]] \end{cases}$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C_1 = 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C_2 = 0 \end{array} \right\}$$

 \Rightarrow

$$x_I(t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C_3 = \infty \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C_4 = \infty \end{array} \right\}$$

 \Rightarrow

$$x_{II}(t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C_5 = -\frac{1}{m\omega_d} e^{\beta\tau} \sin(\omega_d \tau) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C_6 = \frac{1}{m\omega_d} e^{\beta\tau} \cos(\omega_d \tau) \end{array} \right\}$$

 \Rightarrow

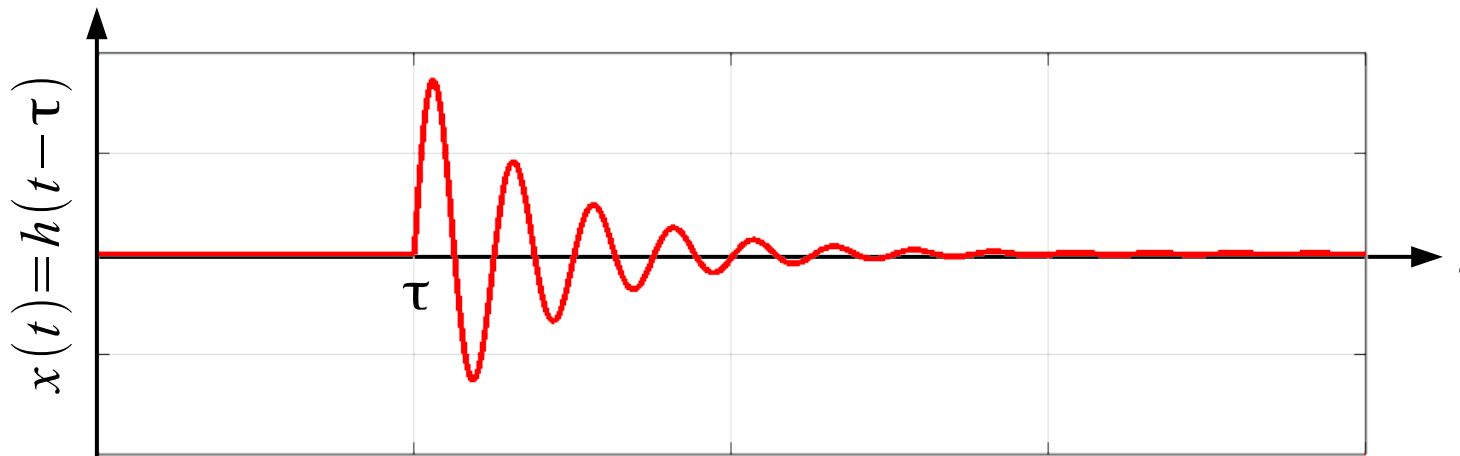
$$x_{III}(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\beta(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)]$$

W **przejściu granicznym** $\Delta t \rightarrow 0$ faza II redukuje się do punktu, w którym funkcje x_I i x_{III} mają wartości zerowe. Funkcja x_{II} ma być ciągła wraz ze swą pochodną w tym punkcie lewostronnie z x_I i prawostronnie z x_{III} , zatem musi mieć również wartość zerową. Niewłaściwe granice w nieskończoności stałych całkowania C_3 i C_4 należy interpretować w ten sposób, że granica funkcji w tym punkcie jest zerowa.

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

Odpowiedź impulsowa układu podkrytycznie tłumionego:

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow t \leq \tau \\ \frac{1}{m\omega_d} e^{-\beta(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] & \Leftrightarrow t > \tau \end{cases}$$



Odpowiedź impulsowa jest równoważna nadaniu w chwili τ nieruchomemu układowi swobodnemu prędkości początkowej

$$v_\tau = \frac{\Delta p}{m} \quad \text{gdzie} \quad \Delta p = 1 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Z II zasady dynamiki Newtona wynika, że siła jest pochodną pędu, zatem jednostkowy impuls siły δ skutkuje jednostkowym przyrostem pędu Δp .

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA I CAŁKA DUHAMELA*

Odpowiedź układu podkrytycznie tłumionego na siłę wymuszającą o dowolnym przebiegu czasowym obliczamy za pomocą [całki Duhamela](#):

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int_{t_0}^t P(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

UWAGI:

- Całka powyższa w wielu przypadkach jest trudna do obliczenia w sposób analityczny
- Możliwe jest obliczenie powyższej całki w sposób numeryczny, np. całkując metodą prostokątów można napisać:

$$x(t_i) \approx \frac{1}{m \omega_d} \sum_{k=0}^i \left[P\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right) e^{-\beta\left(t_i - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right)} \sin\left[\omega_d\left(t_i - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right)\right] \right] \Delta t$$

- Ta metoda jest bardzo kosztowna obliczeniowo – do obliczenia $x(t_i)$ należy dodać i składników sumy. Dla innej chwili odpowiednią sumę należy obliczać od nowa.
- Wyjściem z sytuacji może być „ucięcie” odpowiedzi impulsowej. Począwszy od pewnej chwili wpływ impulsu jest tak mały (odpowiedź tłumiona jest bliska zeru), że można go pominąć.

DRGANIA UKŁADÓW O WIELU STOPNIACH SWOBODY

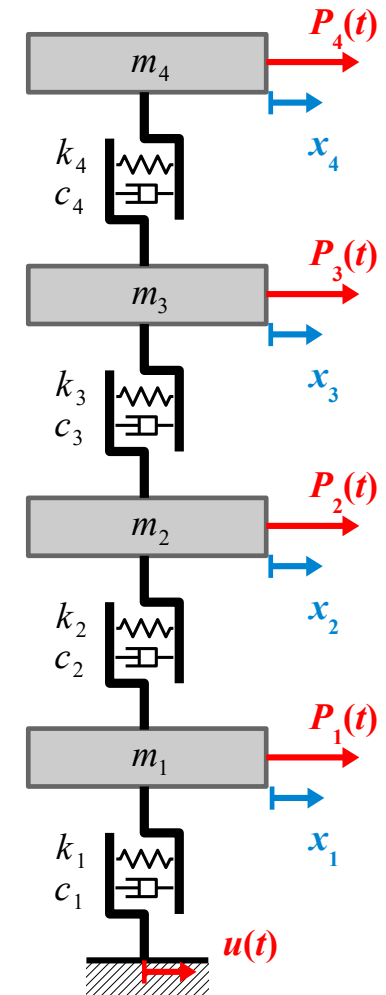
DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

- Możemy rozważać układy brył sztywnych lub mas punktowych połączonych ze sobą wiązaniami lepko-sprężystymi (sprężyna + tłoczek).
- Każdy ze stopni swobody każdej z mas stanowi funkcję czasu, którą należy wyznaczyć poprzez wykorzystanie równań ruchu zapisanych zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona.
- W rezultacie otrzymuje się układ równań różniczkowych 2 rzędu – jeśli wiązania między masami są liniowe (zależą jedynie od wzajemnego przemieszczenia lub wzajemnej prędkości), wtedy układ równań jest liniowy.

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

PRZYKŁAD:

- Układ N mas
- Każda z nich może doznawać jedynie przemieszczeń poziomych
- Masy połączone są **liniowymi** wiązaniami lepko-sprężystymi



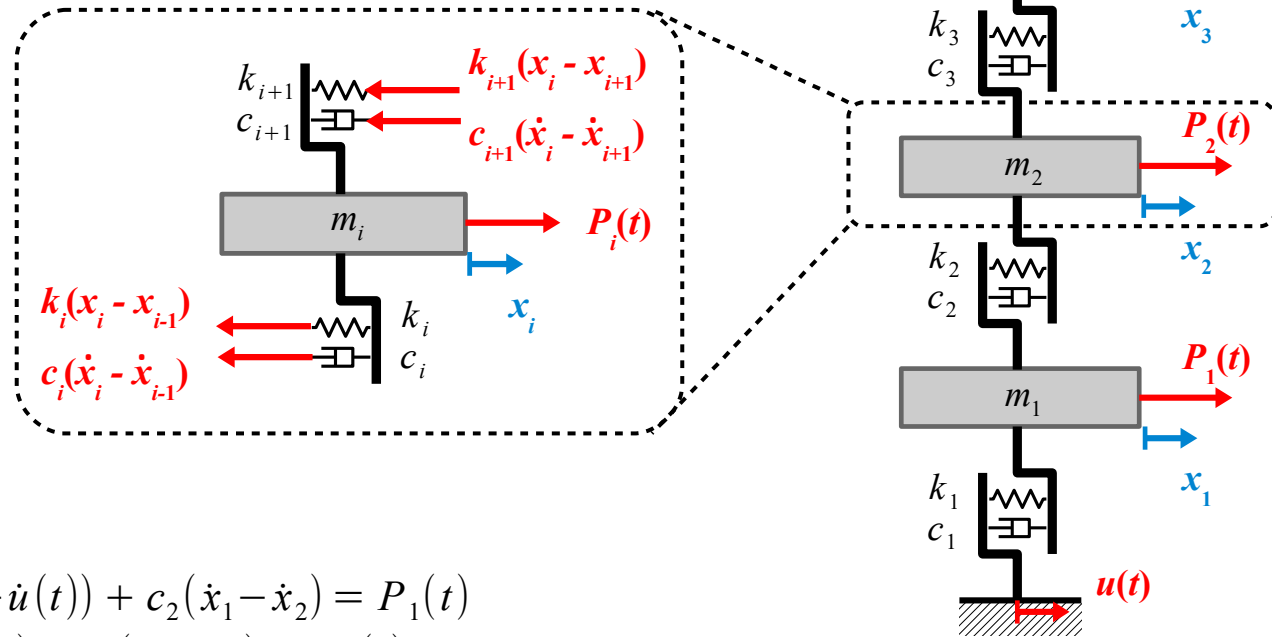
DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

PRZYKŁAD:

- Układ N mas
- Każda z nich może doznawać jedynie przemieszczeń poziomych
- Masy połączone są **liniowymi** wiązaniami lepko-sprężystymi

Równanie ruchu dla k -tej masy:

$$m_i \ddot{x}_i = P_i(t) - k_i(x_i - x_{i-1}) - k_{i+1}(x_i - x_{i+1}) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) - c_{i+1}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1})$$



Układ równań ruchu dla układu:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - u(t)) + k_2(x_1 - x_2) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{u}(t)) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = P_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - x_3) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = P_2(t) \\ \dots \\ m_{N-1} \ddot{x}_{N-1} + k_{N-1}(x_{N-1} - x_{N-2}) + k_N(x_{N-1} - x_N) + c_{N-1}(\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_{N-2}) + c_N(\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_N) = P_{N-1}(t) \\ m_N \ddot{x}_N + k_N(x_N - x_{N-1}) + c_N(\dot{x}_N - \dot{x}_{N-1}) = P_N(t) \end{cases}$$

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1) + k_2(x_1 - x_2) + c_1(\dot{x}_1) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = P_1(t) + k u(t) + c \dot{u}(t) = \tilde{P}_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - x_3) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = P_2(t) \\ \dots \\ m_{N-1} \ddot{x}_{N-1} + k_{N-1}(x_{N-1} - x_{N-2}) + k_N(x_{N-1} - x_N) + c_{N-1}(\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_{N-2}) + c_N(\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_N) = P_{N-1}(t) \\ m_N \ddot{x}_N + k_N(x_N - x_{N-1}) + c_N(\dot{x}_N - \dot{x}_{N-1}) = P_N(t) \end{cases}$$

Układ równań ruchu dla układu zapisany w formie macierzowej:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{N-1} \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (c_{N-1}+c_N) & c_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{N-1} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (k_{N-1}+k_N) & k_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{N-1} \\ P_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{P}$$

Do tego dochodzą jeszcze **warunki początkowe** na położenie i prędkość każdej z mas w chwili t_0 .

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

Wektorowe równanie ruchu dla układu:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{P}$$

\mathbf{x} – wektor przemieszczeń węzłowych

\mathbf{P} – wektor obciążeń zewnętrznych

\mathbf{M} – macierz mas

\mathbf{C} – macierz tłumienia

\mathbf{K} – macierz sztywności

UWAGI:

- Równanie powyższe jest równoważne układowi N liniowych równań różniczkowych 2 rzędu o stałych współczynnikach. Układ taki można przekształcić do układu $2N$ równań 1 rzędu. Znane są ogólne metody rozwiązywania układów 1 rzędu.
- Taką samą postać przyjmują równania ruchu dla ciał odkształcalnych przy rozwiązywaniu zagadnienia Metodą Elementów Skończonych.
- Niekiedy macierz tłumienia wyznacza się jako kombinację liniową macierzy mas i macierzy sztywności (model tłumienia Rayleigha). Współczynniki α, β tej kombinacji dobiera się w zależności od typu konstrukcji:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

PRZYKŁAD:

- Układ 4 identycznych mas połączonych szeregowo liniowymi wiązaniami lepko-sprężystymi o identycznej charakterystyce.

Układ równań ruchu:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = P_1 - k(x_1 - u) - k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{u}) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 = P_2 - k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ m\ddot{x}_3 = P_3 - k(x_3 - x_2) - k(x_3 - x_4) - c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - c(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) \\ m\ddot{x}_4 = P_4 - k(x_4 - x_3) - k(x_4) - c(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - c(\dot{x}_4) \end{cases}$$

Równania ruchu w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 & 0 \\ -c & 2c & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c & -c \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

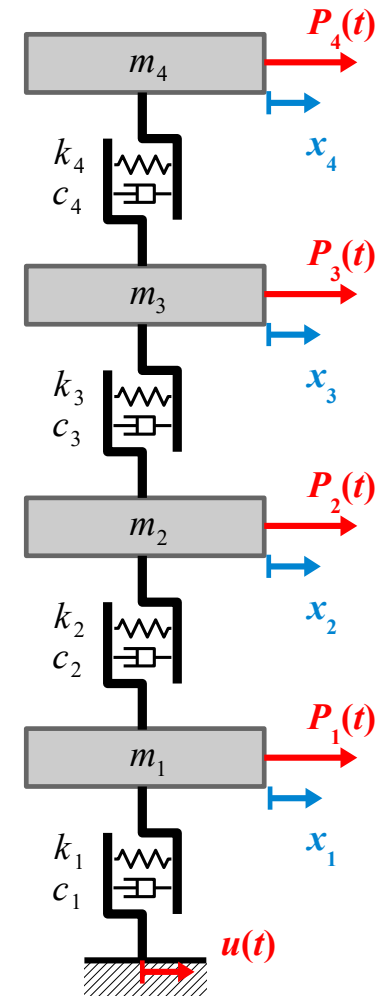
macierz mas

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 & 0 \\ -c & 2c & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c & -c \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix}$$

macierz tłumienia

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

macierz sztywności



DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

Jedną z często stosowanych metod rozwiązywania układów równań ruchu konstrukcji jest **metoda Newmarka**. Dzielimy dziedzinę czasu na skończone odcinki $\Delta t = (t_{i+1} - t_i)$

- Położenie i prędkość w chwili początkowej wyznaczają **warunki początkowe**: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0$
- Prędkość i położenie w chwili kolejnej wyznaczamy zakładając w danym przedziale stałą prędkość (równą prędkości w chwili poprzedniej) oraz stałe przyspieszenie, które szacowane jest na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej dla pochodnych:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_\alpha \quad \text{gdzie} \quad \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = (1-\alpha)\ddot{\mathbf{x}}_i + \alpha\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad \alpha \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{x}}_\beta \quad \text{gdzie} \quad \ddot{\mathbf{x}}_\beta = (1-\beta)\ddot{\mathbf{x}}_i + \beta\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad \beta \in \langle 0; 1 \rangle$$

- Ponadto, zapisujemy **równanie ruchu dla chwili kolejnej**: $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{K} \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1}$
- Po podstawieniu powyższych zależności do równania ruchu otrzymujemy liniowy układ równań na $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{x}}_i + \Delta t \left((1-\alpha)\ddot{\mathbf{x}}_i + \alpha\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \right] + \mathbf{K} \left[\mathbf{x}_i + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left((1-\beta)\ddot{\mathbf{x}}_i + \beta\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \right] = \mathbf{P}_{i+1}$$

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

- Z uzyskanego układu równań wyznaczamy niewiadome: \mathbf{x}_{i+1} , $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$, $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$

$$\underbrace{\left[\mathbf{M} + \alpha \Delta t \mathbf{C} + \beta \frac{(\Delta t)^2}{2} \mathbf{K} \right]}_{\mathbf{A}} \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} = \underbrace{\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{x}}_i + (1-\alpha) \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_i \right] - \mathbf{K} \left[\mathbf{x}_i + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + (1-\beta) \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{x}}_i \right]}_{\mathbf{b}_{i+1}}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_{i+1}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + \Delta t \left[(1-\alpha) \ddot{\mathbf{x}}_i + \alpha \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right]$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[(1-\beta) \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right]$$

- Położenie, prędkość i przyspieszenie w chwili następnej, wyznaczamy na podstawie położenia, prędkości i przyspieszenie w chwili poprzedniej.
- Jeśli parametry układu nie zmieniają się w czasie, macierz \mathbf{A}^{-1} wystarczy obliczyć tylko raz.
- Najczęściej stosowanymi wartościami parametrów metody są:
 - wariant **centralnego schematu różnicowego**: $\alpha = 0$ $\beta = 0,5$
 - wariant **średniego stałego przyspieszenia**: $\alpha = 0,5$ $\beta = 0,5$

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

Rozważmy układ **nietłumiony, swobodny**:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Przypuśćmy, że istnieje rozwiązanie harmonicznie zmienne w czasie:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \sin(\omega t)$$

gdzie: \mathbf{a} - wektor postaci drgań
 ω - częstość (kołowa) drgań

Wtedy:

$$\dot{\mathbf{x}} = \omega \mathbf{a} \cos(\omega t)$$
$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{a} \sin(\omega t)$$

Po podstawieniu do równania ruchu:

$$-\omega^2 \sin(\omega t) \mathbf{M} \mathbf{a} + \sin(\omega t) \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\sin(\omega t) \mathbf{K} \mathbf{a} = \omega^2 \sin(\omega t) \mathbf{M} \mathbf{a}$$

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

$$\mathbf{K} \mathbf{a} \sin(\omega t) = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{a} \sin(\omega t)$$

Równanie musi być spełnione dla każdego t . Tak będzie, gdy:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a} \quad \leftarrow \text{zagadnienie własne dla macierzy } \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$$

Dla **symetrycznej, rzeczywistej** macierzy $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ o wymiarach $N \times N$:

- istnieje N **rzeczywistych wartości własnych** ω_i^2 . Wartości ω_i nazywamy **częstościami drgań własnych**. Najmniejszą z nich nazywamy podstawową (fundamentalną) częstością drgań własnych.
- istnieje N **rzeczywistych wektorów własnych** $\mathbf{a}^{(i)}$ - określają one **postać drgań**. Wektory postaci drgań odpowiadające różnym częstościom własnym są **ortogonalne** w tym sensie, że:

$$\omega_i \neq \omega_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^{(i)} \cdot \mathbf{a}^{(j)} = a_1^{(i)} a_1^{(j)} + a_2^{(i)} a_2^{(j)} + \dots + a_N^{(i)} a_N^{(j)} = 0$$

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

PRZYKŁAD:

- Układ 4 identycznych mas połączonych szeregowo liniowymi wiązaniami lepko-sprężystymi o identycznej charakterystyce.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

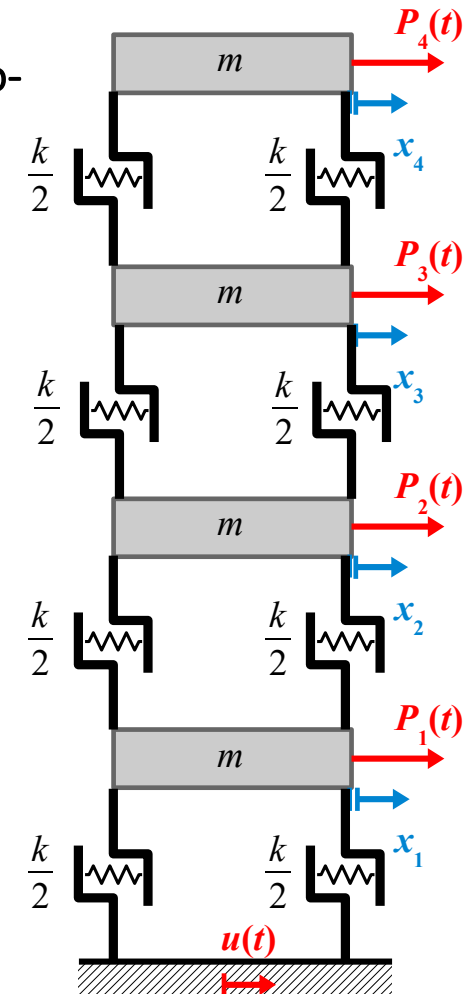
macierz mas macierz sztywności

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie wiekowe

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^4 - 7\lambda^3 + 15\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0 \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{m}{k} \omega^2$$



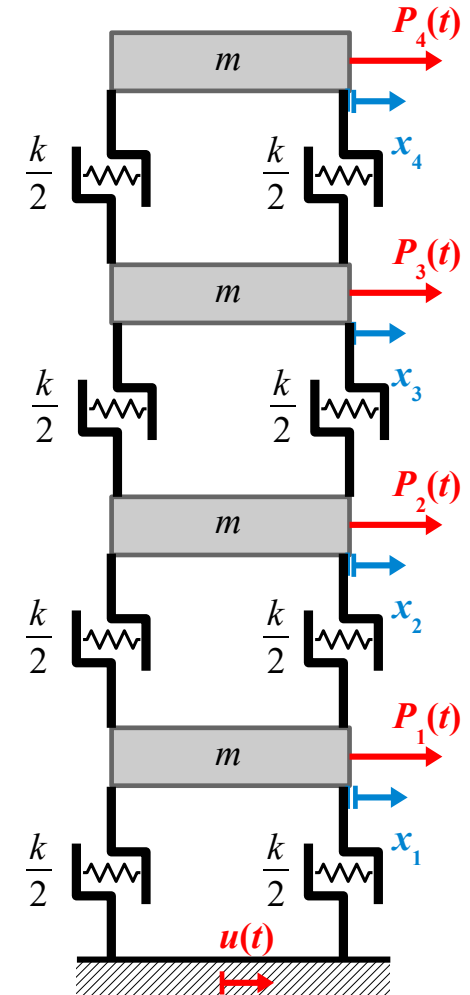
DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

PRZYKŁAD:

- Wartości własne

$$\lambda^4 - 7\lambda^3 + 15\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0,1206147584281836 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2,347296355333861 \\ \lambda_4 = 3,532088886237956 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0,3472963553338612 \sqrt{k/m} \\ \omega_2 = \sqrt{k/m} \\ \omega_3 = 1,532088886237956 \sqrt{k/m} \\ \omega_4 = 1,879385241571817 \sqrt{k/m} \end{cases}$$



DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

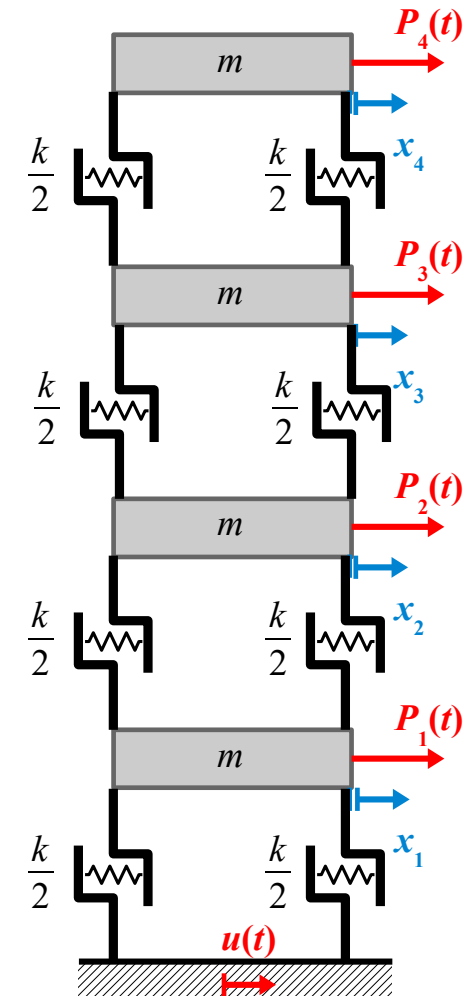
PRZYKŁAD:

- Wektor własny odpowiadający wartości własnej $\omega_1^2 \approx 0,12061 \frac{k}{m}$

$$\frac{k}{m} \begin{bmatrix} (2-0,12061) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-0,12061) & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (2-0,12061) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (1-0,12061) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1,87939 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1,87939 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1,87939 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0,87939 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wartość własna jest **pojedynczym pierwiastkiem równania wielowego**. Rozwiązanie powyższego układu należeć będzie do **jednoparametrowej rodziny rozwiązań**. Niech **parametrem będzie składowa $a_1^{(1)}$** . Pozostałe składowe wyznaczamy z dowolnych 3 niezależnych równań, np. z równań 1, 2 i 3.



DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

PRZYKŁAD:

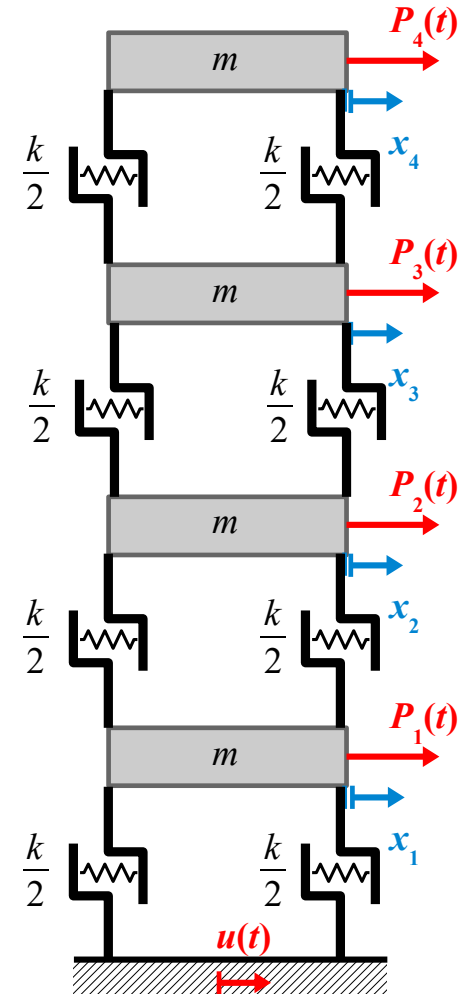
- Wektor własny odpowiadający wartości własnej $\omega_1^2 \approx 0,12061 \frac{k}{m}$

$$\frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1,87939 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1,87939 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1,87939 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0,87939 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1,87939\alpha - a_2^{(1)} = 0 \\ -\alpha + 1,87939a_2^{(1)} - a_3^{(1)} = 0 \\ -a_2^{(1)} + 1,87939a_3^{(1)} - a_4^{(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2^{(1)} = 1,87939\alpha \\ a_3^{(1)} = 2,53209\alpha \\ a_4^{(1)} = 2,87939\alpha \end{cases}$$

$$\mathbf{w}^{(1)} = [1 ; 1,87939 ; 2,53209 ; 2,87939]$$

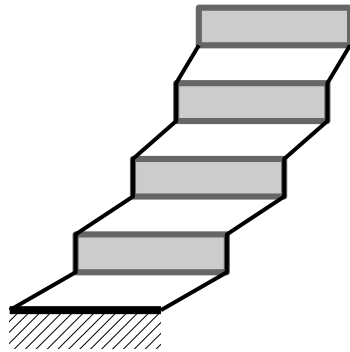
$$\mathbf{a}^{(1)} = \frac{[1 ; 1,87939 ; 2,53209 ; 2,87939]}{\sqrt{(1)^2 + (1,87939)^2 + (2,53209)^2 + (2,87939)^2}} = [0,22801 ; 0,42853 ; 0,57735 ; 0,65654]$$



Analogicznie wyznaczamy pozostałe wektory własne.

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

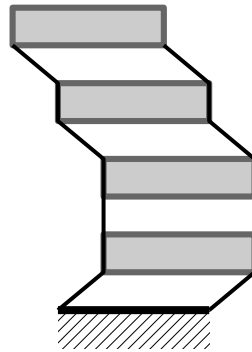
PRZYKŁAD:



$$\omega_1 = 0,34730 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,22801 \\ 0,42853 \\ 0,57735 \\ 0,65654 \end{bmatrix}$$

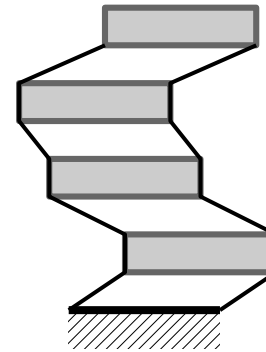
pierwsza
(podstawowa)
postać drgań własnych



$$\omega_2 = 1,00000 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,57735 \\ 0,57735 \\ 0,00000 \\ -0,57735 \end{bmatrix}$$

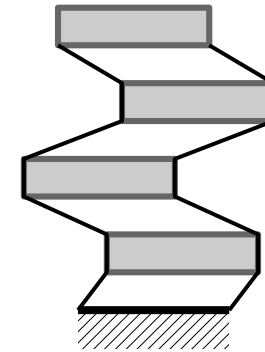
druga postać
drgań własnych



$$\omega_3 = 1,53209 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,65654 \\ -0,22801 \\ -0,57735 \\ 0,42853 \end{bmatrix}$$

trzecia postać
drgań własnych



$$\omega_4 = 1,87939 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\mathbf{a}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,42853 \\ -0,65654 \\ 0,57735 \\ -0,22801 \end{bmatrix}$$

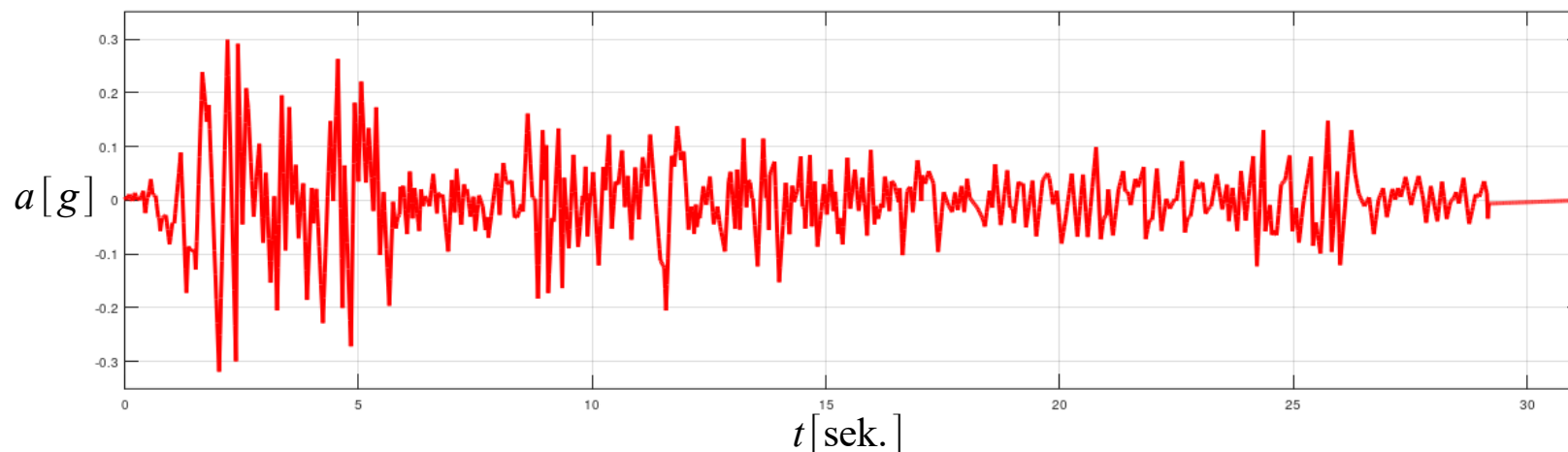
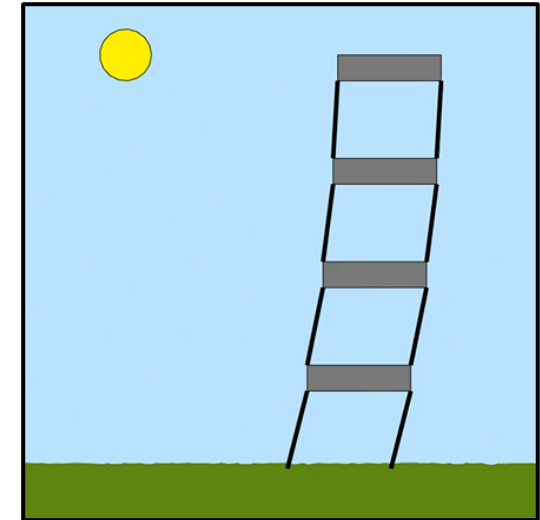
czwarta postać
drgań własnych

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

PRZYKŁAD:

Odpowiedź układu na zadane wymuszenie kinematyczne na podłożu.

- Trzęsienie ziemi w **El Centro** (Kalifornia)
 - 18 maja 1940 r., godz. 21:35 czasu lokalnego.
 - magnituda: 6,9 M_w



DYSKRETNE MODELE UKŁADÓW CIĄGŁYCH

- Rzeczywiste układy mechaniczne (budynki, maszyny) nie są dyskretnymi układami mas skupionych, ale **układami o ciągłym rozkładzie masy**.
- Drgania układów ciągłych również charakteryzują się występowaniem **częstości drgań własnych** – dla każdego układu ciągłego **jest nich nieskończenie wiele**, ale praktyczne **znaczenie mają tylko te najniższe**. Drgania o wyższych częstościach mają znikomy udział w globalnej mierze przemieszczenia czy w całkowitej energii mechanicznej układu.
- Z każdą częstością własną może wiązać się zjawisko **rezonansu**. Istnieje zatem **nieskończenie wiele rezonansowych częstości wymuszenia** dla każdego układu ciągłego.
- Wyznaczenie częstości drgań własnych i odpowiadających im **postaci drgań dla układów ciągłych** jest możliwe w sposób **ściśły** tylko w **najprostszych przypadkach** (pręt rozciągany, belka zginana, proste układy prętowe, płyty o regularnym kształcie itp.).
- W praktyce analizy dużych i złożonych układów ciągłych (maszyny, budynki) dokonuje się poprzez zastosowanie **dyskretyzacji** – **zamiany układu ciągłego na układ dyskretny o bardzo wielu stopniach swobody**. Najpowszechniej stosowaną metodą tego typu jest Metoda Elementów Skończonych (MES).

DYSKRETNE MODELE UKŁADÓW CIĄGŁYCH

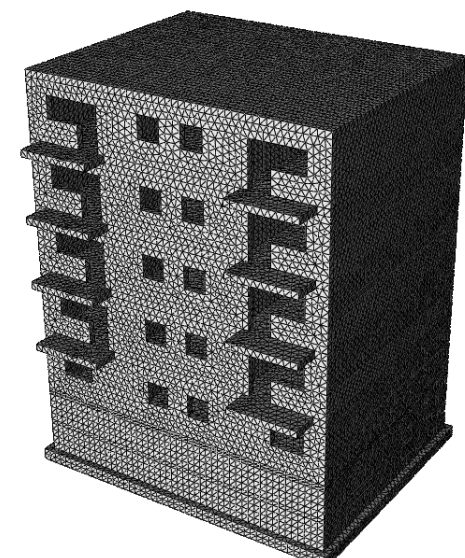
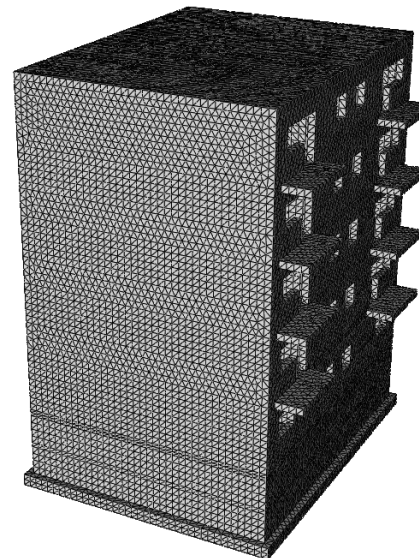
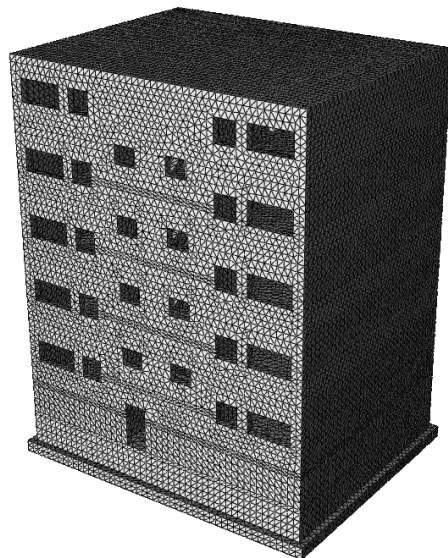
PRZYKŁAD

OBIEKT

- budynek 5 kondygnacyjny, bez podpiwniczenia
- poprzeczny płytowo-tarczowy układ konstrukcyjny
- technologia wykonania: żelbetowa-monolityczna
- rzut prostokątny o wymiarach 14 m x 11 m
- wysokość części nadziemnej 16,1 m
- posadowienie: ławy fundamentowe na poz. -1,5 m ppt
- ściany i stropy grubości 30 cm.

MODEL OBLICZENIOWY

- **Metoda Elementów Skończonych**
- oprogramowanie: **Abaqus CAE**
- liczba elementów skończonych: **216658**
- liczba stopni swobody
(wymiar macierzy sztywności): **1165827**

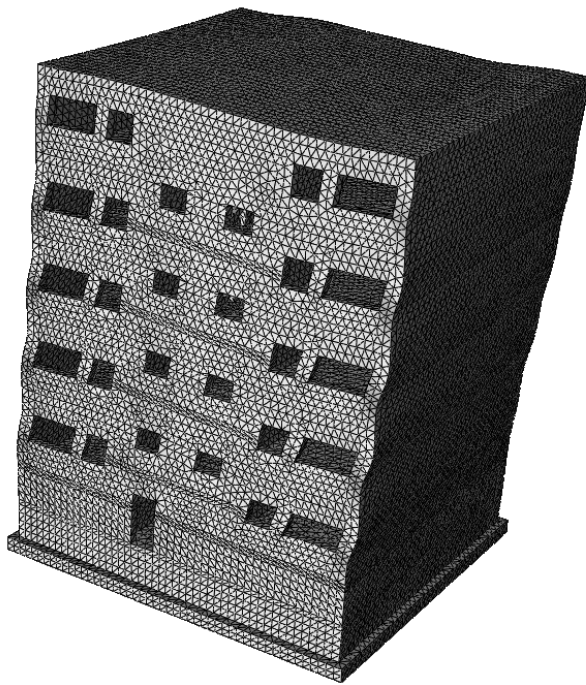


DYSKRETNE MODELE UKŁADÓW CIĄGŁYCH

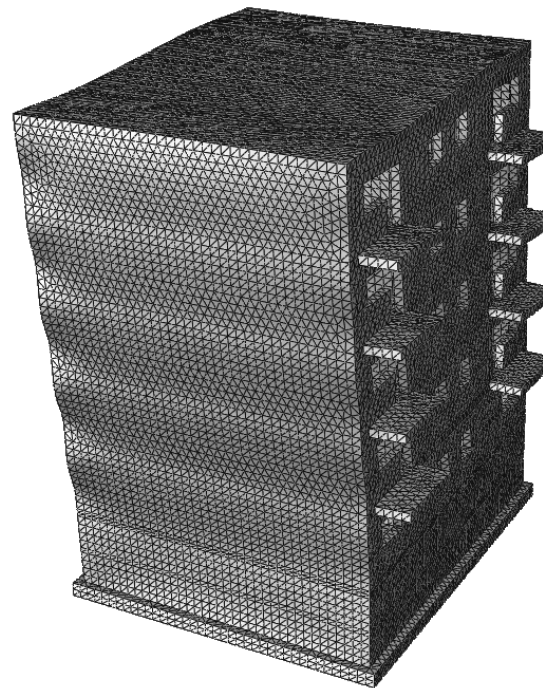
PRZYKŁAD

Pierwsza postać drgań własnych – podstawowa postać giętna na kierunku bardziej podatnym

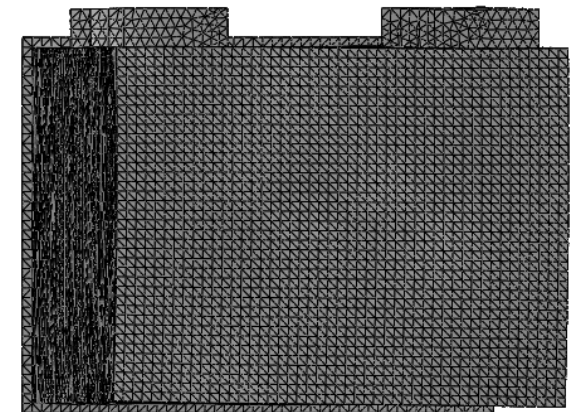
- częstotliwość drgań: 9,4880 Hz



widok z przodu



widok z boku



widok z góry

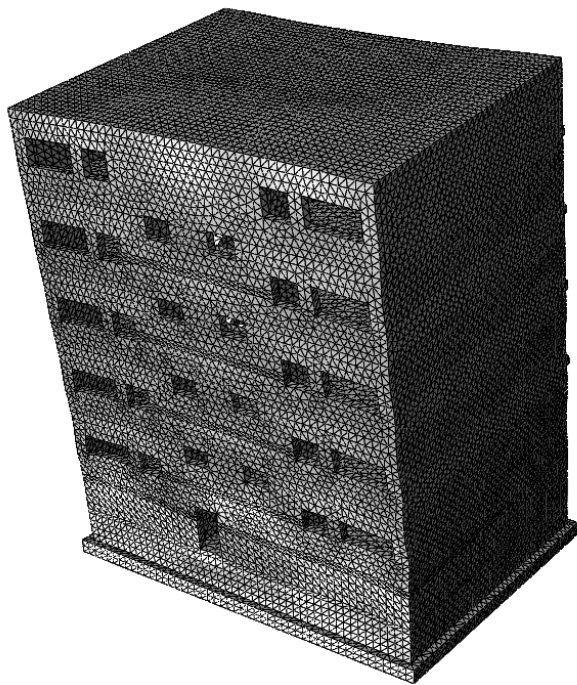
(Przemieszczenia zostały przeskalowane, aby charakter postaci drgań był widoczny wyraźniej)

DYSKRETNE MODELE UKŁADÓW CIĄGŁYCH

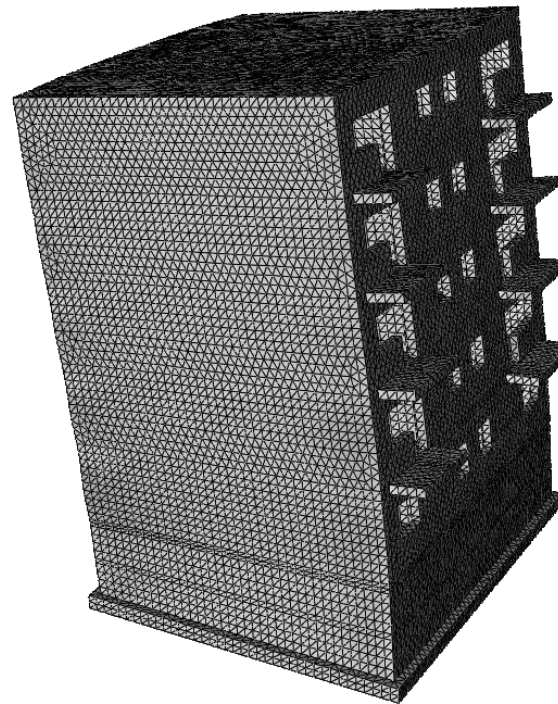
PRZYKŁAD

Druga postać drgań własnych – podstawowa postać giętna na kierunku bardziej sztywnym

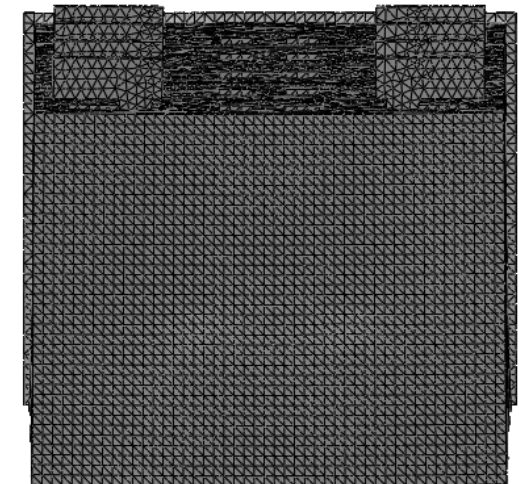
- częstotliwość drgań: 11,334 Hz



widok z przodu



widok z boku



widok z góry

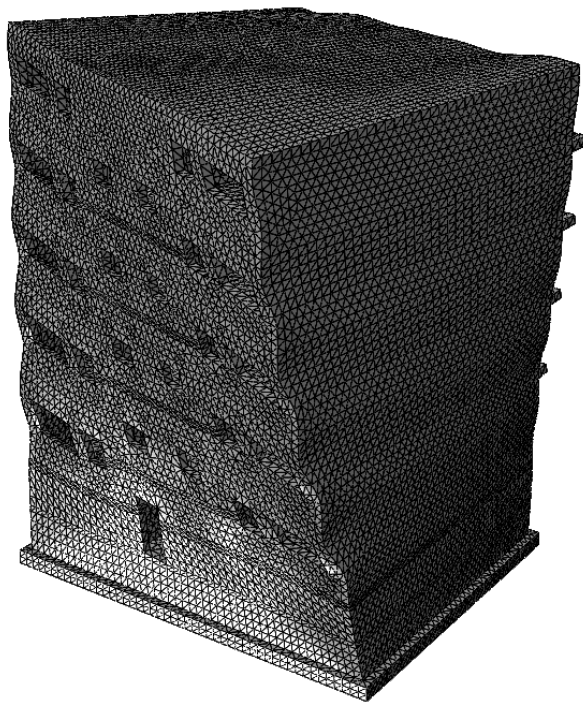
(Przemieszczenia zostały przeskalowane, aby charakter postaci drgań był widoczny wyraźniej)

DYSKRETNE MODELE UKŁADÓW CIĄGŁYCH

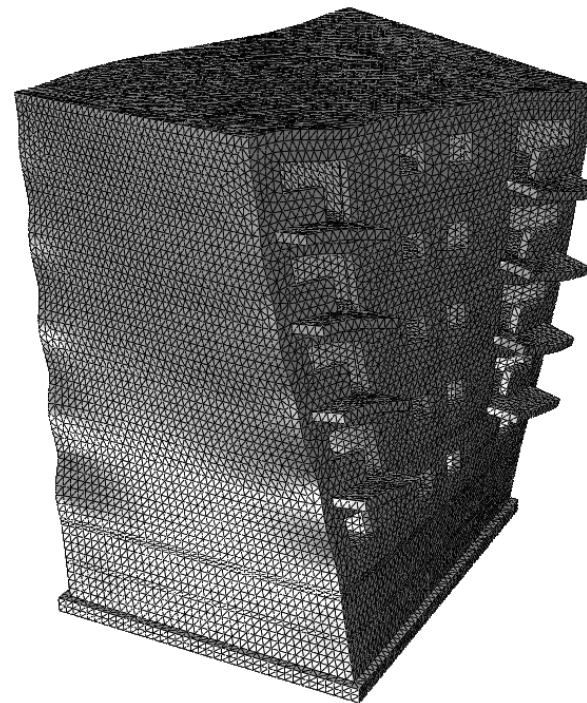
PRZYKŁAD

Trzecia postać drgań własnych – podstawowa postać skrętna

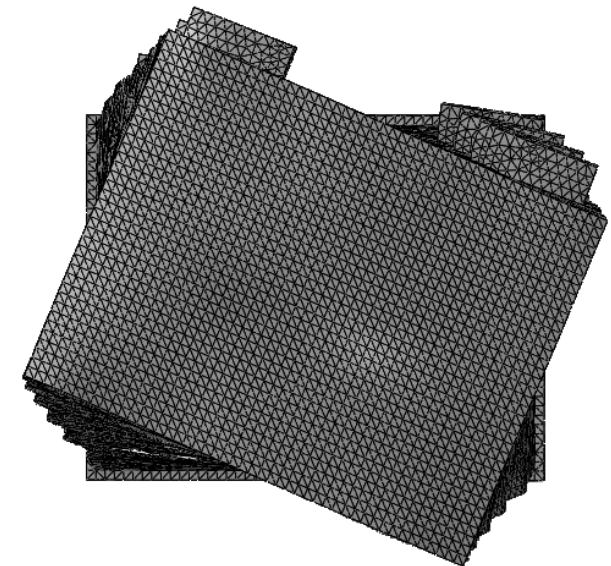
- częstotliwość drgań: 16,997 Hz



widok z przodu



widok z boku



widok z góry

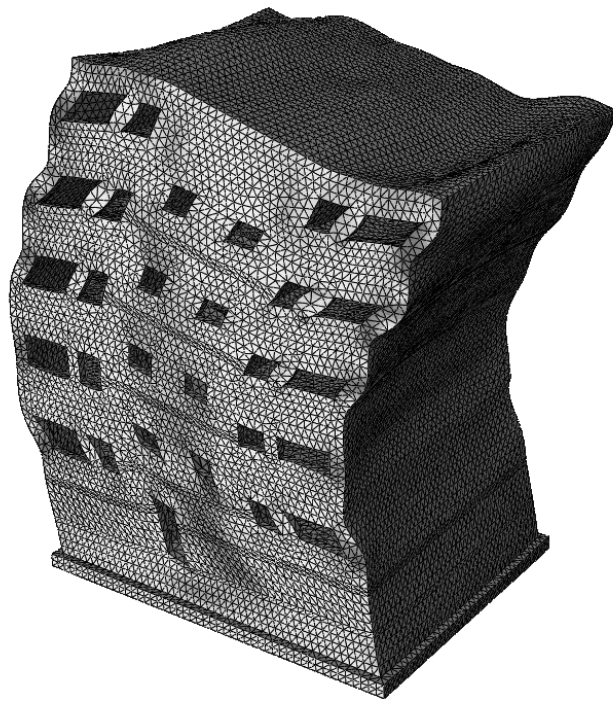
(Przemieszczenia zostały przeskalowane, aby charakter postaci drgań był widoczny wyraźniej)

DYSKRETNE MODELE UKŁADÓW CIĄGŁYCH

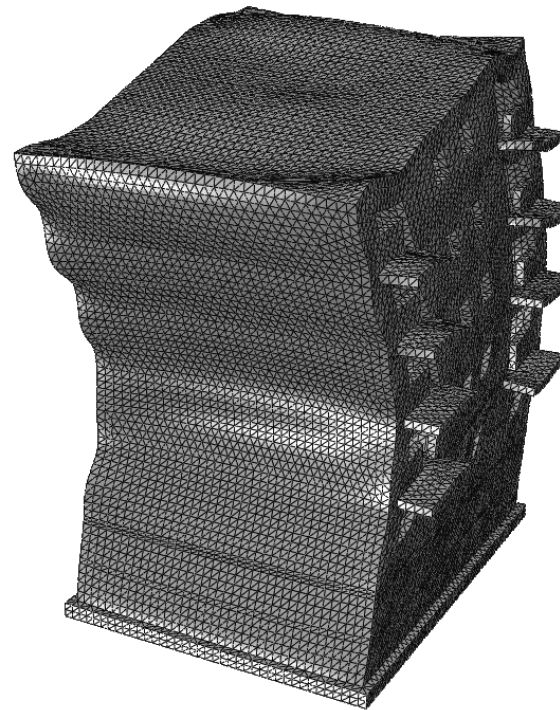
PRZYKŁAD

Czwarta postać drgań własnych – druga postać giętna na kierunku bardziej podatnym

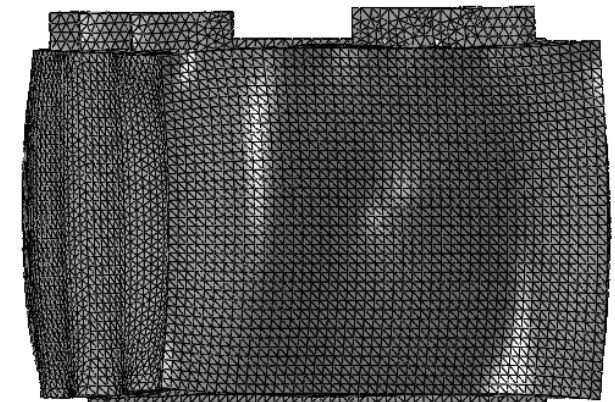
- częstotliwość drgań: 27,699 Hz



widok z przodu



widok z boku



widok z góry

(Przemieszczenia zostały przeskalowane, aby charakter postaci drgań był widoczny wyraźniej)

DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE

UWAGI:

- Wyznaczenie częstości i postaci drgań własnych układu mechanicznego nazywamy **analizą modalną**.
- **Analizę modalną można przeprowadzić tylko dla układów liniowo-sprężystych** (przemieszczenia proporcjonalne do obciążeń).
- Im **wyższa częstość** drgań własnych:
 - tym **większa jest energia odkształcenia** układu
 - tym **większa potrzebna jest energia, aby wzbudzić takie drgania**.
- **drgania układu zdominowane są przez najniższe częstości** i postaci drgań własnych, o ile tylko
 - układ nie jest pod wymuszeniem o częstości rezonansowej z wyższą częstością drgań własnych,
 - układ nie jest obciążony obciążeniem o rozkładzie odpowiadającym wyższej postaci drgań.
- W wielu przypadkach (np. drgań o losowym przebiegu: drgania sejsmiczne, parasejsmiczne, obciążenie wiatrem), **znajomość najniższych częstości i postaci drgań własnych pozwala na wystarczająco dobre oszacowanie odpowiedzi układu mechanicznego**.
- W analizie rzeczywistych konstrukcji stosujemy metody przybliżone oparte na **dyskretyzacji** układu. Dla układu zdyskretyzowanego o dużej LSS **wyznaczamy tylko założoną niewielką liczbę częstości własnych**.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ