MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

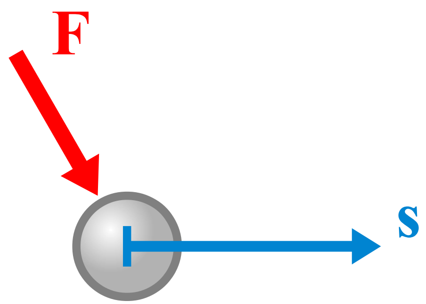
adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

PRACA, MOC, ENERGIA

PRACA

Praca – wielkość fizyczna wyrażona w **dżulach** ($\mathrm{J} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$) wyznaczana jako **iloczyn skalarny** (miara rzutu) **wektora siły** działającej na ciało **oraz wektora przemieszczenia**, jakiego doznało to ciało wskutek działania tej siły.

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z$$



- Składowe siły **nie wykonują pracy na przesunięciach prostopadłych** do siebie
- Jeśli **siła** i **przesunięcie** mają **ten sam zwrot,** to praca jest dodatnia.
- Jeśli **siła** i **przesunięcie** mają **przeciwny zwrot**, to praca jest ujemna.

UWAGI:

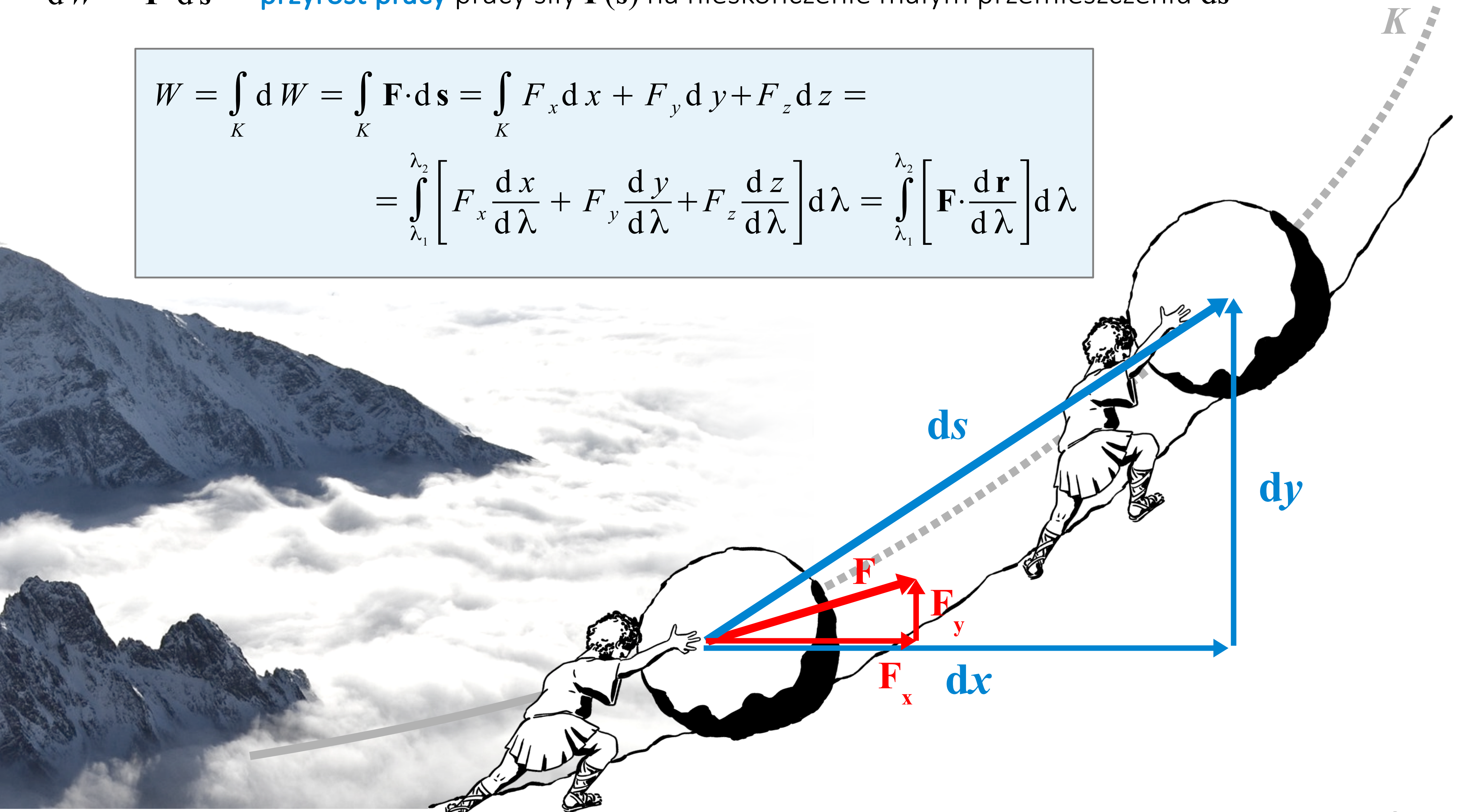
- **wymiar fizyczny pracy** jest z rachunkowego punktu widzenia taki sam jak **wymiar fizyczny momentu siły**, należy je jednak **rozróżniać**.
    - **moment siły** to **iloczyn wektorowy** wektora siły (w N) i wektora ramienia (w m)
    - **praca siły** na przemieszczeniu to **iloczyn skalarny** wektora siły (w N) i wektora przemieszczenia (w m)
    - **praca momentu siły** definiowana jest jako iloczyn momentu siły (w Nm) i odpowiadającej mu drogi kątowej wyrażonej w mierze łukowej (w rad): $\mathrm{Nm}\cdot\mathrm{rad} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{J}$
- W ogólnym przypadku **siła może zmieniać się** z punktu do punktu trajektorii ciała, a **trajektoria może być dowolną ciągłą krzywą przestrzenną**. Praca obliczana jest wtedy jako **całka krzywoliniowa skierowana**.

PRACA

$\mathrm{d}W = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$ - przyrost pracy pracy siły $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ na nieskończenie małym przemieszczeniu $\mathbf{ds}$

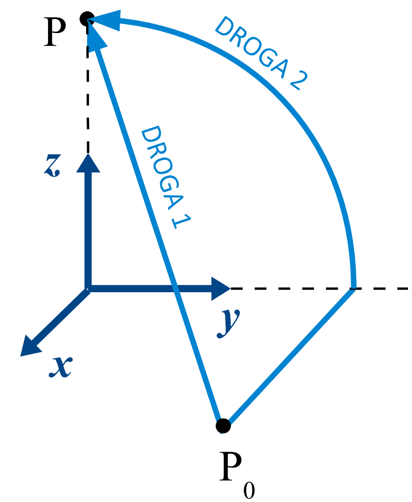
$$W = \int_K \mathrm{d}W = \int_K \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_K F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} + F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right]\mathrm{d}\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\lambda}\right]\mathrm{d}\lambda$$



PRACA

PRZYKŁAD: Obliczyć pracę pola sił $\mathbf{F}=[-y^2\,;-z^2\,;-x^2]$ przy przemieszczeniu z punktu $P_0=(3,3,0)$ do $P=(0,0,3)$. Rozważyć dwie przedstawione drogi.



ROZWIĄZANIE:

DROGA 1)

$$\mathbf{r}=\begin{cases} x(\lambda)=3-3\lambda \\ y(\lambda)=3-3\lambda \qquad \lambda\in(0,1) \\ z(\lambda)=3\lambda \end{cases}$$

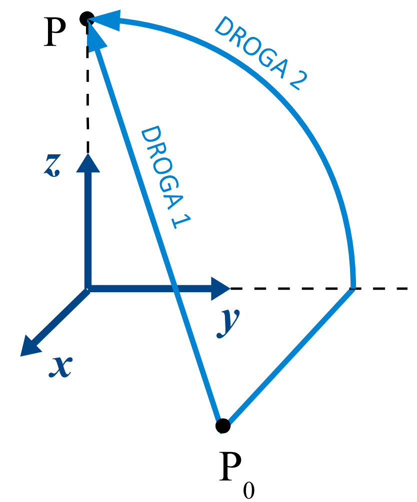
$$W_1=\int \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right]\mathrm{d}\lambda=$$

$$=\int_0^1\left[(-y^2)\cdot(-3)+(-z^2)\cdot(-3)+(-x^2)\cdot 3\right]\mathrm{d}\lambda=\int_0^1\left[-(3-3\lambda)^2\cdot(-3)\ -(3\lambda)^2\cdot(-3)\ -(3-3\lambda)^2\cdot 3\right]\mathrm{d}\lambda=$$

$$=\int_0^1(27\lambda^2)\,\mathrm{d}\lambda=9$$

PRACA

$$\mathbf{F} = [-y^2\ ;\ -z^2\ ;\ -x^2]$$



PRZYKŁAD:

DROGA 2 – a) odcinek prosty:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} x(\lambda) = 3-3\lambda \\ y(\lambda) = 3 \\ z(\lambda) = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in (0,1)$$

$$W_{2a} = \int \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} + F_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} \right] \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_0^1 \left[(-y^2)\cdot(-3) + (-z^2)\cdot 0 + (-x^2)\cdot 0 \right] \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \left[-(3)^2\cdot(-3) \right] \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 (27)\,\mathrm{d}\lambda = 27$$

DROGA 2 – b) łuk kołowy:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} x(\lambda) = 0 \\ y(\lambda) = 3\cos\phi \\ z(\lambda) = 3\sin\phi \end{cases} \qquad \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$W_{2b} = \int \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} + F_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} \right] \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[(-y^2)\cdot 0 + (-z^2)\cdot(-3\sin\phi) + (-x^2)\cdot(3\cos\phi) \right] \mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/2} \left[-(3\sin\phi)^2\cdot(-3\sin\phi) \right] \mathrm{d}\phi = 18$$

$$W_2 = W_{2a} + W_{2b} = 45$$

MOC

Moc definiowana jest jako **pochodna pracy względem czasu**.

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_K \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$$

Jeśli przyjmiemy czas za parametr trajektorii, wtedy:

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_K \left[\mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_K [\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}]\,\mathrm{d}t = \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}$$

Wymiarem fizycznym mocy jest wat: $[P] = \mathrm{W} = \mathrm{J/s}$

Chwilową wartość mocy **siły na przesunięciu** obliczamy jako iloczyn siły (w N) i prędkości (w $\mathrm{m/s}$).

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}$$

Chwilową wartość mocy **momentu siły na kącie obrotu** obliczamy jako iloczyn momentu siły (w Nm) i prędkości obrotowej (w $\mathrm{rad/s}$)

$$P = \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega} = M_x\omega_x + M_y\omega_y + M_z\omega_z$$

ENERGIA

Zastosujmy II zasadę dynamiki Newtona i w wyrażeniu na pracę **siłę** zastąpmy **pochodną pędu**:

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\left[\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right]\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left[\dot{\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right]\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\right]\mathrm{d}t=m\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}\right]\mathrm{d}t$$

Powyższa całka krzywoliniowa skierowana jest sumą całek pojedynczych względem czasu. W całkach tych możemy dokonać **zamiany zmiennych całkowania**.

$$W=m\left[\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}v_x\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}v_y\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}v_z\right)\mathrm{d}t\right]=\left|\mathrm{d}v_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\qquad \mathrm{d}v_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\qquad \mathrm{d}v_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right|$$

Pierwotnie całkowanie odbywało się względem czasu. Po zamianie zmiennych musimy określić **wartości nowych zmiennych odpowiadających granicom całkowania**, tj. **prędkość początkową i końcową:**

$$W=m\left[\int_{v_{x,1}}^{v_{x,2}}v_x\mathrm{d}v_x+\int_{v_{y,1}}^{v_{y,2}}v_y\mathrm{d}v_y+\int_{v_{z,1}}^{v_{z,2}}v_z\mathrm{d}v_z\right]=m\left[\left(\frac{v_{x,2}^{\;2}}{2}+\frac{v_{y,2}^{\;2}}{2}+\frac{v_{z,2}^{\;2}}{2}\right)-\left(\frac{v_{x,1}^2}{2}+\frac{v_{y,1}^2}{2}+\frac{v_{z,1}^2}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{m\left(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2\right)}{2}-\frac{m\left(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1\right)}{2}$$

ENERGIA

Energia kinetyczna (z gr. ἐνέργεια = „czynność, działanie”; κινητικός = „związany z ruchem”) – **praca, jaka musi zostać wykonana, aby ciało o masie** m, **które pierwotnie znajdowało się w spoczynku** $(\mathbf{v}_1 = \mathbf{0})$, **osiągnęło prędkość daną wektorem** $\mathbf{v}$ $(\mathbf{v}_2 = \mathbf{v})$.

$$E_k = \frac{m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{2} = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad E_k = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$$

UWAGI:

- **Pęd** jest **wektorową miarą** „ilości ruchu”. **Energia** jest podobną **skalarną miarą „ilości ruchu”**.
- Wyprowadzony wzór na energię kinetyczną obowiązuje jedynie przy spełnieniu **II zasady dynamiki Newtona**.
- Jeśli po osiągnięciu ustalonej prędkości na ciało **nie działa żadna siła lub działające siły się równoważą,** to pęd ciała się nie zmienia, na ciele nie wykonywana jest żadna praca, **energia kinetyczna zachowuje swoją wartość**.
- Energia kinetyczna jest zarazem miarą pracy, jaką należy wykonać, aby zatrzymać ciało o masie m, poruszające się z prędkością $\mathbf{v}$**.**

ENERGIA

Energia kinetyczna jest wielkością, którą możemy przypisać ciału, które w danej chwili porusza się z prędkością $\mathbf{v}$.

Ciało, które **pierwotnie było w spoczynku** i zostało przyspieszone do prędkości $\mathbf{v_1}$ ma **energię kinetyczną**:

$$E_{k,1} = \frac{m(\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1})}{2}$$

Ciało, które **pierwotnie było w spoczynku** i zostało przyspieszone do prędkości $\mathbf{v_2}$ ma **energię kinetyczną**:

$$E_{k,2} = \frac{m(\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_2})}{2}$$

Praca, jaka została wykonana, aby zmienić prędkość ciała z $\mathbf{v_1}$ na $\mathbf{v_2}$:

$$W = \frac{m(\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_2})}{2} - \frac{m(\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1})}{2}$$

Możemy napisać:

$$\Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} = W$$

Zmiana energii kinetycznej jest równa pracy wykonanej przez siły przy przemieszczeniu ciała.

ENERGIA

Energia kinetyczna **bryły sztywnej** jest sumą (całką) gęstości objętościowej energii kinetycznej wszystkich punktów należących do tego ciała:

$$E_k = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V\to 0}} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\frac{m_i}{\Delta V}(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i)\Delta V = \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})\right]\mathrm{d}V$$

Korzystając z formalizmu opisu ruchu względnego zastosowanego do kinematyki bryły sztywnej, możemy napisać:

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_X, \omega_Y, \omega_Z] = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

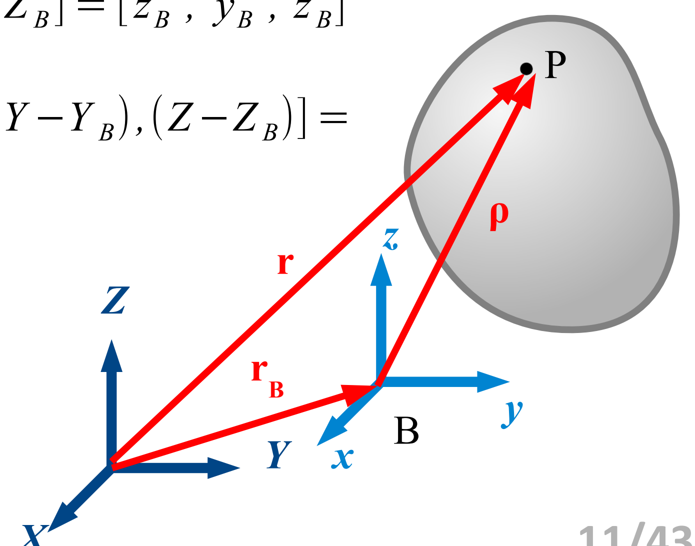
$$\dot{\mathbf{r}}_B = [\dot{X}_B\ ,\ \dot{Y}_B\ ,\ \dot{Z}_B] = [\dot{z}_B\ ,\ \dot{y}_B\ ,\ \dot{z}_B]$$

$$\boldsymbol{\rho} = [(X-X_B),(Y-Y_B),(Z-Z_B)] = $$
$$= [x, y, z]$$

Wtedy:

$$E_k = \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})\right]\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho((\dot{\mathbf{r}}_B+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\cdot(\dot{\mathbf{r}}_B+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}))\right]\mathrm{d}V$$



ENERGIA

$$E_k = \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left(\left(\dot{\mathbf{r}}_B+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right)\cdot\left(\dot{\mathbf{r}}_B+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right)\right)\right]\mathrm{d}\,V =$$

$$= \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left(\dot{\mathbf{r}}_B\cdot\dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\mathbf{r}}_B\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right) + \left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}_B + \left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right)\right)\right]\mathrm{d}\,V =$$

$$= \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left(\dot{\mathbf{r}}_B\cdot\dot{\mathbf{r}}_B\right)\right]\mathrm{d}\,V + 2\iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left(\dot{\mathbf{r}}_B\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right)\right)\right]\mathrm{d}\,V + \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left(\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right)\right)\right]\mathrm{d}\,V$$

CAŁKA NR 1:

Prędkość bieguna B jest ustalona dla każdego punktu, więc można ją wyłączyć przed pierwszą całkę:

$$\iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left(\dot{\mathbf{r}}_B\cdot\dot{\mathbf{r}}_B\right)\right]\mathrm{d}\,V = \frac{\left|\dot{\mathbf{r}}_B\right|^2}{2}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}\,V = \frac{m\left|\dot{\mathbf{r}}_B\right|^2}{2} = E_{k,\mathrm{trans}}$$

Jest to energia kinetyczna ruchu postępowego bryły sztywnej.

ENERGIA

CAŁKA NR 2:
Jeśli **biegun B jest** nieruchomy, wtedy całka powyższa jest **równa 0**. W przeciwnym wypadku:

$$\iiint_V \left[\rho\left(\dot{\mathbf{r}}_B\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\right)\right]\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint_V \left[\rho\,\dot{X}_B(\omega_y z-\omega_z y)\right]\mathrm{d}V \;+\; \iiint_V \left[\rho\,\dot{Y}_B(\omega_z x-\omega_x z)\right]\mathrm{d}V \;+\; \iiint_V \left[\rho\,\dot{Z}_B(\omega_x y-\omega_y x)\right]\mathrm{d}V$$

Prędkość bieguna B oraz składowe prędkości kątowej są takie same w każdym punkcie bryły:

$$\dot{X}_B\left(\omega_y\iiint_V \rho\, z\,\mathrm{d}V-\omega_z\iiint_V \rho\, y\,\mathrm{d}V\right)+\dot{X}_B\left(\omega_z\iiint_V \rho\, x\,\mathrm{d}V-\omega_x\iiint_V \rho\, z\,\mathrm{d}V\right)+\dot{X}_B\left(\omega_x\iiint_V \rho\, y\,\mathrm{d}V-\omega_y\iiint_V \rho\, x\,\mathrm{d}V\right)$$

Jeśli **biegun B jest** środkiem ciężkości bryły, wtedy **:**

$$\dot{X}_B\Big(\omega_y\underbrace{\iiint_V \rho\, z\,\mathrm{d}V}_{S_{xy}=0}-\omega_z\underbrace{\iiint_V \rho\, y\,\mathrm{d}V}_{S_{zx}=0}\Big)+\dot{Y}_B\Big(\omega_z\underbrace{\iiint_V \rho\, x\,\mathrm{d}V}_{S_{yz}=0}-\omega_x\underbrace{\iiint_V \rho\, z\,\mathrm{d}V}_{S_{xy}=0}\Big)+\dot{Z}_B\Big(\omega_x\underbrace{\iiint_V \rho\, y\,\mathrm{d}V}_{S_{zx}=0}-\omega_y\underbrace{\iiint_V \rho\, x\,\mathrm{d}V}_{S_{yz}=0}\Big)=0$$

ENERGIA

CAŁKA NR 3:

$$\iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\big((\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\big)\right]\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\rho}{2}\left[(\omega_y z-\omega_z y)^2 + (\omega_z x-\omega_x z)^2 + (\omega_x y-\omega_y x)^2\right]\mathrm{d}V$$

Całkę z sumy funkcji dzielimy na sumę całek. Składowe prędkości kątowej mają taką samą wartość w każdym punkcie bryły, zatem można wyłączyć je przed znak całki:

$$\begin{aligned}\iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\big((\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\big)\right]\mathrm{d}V = {} & \frac{\omega_y^2}{2}\iiint_V \rho\, z^2\,\mathrm{d}V - \omega_y\omega_z\iiint_V \rho\, yz\,\mathrm{d}V + \frac{\omega_z^2}{2}\iiint_V \rho\, y^2\,\mathrm{d}V + \\ & + \frac{\omega_z^2}{2}\iiint_V \rho\, x^2\,\mathrm{d}V - \omega_z\omega_x\iiint_V \rho\, zx\,\mathrm{d}V + \frac{\omega_x^2}{2}\iiint_V \rho\, z^2\,\mathrm{d}V + \\ & + \frac{\omega_x^2}{2}\iiint_V \rho\, y^2\,\mathrm{d}V - \omega_x\omega_y\iiint_V \rho\, xy\,\mathrm{d}V + \frac{\omega_y^2}{2}\iiint_V \rho\, x^2\,\mathrm{d}V\end{aligned}$$

ENERGIA

CAŁKA NR 3:

Po pogrupowaniu wyrazów:

$$\iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left((\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\right)\right]\mathrm{d}V = \frac{\omega_x^2}{2}\underbrace{\iiint_V \rho(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V}_{I_x} + \frac{\omega_y^2}{2}\underbrace{\iiint_V \rho(z^2+x^2)\,\mathrm{d}V}_{I_y} + \frac{\omega_z^2}{2}\underbrace{\iiint_V \rho(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V}_{I_z} +$$

$$- 2\cdot\frac{\omega_y\omega_z}{2}\underbrace{\iiint_V \rho\, yz\,\mathrm{d}V}_{I_{yz}} - 2\cdot\frac{\omega_z\omega_x}{2}\underbrace{\iiint_V \rho\, zx\,\mathrm{d}V}_{I_{zx}} - 2\cdot\frac{\omega_x\omega_y}{2}\underbrace{\iiint_V \rho\, xy\,\mathrm{d}V}_{I_{xy}}$$

Ostatecznie:

$$\iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left((\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\right)\right]\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\left[\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z - 2(\omega_y\omega_z I_{yz} + \omega_z\omega_y I_{zx} + \omega_x\omega_y I_{xy})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx}\\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz}\\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})}{2} = E_{k,\mathrm{rot}}$$

Jest to energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły sztywnej.

ENERGIA

TWIERDZENIE KÖNIGA

Całkowita energia kinetyczna bryły sztywnej jest sumą energii kinetycznej ruchu postępowego bieguna B oraz energii kinetycznej ruchu obrotowego bryły wokół bieguna B, przy czym biegun B jest albo nieruchomy albo jest on środkiem ciężkości bryły.

$$E_k = E_{k,\,\mathrm{trans}} + E_{k,\,\mathrm{rot}} = \frac{m\left(\dot{\mathbf{r}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B\right)}{2} + \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}\right)}{2}$$

Całkowita energia kinetyczna:

$$E_k = \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right)\right] \mathrm{d}V$$

Energia kinetyczna ruchu postępowego:

$$E_{k,\,\mathrm{trans}} = \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left(\dot{\mathbf{r}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B\right)\right] \mathrm{d}V = \frac{m\left(\dot{\mathbf{r}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B\right)}{2}$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego:

$$E_{k,\,\mathrm{rot}} = \iiint_V \left[\frac{1}{2}\rho\left((\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})\right)\right] \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}\right)}{2}$$

ENERGIA

UWAGI DOTYCZĄCE TWEIRDZENIA KÖNIGA:

- Rozkład na energię kinetyczną ruchu postępowego i ruchu obrotowego **zachodzi tylko w przypadku,** gdy rozważa się **obrót wokół nieruchomego bieguna B**, lub **ruch postępowy środka ciężkości i obrót wokół środka ciężkości**.

- Wiadomo, że dla nieruchomego bieguna B lub dla B będącego środkiem ciężkości bryły, nasunięcie tensora momentu bezwładności na wektor prędkości kątowej daje nam wektor momentu bezwładności. Można zatem napisać:

$$E_{k,\,\mathrm{trans}} = \frac{m\left(\dot{\mathbf{r}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B\right)}{2} = \frac{\left(\dot{\mathbf{r}}_B \cdot \mathbf{p}_B\right)}{2} \qquad E_{k,\,\mathrm{rot}} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}\right)}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_B}{2}$$

- W przypadku **ruchu płaskiego** twierdzenie przyjmuje postać:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{gdzie} \qquad v^2 = \left[\left(\dot{x}_B\right)^2 + \left(\dot{y}_B\right)^2\right]$$

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY PÓL WEKTOROWYCH

nebel / *newel* (hebr. נֶבֶל)
nabla (gr. νάβλα) =
= „harfa fenicka”

operator nabla:

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \,;\, \frac{\partial}{\partial y} \,;\, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

gradient pola skalarnego $\phi(x\,,y\,,z)$:
(z łac. *gradi* = „iść, kroczyć”)

$$\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \,;\, \frac{\partial\phi}{\partial y} \,;\, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right]$$

dywergencja pola wektorowego $\mathbf{v}(x\,,y\,,z)$:
(z łac. *diverto* = „odchodzić”)

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

rotacja pola wektorowego $\mathbf{v}(x\,,y\,,z)$:
(z łac. *rotare* = „obracać”)

$$\nabla\times\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) ; \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) ; \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right]$$

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

Polem sił potencjalnych nazywamy **wektorowe pole sił**:

$$\mathbf{F} = \left[F_x \, ; \, F_y \, ; \, F_z \right]$$

takie, że taka **istnieje funkcja skalarna** $\phi(x,y,z)$, nazywana potencjałem, że:

$$\mathbf{F} = \nabla \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} F_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

- Pole takie nazywa się również polem sił zachowawczych (konserwatywnych). Określenie „**zachowawcze**” lub „**konserwatywne**” (z łac. *conservare* = „zachować”) dotyczy faktu, że w polu sił zachowawczych całkowita **energia mechaniczna układu nie zmienia się** (jest zachowana), co udowodnimy później (zasada zachowania energii).

- Określenie „**potencjalne**” dotyczy faktu, że z polem takim związana jest tzw. energia potencjalna, którą zdefiniujemy za chwilę.

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

TWIERDZENIE

Pole sił jest polem potencjalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jego rotacja jest zerowa.

$$\left[\underset{\phi}{\exists}:\ \mathbf{F} = \nabla\phi\right] \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

DOWÓD $\Rightarrow$:

założenie: $\mathbf{F} = \nabla\phi \quad \Rightarrow \quad [F_x ; F_y ; F_z] = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} ; \frac{\partial\phi}{\partial y} ; \frac{\partial\phi}{\partial z}\right]$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) ; \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) ; \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\right] =$$

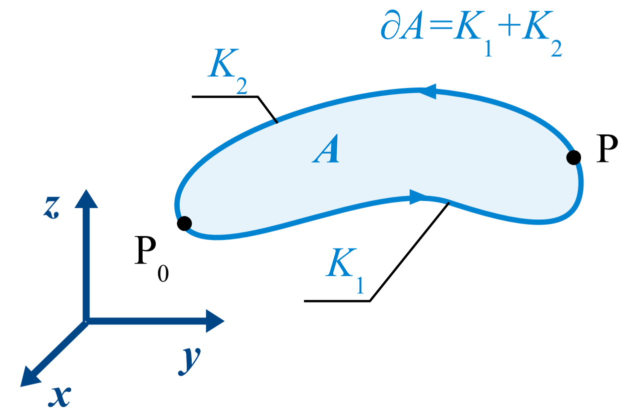
$$= \left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right) ; \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right) ; \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\right] = [0 ; 0 ; 0]$$

■

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

DOWÓD $\Leftarrow$:

założenie: $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$



Z twierdzenia Stokesa:
$$\oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{A}$$
$$\oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = 0$$

To oznacza, że **całka krzywoliniowa po lewej stronie** musi być zawsze **równa 0**, **dla dowolnej krzywej zamkniętej** ∂A (dla brzegu dowolnego płata A). Możemy wybrać w przestrzeni dwa punkty i połączyć je dwoma krzywymi, które w sumie dają krzywą zamkniętą:

$$\mathbf{0} = \oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = \int_{K_1(P_0)}^{K_1(P)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} + \int_{K_2(P)}^{K_2(P_0)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad \int_{K_1(P_0)}^{K_1(P)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = -\int_{K_2(P)}^{K_2(P_0)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s}$$
$$\int_{K_1(P_0)}^{K_1(P)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = \int_{K_2(P_0)}^{K_2(P)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s}$$

Krzywe K_1 i K_2 mogą być wybrane dowolnie, zatem **powyższa całka krzywoliniowa** (praca siły wzdłuż krzywej !!!) **jest niezależna od drogi całkowania**.

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

DOWÓD $\Leftarrow$ c.d.:

$$\int_{K(P_0)}^{K(P)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s}$$

- praca pola sił potencjalnych jest niezależna od drogi, a jedynie od punktu początkowego P_0 i punktu końcowego P.

W szczególności, jeśli **punkt początkowy jest tożsamy z punktem końcowym**

$$\oint_K \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = \mathbf{0}$$

- praca pola sił potencjalnych po drodze zamkniętej jest zerowa

Wiedząc to, spróbujmy wykazać, że dla pola $\mathbf{F}$ istnieje potencjał. Przyjmijmy: $P_0 = (x_0\,;\ y_0\,;\ z_0),\ P = (x\,;\ y\,;\ z)$

Zdefiniujmy teraz **funkcję** $\phi(x,y,z)$ w następujący sposób:

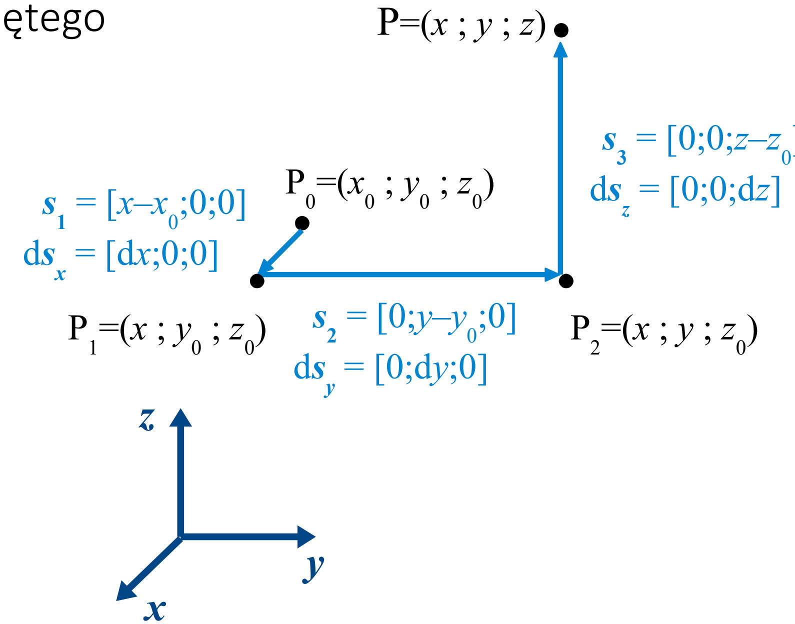
$$\phi(x,y,z) = \phi_0 + \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} \quad \text{gdzie} \quad \phi_0 = \phi(x_0,y_0,z_0)$$

Wielkość ϕ_0 może być wybrana dowolnie. Droga całkowania nie musi być w żaden sposób określona, bo z zerowania się rotacji funkcji podcałkowej wynika, że droga całkowania nie wpływa na wartość funkcji. Wartość funkcji $\phi(x,y,z)$ **zależy tylko od punktu początkowego i końcowego** całki.

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

DOWÓD $\Leftarrow$ c.d.:

Drogę całkowania możemy wybrać dowolnie. Możemy podzielić ją na trzy **segmenty, z których każdy jest równoległy do jednej z osi** przyjętego układu współrzędnych:



$$\int_{K(P_0)}^{K(P)} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y_0;\,z_0)} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}_x + \int_{(x;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z_0)} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}_y + \int_{(x;\,y;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}_z =$$

$$= \underbrace{\int_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y_0;\,z_0)} F_x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{W}_{P_0\to P_1}} + \underbrace{\int_{(x;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z_0)} F_y\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{W}_{P_1\to P_2}} + \underbrace{\int_{(x;\,y;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} F_z\,\mathrm{d}z}_{\mathrm{W}_{P_2\to P}}$$

Praca jest równa różnicy potencjałów, zatem:

$$W_{P_0\to P_1} = \phi(x, y_0, z_0) - \phi(x_0, y_0, z_0) = \int_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y_0;\,z_0)} F_x\,\mathrm{d}x$$

$$W_{P_1\to P_2} = \phi(x, y, z_0) - \phi(x, y_0, z_0) = \int_{(x;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z_0)} F_y\,\mathrm{d}y$$

$$W_{P_2\to P} = \phi(x, y, z) - \phi(x, y, z_0) = \int_{(x;\,y;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} F_z\,\mathrm{d}z$$

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

DOWÓD $\Leftarrow$ c.d.:

Związki te mają zachodzić dla dowolnego (x,y,z). Zgodnie z **fundamentalnym twierdzeniem rachunku całkowego**

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}\,\Phi(x)}{\mathrm{d}\,x} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = \Phi(x)-\Phi(x_0)$$

Wynika

$$\phi(x,y_0,z_0)-\phi(x_0,y_0,z_0)=\int_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y_0;\,z_0)} F_x\,\mathrm{d}\,x \qquad \Rightarrow \qquad F_x=\frac{\partial\,\phi}{\partial\,x}$$

$$\phi(x,y,z_0)-\phi(x,y_0,z_0)=\int_{(x;\,y_0;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z_0)} F_y\,\mathrm{d}\,y \qquad \Rightarrow \qquad F_y=\frac{\partial\,\phi}{\partial\,y}$$

$$\phi(x,y,z)-\phi(x,y,z_0)=\int_{(x;\,y;\,z_0)}^{(x;\,y;\,z)} F_z\,\mathrm{d}\,z \qquad \Rightarrow \qquad F_z=\frac{\partial\,\phi}{\partial\,z}$$

Zatem istnieje potencjał ϕ, taki że $\mathbf{F}=\nabla\,\phi$.

CBDU ■

POTENCJAŁ POLA SIŁ

Potencjał **pola wektorowego $\mathbf{F}(x,y,z)$** – funkcja skalarna $\phi(x,y,z)$, taka że

$$\phi(x,y,z) = \phi_0 + \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = \nabla\phi$$

UWAGI:

- Dla danego pola $\mathbf{F}$ istnieje **nieskończenie wiele potencjałów** – różnią się od siebie o stałą wartość.
- **Różnica między wartościami potencjału w dwóch punktach** jest równa **pracy, jaką wykonują siły pola przy przemieszczeniu ciała z jednego punktu do drugiego**

$$\phi(P_2) - \phi(P_1) = \left[\phi_0 + \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right] - \left[\phi_0 + \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right] = \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{P_1}^{P_0} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

- **Powierzchnie**, do których należą punkty, w których **wartość potencjału jest taka sama** nazywamy powierzchniami ekwipotencjalnymi (powierzchniami równego potencjału). W każdym punkcie **siła jest prostopadła do tej powierzchni ekwipotencjalnej**.
- **Punkty stacjonarne potencjału** (dla których **gradient potencjału jest zerowy**) to punkty, w których **pole sił jest zerowe**.

$$\nabla\phi = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

POTENCJAŁ POLA SIŁ

Przykładowe pola sił potencjalnych i odpowiadające im potencjały:

- Pole sił centralnych

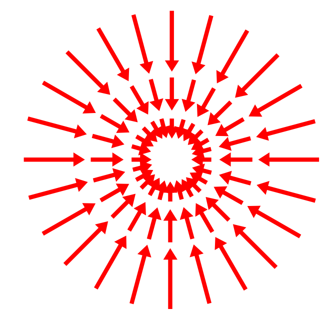
$$\phi(x,y,z) = f(r) \quad \text{gdzie} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\phi = \frac{\partial f}{\partial r}\left[\frac{x}{r}\;;\;\frac{y}{r}\;;\frac{z}{r}\right]$$

np. siła grawitacji
siła elektrostatyczna

$$\phi(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

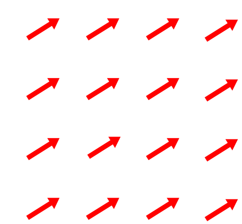
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\phi = k\left[\frac{x}{r^3}\;;\;\frac{y}{r^3}\;;\frac{z}{r^3}\right]$$



- Jednorodne pole sił

$$\phi(x,y,z) = ax + by + cz$$

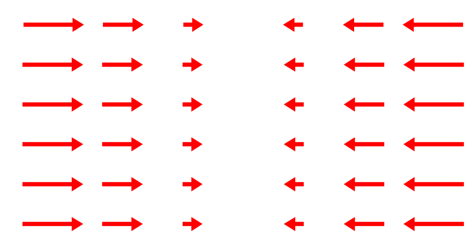
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\phi = [a\;;\;b\;;\;c]$$



- Pole siły sprężystości

$$\phi(x,y,z) = -\frac{kx^2}{2}$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\phi = [-kx\;;\;0\;;\;0]$$



POTENCJAŁ POLA SIŁ

WYZNACZANIE POTENCJAŁU DLA ZADANEGO POLA SIŁ
METODA 1 – Wyznaczenie pracy sił pola

Pracę obliczamy wzdłuż drogi, która składa się z 3 segmentów, z których każdy jest równoległy do jednej z osi przyjętego układu współrzędnych:

$$\phi(x,y,z) = \phi_0 + \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{s} =$$

$$= \phi_0 + \int_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y_0;z_0)} F_x\,\mathrm{d}\,x + \int_{(x;y_0;z_0)}^{(x;y;z_0)} F_y\,\mathrm{d}\,y + \int_{(x;y;z_0)}^{(x;y;z)} F_z\,\mathrm{d}\,z$$

POTENCJAŁ POLA SIŁ

WYZNACZANIE POTENCJAŁU DLA ZADANEGO POLA SIŁ
METODA 1 – Wyznaczenie pracy sił pola

PRZYKŁAD:

Wyznaczyć potencjał pola sił $\mathbf{F} = [2x-2(y+z)\ ;\ 2y-2(z+x)\ ;\ 2z-2(x+y)]$

Przyjmując, że w punkcie $P_0=(0,0,0)$ wartość potencjału jest równa $\phi_0 = 0$

$$\phi(x,y,z) = \phi_0 + \int_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y_0;z_0)} F_x \,\mathrm{d}x + \int_{(x;y_0;z_0)}^{(x;y;z_0)} F_y \,\mathrm{d}y + \int_{(x;y;z_0)}^{(x;y;z)} F_z \,\mathrm{d}z =$$

$$= 0 + \int_{(0;0;0)}^{(x;0;0)} [2x-2(y+z)]\mathrm{d}x + \int_{(x;0;0)}^{(x;y;0)} [2y-2(z+x)]\mathrm{d}y + \int_{(x;y;0)}^{(x;y;z)} [2z-2(x+y)]\mathrm{d}z =$$

$$= 0 + \left[x^2 - 2(y+z)x\right]_{(0;0;0)}^{(x;0;0)} + \left[y^2 - 2(y+z)y\right]_{(x;0;0)}^{(x;y;0)} + \left[z^2 - 2(y+z)z\right]_{(x;y;0)}^{(x;y;z)} =$$

$$= \boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy)}$$

POTENCJAŁ POLA SIŁ

WYZNACZANIE POTENCJAŁU DLA ZADANEGO POLA SIŁ
METODA 2 – Całkowanie składowych

Traktujemy związek między potencjałem a polem sił jako układ równań różniczkowych. Całkując równania względem jednej ze zmiennych uwzględniamy fakt, że stała całkowania zależy od pozostałych zmiennych.

POTENCJAŁ POLA SIŁ

WYZNACZANIE POTENCJAŁU DLA ZADANEGO POLA SIŁ
METODA 2 – Całkowanie składowych

PRZYKŁAD: $\mathbf{F} = [2x-2(y+z)\,;\,2y-2(z+x)\,;\,2z-2(x+y)]$ $\qquad \phi(0,0,0)=0$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x - 2(y+z) \quad \Rightarrow \quad \phi = x^2 - 2(y+z)x + C_1(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - 2(y+z)x + C_1(y,z)\right] = -2x + \frac{\partial C_1}{\partial y} = 2y-2(z+x)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = 2y-2z \quad \Rightarrow \quad C_1(y,z) = y^2-2yz+C_2(z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[x^2 - 2(y+z)x + \left(y^2-2yz+C_2(z)\right)\right] = -2x-2y + \frac{\partial C_2}{\partial z} = 2z-2(x+y)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial z} = 2z \quad \Rightarrow \quad C_2(y,z) = z^2-C_3$$

$$\boxed{\phi = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy) + C_3 \qquad \phi(0,0,0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_3=0}$$

ENERGIA POTENCJALNA

Na każde ciało w polu sił zachowawczych działają **siły**, które przy przesunięciu tego ciała **wykonują pracę**:

- **określoną jednoznacznie przez położenie początkowe i położenie końcowe** ciała
- **niezależną od drogi**
- wyznaczoną liczbowo przez **różnicę wartości potencjału** w punkcie końcowym i początkowym

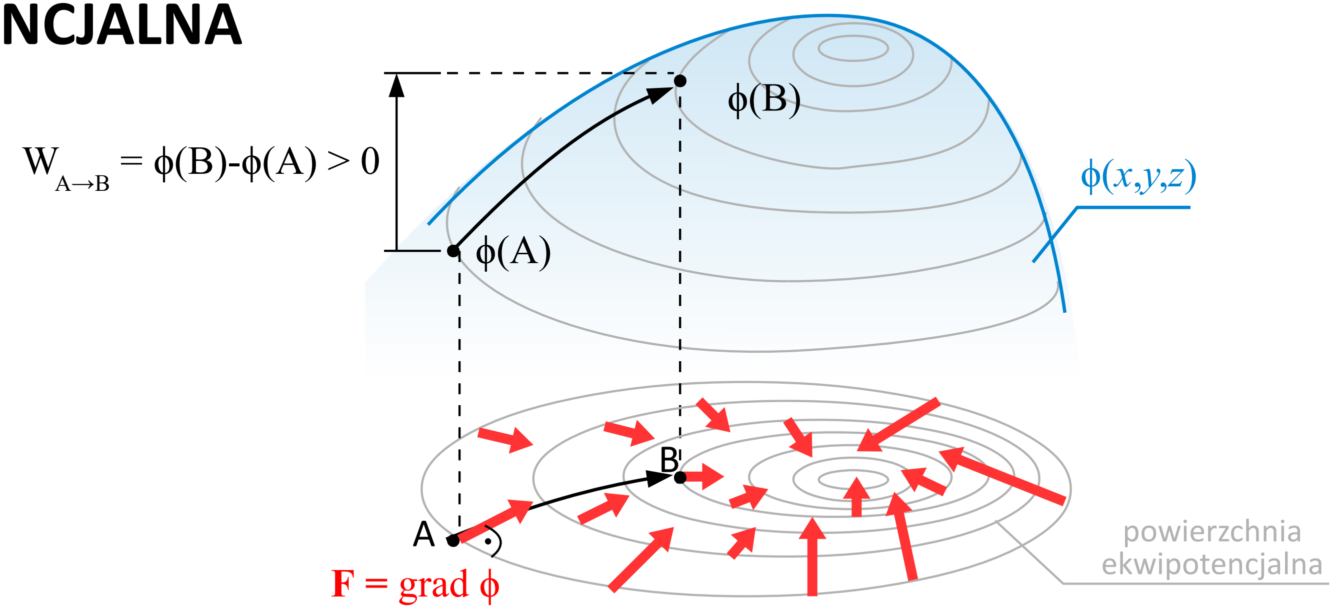
Jeśli w wyniku **działania pola sił potencjalnych** ciało **przemieści się** do innego punktu **i zmieni swoją prędkość**, to **praca wykonana przez te siły** jest z definicji równa **przyrostowi energii kinetycznej**:

- samo **położenie w polu sił potencjalnych** określa **możliwą do uzyskania** (potencjalną z łac. *potentia* = „zdolność, możliwość" ale też „siła, moc, władza") **energię kinetyczną**,

- ta energia potencjalna jest **równa pracy wykonanej przez siły zachowawcze**, tj. różnicy wartości potencjału w punkcie końcowym i początkowym

- ten punkt początkowy stanowi pewien **punkt odniesienia, który można wybrać na nieskończenie wiele sposobów**.

ENERGIA POTENCJALNA

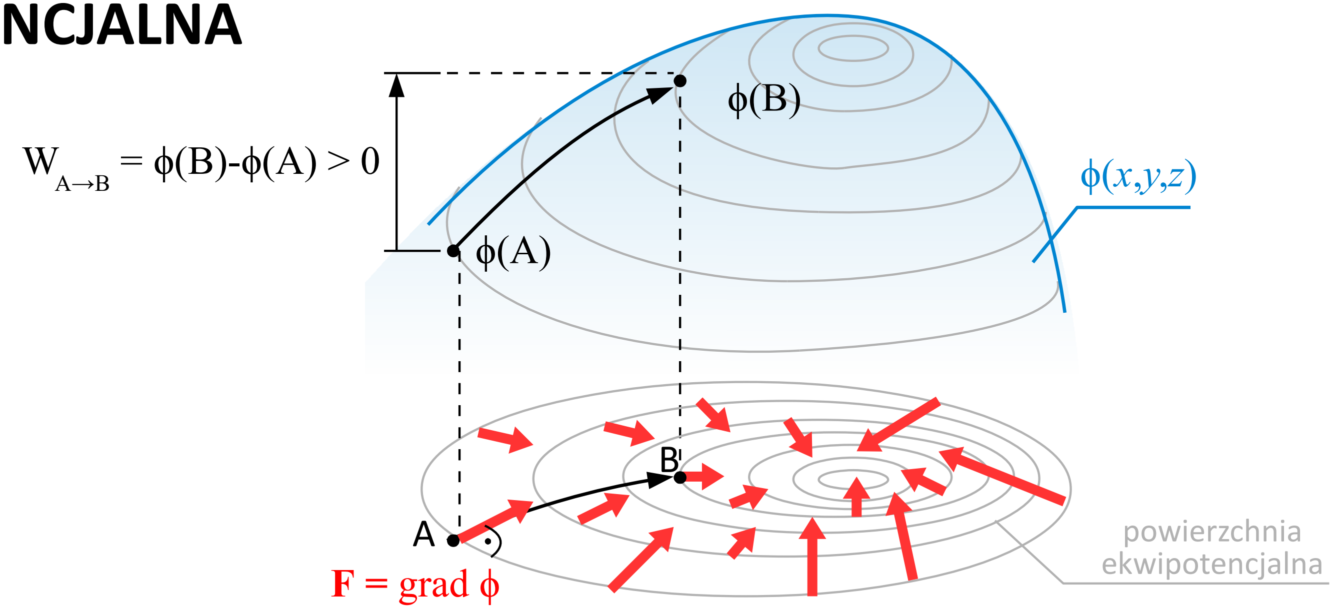


- **Siły potencjalne** – jako **gradient** potencjału – są **skierowane zawsze zgodnie z dodatnim przyrostem** wartości potencjału, tj. w **stronę większych wartości potencjału.** Ciało poruszające się pod wpływem tych sił będzie przemieszczać się w stronę większych wartości potencjału.

- Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona **siła jest równa przyrostowi pędu** (prędkości). Pierwotnie nieruchome ciało poruszające się pod wpływem sił pola w stronę większych wartości potencjału będzie **zwiększać swoją prędkość**, a co za tym idzie – **energię kinetyczną**.

- **Przyrost energii kinetycznej** jest równy **pracy wykonanej przez siły pola**, czyli **różnicy wartości potencjału** w punkcie końcowym i początkowym. W punkcie końcowym **potencjał jest większy**, więc **praca jest dodatnia,** a **energia kinetyczna wzrasta**.

ENERGIA POTENCJALNA



- W punkcie końcowym pole sił nadal posiada pewną energię potencjalną – już mniejszą, bo część pracy została już przekształcona w energię kinetyczną. **Różnica wartość energii potencjalnej** w tych dwóch punktach jest **równa wartości wykonanej pracy**, która z kolei jest równa **różnicy wartości potencjału**:

$$E_p(A)-E_p(B)=W_{A\rightarrow B}=\phi(B)-\phi(A)$$

- W sposób naturalny **miarą energii potencjalnej** staje się **wartość przeciwna do wartości potencjału:**

$$E_p(x,y,z)=-\phi(x,y,z)$$

- Przy takiej definicji energii potencjalnej może się zdarzyć, że otrzymamy **ujemną wartość energii potencjalnej**, co przeczy intuicyjnemu jej rozumieniu. Trzeba pamiętać, że **potencjał może być wybrany dowolnie z dokładnością do stałe**j. **Stała ta może być dobrana** w taki sposób, aby w całym obszarze dopuszczalnych położeń ciała **energia potencjalna była dodatnia**.

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

Stwierdziliśmy, że:

- **zmiana energii kinetycznej** jest równa **pracy** wykonanej przez siły przy przemieszczeniu ciała:

$$E_k(B) - E_k(A) = W_{A \to B}$$

- **praca wykonana przez siły potencjalne** jest równa **różnicy wartości potencjału** w punkcie początkowym i punkcie końcowym:

$$W_{A \to B} = \phi(B) - \phi(A) = E_p(A) - E_p(B)$$

Możemy zatem napisać:

$$E_k(B) - E_k(A) = E_p(A) - E_p(B)$$

$$E_k(A) + E_p(A) = E_k(B) + E_p(B)$$

Sumę energii kinetycznej oraz energii potencjalnej w danym punkcie nazywać będziemy całkowitą energią mechaniczną:

$$E_{mech}(A) = E_k(A) + E_p(A) = E_k(B) + E_p(B) = E_{mech}(B)$$

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

Ponieważ punkty A i B możemy wybierać dowolnie, możemy zatem wyciągnąć następujący wniosek:

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

Całkowita energia mechaniczna ciała znajdującego się w polu sił potencjalnych **nie zmienia się w czasie** (energia mechaniczna jest zachowana)

$$E_{mech} = const. \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} E_{mech} = 0$$

UWAGA:

- Jest to szczególny przypadek bardziej ogólnego twierdzenia, zwanego zasadą zachowania energii, zgodnie z którym **w układzie izolowanym suma wszystkich rodzajów energii** (energia kinetyczna, energia potencjalna odkształcenia, energia chemiczna, energia pola elektromagnetycznego, ciepło itd.) **jest stała w czasie.**

- Ponieważ w polu sił **potencjalnych** całkowita energia mechaniczna jest **zachowana**, stąd nazywa się je **polem** sił zachowawczych (konserwatywnych).

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

PODSUMOWANIE:

- Pole sił $\mathbf{F}$, dla którego istnieje potencjał ϕ, taki że $\mathbf{F} = \nabla\phi$ nazywamy polem **potencjalnym**.

- Pole sił jest polem **potencjalnym** wtedy i tylko wtedy, gdy jest polem **bezwirowym**:

$$\exists\phi: \quad \mathbf{F} = \nabla\phi \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

- **Praca** wykonana przez siły pola **potencjalnego**:
  - **nie zależy od drogi**
  - jest **równa przyrostowi energii kinetycznej**
  - **Definiuje wartość energii potencjalnej** związanej z tym polem

- W polu sił potencjalnych **zmiana energii kinetycznej jest** (co do wartość bezwzględnej) **równa zmianie energii potencjalnej** – wielkość tej zmiany jest **równa pracy wykonanej przez siły pola** i zależy jedynie od początkowego i końcowego położenia ciała, a **nie zależy od drogi**, którą pokonuje.

- W konsekwencji **całkowita energia mechaniczna** (suma energii kinetycznej i potencjalnej) w polu sił potencjalnych **jest zachowana** (nie zmienia się). Z tego powodu siły potencjalne nazywamy **siłami zachowawczymi** (**konserwatywnymi**)

POLE SIŁ ZACHOWAWCZYCH

UWAGA:

- Według naszej definicji, **wartość siły pola potencjalnego zależy jedynie od położenia w przestrzeni** (wartość gradientu potencjału w danym punkcie) – **nie zależy od prędkości ciała** (i wyższych pochodnych położenia względem czasu) **ani od czasu**.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \phi(\mathbf{r})$$

- Rozważa się jednak potencjały uogólnione **zależne od czasu**, takie że:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \nabla \phi(\mathbf{r}, t)$$

- W takich uogólnionych modelach takie właśnie siły nazywa się potencjalnymi – ich **wielkość zależy od położenia i od czasu**. Dla takich sił potencjalnych **nie zachodzi zasada zachowania energii**.

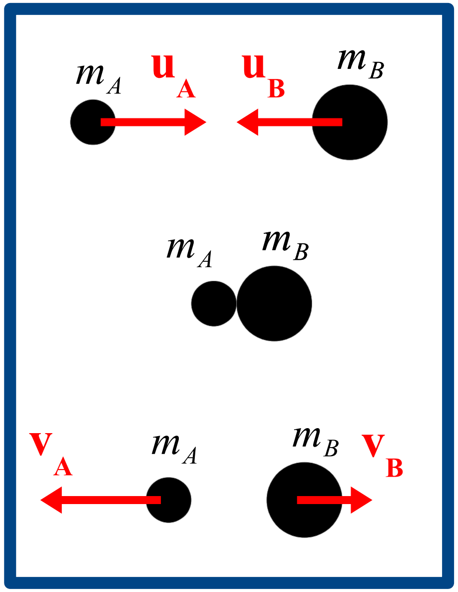
- Jeśli rozważa się **potencjały uogólnione**:

  - Siły potencjalne zależą od **położenia** i **czasu** i <u>**nie zachodzi**</u> **dla nich zasada zachowania energii**

  - Siły zachowawcze zależą tylko od **położenia** i <u>**zachodzi**</u> **dla nich zasada zachowania energii**

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

PRZYKŁAD – zderzenie idealnie sprężyste



Dwie masy m_A, m_B poruszające się swobodnie naprzeciw sobie ulegają zderzeniu z prędkościami $\mathbf{v}_A$ i $\mathbf{v}_B$. Zakładając, że zderzenie jest idealnie sprężyste (energia kinetyczna układu wskutek zderzenia nie ulega rozproszeniu na sposób ciepła) wyznaczyć prędkości mas po zderzeniu.

- Układ jest izolowany (brak sił zewnętrznych)

- **Siły interakcji** między masami przy zderzeniu **spełniają III zasadę dynamiki Newtona**
  - Obowiązuje zasada zachowania pędu.

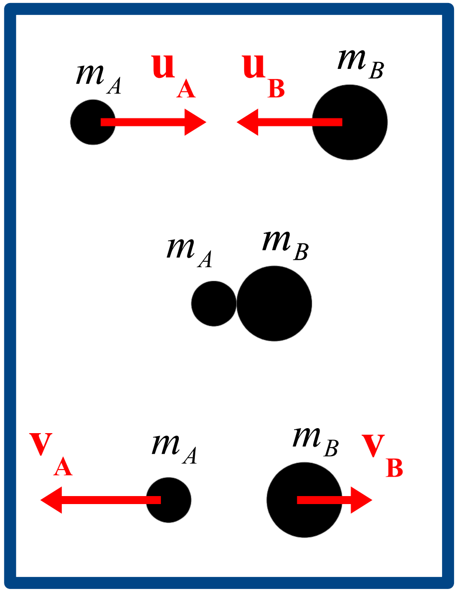
$$\mathbf{p}_A^{(1)} + \mathbf{p}_B^{(1)} = \mathbf{p}_A^{(2)} + \mathbf{p}_B^{(2)} \quad \Rightarrow \quad m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B$$

- **Brak sił zewnętrznych** jest równoważny obecności **zerowego pola sił**, które też jest polem zachowawczym o **zerowej energii potencjalnej**.
  - Obowiązuje zasada zachowania energii – **jedyną formą energii jest** energia kinetyczna

$$E_{k,A}^{(1)} + E_{k,B}^{(1)} = E_{k,A}^{(2)} + E_{k,B}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_A u_A^2}{2} + \frac{m_B u_B^2}{2} = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2}$$

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

PRZYKŁAD – zderzenie idealnie sprężyste



ZASADA ZACHOWANIA PĘDU:

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad m_A (v_A - u_A) = m_B (u_B - v_B)$$

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII:

$$\frac{m_A u_A^2}{2} + \frac{m_B u_B^2}{2} = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2} \qquad \Rightarrow$$

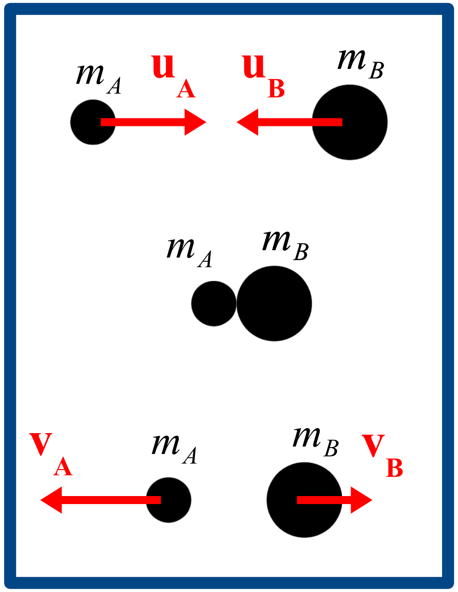
$$\Rightarrow \qquad m_A (v_A^2 - u_A^2) = m_B (u_B^2 - v_B^2)$$

Dane: $m_A \, , \, m_B \, , \, u_A \, , \, u_B$

Szukane: $v_A \, , \, v_B$

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

PRZYKŁAD – zderzenie idealnie sprężyste



$$\begin{cases} m_A\left(v_A^2-u_A^2\right)=m_B\left(u_B^2-v_B^2\right) \\ m_A\left(v_A-u_A\right)=m_B\left(u_B-v_B\right) \end{cases}$$

Możemy podzielić lewą stronę pierwszego równania przez lewą stronę drugiego równania – analogicznie z prawymi stronami

$$\frac{\left(v_A^2-u_A^2\right)}{\left(v_A-u_A\right)}=\frac{\left(u_B^2-v_B^2\right)}{\left(u_B-v_B\right)}$$

Ze wzorów skróconego mnożenia mamy $\quad (a^2-b^2)=(a+b)(a-b) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(a^2-b^2)}{a-b}=(a+b)$

$$\left(v_A+u_A\right)=\left(v_B+u_B\right)$$

Wraz z drugim równaniem otrzymujemy liniowy układ równań:

$$\begin{cases} v_A+u_A=v_B+u_B \\ m_A\left(v_A-u_A\right)=m_B\left(u_B-v_B\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} v_A=u_A\dfrac{m_A-m_B}{m_A+m_B}+u_B\dfrac{2m_B}{m_A+m_B} \\ v_B=u_A\dfrac{2m_A}{m_A+m_B}+u_B\dfrac{m_B-m_A}{m_A+m_B} \end{cases}}$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ