MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

PODSTAWY RACHUNKU WEKTOROWEGO

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

SKALARY

- **skalar** – liczba rzeczywista lub zespolona.

  - **Dodawanie skalarów** jest **łączne**, **przemienne** i **odwracalne** oraz **posiada element neutralny** (zero):

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a+b=b+a$$

$$\underset{0}{\exists!}:\quad \underset{a}{\forall}\quad a+0=0+a=a$$

$$\underset{a}{\forall}\quad \underset{-a}{\exists!}:\qquad a+(-a)=0$$

  - **Mnożenie skalarów** jest **łączne**, **przemienne**, **rozdzielne względem dodawania**, **odwracalne** poza przypadkiem mnożenia przez 0 oraz **posiada element neutralny** (jedynkę):

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

$$a\cdot b=b\cdot a$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$\underset{1}{\exists!}:\quad \underset{a}{\forall}\quad a\cdot 1=1\cdot a=a$$

$$\underset{a\neq 0}{\forall}\quad \underset{a^{-1}}{\exists!}:\qquad a\cdot(a^{-1})=1$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

WEKTORY

- **wektor**
  - W przestrzeni trójwymiarowej jest to **obiekt geometryczny opisywany za pomocą ciągu 3 liczb**.
  - Każdy wektor można zapisać jako **kombinację liniową wektorów bazowych** $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

  - Współczynniki tej kombinacji nazywamy **składowymi wektora** (nie współrzędnymi!)

$$\mathbf{a} = [a_x \,;\, a_y \,;\, a_z]$$

  - Przyjmując **kartezjański układ współrzędnych**, wprowadzamy **kanoniczną bazę ortonormalną:**

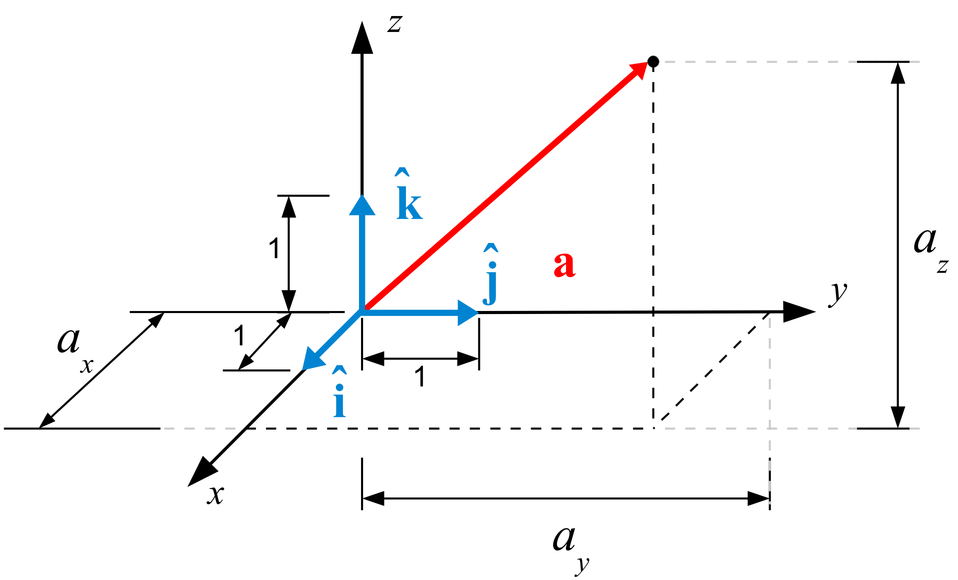
$$\hat{\mathbf{i}} = [1\,;0\,;0]$$

$$\hat{\mathbf{j}} = [0\,;1\,;0]$$

$$\hat{\mathbf{k}} = [0\,;0\,;1]$$

$$\hat{\mathbf{i}} \perp \hat{\mathbf{j}} \;,\quad \hat{\mathbf{j}} \perp \hat{\mathbf{k}} \;,\quad \hat{\mathbf{k}} \perp \hat{\mathbf{i}}$$

$$|\hat{\mathbf{i}}| = 1 \;,\quad |\hat{\mathbf{j}}| = 1 \;,\quad |\hat{\mathbf{k}}| = 1$$

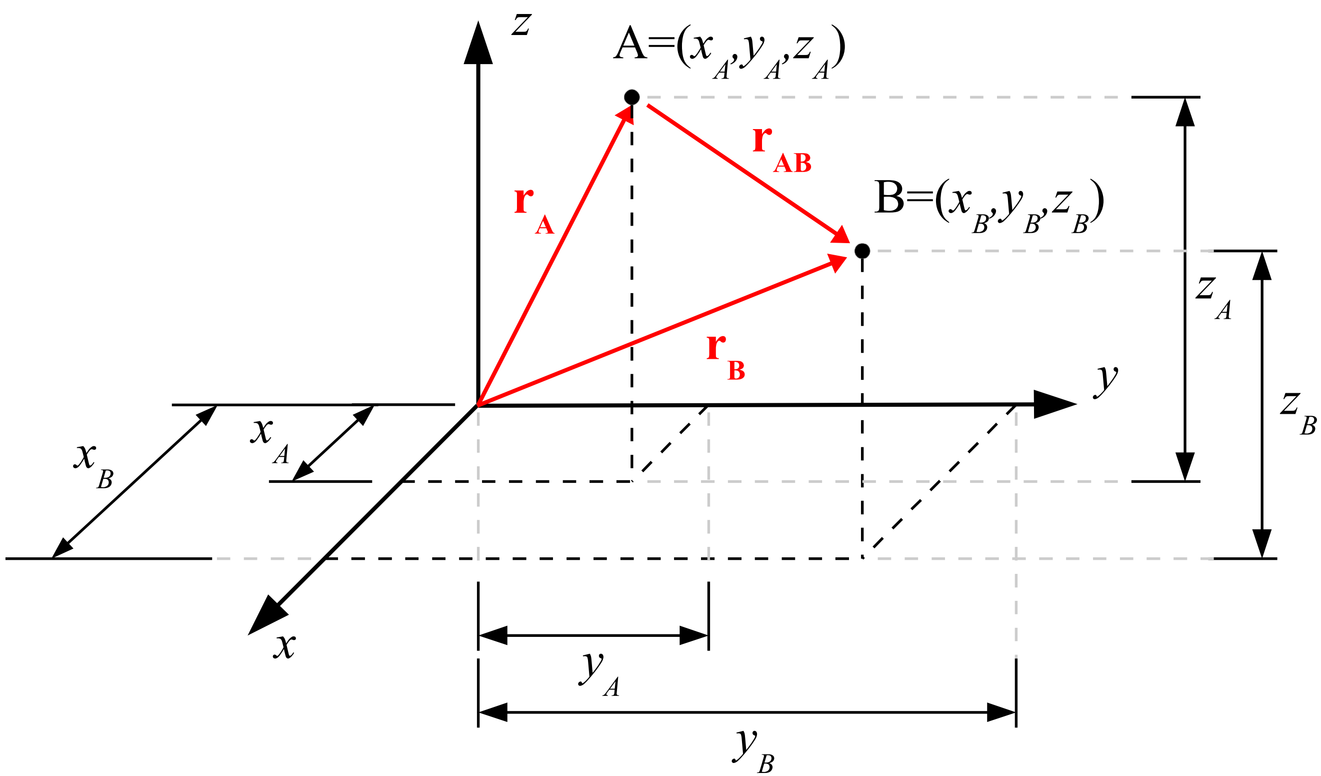


© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

WEKTORY

- **długość wektora** $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
  - **wersor** – wektor o długości jednostkowej $|\hat{\mathbf{i}}| = 1\ ,\quad |\hat{\mathbf{j}}| = 1\ ,\quad |\hat{\mathbf{k}}| = 1$
  - długość wektora łączącego dwa punkty jest równa odległości między tymi punkami

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\mathbf{r}_{AB}| = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = d_{AB}$$



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

WEKTORY

WEKTOR ZACZEPIONY

WEKTOR SWOBODNY

WEKTOR PRZESUWNY

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

WEKTOR ZACZEPIONY

- W przestrzeni fizycznej może być utożsamiany z **odcinkiem skierowanym**, tj. z **uporządkowaną parą punktów** (pierwszy to początek, drugi to koniec).

- Poprzez cechy uporządkowanej pary punktów można określić 3 cechy wektora:

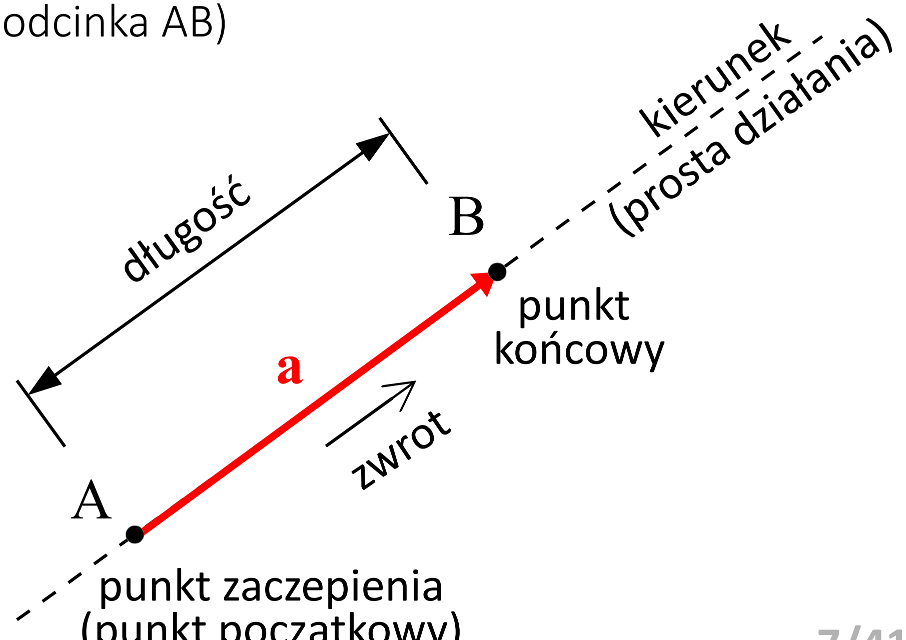
  - **kierunek** – **prosta**, na której leżą punkty A i B. Nazywamy ją prostą działania wektora.

  - **zwrot** – **orientacja odcinka** AB, określenie, który z punktów to początek, a który to koniec.

  - **długość** – **odległość** między punktami A i B (długość odcinka AB)

- Dla **wektora zaczepionego** podać można również **punkt zaczepienia**. Wektor $\mathbf{a}$ zaczepiony w punkcie A oznaczamy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathrm{A} \end{pmatrix}$$



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

- $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ mają **ten sam kierunek** → $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są **równoległe** $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
- $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ mają **ten sam kierunek i zwrot** → $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są **zorientowane zgodnie** $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$
- $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ mają **ten sam kierunek i przeciwny zwrot** → $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są **zorientowane przeciwnie** $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$
- $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ mają **ten sam kierunek, długość i zwrot** → $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są **równe** $\mathbf{a} = \mathbf{b}$
- $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ mają **ten sam kierunek i długość i przeciwny zwrot** → $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są **przeciwne** $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$

WEKTOR SWOBODNY

- **Rodzina** (klasa abstrakcji) **wszystkich wektorów posiadających ten sam kierunek, zwrot i długość.**
- **Zbiór wszystkich wektorów opisywanych** w ustalonej bazie **tymi samymi składowymi.**

WEKTOR PRZESUWNY

- **Wektor zaczepiony, którego punkt zaczepienia można przesuwać wzdłuż prostej działania,** albo jest to wektor, dla którego określony jest **kierunek**, **zwrot** i **długość** oraz **cała prosta** (tożsama z jego kierunkiem) **możliwych punktów zaczepienia.**

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

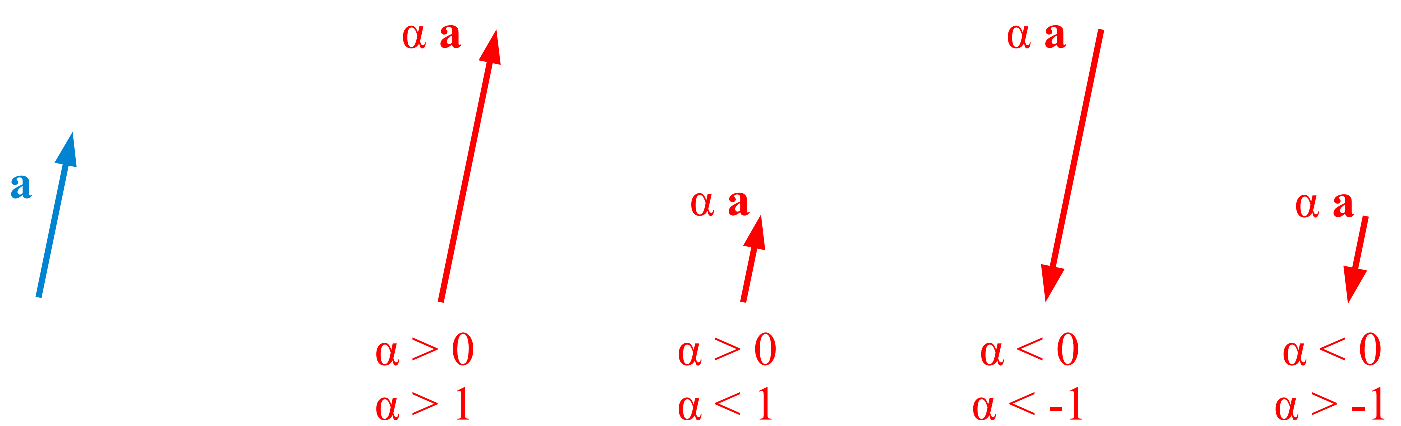
DZIAŁANIA NA WEKTORACH

MNOŻENIE WEKTORÓW PRZEZ SKALAR

$$(\mathbb{R}\times V)\ni(\alpha\,,\mathbf{a}) \quad \rightarrow \quad \alpha\,\mathbf{a}\in V$$

$$\boxed{\alpha\,\mathbf{a}=[\alpha\,a_x\;;\;\alpha\,a_y\;;\;\alpha\,a_z]}$$

- **liczbie** i **wektorowi** przyporządkowujemy **wektor**
- mnożenie przez skalar **nie zmienia kierunku**
- jeśli $\alpha > 0$, to mnożenie przez α nie zmienia zwrotu
- jeśli $\alpha < 0$, to mnożenie przez α zmienia zwrot na przeciwny



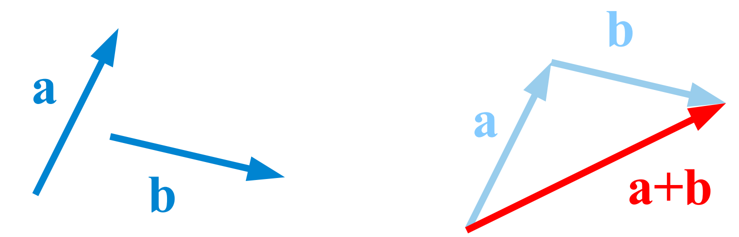
© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

DODAWANIE I ODEJMOWANIE WEKTORÓW

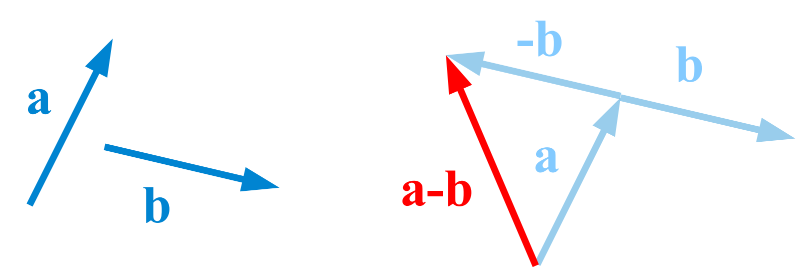
$$(\mathrm{V}\times\mathrm{V})\ni(\mathbf{a},\mathbf{b}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}\in\mathrm{V}$$

$$\boxed{\mathbf{a}+\mathbf{b}=[a_x+b_x\ ;\ a_y+b_y\ ;\ a_z+b_z]}$$



$$(\mathrm{V}\times\mathrm{V})\ni(\mathbf{a},\mathbf{b}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}-\mathbf{b}\in\mathrm{V}$$

$$\boxed{\mathbf{a}-\mathbf{b}=[a_x-b_x\ ;\ a_y-b_y\ ;\ a_z-b_z]}$$



- **dwójce wektorów** przyporządkowujemy **wektor**

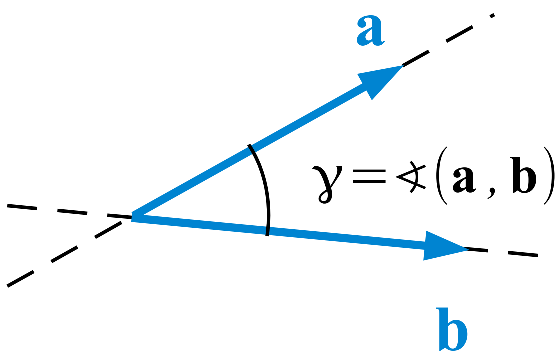
© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW

$$(V \times V) \ni (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\gamma$$

- **dwójce wektorów** przyporządkowujemy **skalar**
- rozdzielny względem dodawania $\quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- zgodny z mnożeniem przez skalar $\quad \mathbf{a} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- symetryczny $\quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

długość wektora: $\quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$

dla wektorów **prostopadłych:** $\quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

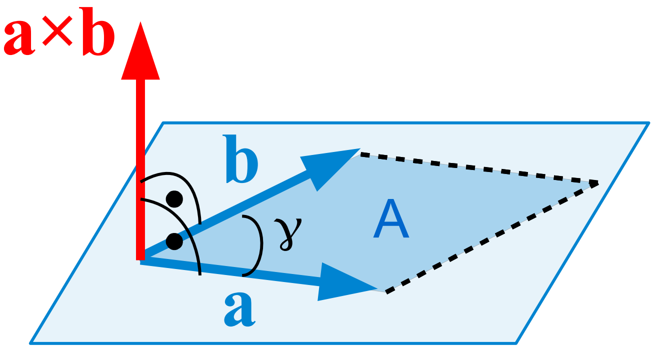
© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$(V \times V) \ni (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \in V$$

$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [a_y b_z - a_z b_y \ ; \ a_z b_x - a_x b_z \ ; \ a_x b_y - a_y b_x]}$$



$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \, |\mathbf{b}| \sin\gamma = A$$

- **dwójce wektorów** przyporządkowujemy **wektor**
- nowy wynikowy jest **prostopadły** do obydwu argumentów $\quad \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$
- długość nowego wektora $\quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \, |\mathbf{b}| \sin\gamma \ , \quad \gamma = \sphericalangle(\mathbf{a} ; \mathbf{b})$
- wektory **a, b, c** tworzą **trójkę prawoskrętną**
- **rozdzielny względem dodawania** $\quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- **zgodny z mnożeniem przez skalar** $\quad \mathbf{a} \times (\alpha \cdot \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- **antysymetryczny** $\quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\, \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overset{+}{}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_y b_z \hat{\mathbf{i}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a_y b_z \hat{\mathbf{i}} + a_x b_y \hat{\mathbf{k}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a_y b_z \hat{\mathbf{i}} + a_x b_y \hat{\mathbf{k}} + b_x a_z \hat{\mathbf{j}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY WEKTORÓW

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a_y b_z \hat{\mathbf{i}} + a_x b_y \hat{\mathbf{k}} + b_x a_z \hat{\mathbf{j}} - a_y b_x \hat{\mathbf{k}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}-$$

$$\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=a_y b_z\,\hat{\mathbf{i}}+a_x b_y\,\hat{\mathbf{k}}+b_x a_z\,\hat{\mathbf{j}}\\ -a_y b_x\,\hat{\mathbf{k}}-a_z b_y\,\hat{\mathbf{i}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a_y b_z \hat{\mathbf{i}} + a_x b_y \hat{\mathbf{k}} + b_x a_z \hat{\mathbf{j}} - a_y b_x \hat{\mathbf{k}} - a_z b_y \hat{\mathbf{i}} - b_z a_x \hat{\mathbf{j}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathbf{a} = \left[a_x \ ; \ a_y \ ; \ a_z \right] \\
\times & \mathbf{b} = \left[b_x \ ; \ b_y \ ; \ b_z \right] \\
\hline
\end{array}
$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\mathbf{a} = \left[a_x \; ; \; a_y \; ; \; a_z \right]$$

$$\times \quad \mathbf{b} = \left[b_x \; ; \; b_y \; ; \; b_z \right]$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left[\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \; ; \qquad \qquad \right] =$$

$$= \left[\left(a_y b_z - b_y a_z \right) \; ; \qquad \qquad \right]$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\begin{array}{r} \mathbf{a} = \left[a_x \; ; \; a_y \; ; \; a_z \right] \\ \times \quad \mathbf{b} = \left[b_x \; ; \; b_y \; ; \; b_z \right] \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left[\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \; ; \; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \; ; \qquad \right] =$$

$$= \left[\left(a_y b_z - b_y a_z \right) \; ; \; -\left(a_x b_z - b_x a_z \right) \; ; \qquad \right]$$

MINUS W DRUGIEJ SKŁADOWEJ

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{a} = \left[a_x \;;\; a_y \;;\; a_z \right] \\ \times & \mathbf{b} = \left[b_x \;;\; b_y \;;\; b_z \right] \\ \hline \end{array}$$

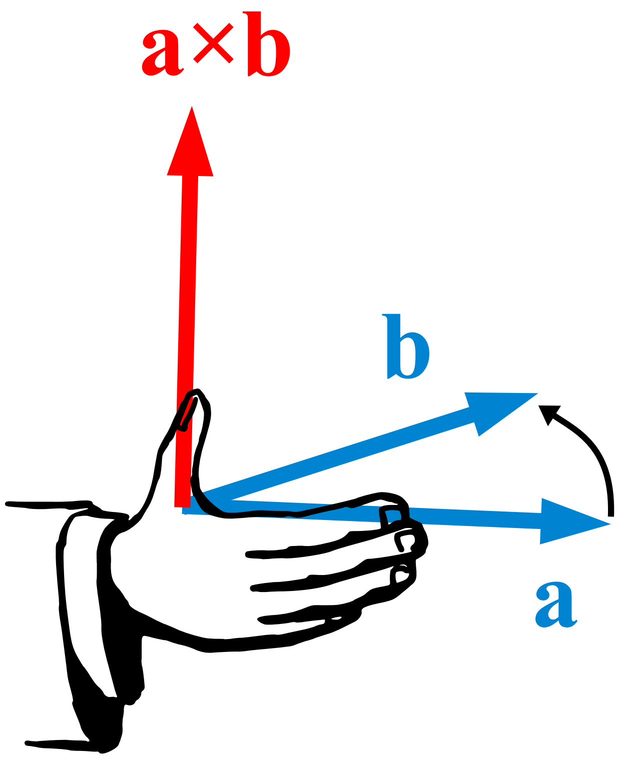
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left[\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \;;\; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \;;\; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \left[\left(a_y b_z - b_y a_z \right) \;;\; -\left(a_x b_z - b_x a_z \right) \;;\; \left(a_x b_y - b_x a_y \right) \right]$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN WEKTOROWY – REGUŁA PRAWEJ DŁONI



- **4 palce dłoni** skierowane są zgodnie z **pierwszym wektorem iloczynu**.
- **Krótszym łukiem obracamy** dłoń jej **wnętrzem** w kierunku **drugiego wektora**.
- **Kciuk** wskazuje **zwrot iloczynu wektorowego**.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

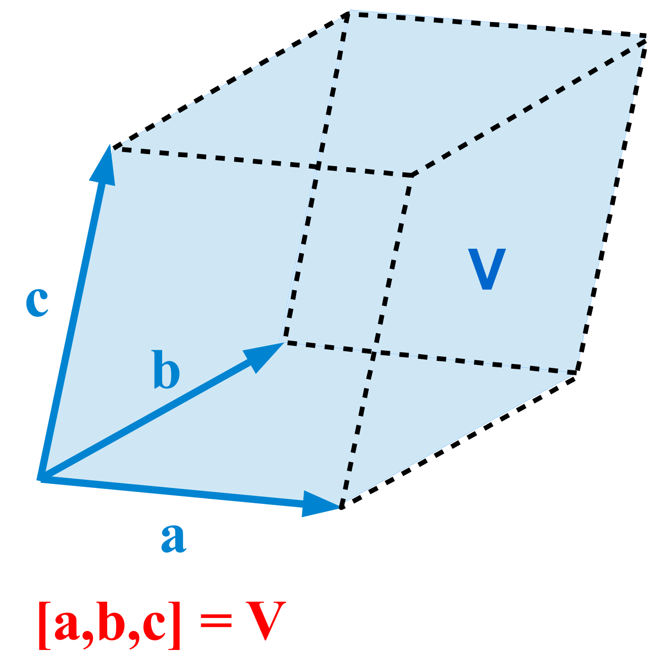
DZIAŁANIA NA WEKTORACH

ILOCZYN MIESZANY WEKTORÓW

$$(V \times V \times V) \ni (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \rightarrow \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \in \mathbb{R}$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z$$



- **antysymetryczny względem** każdej pary argumentów – nieparzysta liczba przestawień argumentów zmienia znak iloczynu na przeciwny. Parzysta liczba przestawień nie zmienia znaku.

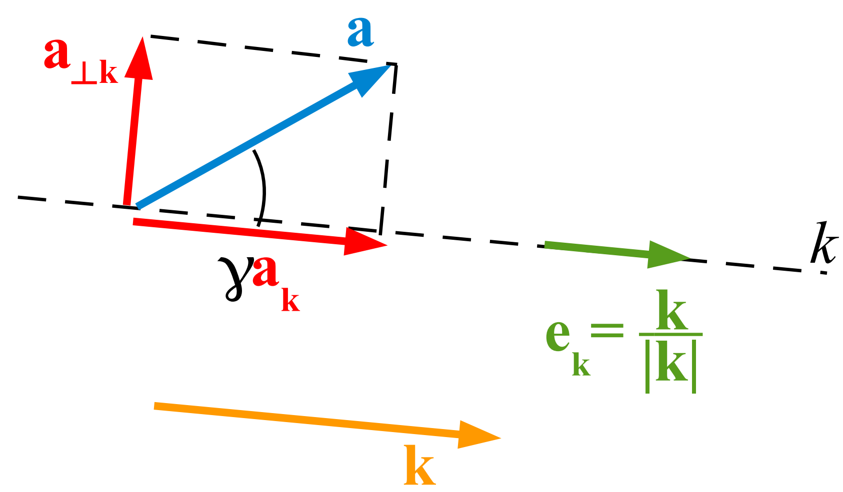
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] =$$
$$= -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}]$$

- Dla **wektorów leżących w jednej płaszczyźnie**: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

RZUTOWANIE WEKTORA NA PROSTĄ *k*



- kierunek rzutu: $\mathbf{a}_k \| k$
- długość rzutu: $|\mathbf{a}_k| = |\mathbf{a}|\cos\gamma$

dla danej prostej k wyznaczamy

- wektor równoległy: $\mathbf{k} \| k$
- wersor prostej *k*: $\mathbf{e}_k = \dfrac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\ , \quad |\mathbf{e}_k| = 1$

iloczyn skalarny: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k = |\mathbf{a}|\cos\gamma = |\mathbf{a}_k|$

rzut wektora na prostą:
(składowa równoległa do prostej)

$$\boxed{\mathbf{a}_k = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right)\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\,\mathbf{k}}$$

składowa prostopadła do prostej:

$$\boxed{\mathbf{a}_{\perp k} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_k}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

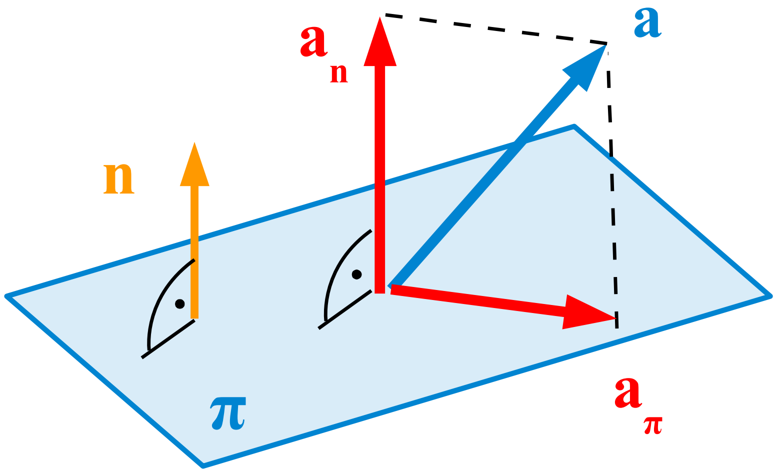
DZIAŁANIA NA WEKTORACH

RZUTOWANIE WEKTORA NA PŁASZCZYZNĘ π

- Dla danej płaszczyzny można jednoznacznie jednoznacznie jest **kierunek prostopadły** do niej, dany wektorem **normalnej**:

$$\mathbf{n} \perp \pi$$

- wektor można rozłożyć na:
  - **składową równoległą do normalnej**: $\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\mathbf{n}$
  - **składową prostopadłą do normalnej**: $\mathbf{a}_{\perp n} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_n$



- Składowa prostopadła jest **rzutem wektora na płaszczyznę**:

$$\boxed{\mathbf{a}_\pi = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\mathbf{n}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

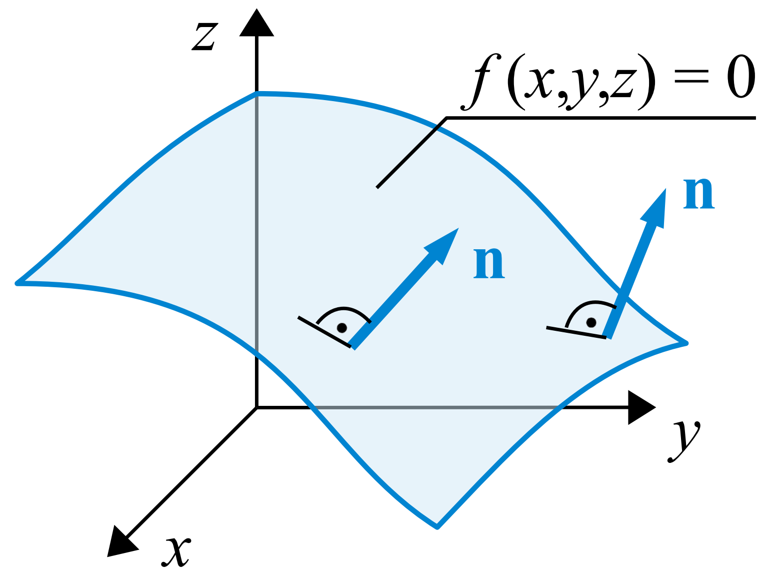
ELEMENTY GEOMETRII ANALITYCZNEJ

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

POWIERZCHNIA W PRZESTRZENI

Ogólne **równanie powierzchni:**

$$\boxed{f(x, y, z) = 0}$$



Normalna w punkcie wyznaczana jest jako **gradient** funkcji f :

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_P) = \operatorname{grad} f\big|_{\mathbf{r}_P} = \nabla f\big|_{\mathbf{r}_P} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\mathbf{r}_P} ; \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{r}_P} ; \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{\mathbf{r}_P} \right]$$

Wersor normalny:

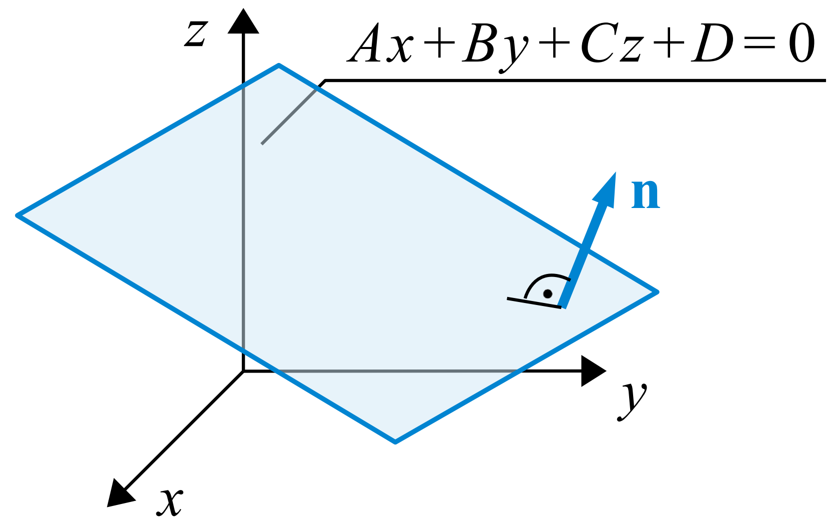
$$\mathbf{e}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} ; \dfrac{\partial f}{\partial y} ; \dfrac{\partial f}{\partial z} \right]}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

PŁASZCZYZNA W PRZESTRZENI

Postać **ogólna** równania płaszczyzny:

$$\boxed{\pi: \quad f(\mathbf{r}) = A\,x + B\,y + C\,z + D = 0}$$



Normalna jest **taka sama w każdym punkcie**:

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right] = [A, B, C]$$

Postać **normalna** równania płaszczyzny:

$$\boxed{\pi: \quad f(\mathbf{r}) = \alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z + \delta = 0 \qquad \text{gdzie} \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1}$$

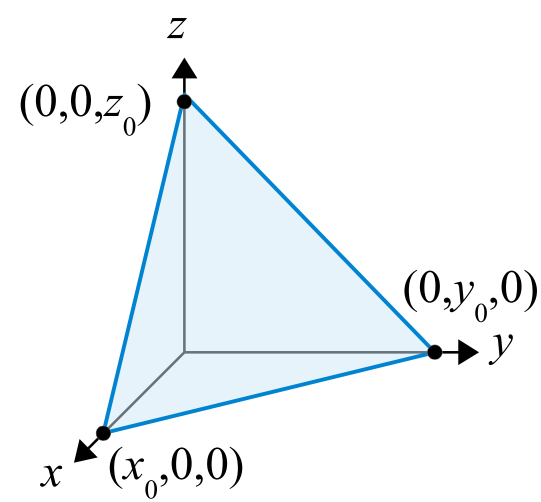
$$\mathbf{e}_n = [\alpha, \beta, \gamma], \quad |\mathbf{e}_n| = 1$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

PŁASZCZYZNA W PRZESTRZENI

Postać **odcinkowa** równania płaszczyzny:

$$\pi: \qquad \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$$



Postać **parametryczna** równań płaszczyzny:

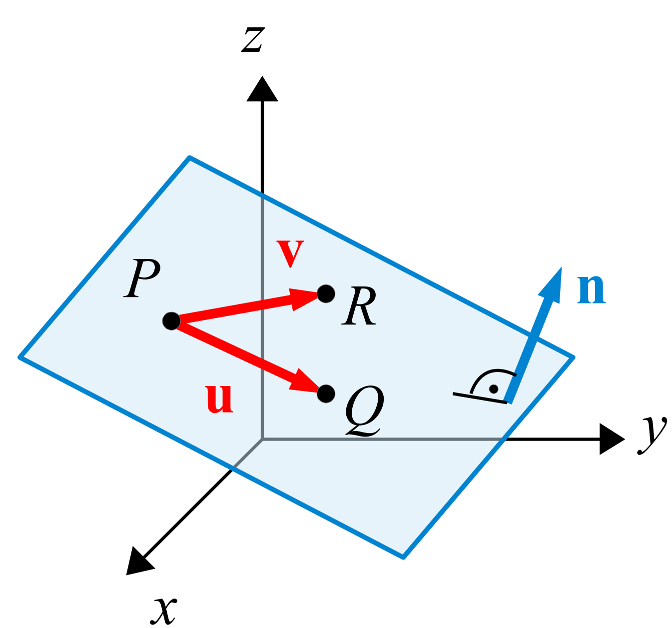
$$\pi: \qquad \begin{cases} x(\lambda,\mu) = x_P + \lambda u_x + \mu v_x \\ y(\lambda,\mu) = y_P + \lambda u_y + \mu v_y \\ z(\lambda,\mu) = z_P + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$P, Q, R \in \pi$

$\mathbf{u} = \vec{PQ}, \quad \mathbf{v} = \vec{PR}$

$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}] = 0$

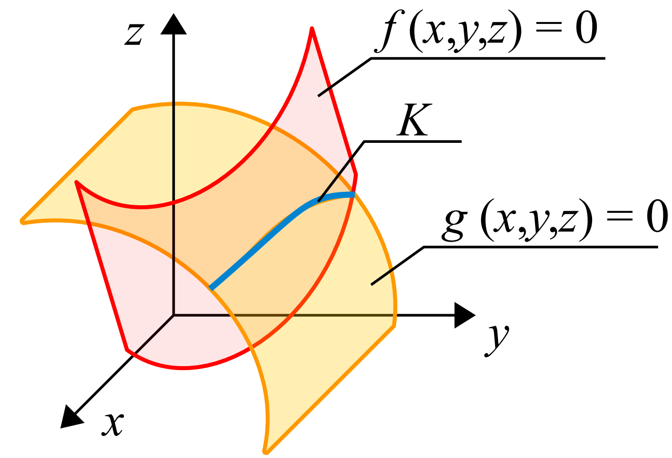


© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

KRZYWA W PRZESTRZENI

Postać **krawędziowa** **równań krzywej**:

$$K: \quad \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$



Postać **parametryczna** **równań krzywej**:

$$K: \quad \begin{cases} x = x(\lambda) = f_x(\lambda) \\ y = y(\lambda) = f_y(\lambda)\,, \\ z = z(\lambda) = f_z(\lambda) \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Parametr s, taki że **długość łuku krzywej** jest równa

$$s_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_A^B \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f_x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}f_y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}f_z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda = s_B - s_A$$

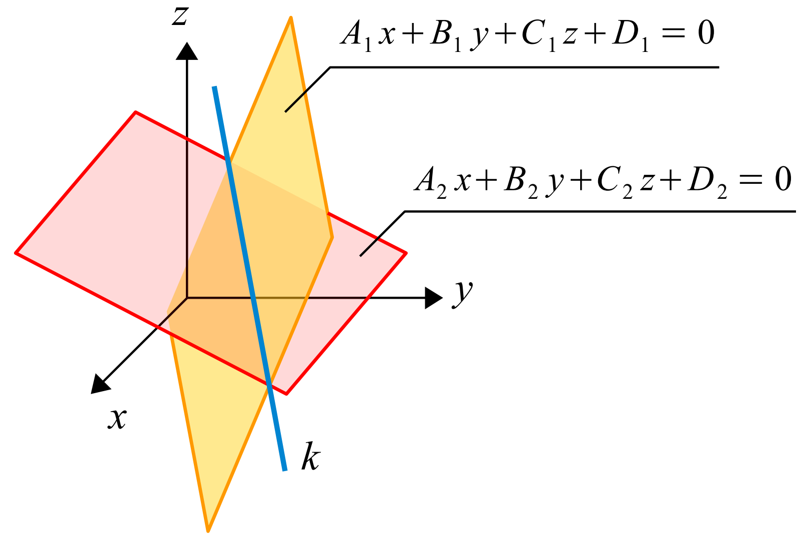
nazywamy **parametrem naturalnym** krzywej.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

PROSTA W PRZESTRZENI

Postać **krawędziowa** równań prostej:

$$k: \quad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$



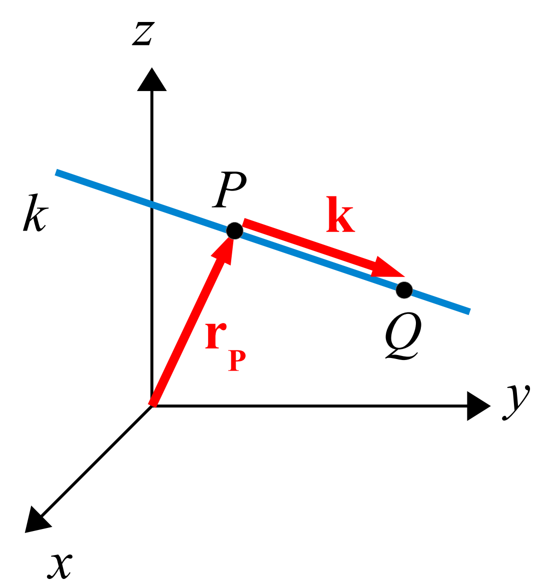
Postać **parametryczna** równań prostej:

$$k: \quad \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_P + \lambda \mathbf{k} = \begin{cases} x = x_0 + \lambda k_x \\ y = y_0 + \lambda k_y \\ z = z_0 + \lambda k_z \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$P, Q \in k$

$\mathbf{k} = \vec{PQ} \quad \mathbf{k} \| k$



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

TRÓJŚCIAN FRENETA

Dla dostatecznie regularnej krzywej w każdym jej punkcie można określić **lokalny układ współrzędnych** wyznaczony przez **układ trzech wektorów**:

Wektor styczny

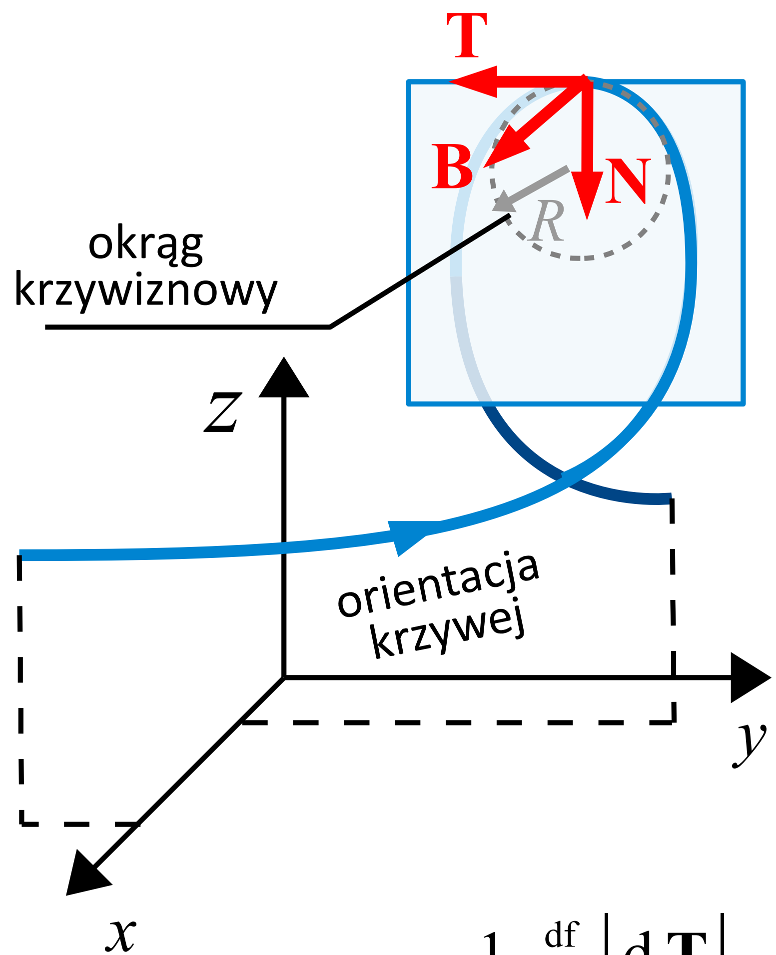
$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s}$$

Wektor normalny

$$\mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s} \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s}\right|^{-1} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s}$$

Wektor binormalny

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$

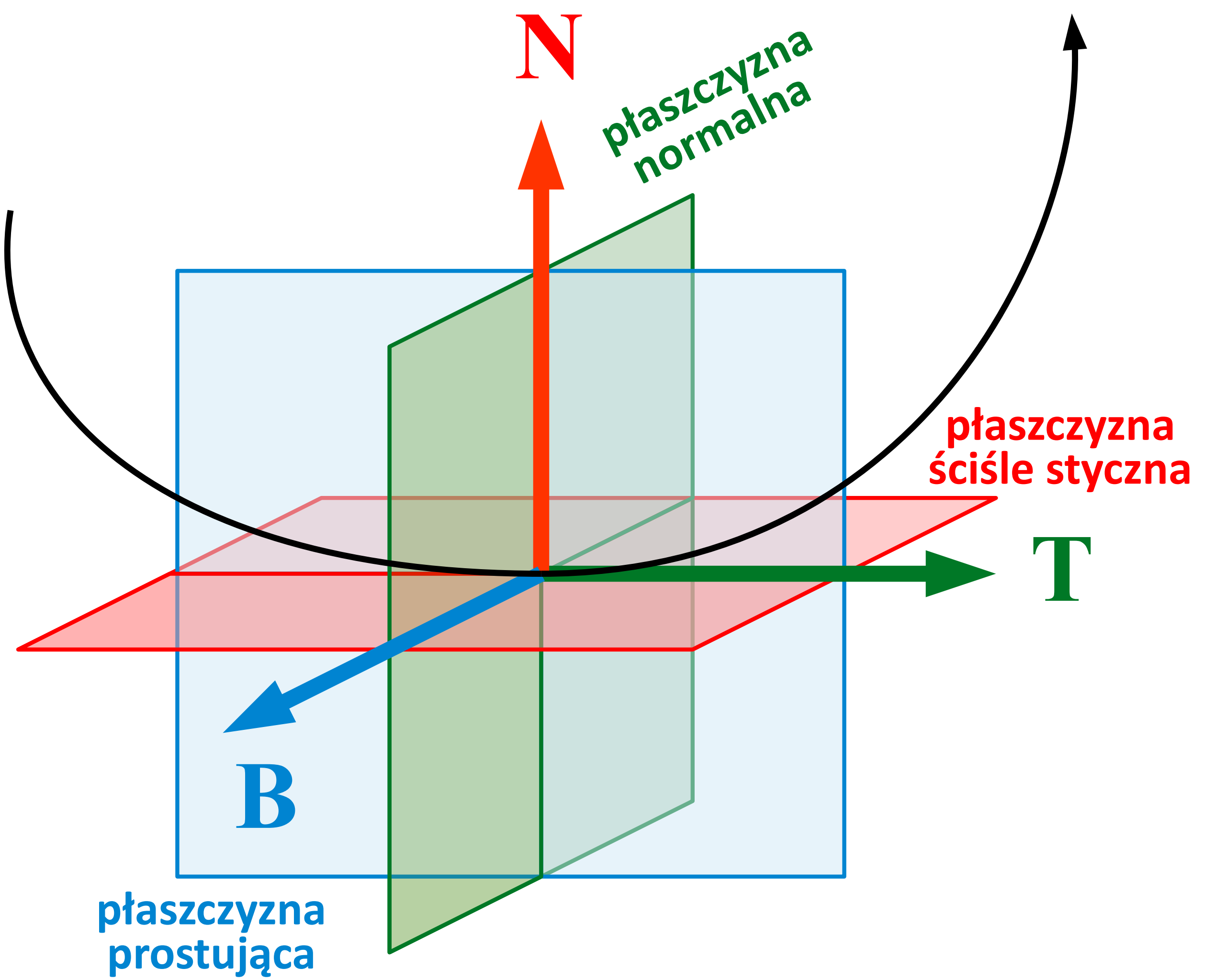


$$\kappa = \frac{1}{R} \overset{\text{df}}{=} \left|\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s}\right|$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

TRÓJŚCIAN FRENETA

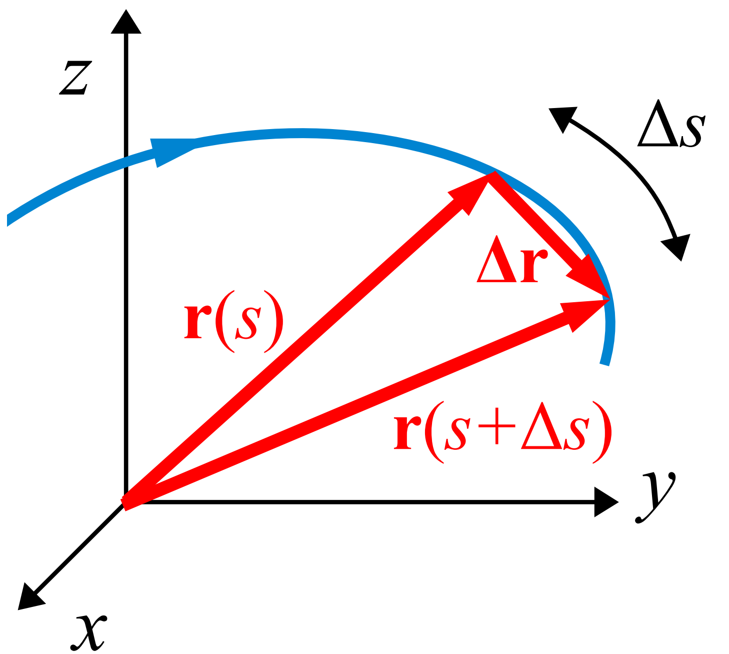
Wektory **T, N, B** wyznaczają **trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny** tworzące tzw. **trójścian Freneta**:



© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

TRÓJŚCIAN FRENETA

Wektor styczny $\mathbf{T}$ wyznaczamy jako **pochodną wektora wodzącego punktów krzywej względem parametru naturalnego**:



- Ma kierunek styczny do krzywej.

$$\mathbf{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$$

$$\mathbf{T} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \right]$$

- Jest zorientowany zgodnie z przyrostem parametru naturalnego.

$$\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(s+\Delta s) \approx \mathbf{r} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{r}(s) + \varepsilon \mathbf{T}$$

przy czym $\begin{cases} \varepsilon > 0 & \Rightarrow & \Delta s > 0 \\ \varepsilon < 0 & \Rightarrow & \Delta s < 0 \end{cases}$

- Ma długość jednostkową.

$$|\mathbf{T}| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|} \approx \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}| + \varepsilon} = 1$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

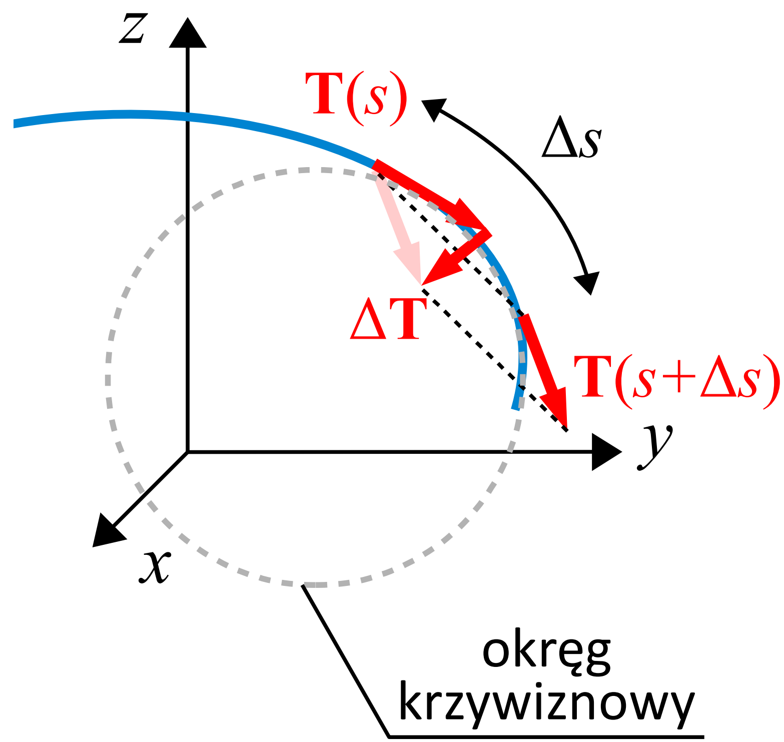
TRÓJŚCIAN FRENETA

Wektor normalny $\mathbf{N}$ wyznaczamy jako **unormowaną pochodną wektora stycznego względem parametru naturalnego**:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s} \cdot \left| \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s} \right|^{-1}$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1 = const. \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\right) = 2\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s}\cdot\mathbf{T} = 0$$

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}\perp\mathbf{T}$$



- Ma kierunek prostopadły do krzywej.
- Z definicji ma długość jednostkową.
- Jest zorientowany do wnętrza okręgu krzywiznowego.

Wektor binormalny $\mathbf{B}$ wyznaczany jako **iloczyn wektorowy** $\mathbf{T}$ i $\mathbf{N}$ jest:

- jednostkowy
- prostopadły do $\mathbf{T}$ i $\mathbf{N}$
- zorientowany w taki sposób, że $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ tworzą trójkę prawoskrętną

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

TRÓJŚCIAN FRENETA

Wektory $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ są ze sobą związane **wzorami Freneta-Serreta**:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\mathbf{N}$$

gdzie:

- **krzywizna krzywej** $$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(\lambda)\times\mathbf{r}''(\lambda)|}{|\mathbf{r}'(\lambda)|^3}$$
- **skręcenie krzywej** $$\tau = \frac{[\mathbf{r}'(\lambda),\mathbf{r}''(\lambda),\mathbf{r}'''(\lambda)]}{|\mathbf{r}'(\lambda)\times\mathbf{r}''(\lambda)|^2}$$

$$\mathbf{r}' = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda};\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda};\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right],\quad \mathbf{r}'' = \left[\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\lambda^2};\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\lambda^2};\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\lambda^2}\right],\quad \mathbf{r}''' = \left[\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\lambda^3};\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}\lambda^3};\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}\lambda^3}\right]$$

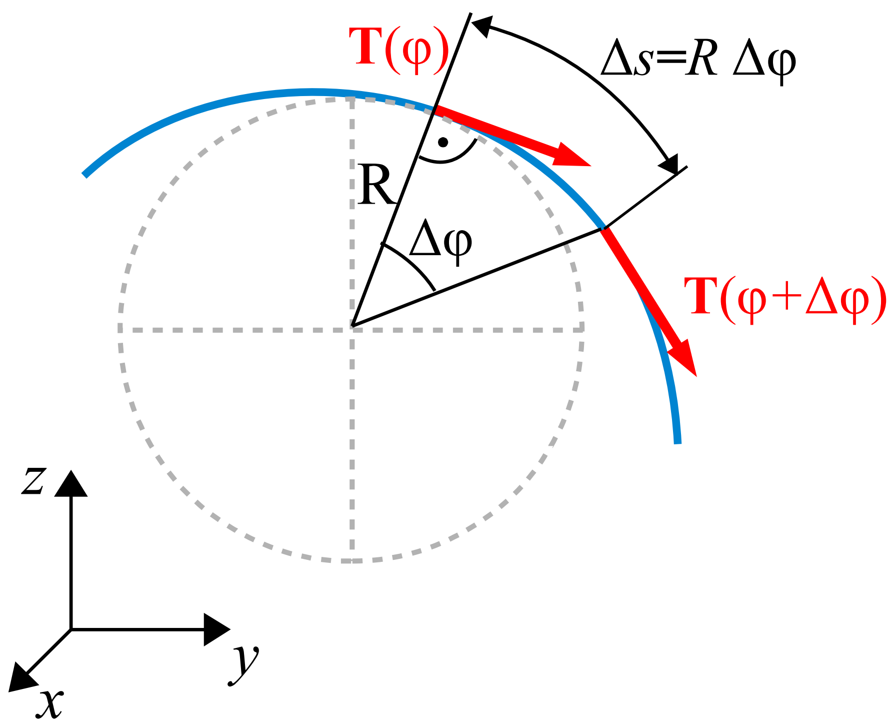
Parametr λ nie musi być parametrem naturalnym.

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

TRÓJŚCIAN FRENETA

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s} = \mathbf{N}\,\kappa$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s} \overset{?}{=} \kappa \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,\varphi} \overset{?}{=} \mathbf{N}$$

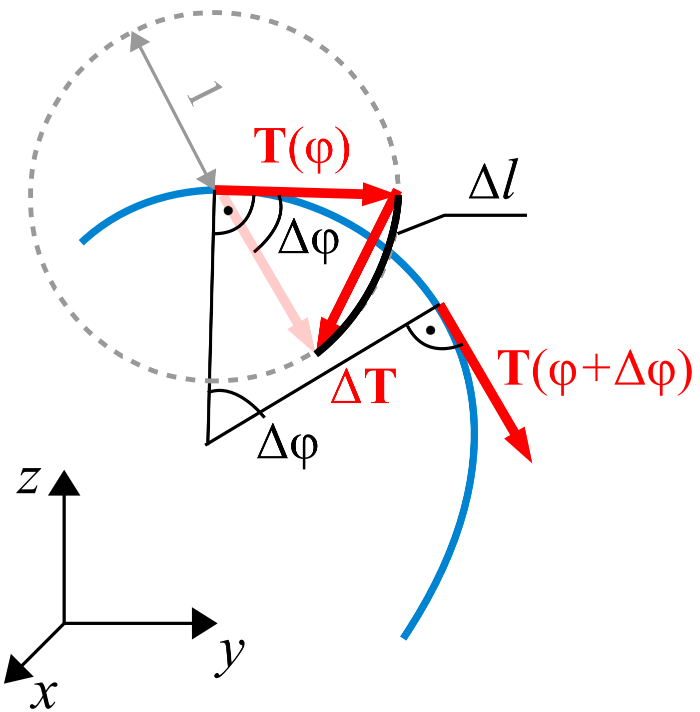


$$\frac{\Delta\,\varphi}{\Delta\,s} = \frac{\Delta\,\varphi}{R\,\Delta\,\varphi} = \frac{1}{R} = \kappa$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s} = \kappa = \frac{1}{R}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

TRÓJŚCIAN FRENETA



$$|\mathbf{T}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta L = |\mathbf{T}| \Delta\varphi = \Delta\varphi$$

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{T}|}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{T}|}{\Delta L} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\varphi} \| \mathbf{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\varphi} \uparrow\uparrow \mathbf{N}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\varphi} \| \mathbf{N} \;\wedge\; \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\varphi} \uparrow\uparrow \mathbf{N} \;\wedge\; \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = 1 = |\mathbf{N}|\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\varphi}}$$

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

© 2020 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0