

MECHANIKA TEORETYCZNA

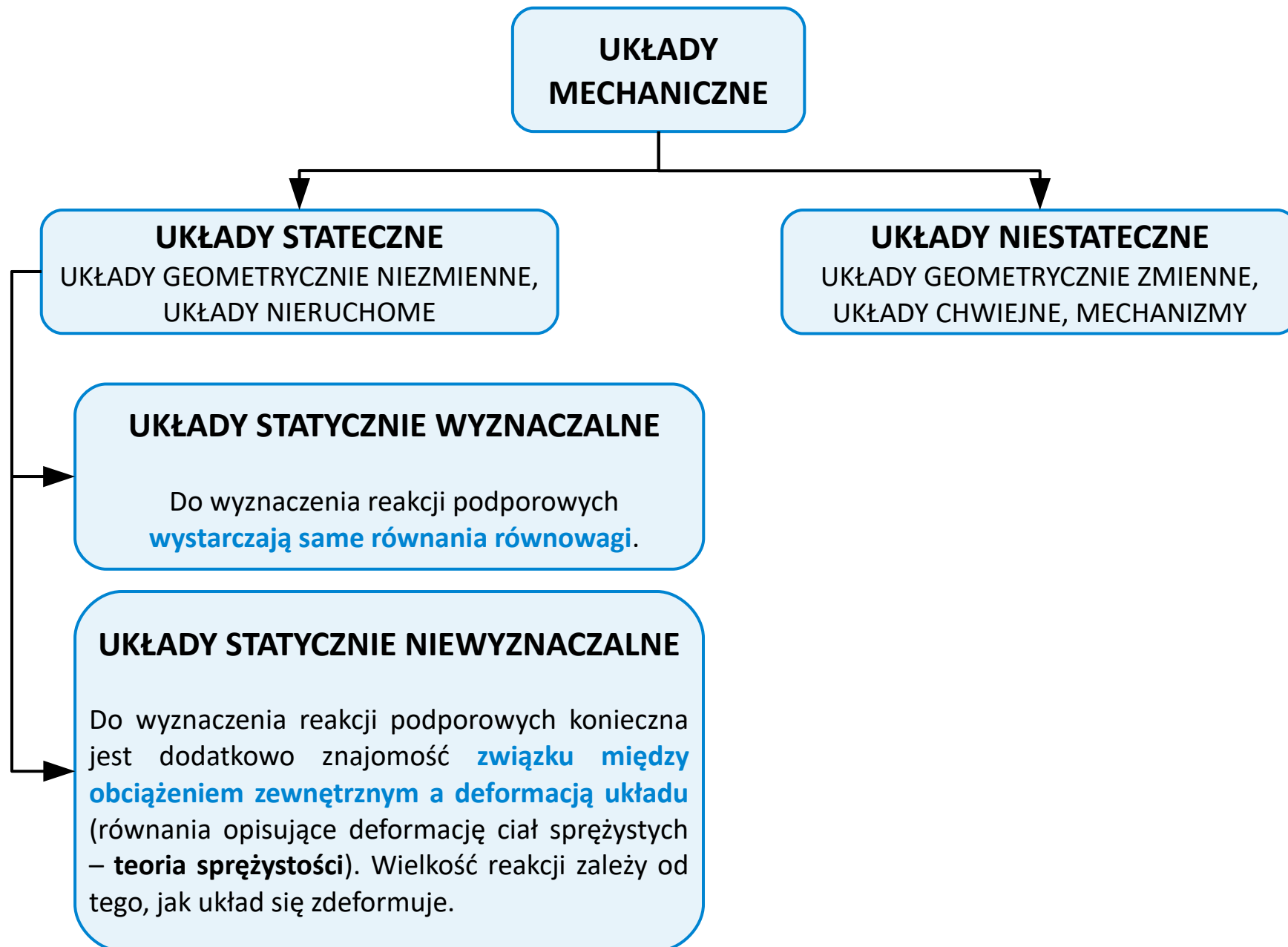
dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL

tel. 12 628 20 30

e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH



KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODY KLASYFIKACJI

- **Rachunek liczby stopni swobody** (metoda uproszczona)
- **Analiza kinematyczna** (metoda dokładna)

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – rachunek LSS

S – liczba stopni swobody układu swobodnego (bez podpór)

R – liczba reakcji podporowych

$S - R > 0 \Rightarrow$ **MECHANIZM**

$S - R = 0 \Rightarrow$ **UKŁAD STATYCZNIE WYZNACZALNY**

$S - R < 0 \Rightarrow$ **UKŁAD STATYCZNIE NIEWYZNACZALNY**

STOPIEŃ STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI: $SSN = R - S$

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – rachunek LSS

DLA UKŁADÓW **PRZESTRZENNYCH**:

$$S - R = 6B - 3P - R$$

DLA UKŁADÓW **PŁASKICH**:

$$S - R = 3B - 2P - R$$

B – liczba brył sztywnych

P – liczba przegubów pojedynczych

R – liczba reakcji podporowych

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

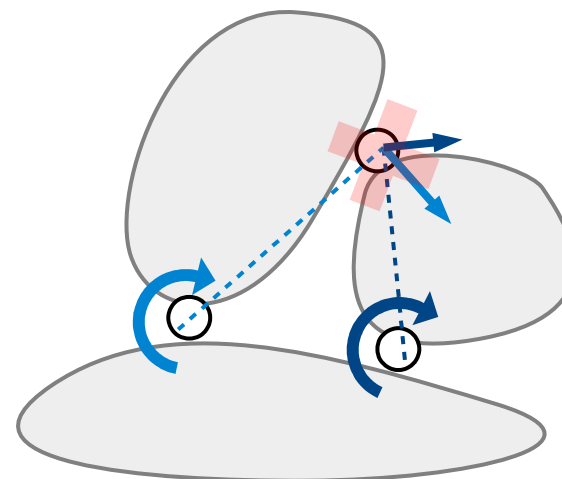
METODA UPROSZCZONA – rachunek LSS

$$S - R = 3B - 2P - R$$

B – liczba brył sztywnych

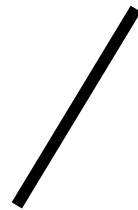
- **bryła sztywna** – zbiór punktów materialnych, taki że odległość między każdymi dwoma punktami tego zbioru jest stała w czasie ruchu.
- każdy pręt, łuk, rama, tarcza płaska, kratownica złożona z pól trójkątnych.

dowolne 3 bryły sztywne
połączone 3 niewspółliniowymi przegubami
stanowią bryłę sztywną.

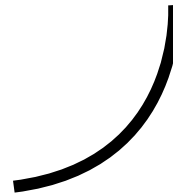


KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

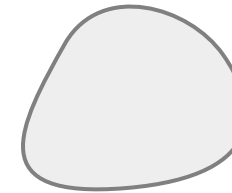
METODA UPROSZCZONA – rachunek LSS



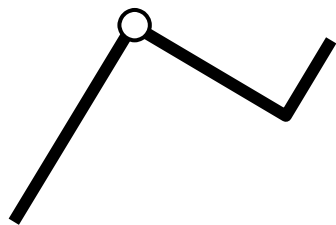
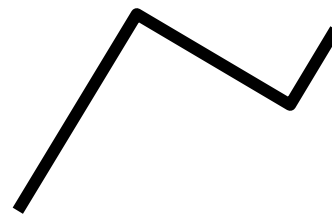
1 bryła



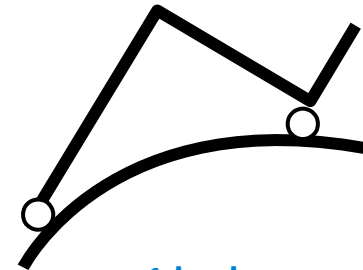
1 bryła



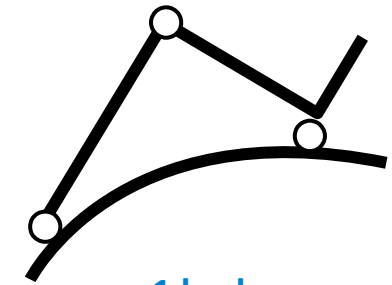
1 bryła

2 bryły
połączone
przegubem

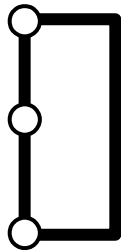
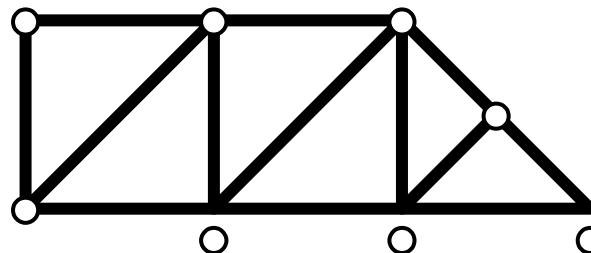
1 bryła



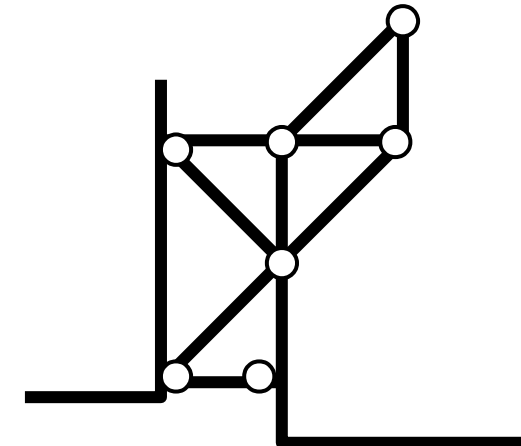
1 bryła



1 bryła

3 bryły
połączone
przegubami

1 bryła



1 bryła

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

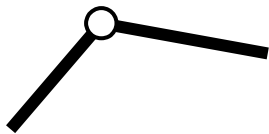
METODA UPROSZCZONA – rachunek LSS

$$S - R = 3B - 2P - R$$

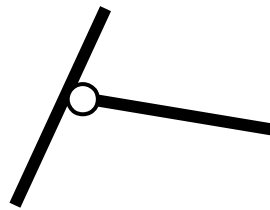
P – liczba przegubów pojedynczych

- **przegub pojedynczy** – przegub, w którym łączą się 2 bryły sztywne.
- **przegub n -krotny** – przegub, w którym łączą się $(n+1)$ brył sztywnych.

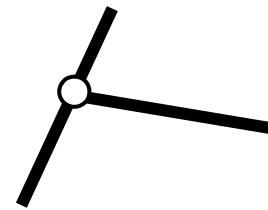
przegub n -krotny jest równoważny n przegubom pojedynczym



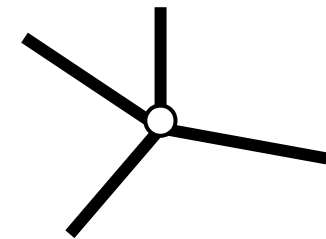
przegub pojedynczy



przegub pojedynczy



przegub 2-krotny

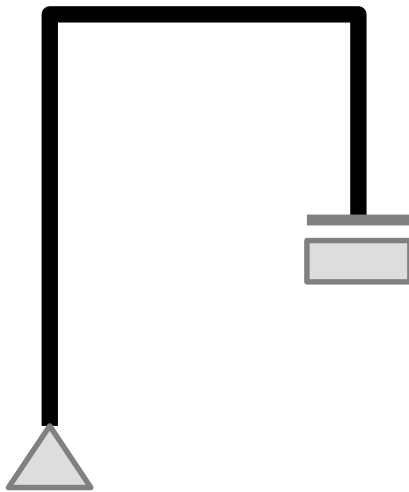


przegub 3-krotny

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – Przykład 1

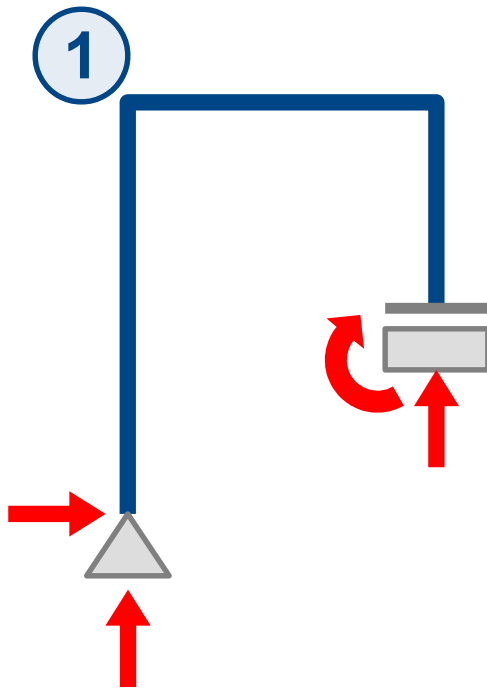
$$S - R = 3B - 2P - R$$



KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – Przykład 1

$$S - R = 3B - 2P - R$$



$$B = 1$$

$$P = 0$$

$$R = 4$$

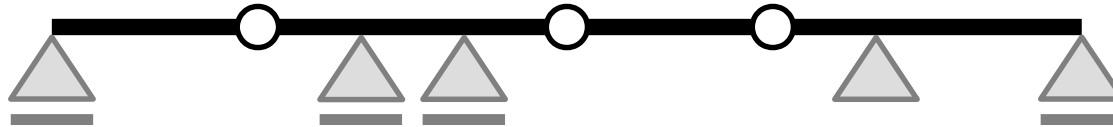
$$S - R = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1$$

$$S - R < 0 \Rightarrow \text{układ statycznie niewyznaczalny}$$

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – Przykład 2

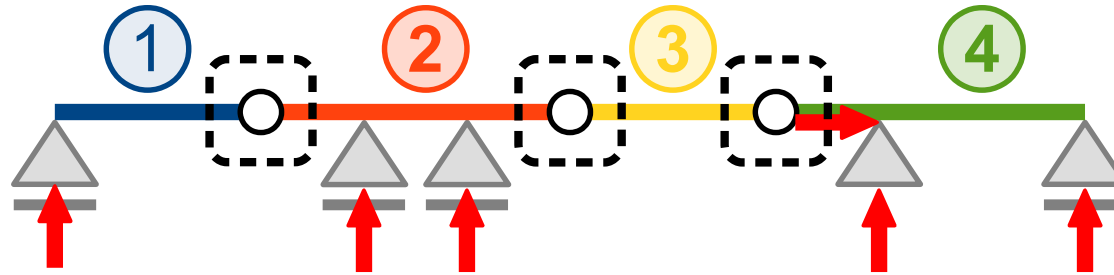
$$S - R = 3B - 2P - R$$



KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – Przykład 2

$$S - R = 3B - 2P - R$$



$$B = 4$$

$$P = 3$$

$$R = 6$$

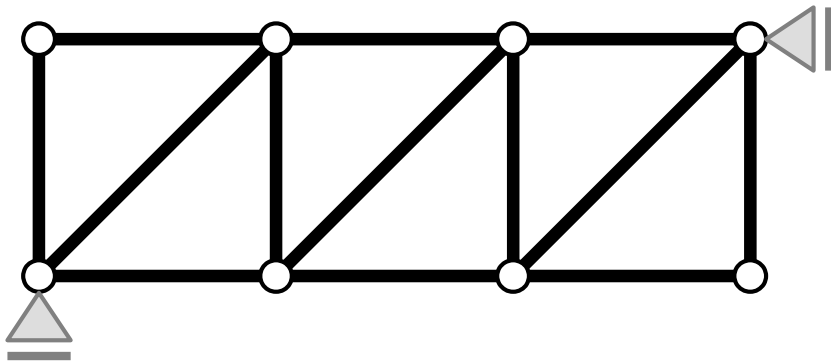
$$S - R = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$S - R = 0 \Rightarrow \text{układ statycznie wyznaczalny}$$

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – Przykład 3

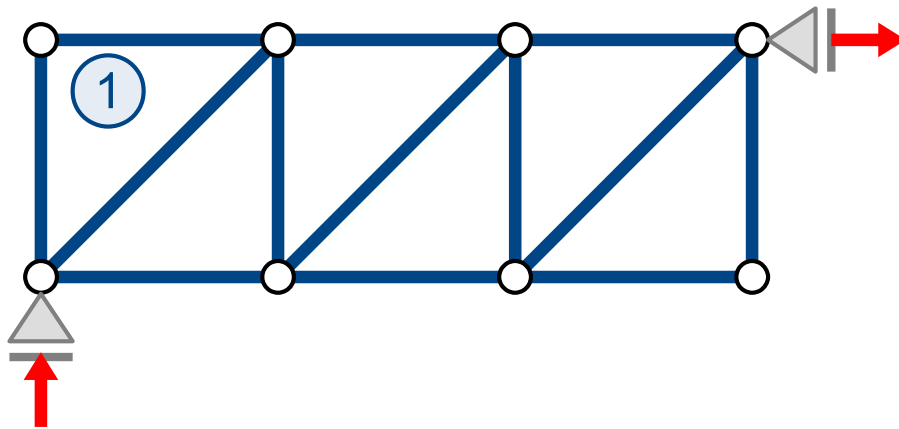
$$S - R = 3B - 2P - R$$



KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – Przykład 3

$$S - R = 3B - 2P - R$$



$$B = 1$$
$$P = 0$$
$$R = 2$$

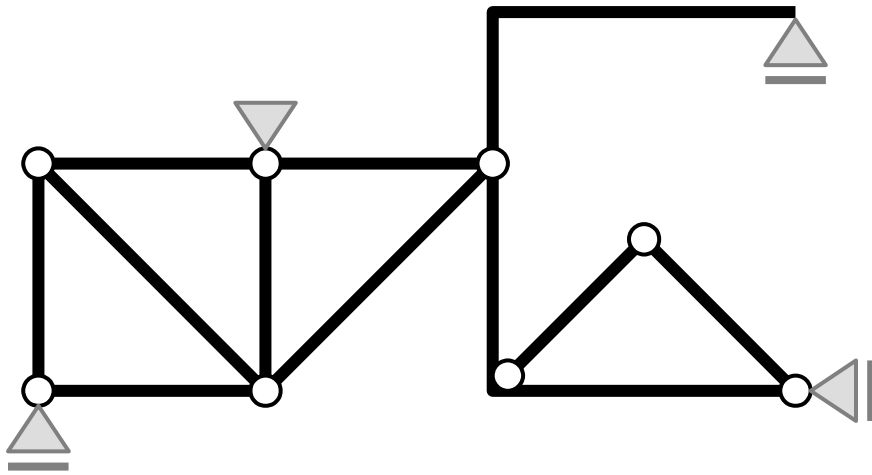
$$S - R = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 2 = 1$$

$$S - R > 0 \Rightarrow \text{mechanizm}$$

KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – Przykład 4

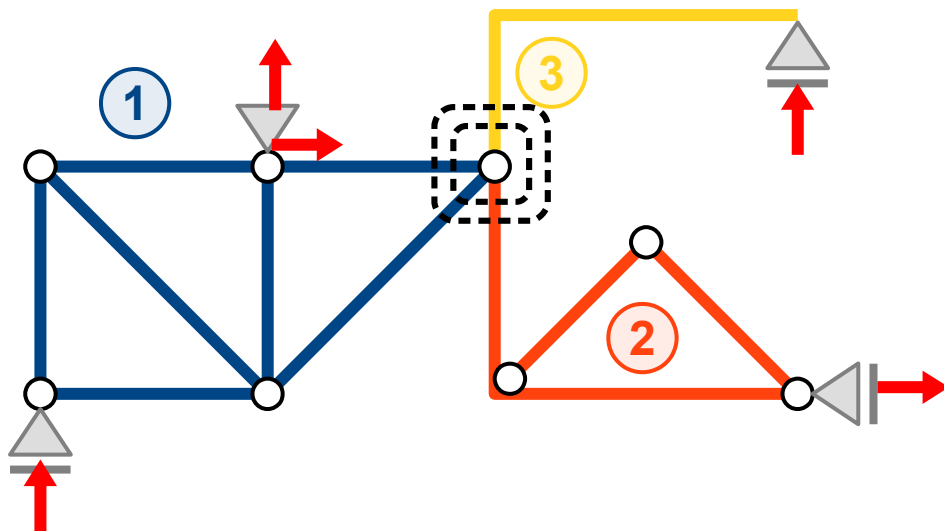
$$S - R = 3B - 2P - R$$



KLASYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

METODA UPROSZCZONA – Przykład 4

$$S - R = 3B - 2P - R$$



$$B = 3$$

$$P = 2$$

$$R = 5$$

$$S - R = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$$

$$S - R = 0 \Rightarrow \text{układ statycznie wyznaczalny}$$

ANALIZA KINEMATYCZNA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

ANALIZA KINEMATYCZNA

Rachunek stopni swobody jest jedynie analizą ilościową – pomija fakt, że niektóre wiązania mogą być zależne. W takiej sytuacji nawet **układy, dla których $S - R \leq 0$ mogą być układami chwiejnymi**. Ostatecznej odpowiedzi dotyczącej klasyfikacji układu dostarcza nam **analiza kinematyczna**.

Analiza kinematyczna – analiza założonych rozkładów prędkości, pod kątem ich zgodności z więzami nałożonymi na układ.

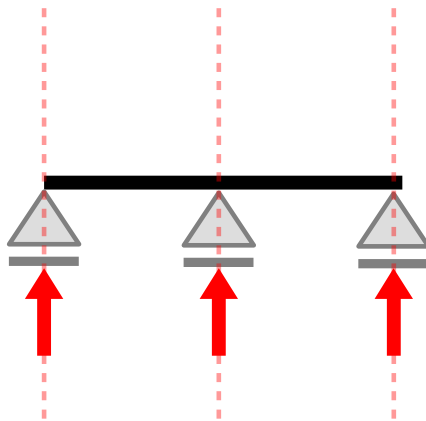
- Jeśli w toku analizy kinematycznej wykazano, że **nie istnieje rozkład prędkości zgodny z więzami**, to układ jest **stateczny**.
- Jeśli w toku analizy kinematycznej **znaleziono przynajmniej jeden rozkład prędkości zgodny z więzami**, to układ jest **chwiejny**.

ANALIZA KINEMATYCZNA

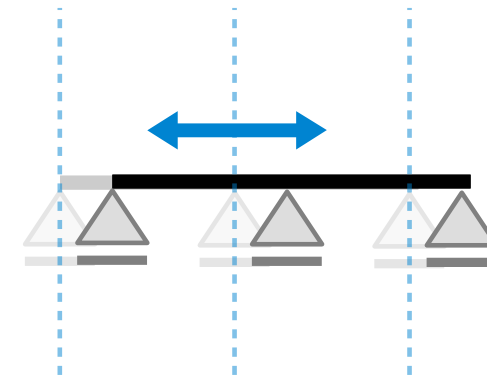
- Dla jednej z brył zakładamy ruch zgodny z przyłożonymi do niej więzami.
- Wyznaczamy ruch pozostałych brył, w szczególności:
 - poszukujemy potencjalnych **chwilowych środka obrotu** dla każdej bryły sztywnej na podstawie założonych prędkości oraz przyłożonych wiązań,
 - **prędkość kątową** bryły i odpowiadające jej **prędkości punktów** wyznaczamy na podstawie założonego ruchu pierwszej bryły oraz twierdzeń o rozkładzie prędkości w bryle sztywnej.
- Jeśli wyznaczony **rozkład prędkości jest zgodny z wszystkimi więzami**, to układ jest **mechanizmem**.
- Jeśli w toku analizy otrzymamy sprzeczność, to założony ruch jest niedopuszczalny. Sprzecznościami tymi mogą być:
 - konieczność wystąpienia **prędkości niedopuszczalnej** przez wiązanie,
 - **sprzeczność z twierdzeniami** o rozkładzie prędkości w bryle sztywnej.
- Jeśli ruch jest **niedopuszczalny**:
 - o bryle, od której zaczęto analizę, zakładamy, że jest **nieruchoma**,
 - **przeprowadzamy taką samą analizę od początku**, zakładając dla którejś z innych brył ruch zgodny z przyłożonymi do niej więzami.
- Jeśli **wykluczemy jakikolwiek ruch układu**, to jest on **geometrycznie niezmienny**.

ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 5



$$S - R = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0$$

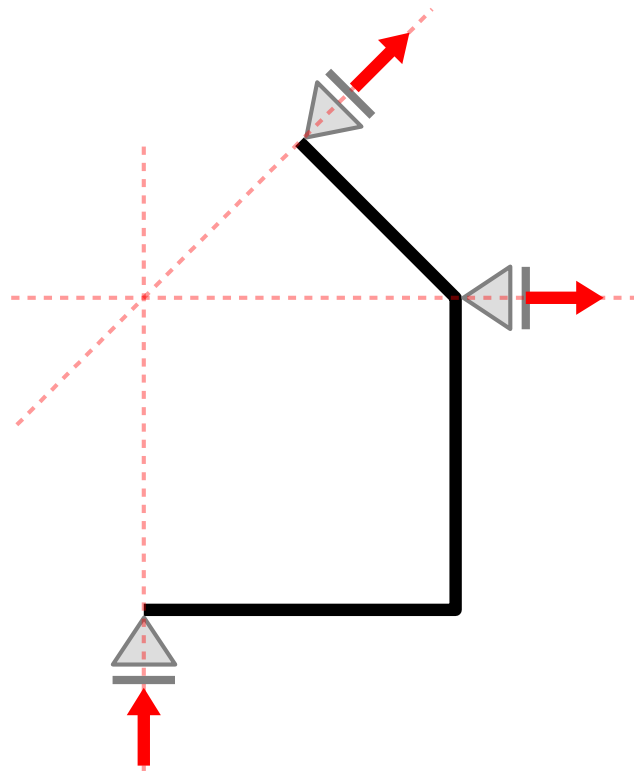


Jeśli **wszystkie siły reakcji są równoległe**, to ruch w kierunku prostopadłym do kierunku reakcji jest zawsze dopuszczalny.

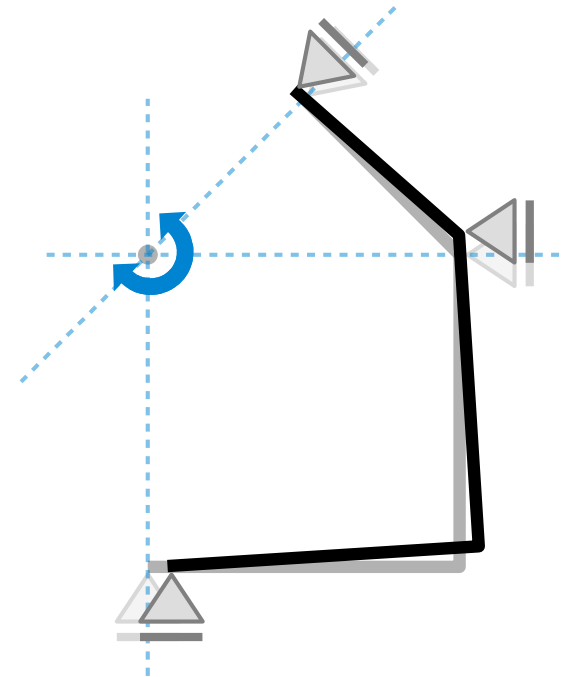
Układ jest mechanizmem.

ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 6



$$S - R = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0$$

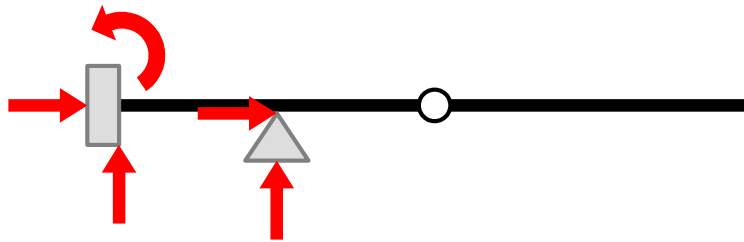


Jeśli siły reakcji stanowią układ zbieżny, to obrót wokół punktu zbieżności jest zawsze dopuszczalny.

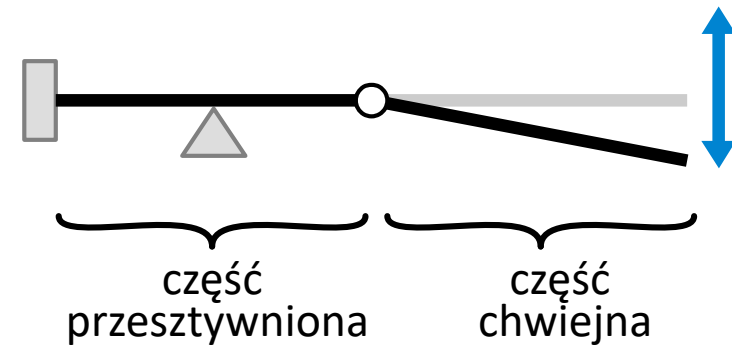
Układ jest mechanizmem.

ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 7



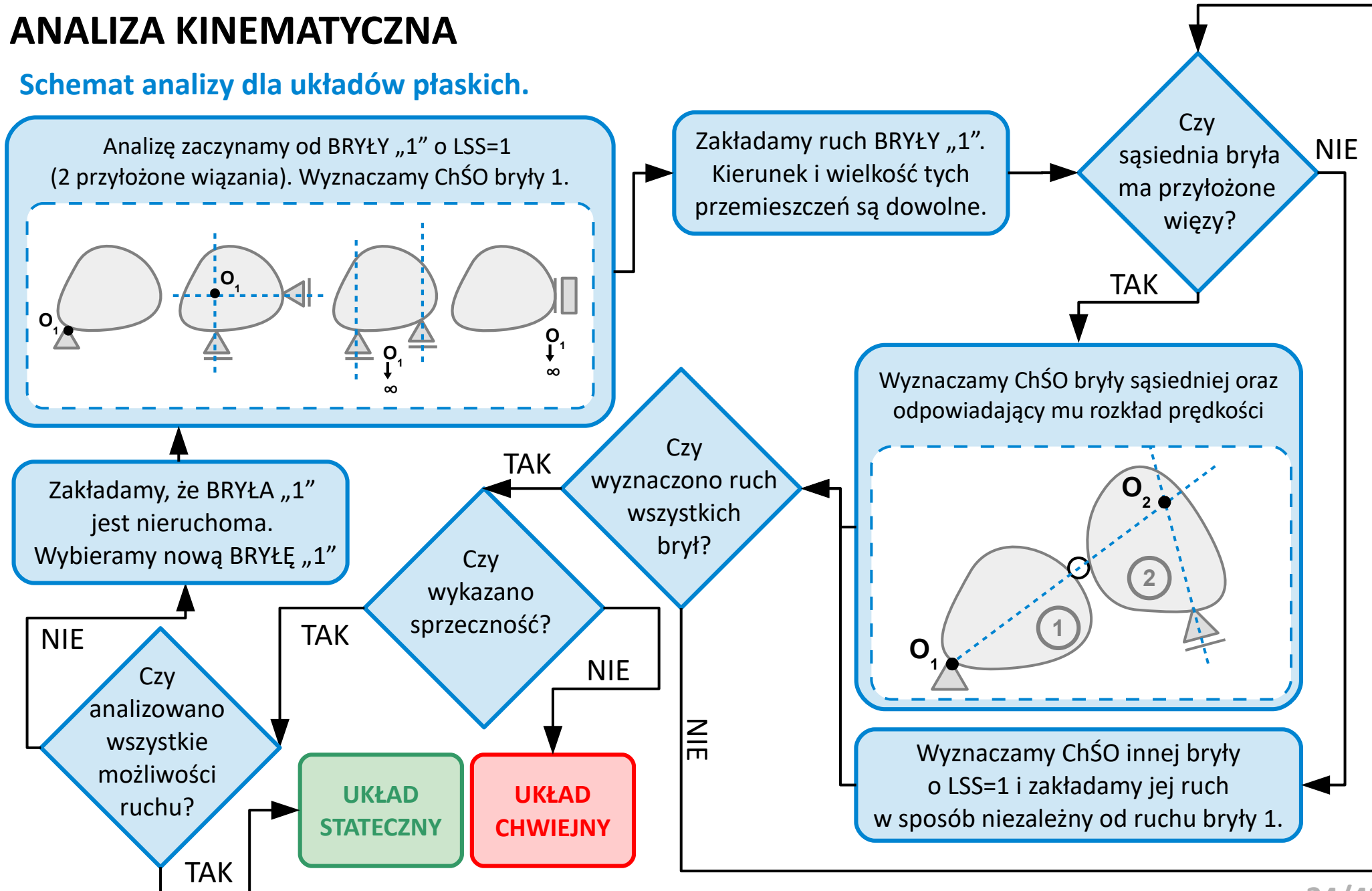
$$S - R = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 5 = -1$$



Układ jest mechanizmem.

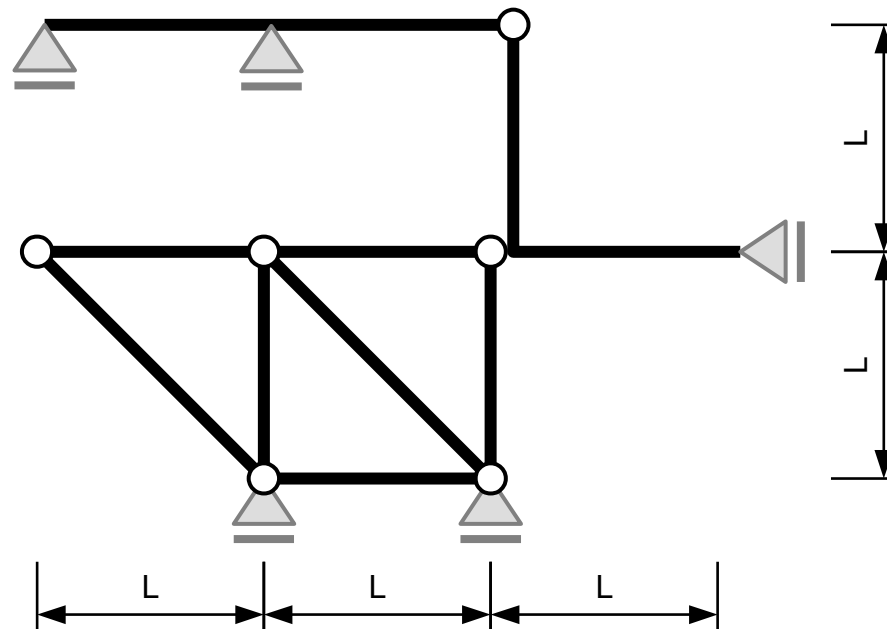
ANALIZA KINEMATYCZNA

Schemat analizy dla układów płaskich.



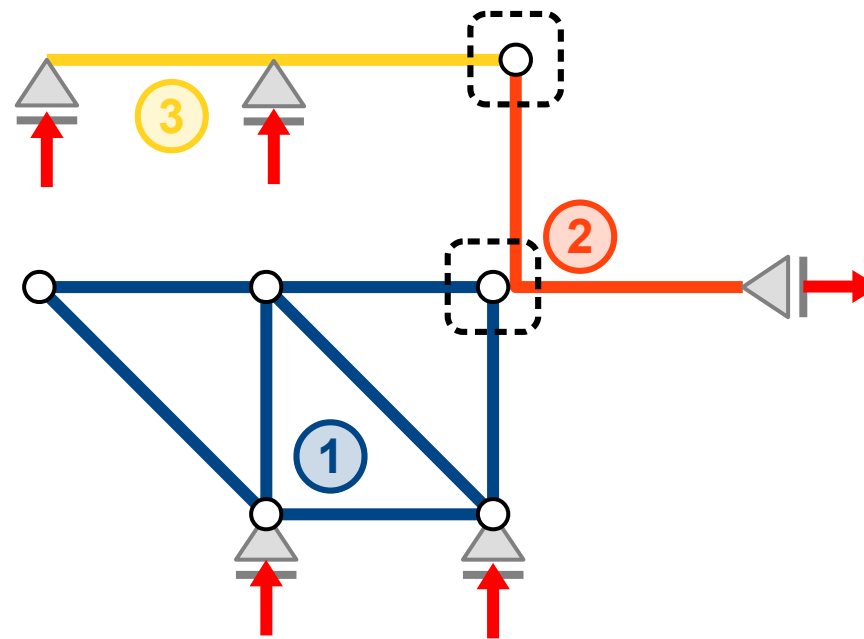
ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 8



ANALIZA KINEMATYCZNA

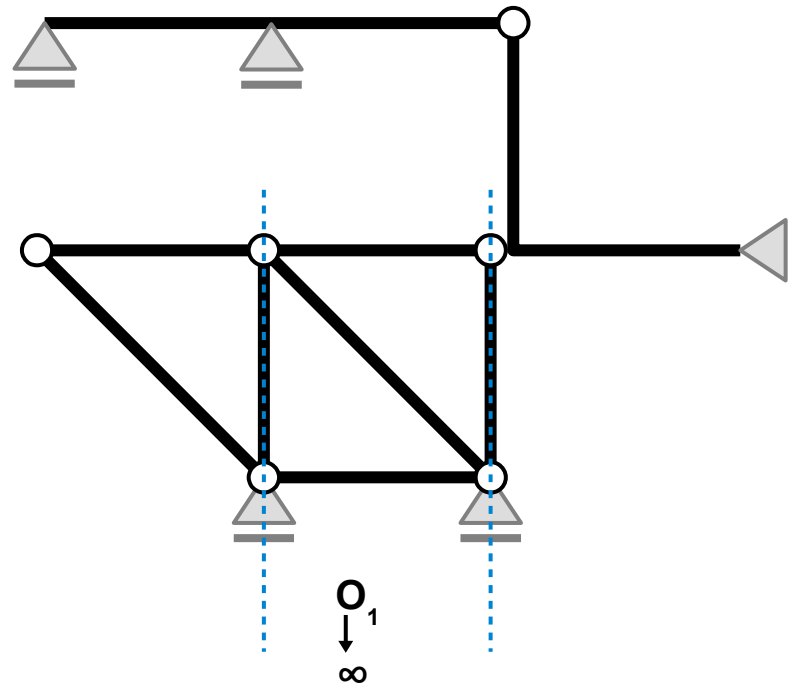
Przykład 8



$$S - R = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$$

ANALIZA KINEMATYCZNA

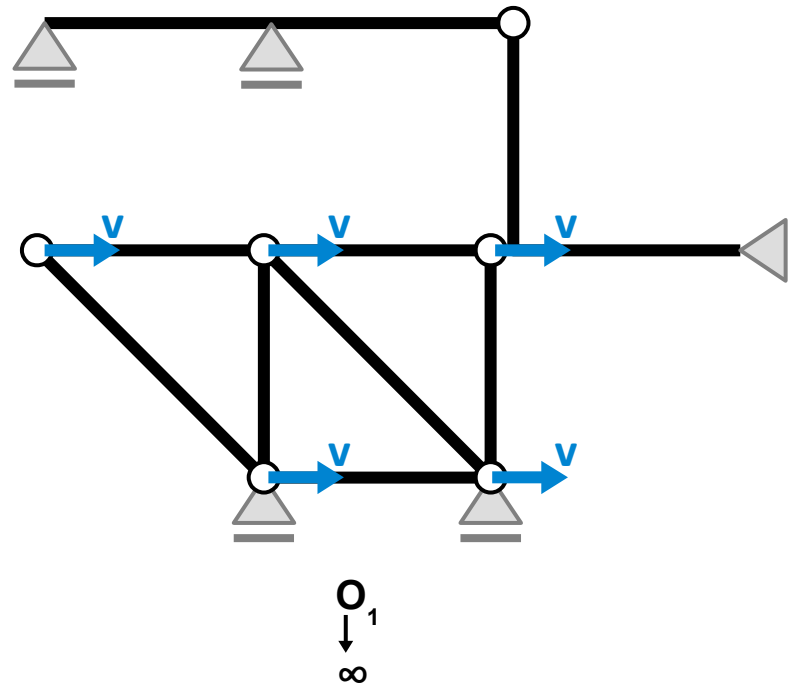
Przykład 8



- Analizę zaczynamy od bryły o $LSS=1$.
- Jeśli jest ich więcej, wybieramy dowolną z nich.
- Wyznaczamy chwilowy środek obrotu.

ANALIZA KINEMATYCZNA

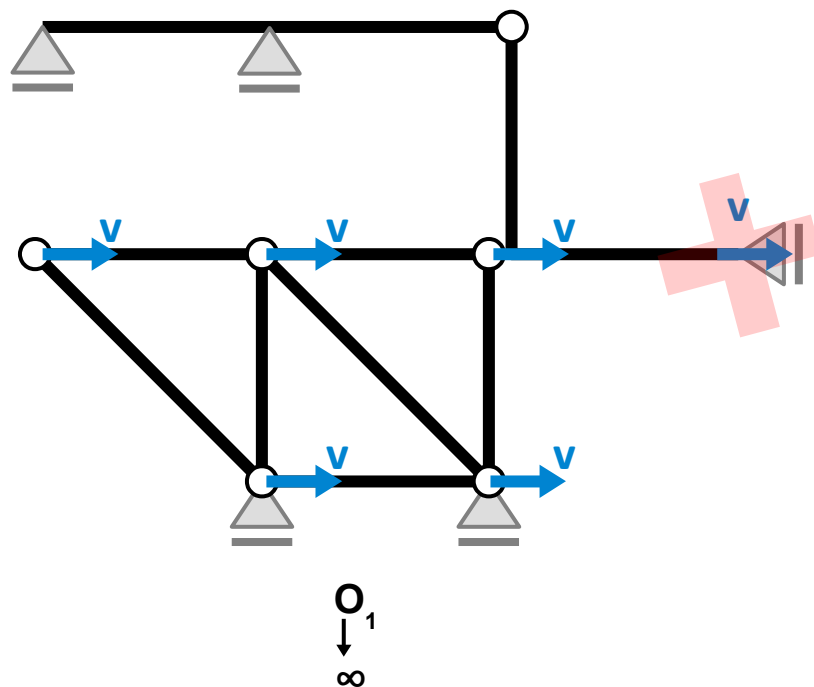
Przykład 8



- Zakładamy rozkład przemieszczeń wynikający z wyznaczonego chwilowego środka obrotu.
- Zwrot i wielkość przemieszczenia są dowolne.

ANALIZA KINEMATYCZNA

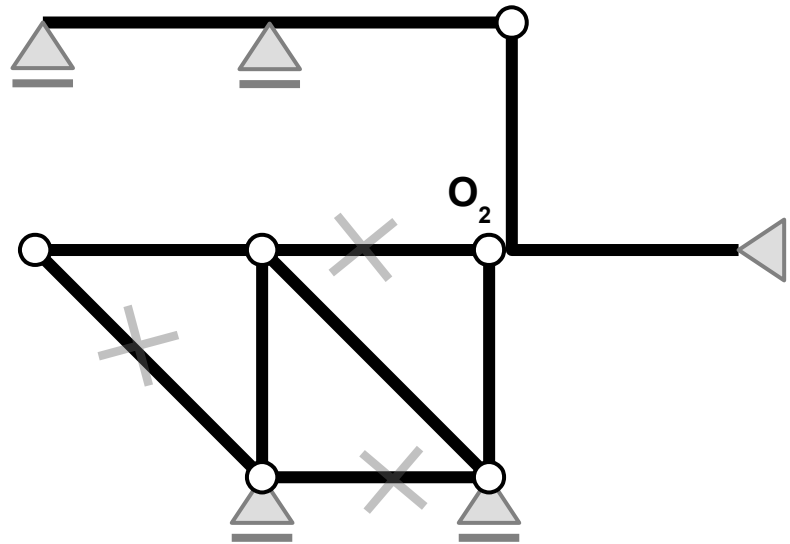
Przykład 8



- Rzuty prędkości punktów w bryle sztywnej na prostą łączącą te punkty są równe.
- Prędkość taka jest niedopuszczalna na podporze.
- Założony ruch jest niedopuszczalny przez podpory.
- Jest to jedyny ruch, jaki może wykonywać bryła 1.
- Bryła 1 musi być nieruchoma.

ANALIZA KINEMATYCZNA

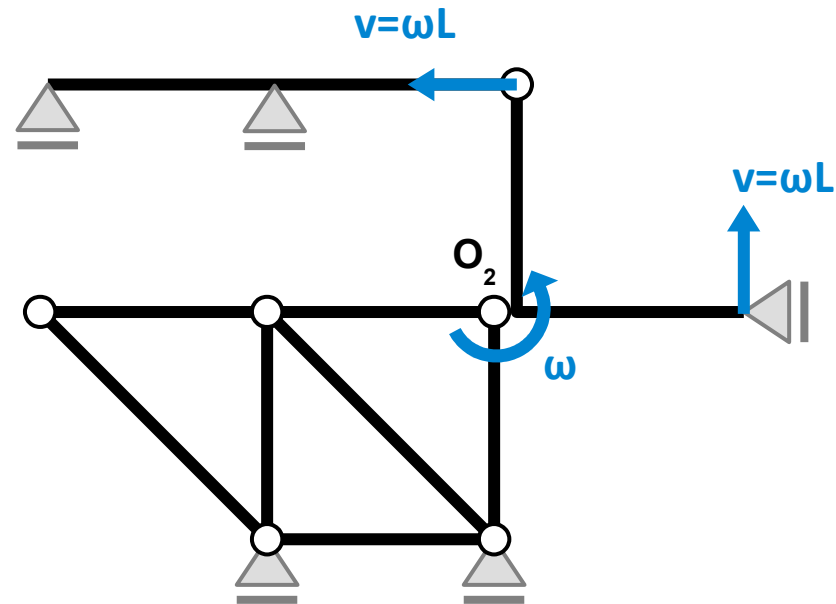
Przykład 8



- Przegub łączący bryłę 1 i 2 jest nieruchomy – musi zatem być chwilowym środkiem obrotu bryły 2, o ile tylko bryła 2 może się w ogóle poruszać.

ANALIZA KINEMATYCZNA

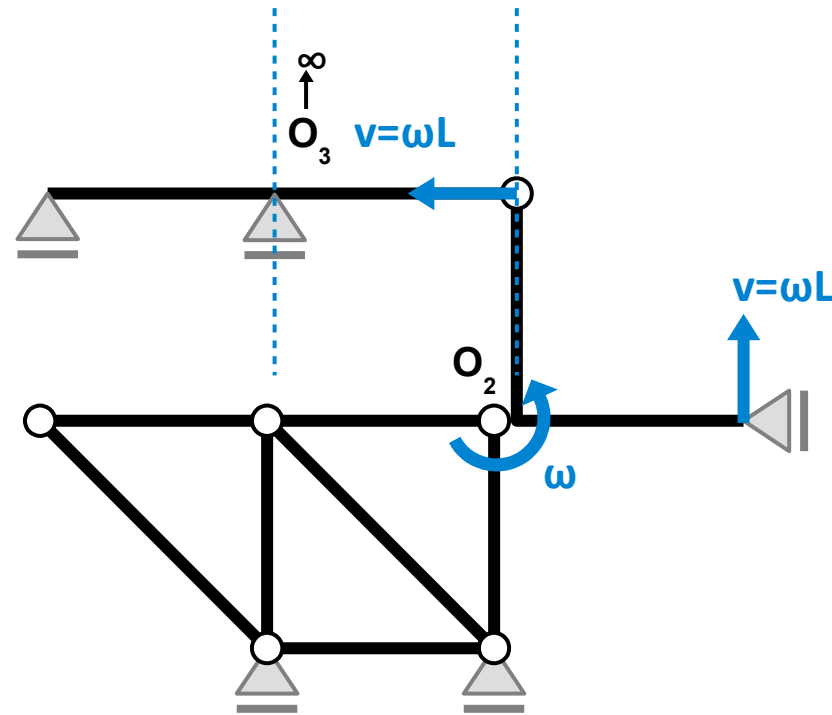
Przykład 8



- Wyznaczamy rozkład prędkości dla bryły 2.

ANALIZA KINEMATYCZNA

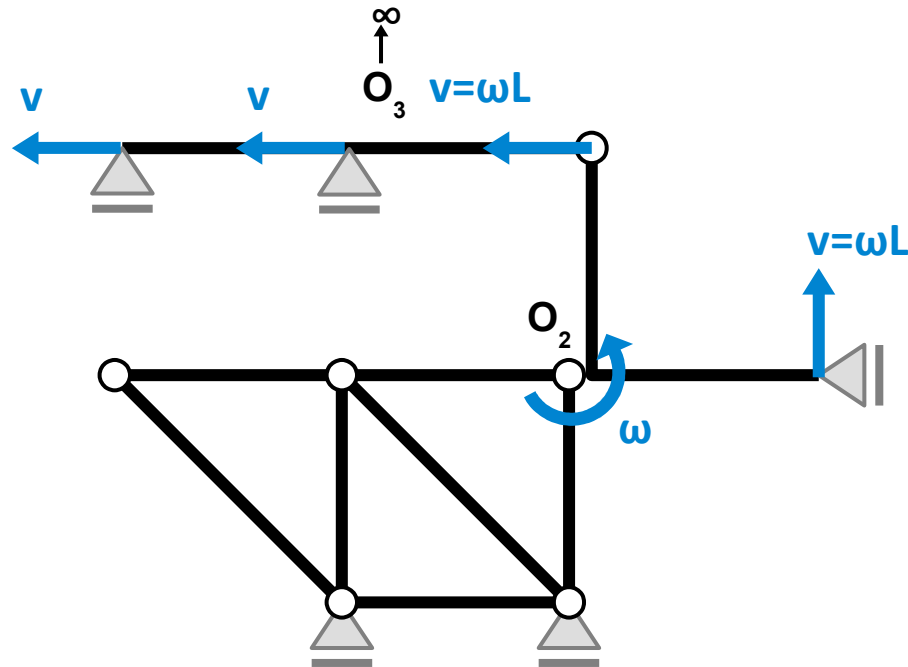
Przykład 8



- Wyznaczamy chwilowy środek obrotu bryły 3.

ANALIZA KINEMATYCZNA

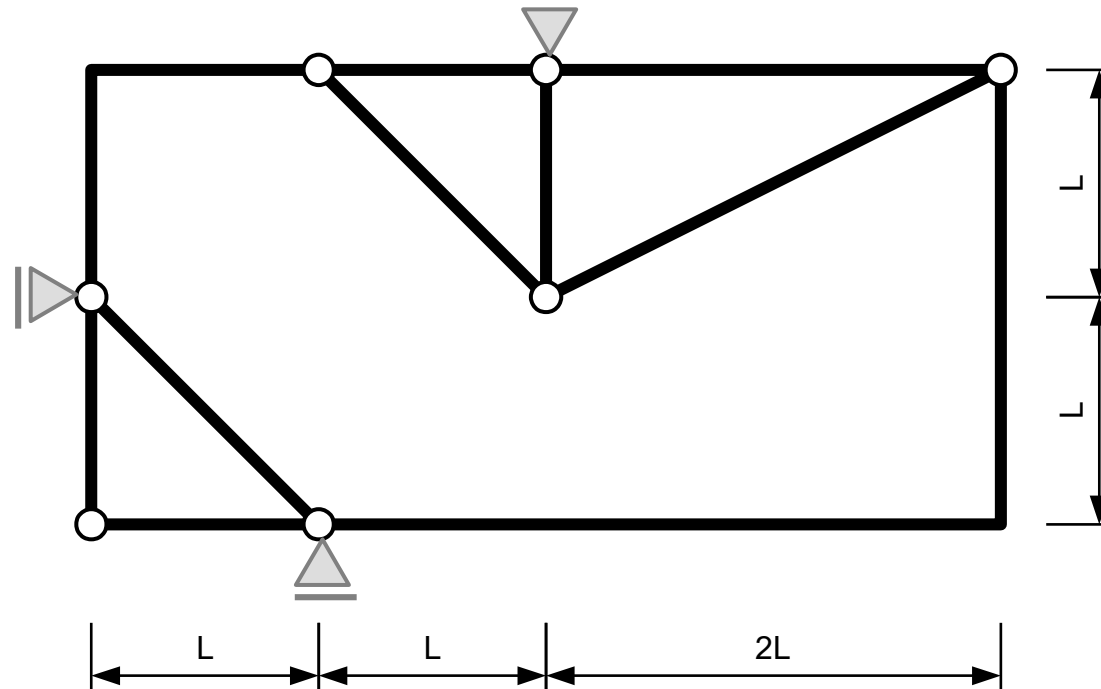
Przykład 8



- Wyznaczamy rozkład prędkości dla punktów bryły 3.
- Założony ruch jest dopuszczalny przez więzy.
- **Układ jest mechanizmem.**

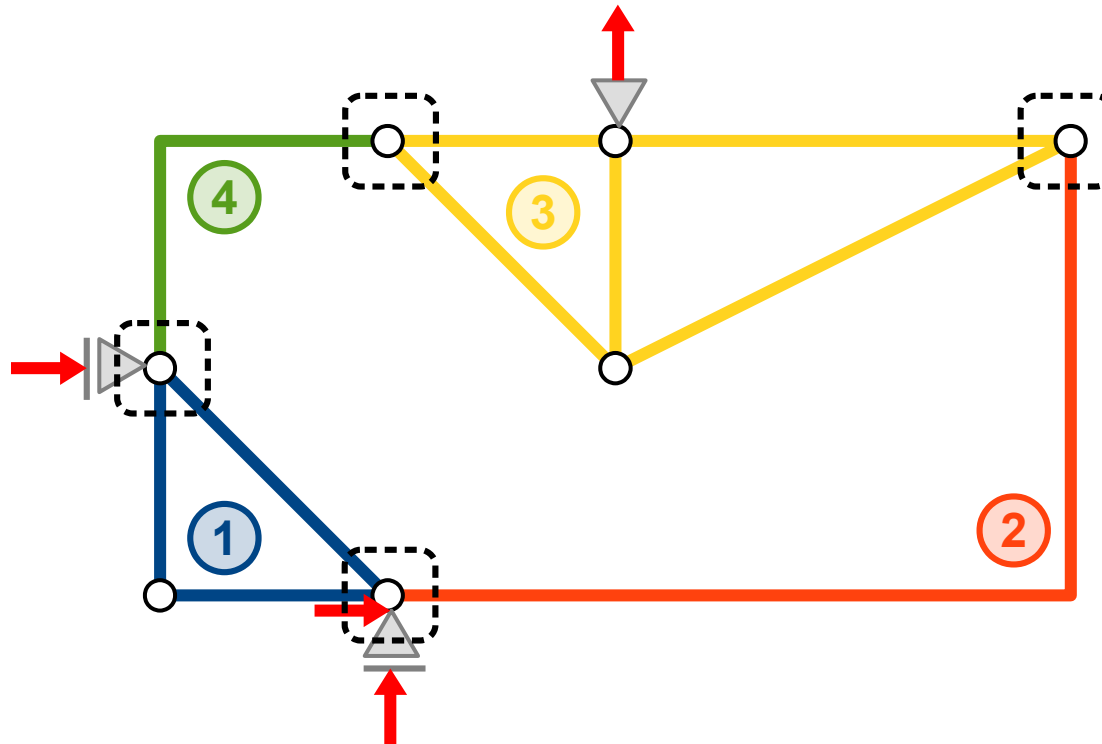
ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 9



ANALIZA KINEMATYCZNA

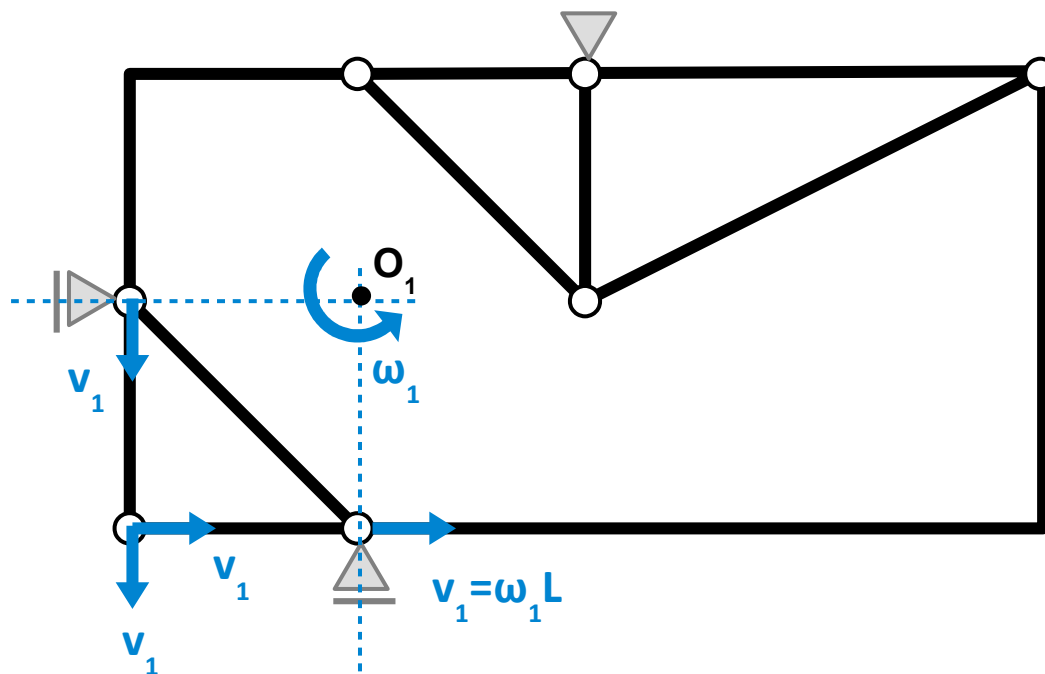
Przykład 9



$$S - R = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 4 = 0$$

ANALIZA KINEMATYCZNA

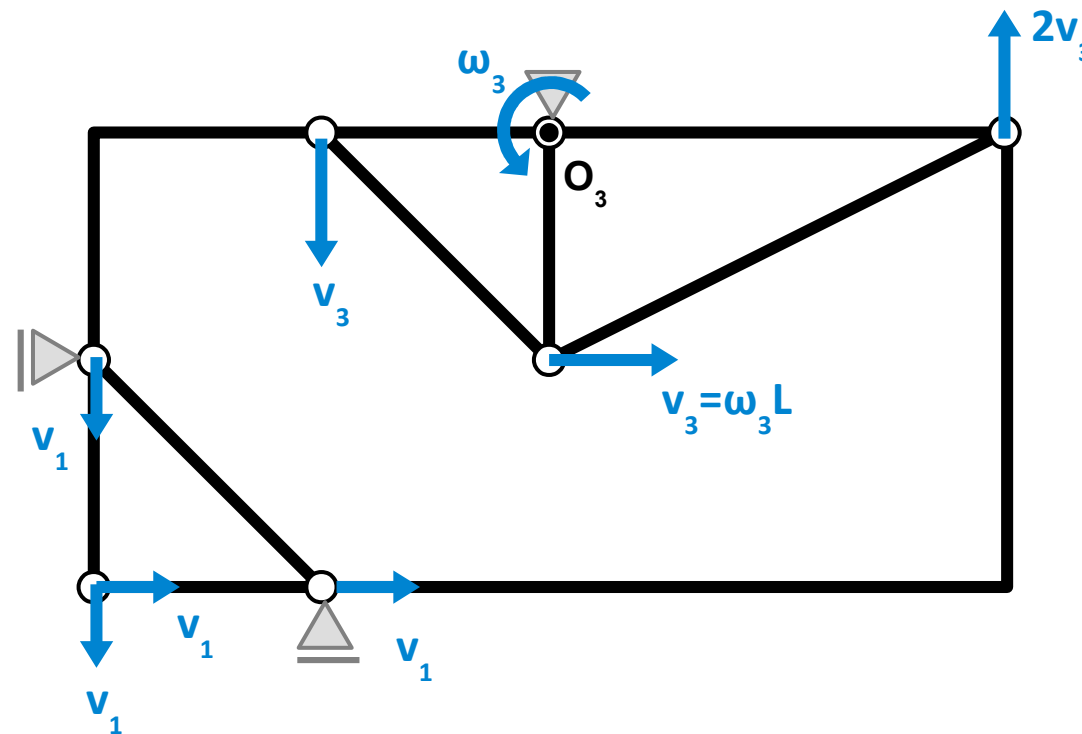
Przykład 9



- Wyznaczamy chwilowy środek obrotu bryły 1.
- Wyznaczamy rozkład prędkości dla punktów bryły 1.

ANALIZA KINEMATYCZNA

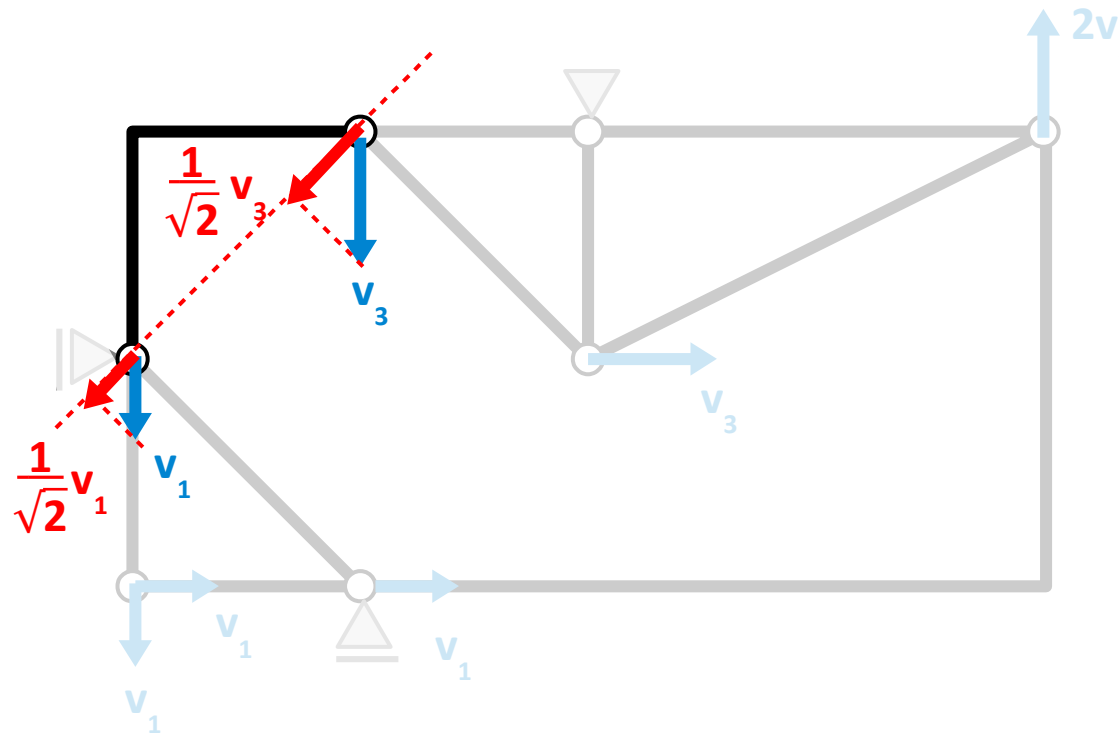
Przykład 9



- Wyznaczamy chwilowy środek obrotu bryły 3.
- Wyznaczamy rozkład prędkości dla punktów bryły 3.

ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 9

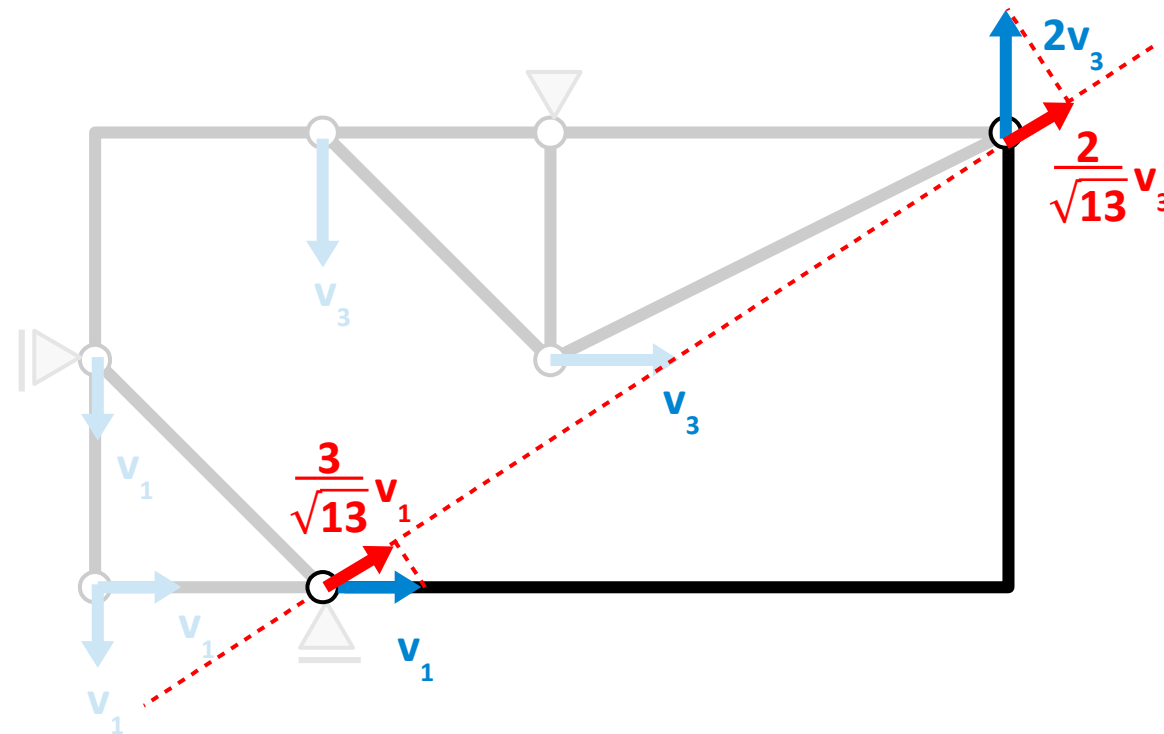


$$\frac{1}{\sqrt{2}}v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$$

- Rzuty prędkości punktów bryły 4 na kierunek łączący te punkty musi być taki sam.

ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 9



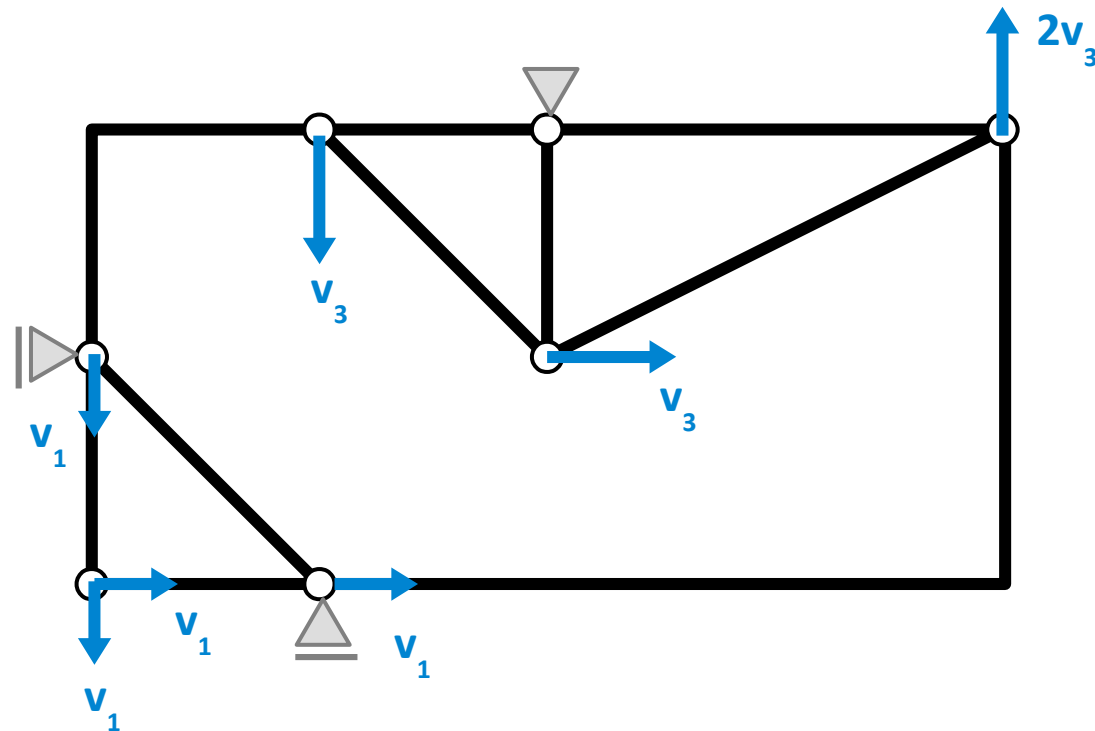
$$\frac{1}{\sqrt{2}}v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}}v_1 = \frac{2}{\sqrt{13}}v_3$$

- Rzuty prędkości punktów bryły 2 na kierunek łączący te punkty musi być taki sam.

ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 9

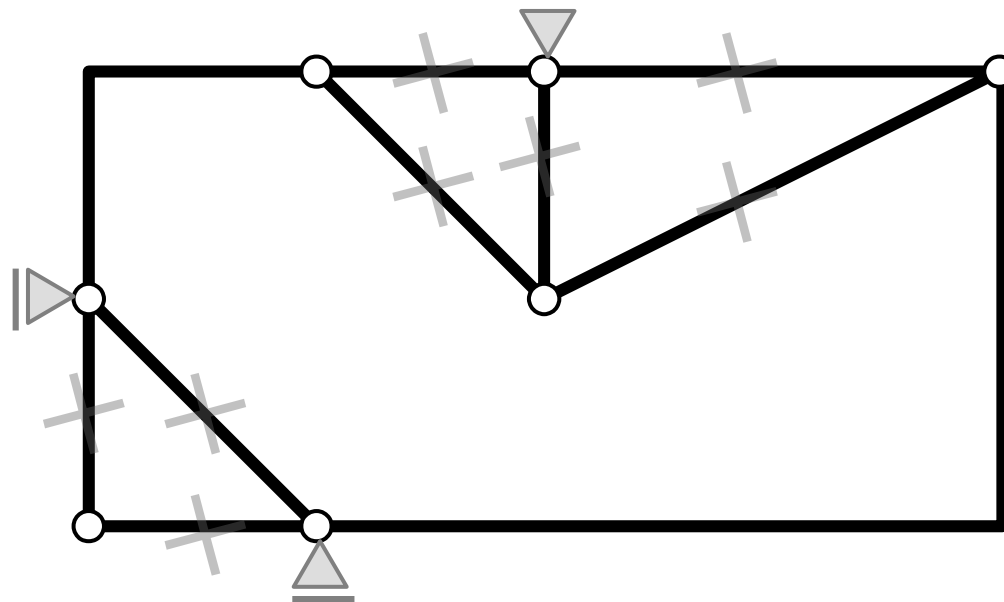


$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_3 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} v_1 = \frac{2}{\sqrt{13}} v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

- Jedynymi dopuszczalnymi prędkościami dla takiego schematu są prędkości zerowe
- Założony **ruch jest niedopuszczalny**.

ANALIZA KINEMATYCZNA

Przykład 9



- Zakładamy, że bryły 1 i 3 są nieruchome.
- Każda z brył 2 i 4 jest unieruchomiona w dwóch punktach.
- Bryła na płaszczyźnie unieruchomiona w dwóch punktach jest nieruchoma.
- Nie istnieje niezerowy rozkład prędkości zgodny z więzami.
- Układ jest **statycznie wyznaczalny**.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ