MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

WARUNKI RÓWNOWAGI W WYBRANYCH PRZYPADKACH

WARUNKI RÓWNOWAGI BRYŁY OBCIĄŻONEJ DWIEMA SIŁAMI

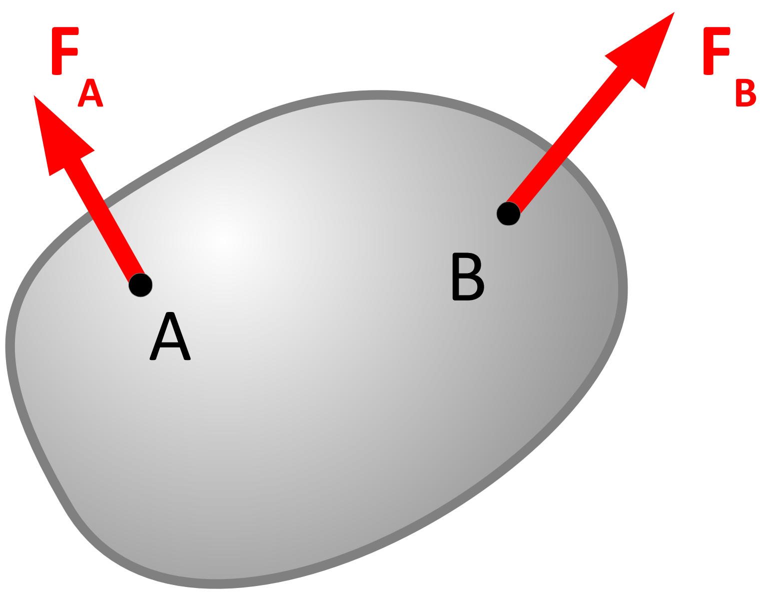
Założenia

$$\mathbf{F}_A \neq \mathbf{0}\ ,\quad \mathbf{F}_B \neq \mathbf{0}\ ,\quad \mathrm{A} \neq \mathrm{B}$$

Równania równowagi:

$$\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$$

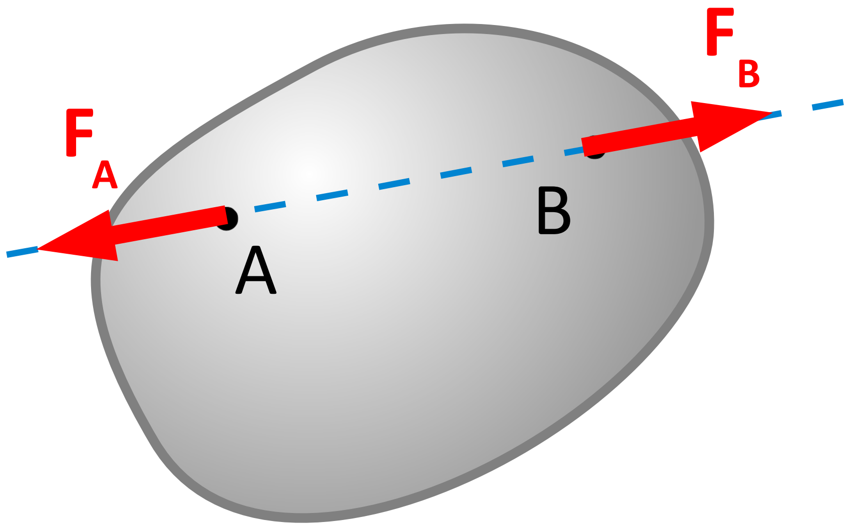
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_B \times \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_B \| \overrightarrow{\mathrm{BA}}$$



WARUNKI RÓWNOWAGI BRYŁY OBCIĄŻONEJ DWIEMA SIŁAMI

Bryła sztywna obciążona dwiema siłami jest w równowadze wtedy i tylko wtedy gdy **siły te są przeciwne**, a ich **prosta działania zawiera punkty** przyłożenia tych sił.

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B \qquad \mathbf{F}_A \| \overrightarrow{AB}\,, \quad \mathbf{F}_B \| \overrightarrow{AB}$$



WARUNKI RÓWNOWAGI BRYŁY OBCIĄŻONEJ TRZEMA SIŁAMI

Moment układu w równowadze względem dowolnej prostej jest zerowy.

Rozważmy moment układu względem prostej zawierającej odcinek AB:

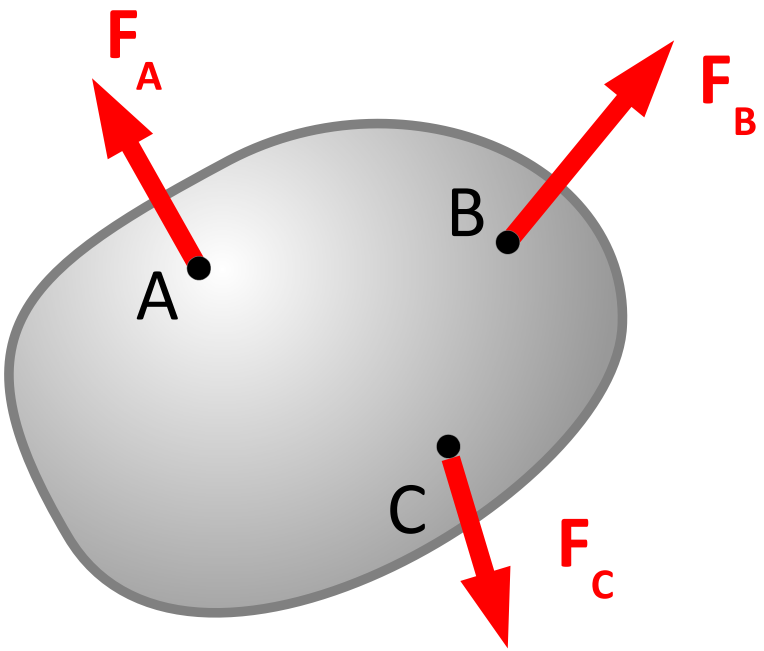
$$\mathbf{M}_{\mathbf{AB}}\left(\mathbf{F}_{A}\right)=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_{\mathbf{AB}}\left(\mathbf{F}_{B}\right)=\mathbf{0}$$

Moment niezerowej siły względem prostej jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy prosta ta oraz prosta działania siły wyznaczają płaszczyznę (są równoległe lub przecinają się)

Siła $\mathbf{F}_{C}$ musi leżeć w płaszczyźnie ABC.

Powtarzamy rozumowanie dla prostych wyznaczanych przez pozostałe pary punktów zaczepienia sił.

WNIOSEK: **Wszystkie siły leżą w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty zaczepienia tych sił.**



WARUNKI RÓWNOWAGI BRYŁY OBCIĄŻONEJ TRZEMA SIŁAMI

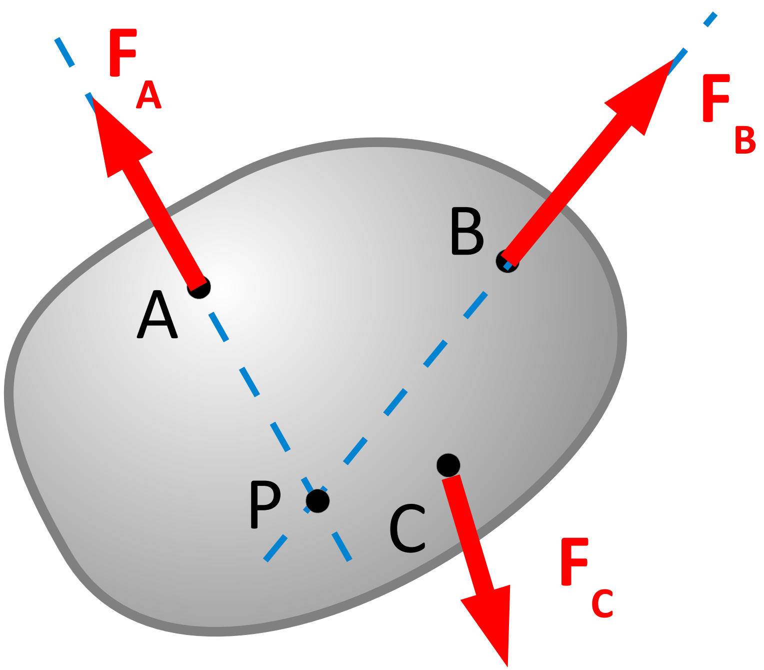
Załóżmy, że siły nie są równoległe. Zatem istnieją punkty przecięcia się ich prostych działania.

Obliczmy moment układu względem punktu P przecięcia się prostych działania sił $\mathbf{F}_A$ i $\mathbf{F}_B$:

$$\mathbf{M}_P(\mathbf{F}_A) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_P(\mathbf{F}_B) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_P(\mathbf{F}_C) = \mathbf{F}_C \times \vec{\mathrm{CP}} = \mathbf{0}$$

Jest to możliwe, gdy:

- $\vec{\mathrm{CP}} = \mathbf{0}$, tj. siły stanowią układ zbieżny,
- $\mathbf{F}_C \| \vec{\mathrm{CP}} = \mathbf{0}$, tj. siły stanowią układ zbieżny.



Rozumowanie jest takie samo w przypadku obliczania momentu układu względem punktu przecięcia się pozostałych prostych działania tych sił.

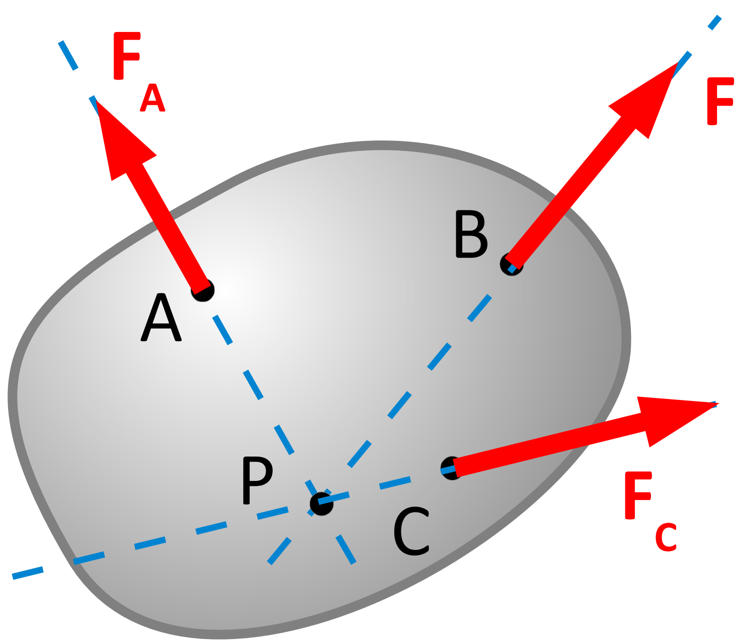
Podsumowując:

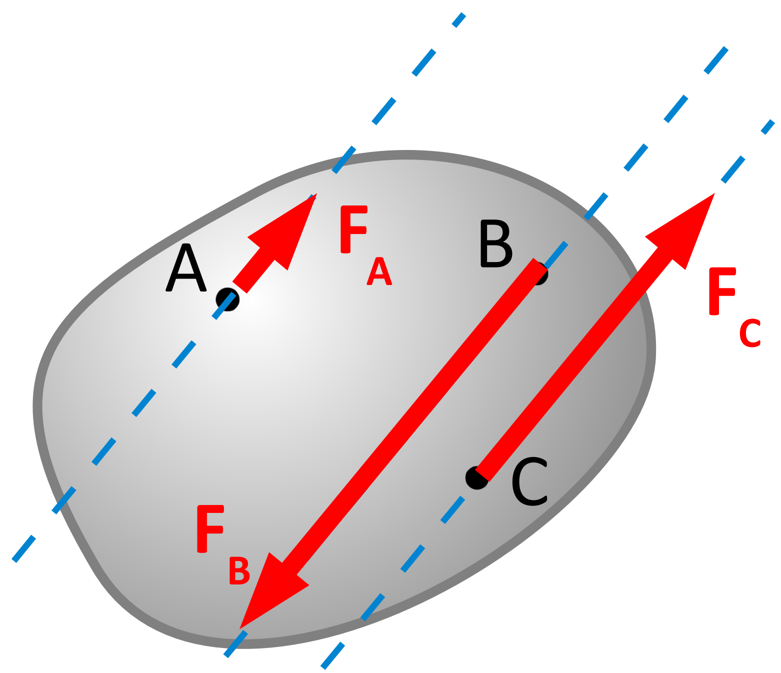
- **siły leżą w jednej płaszczyźnie i stanowią układ zbieżny**
- **siły leżą w jednej płaszczyźnie i są równoległe**

WARUNKI RÓWNOWAGI BRYŁY OBCIĄŻONEJ TRZEMA SIŁAMI

Bryła sztywna obciążona trzema siłami jest w równowadze wtedy i tylko wtedy gdy **siły te leżą w jednej płaszczyźnie**, i albo stanowią układ **zbieżny**, albo są **równoległe**.

(w każdym przypadku ich suma i moment muszą być zerowe)





WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH
KORZYSTAJĄC Z
RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

3 równania równowagi dla układu płaskiego

1. Suma sił poziomych
2. Suma sił pionowych
3. Moment względem P

1. Moment względem A
2. Moment względem B
3. Rzut sumy na prostą zawierającą A i B.

1. Moment względem A
2. Moment względem B
3. Moment względem C

(A,B,C niewspółliniowe)

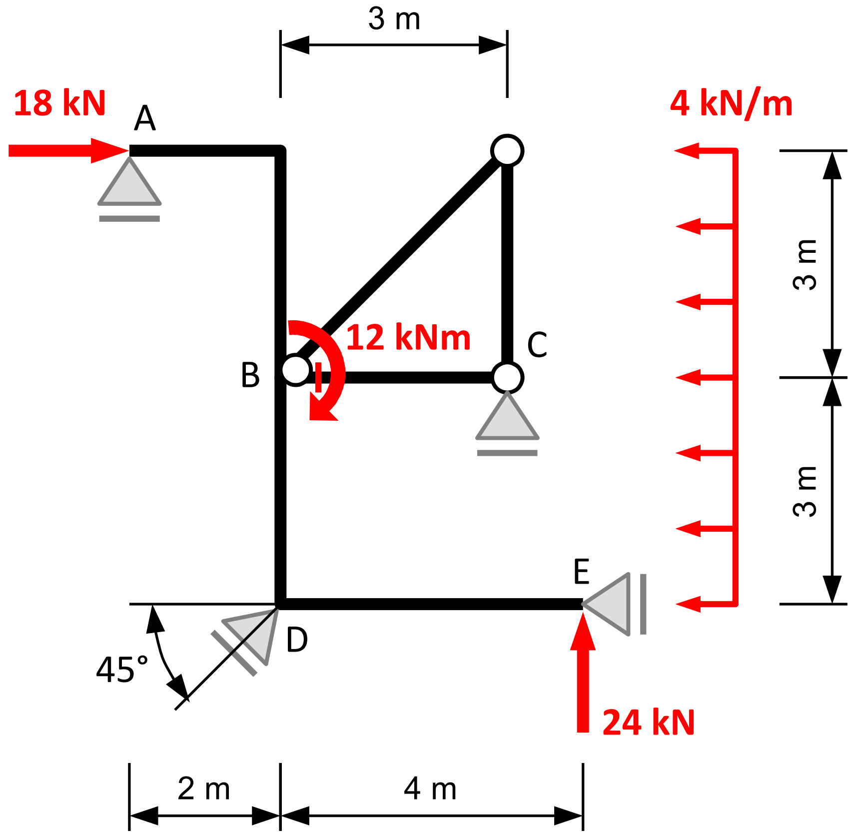
+ 1 dodatkowe niezależne równanie równowagi
na każdy przegub pojedynczy

UWAGI:

- W układach statycznie wyznaczalnych niezależnych równań równowagi jest zawsze tyle i nieznanych reakcji podporowych
- Nie da się wyznaczyć reakcji podporowych z układu równań zależnych.
- Równania na momenty względem 4 punktów od całości obciążenia zawsze stanowią układ zależny.
- Równania na moment z jednej i z drugiej strony przegubu to równania niezależne od siebie, ale zależne od podstawowych równań równowagi.

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

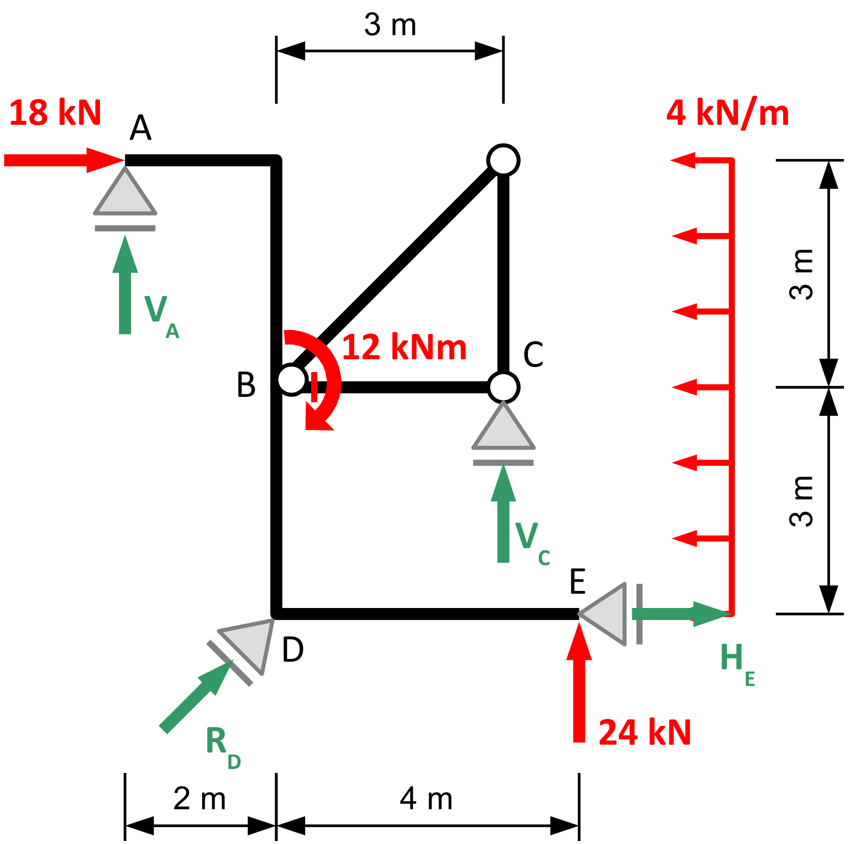
Przykład 1



Wyznaczyć reakcje podporowe, korzystając z równań równowagi.

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 1

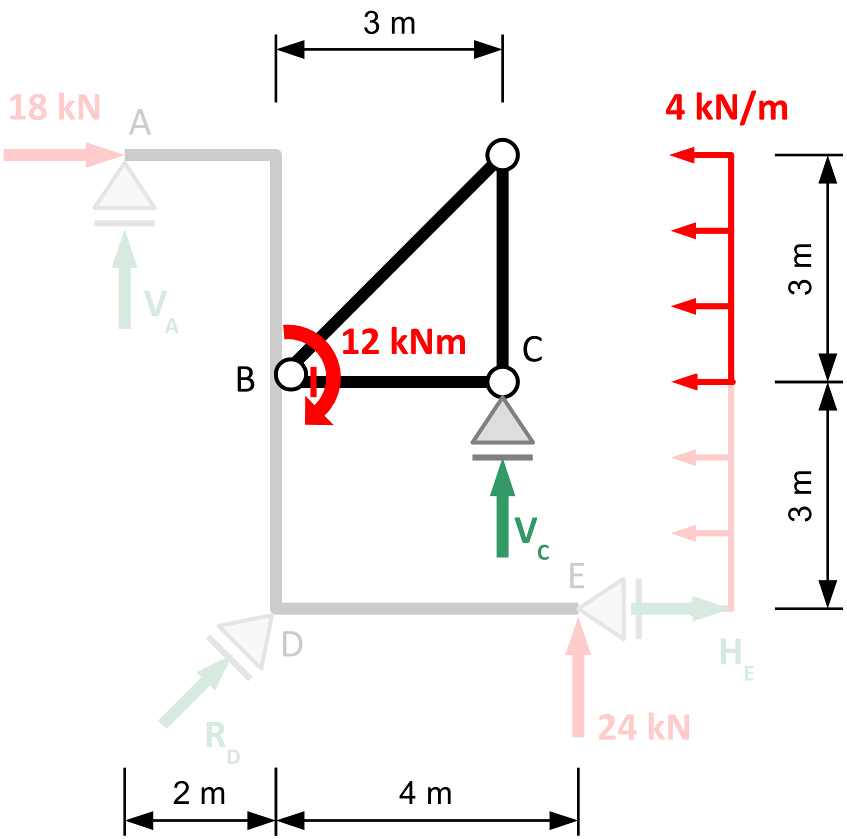


$$S - R = 3\cdot 2 - 2\cdot 1 - 4 = 0$$

Układ statycznie wyznaczalny

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 1



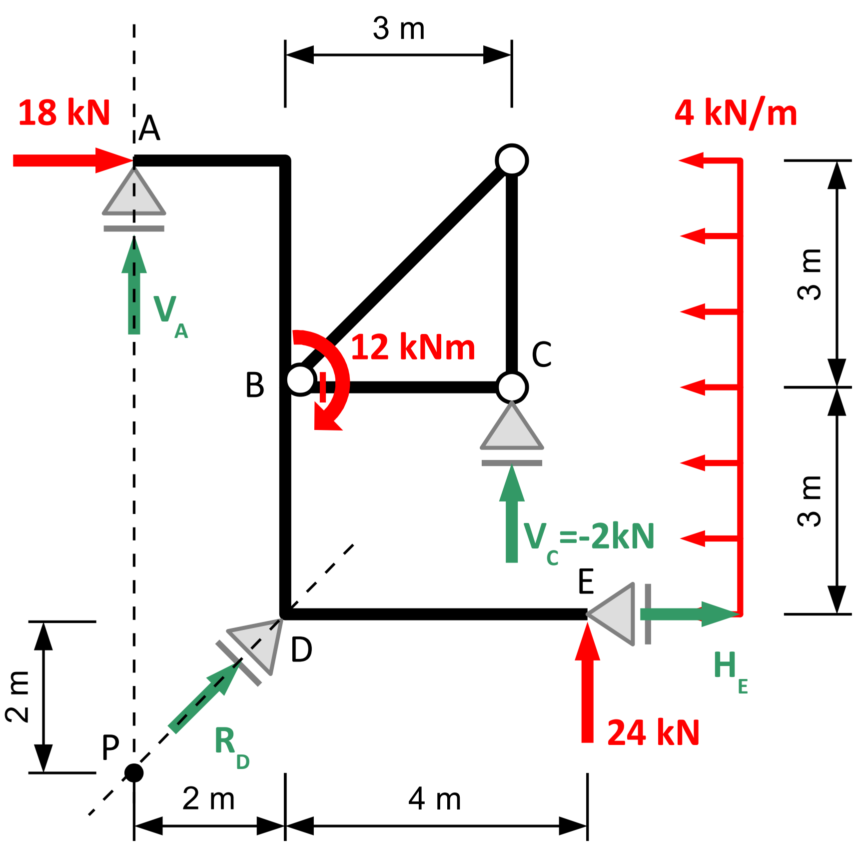
$$\Sigma M_B^{\rightarrow} = 0$$

$$\Sigma M_B^{\rightarrow} = -12 + V_C \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$\boxed{V_C = -2\ \mathrm{kN}}$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 1



$$\Sigma M_P = 0$$

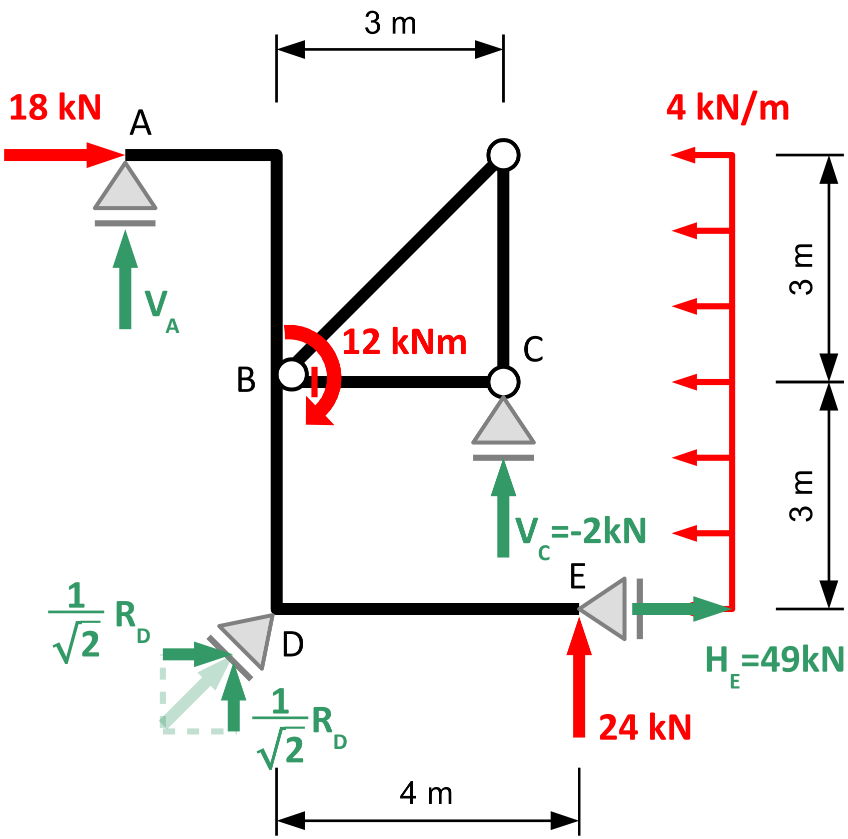
$$\Sigma M_P = -18\cdot 8 - 12 + V_C\cdot 5 + 4\cdot 6\cdot 5 - H_E\cdot 2 + 24\cdot 6 = 0$$

$$\Sigma M_P = -18\cdot 8 - 12 + (-2)\cdot 5 + 4\cdot 6\cdot 5 - H_E\cdot 2 + 24\cdot 6 = 0$$

$$\boxed{H_E = 49 \text{ kN}}$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 1



$$\Sigma X = 0$$

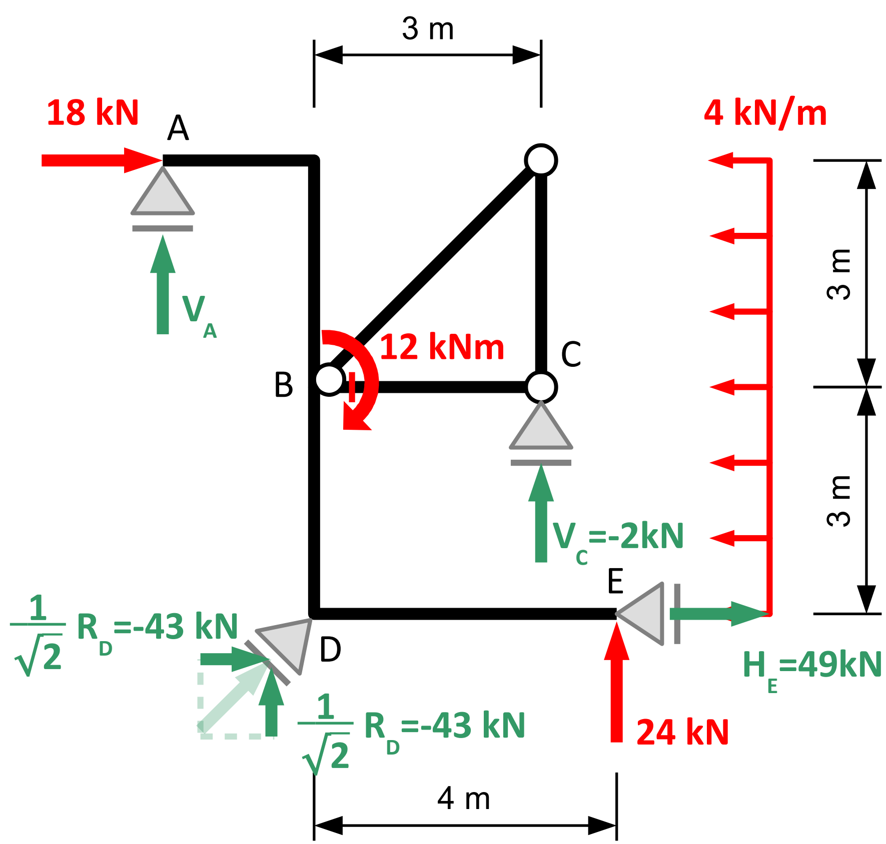
$$\Sigma X = 18 - 4\cdot 6 + \frac{1}{\sqrt{2}} R_D + H_E = 0$$

$$\Sigma X = 18 - 4\cdot 6 + \frac{1}{\sqrt{2}} R_D + 49 = 0$$

$$\boxed{R_D = -43\sqrt{2}\ \text{kN}}$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 1



$$\Sigma Y = 0$$

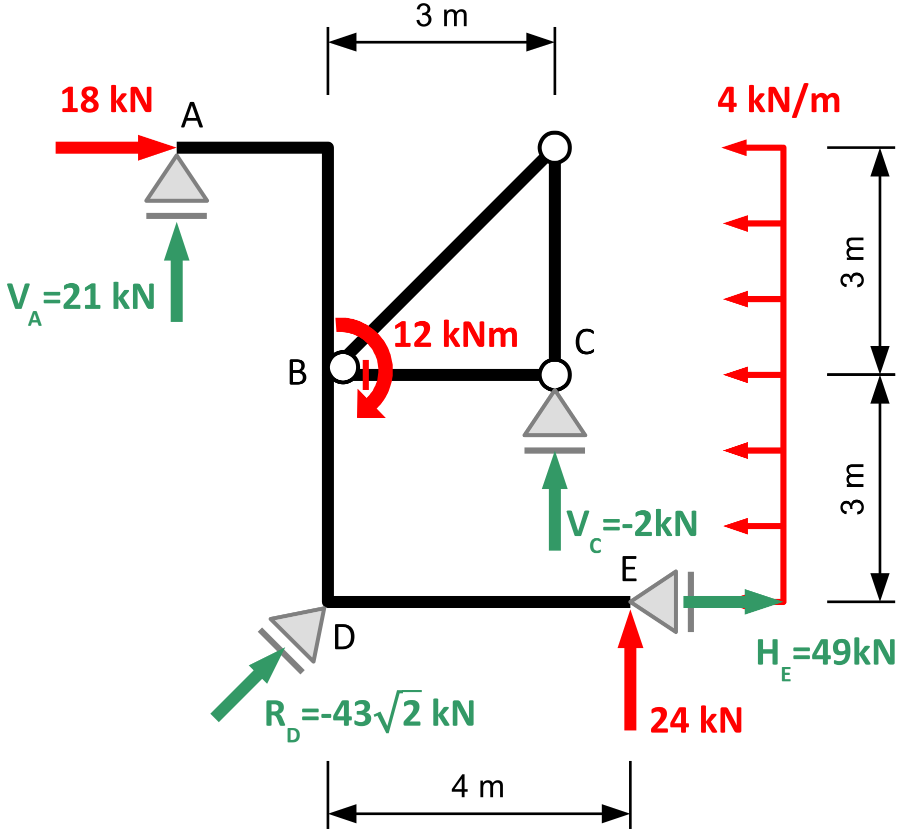
$$\Sigma Y = V_A + V_C + \frac{1}{\sqrt{2}} R_D + 24 = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + (-2) + \frac{1}{\sqrt{2}} R_D + 24 = 0$$

$$\boxed{V_A = 21\ \text{kN}}$$

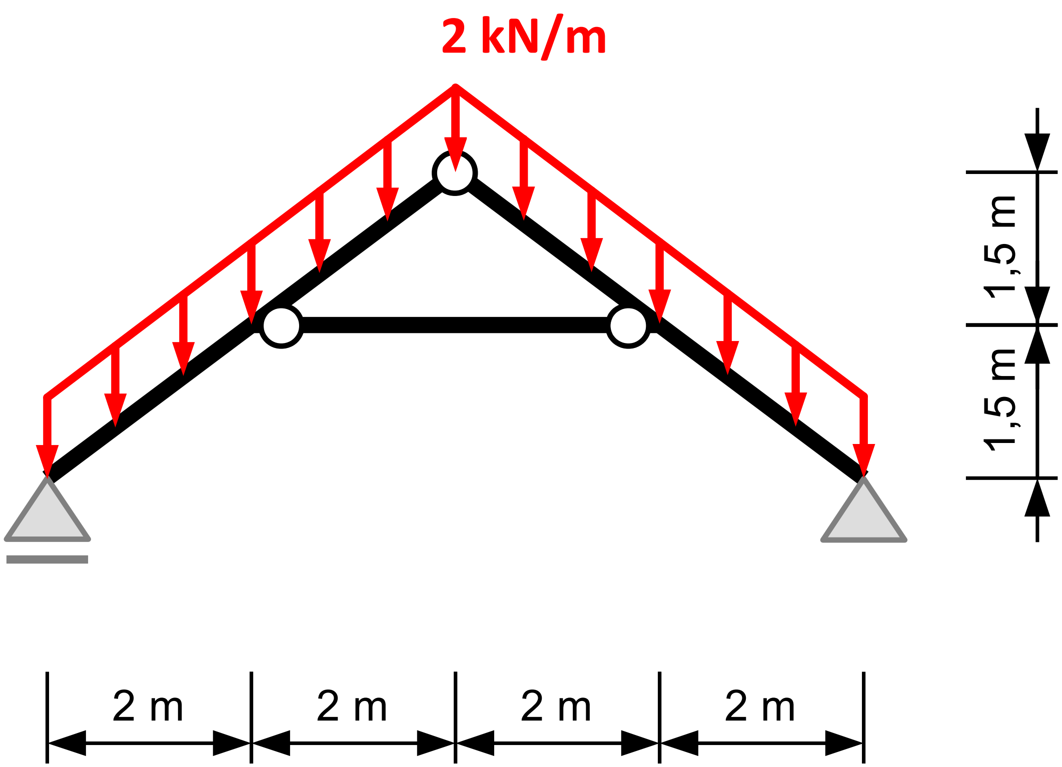
WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 1



WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

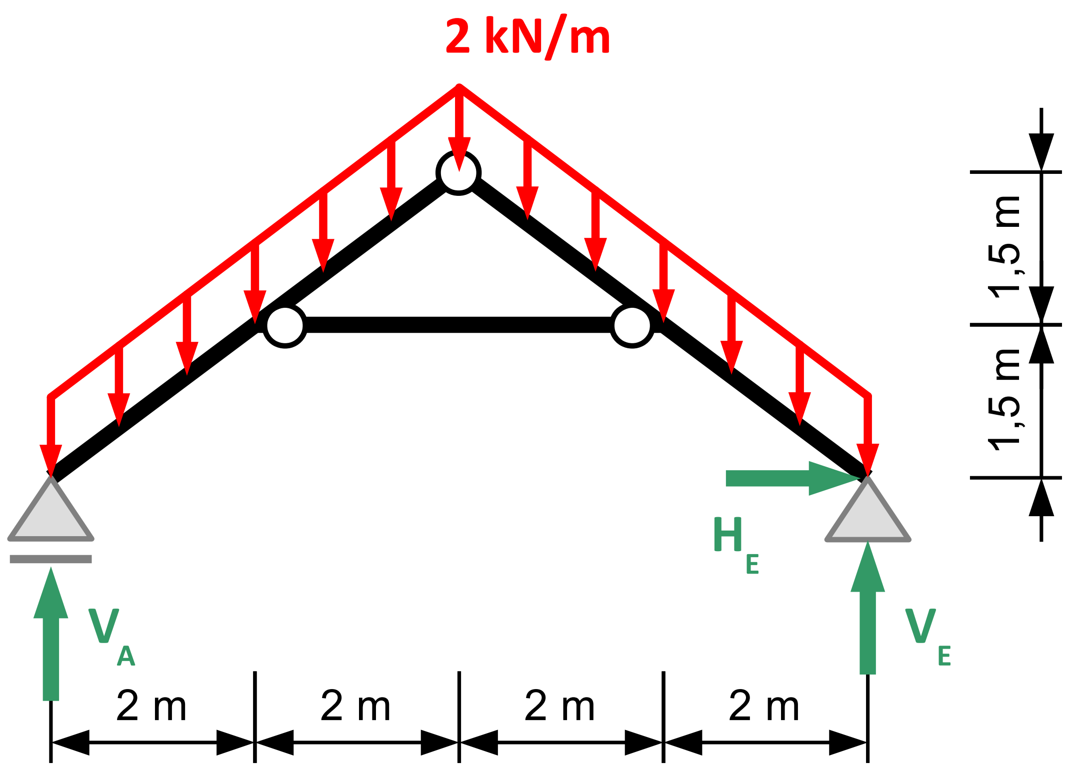
Przykład 2



Wyznaczyć siłę rozporu w jętce.

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 2



$$\Sigma X = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = 0}$$

$$\Sigma M_A = 0:$$

$$-2\cdot 5\cdot 2 - 2\cdot 5\cdot 6 + V_E\cdot 8 = 0$$

$$\boxed{V_E = 10\ \text{kN}}$$

$$\Sigma Y = 0:$$

$$V_A + V_E - 2\cdot 5 - 2\cdot 5 = 0$$

$$V_A + 10 - 2\cdot 5 - 2\cdot 5 = 0$$

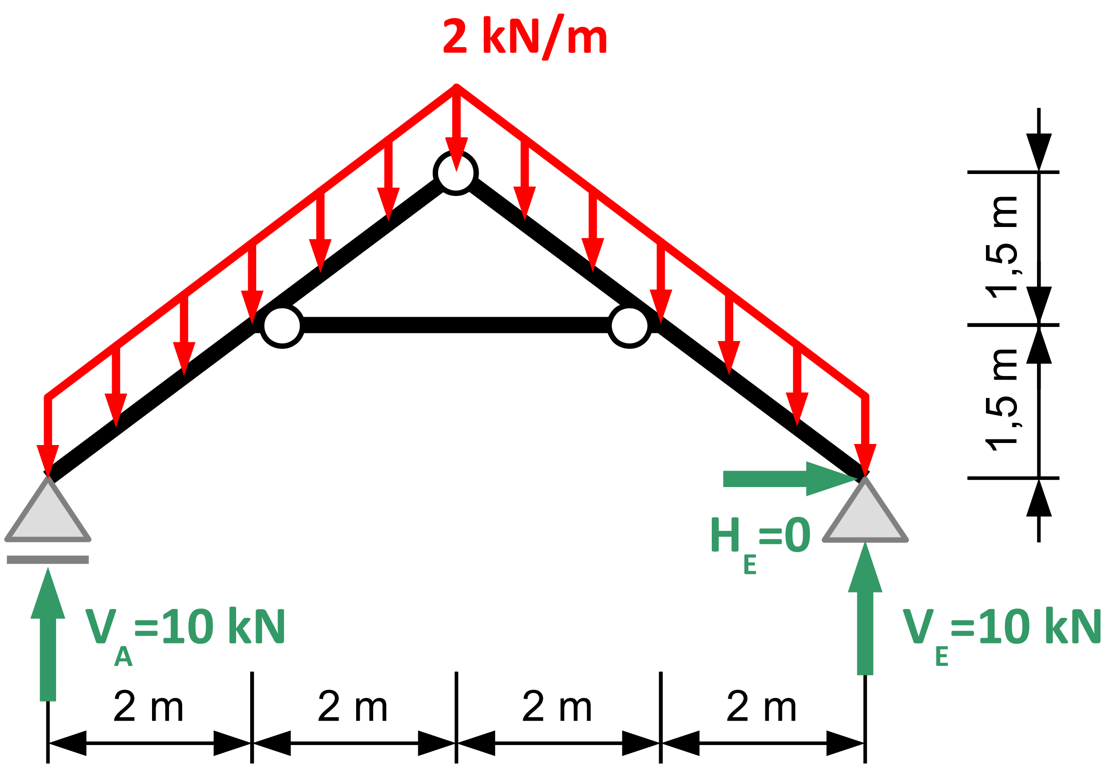
$$\boxed{V_A = 10\ \text{kN}}$$

symetria $\Rightarrow \quad V_A = V_E = \dfrac{2\cdot 10}{2} = 10\ \text{kN}$

$\Rightarrow \quad H_E = 0$

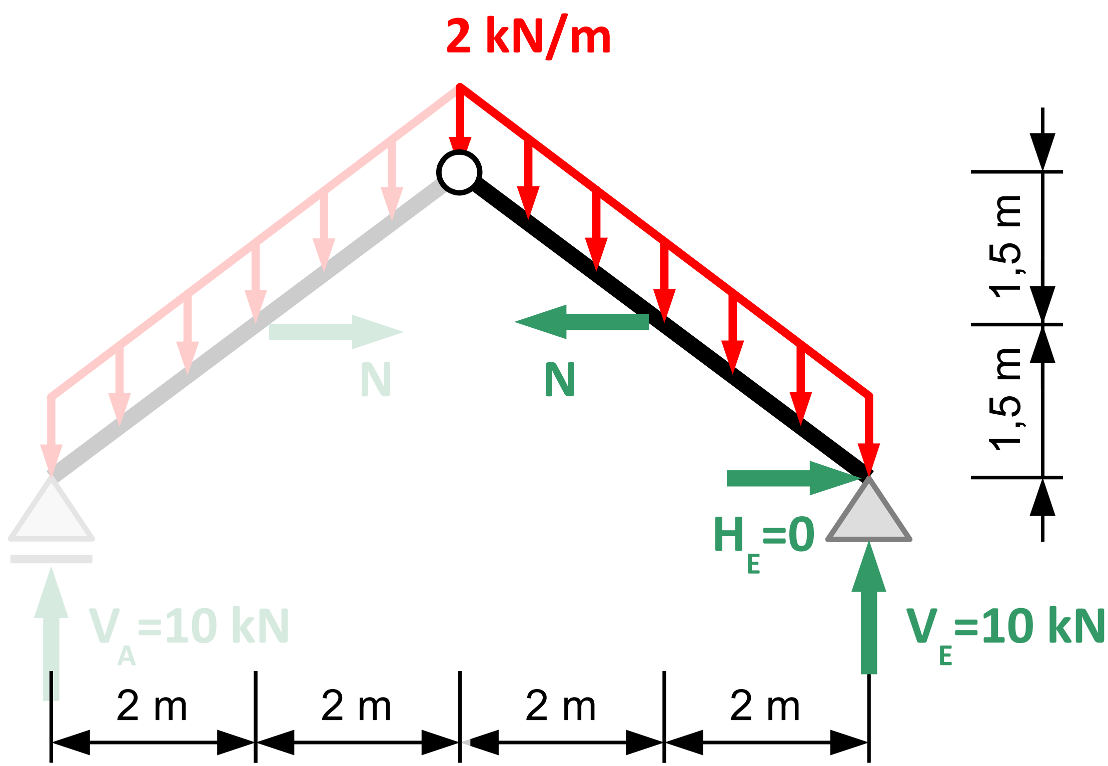
WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 2



WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 2



$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0:$$

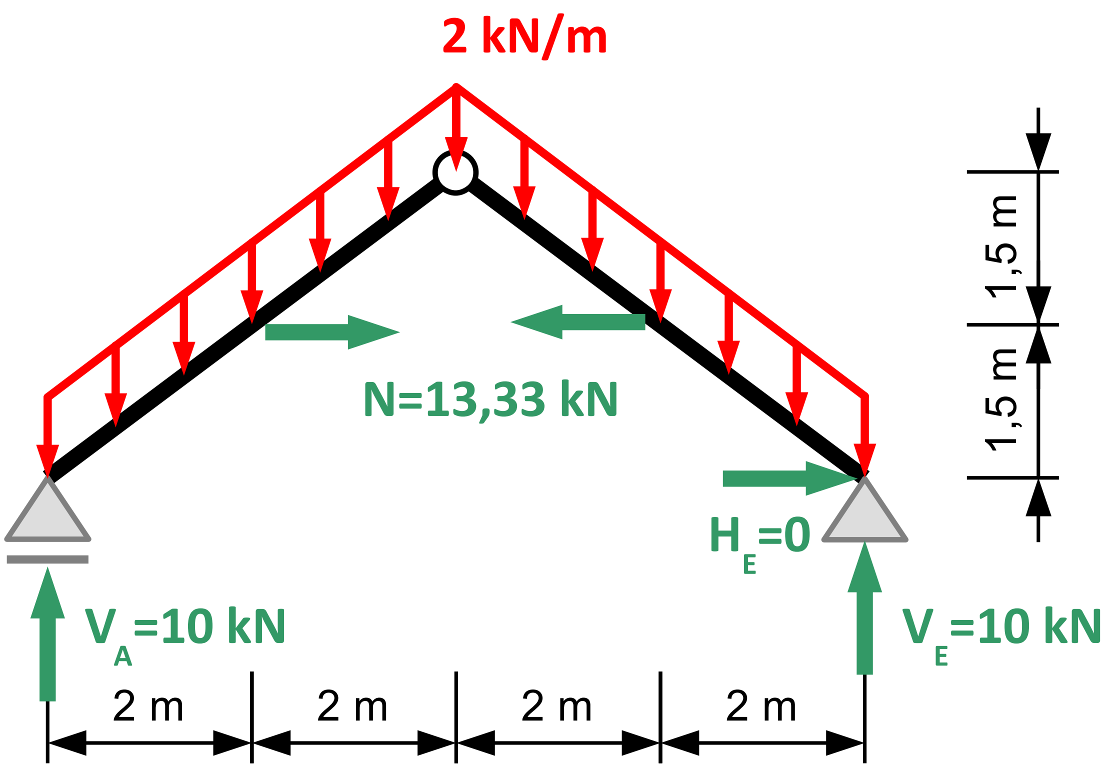
$$-2\cdot 5\cdot 2 - N\cdot 1{,}5 + V_E\cdot 4 + H_E\cdot 3 = 0$$

$$-2\cdot 5\cdot 2 - N\cdot 1{,}5 + 10\cdot 4 + 0\cdot 3 = 0$$

$$\boxed{N = 13{,}33\ \mathrm{kN}}$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Przykład 2



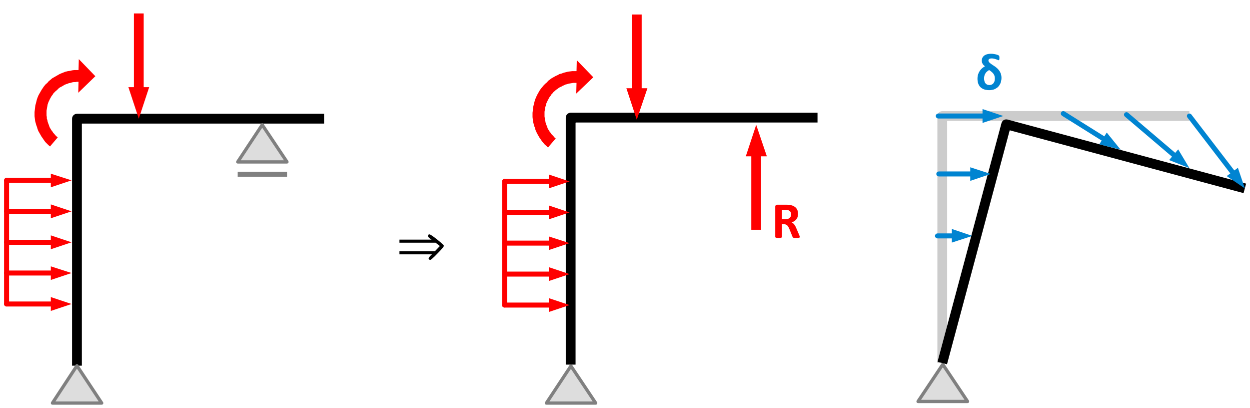
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH
KORZYSTAJĄC Z
ZASADY PRAC WIRTUALNYCH

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

- Obciążenia zewnętrzne oraz siły reakcji są w równowadze, zatem spełniona jest ZPW. Rozważamy układy geometrycznie niezmienne – dopuszczalne pole prędkości (a zatem i pole przemieszczeń wirtualnych) jest zerowe.

- Jeśli jedno z wiązań zastąpimy odpowiednią reakcją, to układ mechaniczny będzie miał LSS=1. Ruch układu będzie zależał od jednego parametru δ.

- ZPW dostarcza 1 równania, które musi być spełnione dla każdego δ. Jest to równanie zależne liniowo od jednej niewiadomej R. Można je rozwiązać z uwagi na R.



$$\Rightarrow \quad \delta L = 0 \quad \underset{\delta}{\forall} \quad \Rightarrow \quad R$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Usunąć wiązanie na kierunku poszukiwanej reakcji → Określić liczbę brył sztywnych. → Zastąpić obciążenie równoważnym układem sił skupionych → Wyznaczyć pole przemieszczeń wirtualnych

↓

Obliczyć pracę wirtualną

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i$$

↓

ZPW:

$$\delta L = 0 \quad \underset{\delta}{\forall}$$

↓

Wyznaczyć reakcję.

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Usunąć wiązanie na kierunku poszukiwanej reakcji → Określić liczbę brył sztywnych. → Zastąpić obciążenie równoważnym układem sił skupionych → Wyznaczyć pole przemieszczeń wirtualnych

↓

Obliczyć pracę wirtualną

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i$$

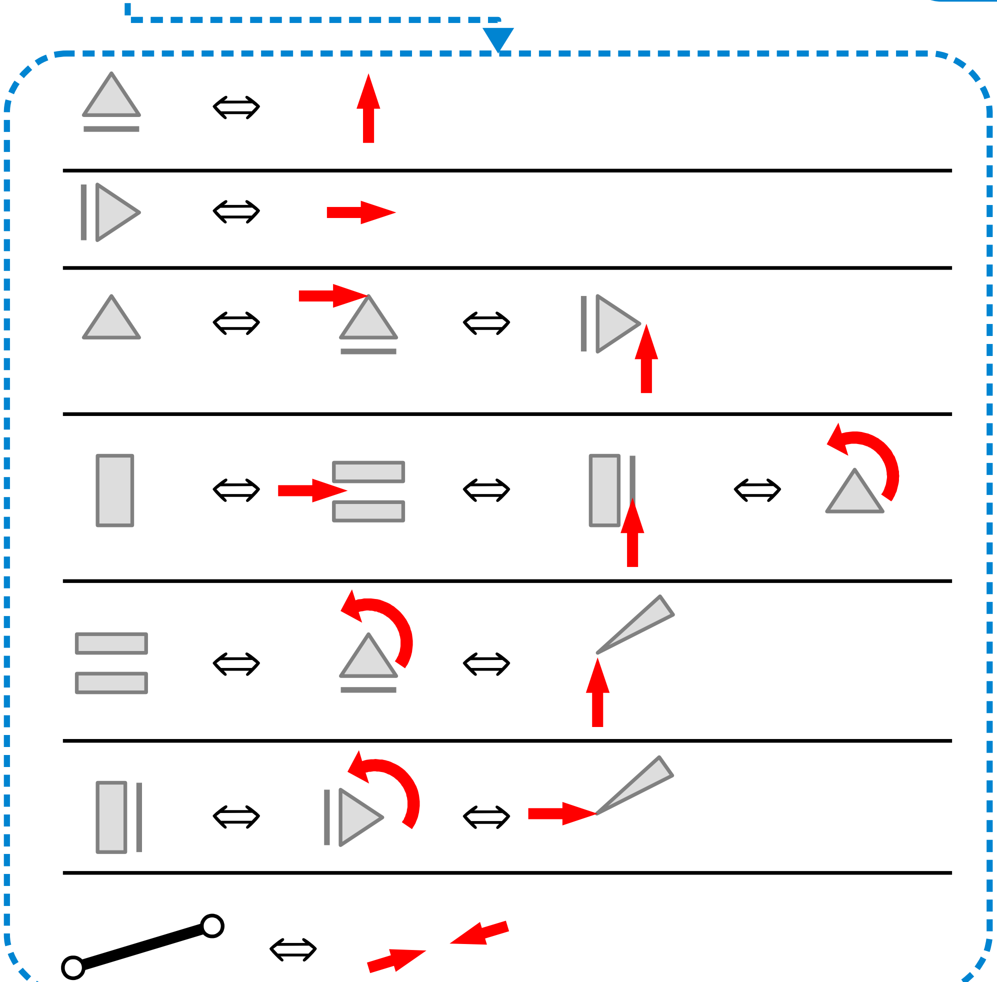
↓

ZPW:

$$\delta L = 0 \quad \forall_{\delta}$$

↓

Wyznaczyć reakcję.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Usunąć wiązanie na kierunku poszukiwanej reakcji → Określić liczbę brył sztywnych. → Zastąpić obciążenie równoważnym układem sił skupionych → Wyznaczyć pole przemieszczeń wirtualnych

↓

Obliczyć pracę wirtualną

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i$$

↓

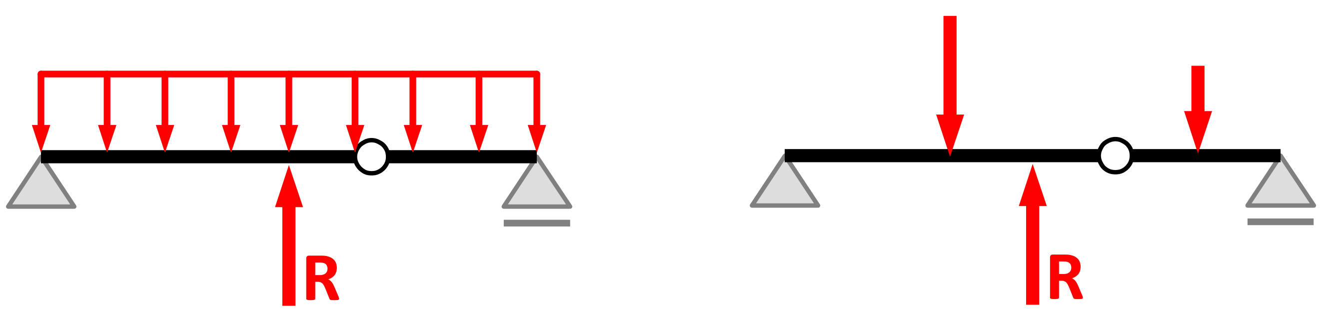
ZPW:

$$\delta L = 0 \quad \forall_{\delta}$$

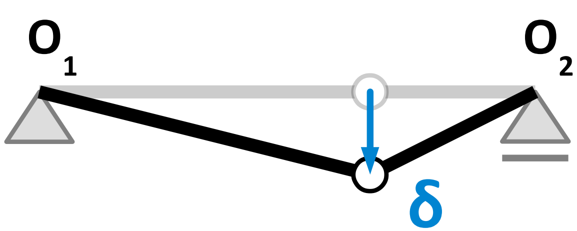
↓

Wyznaczyć reakcję.

- Obciążenie należy podzielić zgodnie z tym, na jakie bryły działa.



- Dla każdej z brył sztywnych należy później wyznaczyć ChŚO.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Usunąć wiązanie na kierunku poszukiwanej reakcji → Określić liczbę brył sztywnych. → **Zastąpić obciążenie równoważnym układem sił skupionych** → Wyznaczyć pole przemieszczeń wirtualnych → Obliczyć pracę wirtualną

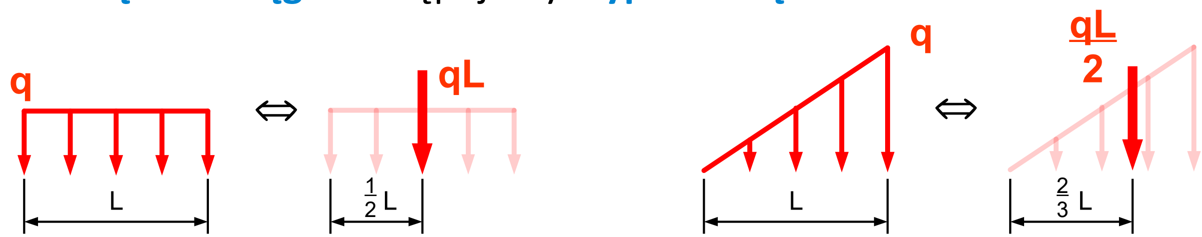
$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i$$

→ ZPW:

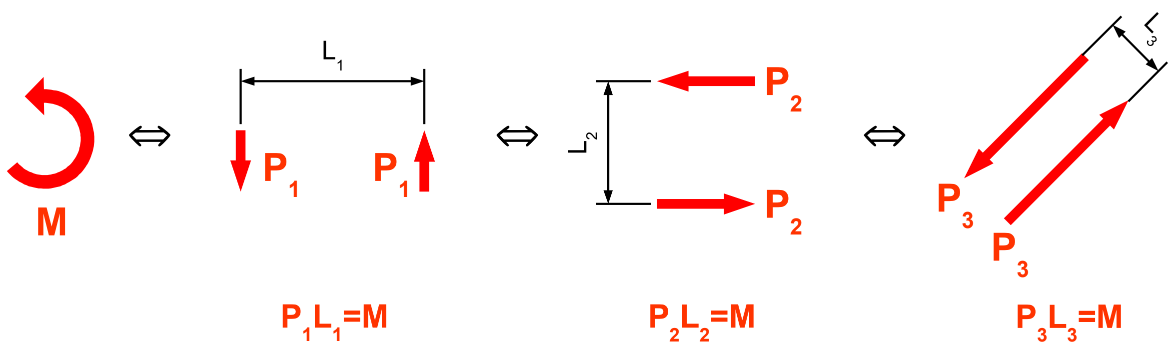
$$\delta L = 0 \quad \forall_{\delta}$$

→ Wyznaczyć reakcję.

- **Obciążenie ciągłe** zastępujemy **wypadkową**.



- **Moment skupiony** przyłożony do danej tarczy zastępujemy **dowolną parą przyłożoną do tej samej tarczy**.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Usunąć wiązanie na kierunku poszukiwanej reakcji → Określić liczbę brył sztywnych. → Zastąpić obciążenie równoważnym układem sił skupionych → Wyznaczyć pole przemieszczeń wirtualnych → Obliczyć pracę wirtualną

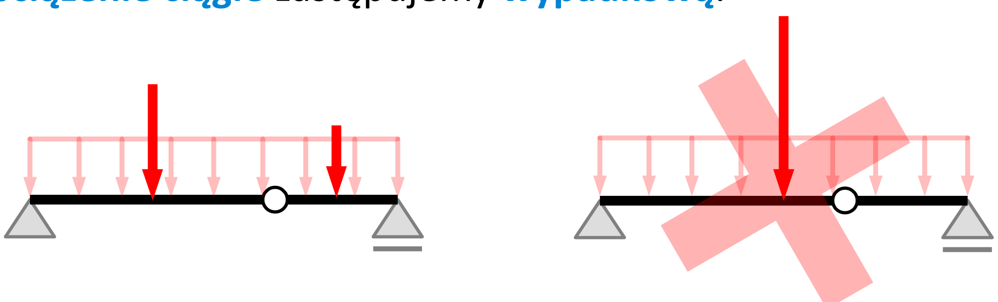
$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i$$

→ ZPW:

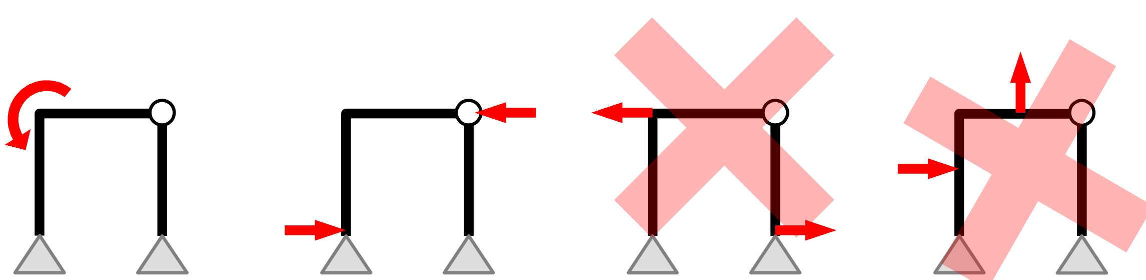
$$\delta L = 0 \quad \forall_{\delta}$$

→ Wyznaczyć reakcję.

- **Obciążenie ciągłe** zastępujemy **wypadkową**.



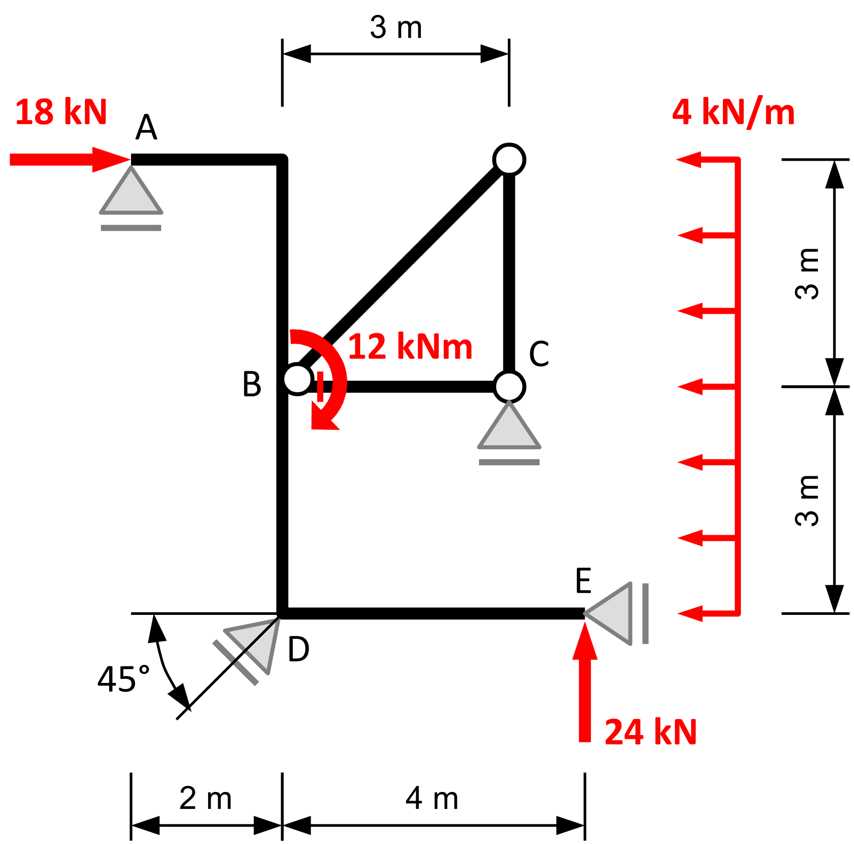
- **Moment skupiony** przyłożony do danej tarczy zastępujemy **dowolną parą przyłożoną do tej samej tarczy**.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3

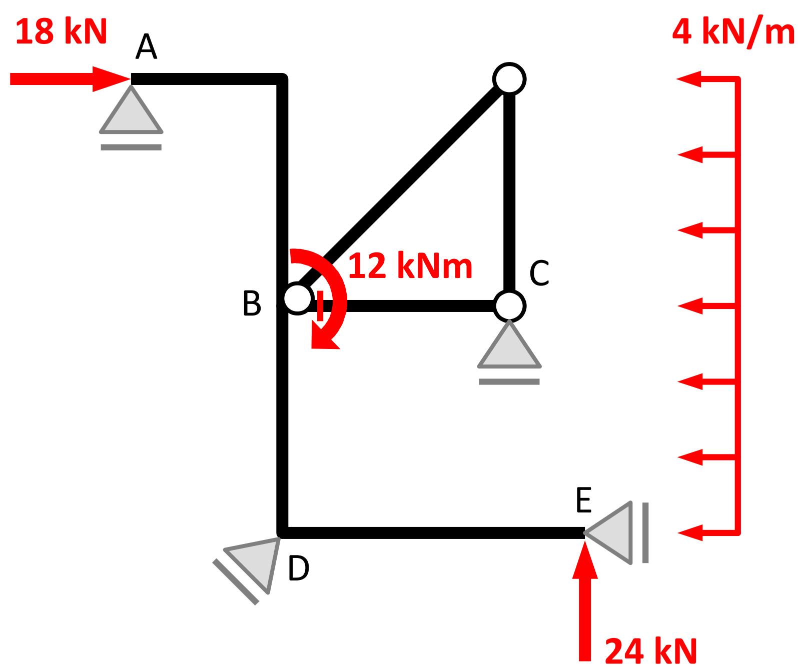
Wyznaczyć reakcję na podporze w punkcie A, korzystając zasady prac wirtualnych.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

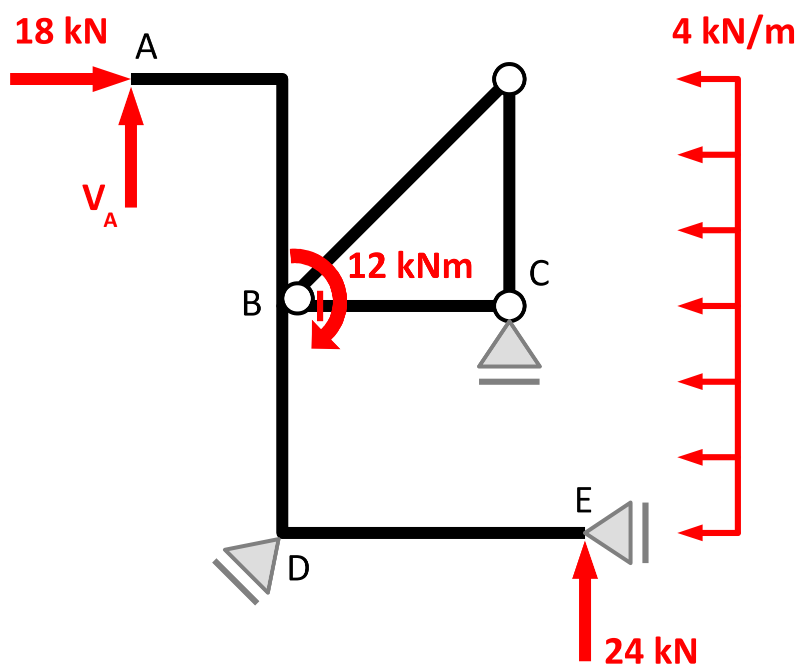
Przykład 3

Zastępujemy wiązanie reakcją.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3

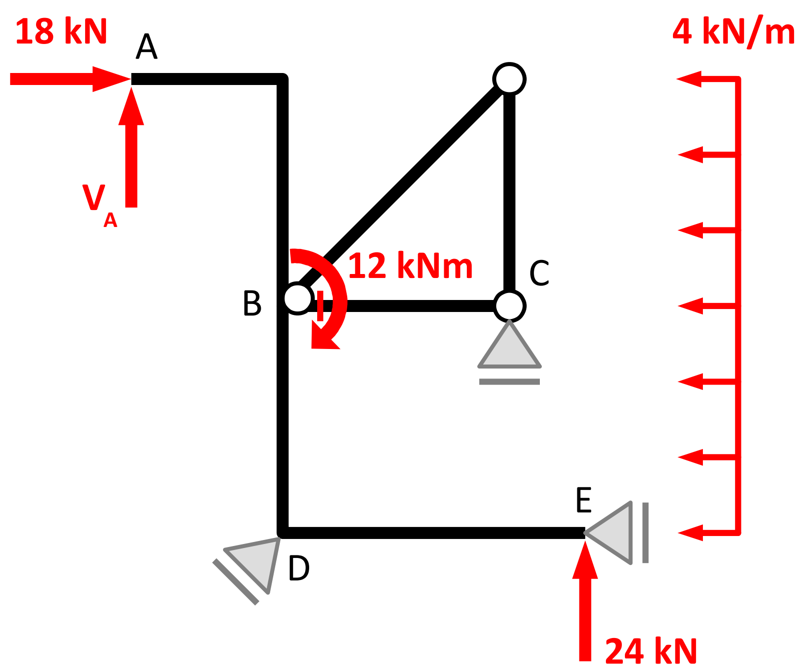


Zastępujemy wiązanie reakcją.

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3

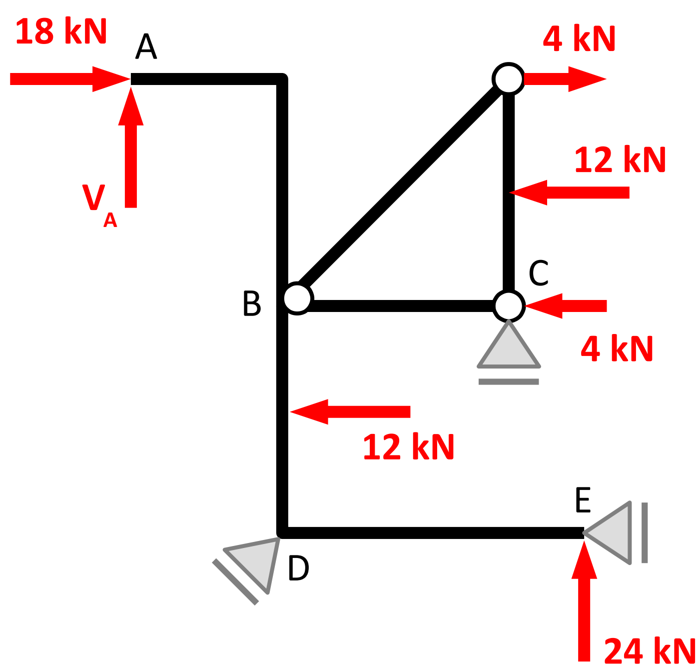
2 bryły sztywne.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

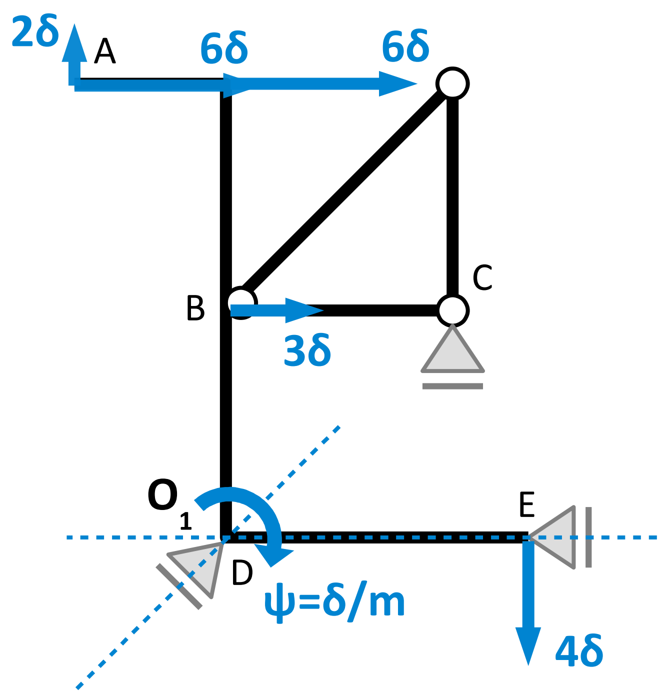
Przykład 3

Zastępujemy obciążenie zewnętrzne statycznie równoważnym układem sił skupionych.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

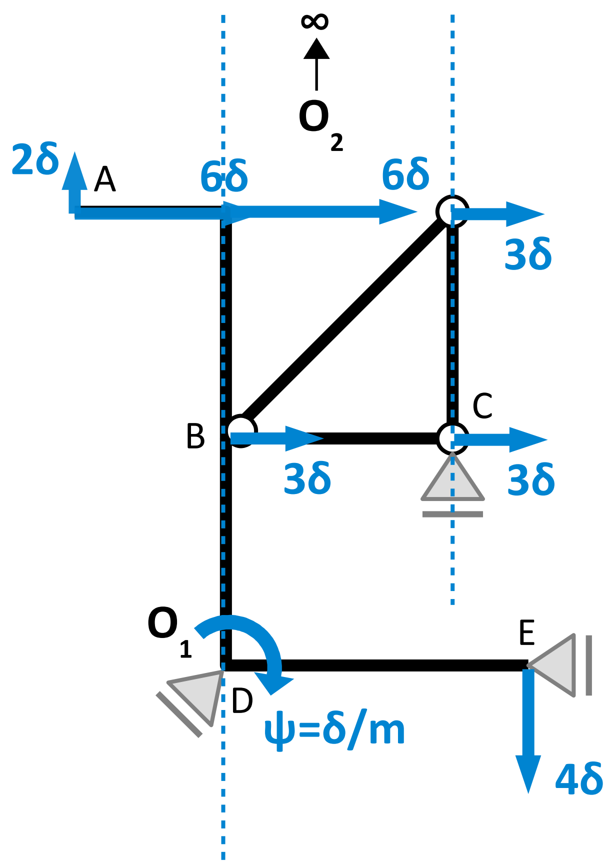
Przykład 3



Wyznaczamy pole przemieszczeń wirtualnych.

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

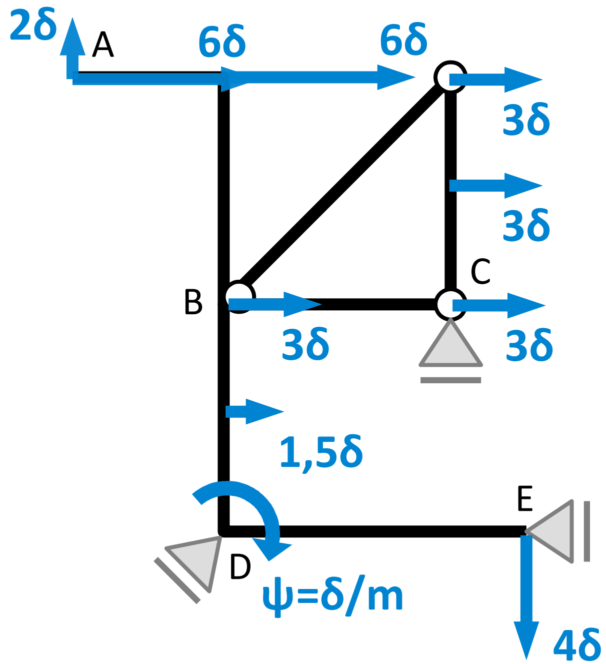
Przykład 3

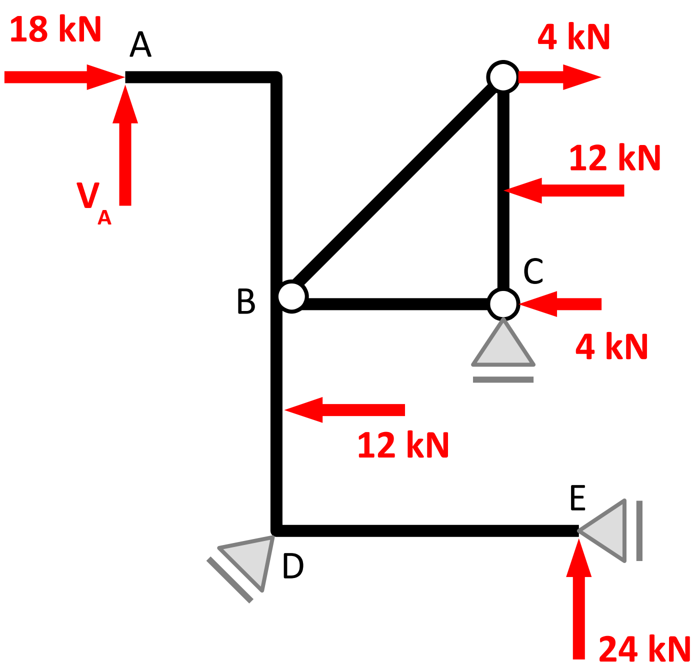


Wyznaczamy pole przemieszczeń wirtualnych.

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3



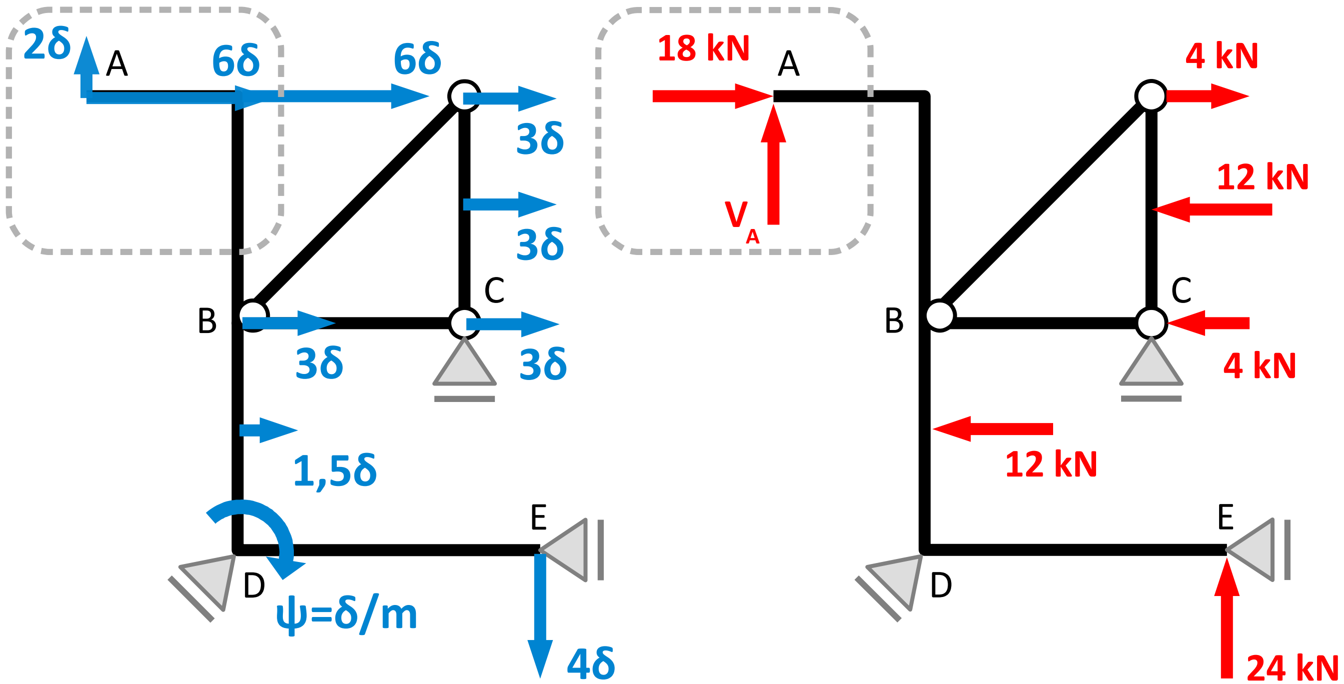


Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \sum_i [F_{i,x}\delta_{i,x} + F_{i,y}\delta_{i,y}] =$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3

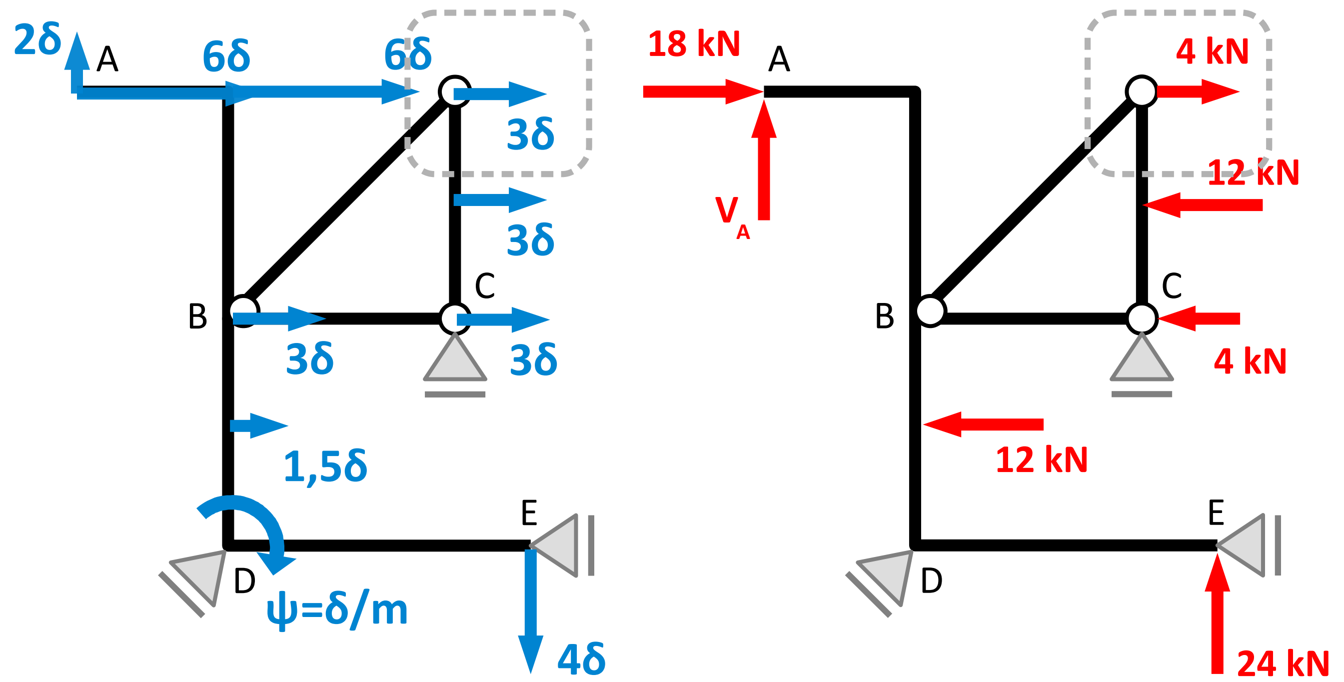


Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \sum_i \left[F_{i,x} \delta_{i,x} + F_{i,y} \delta_{i,y} \right] = \boxed{18 \cdot 6\delta + V_A \cdot 2\delta}$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3

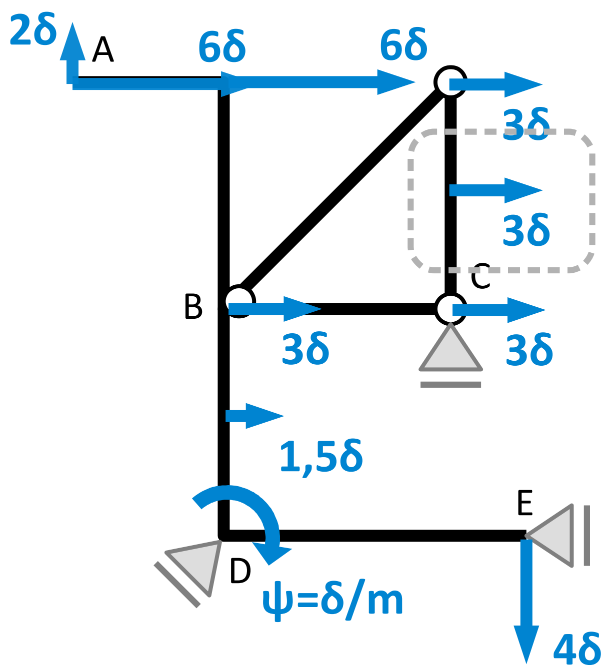


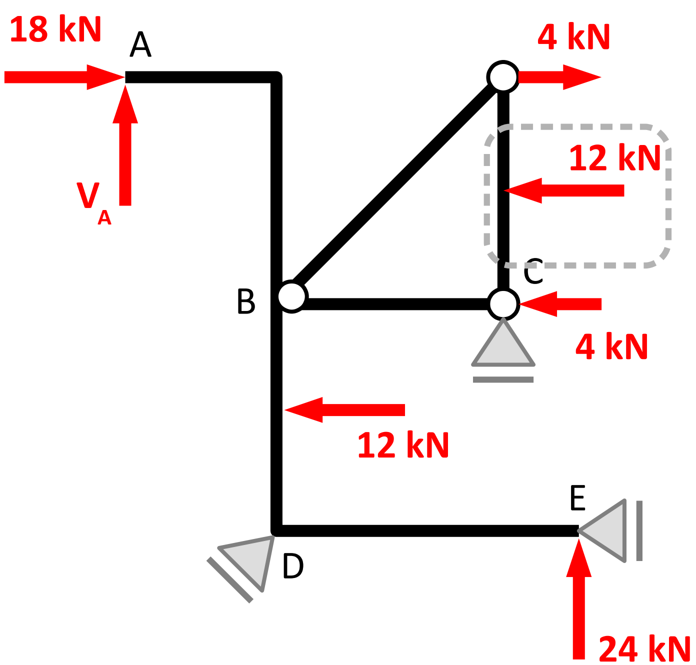
Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L=\sum_i \mathbf{F}_i\cdot\boldsymbol{\delta}_i=\sum_i\left[F_{i,x}\delta_{i,x}+F_{i,y}\delta_{i,y}\right]=18\cdot 6\delta+V_A\cdot 2\delta+4\cdot 3\delta$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3



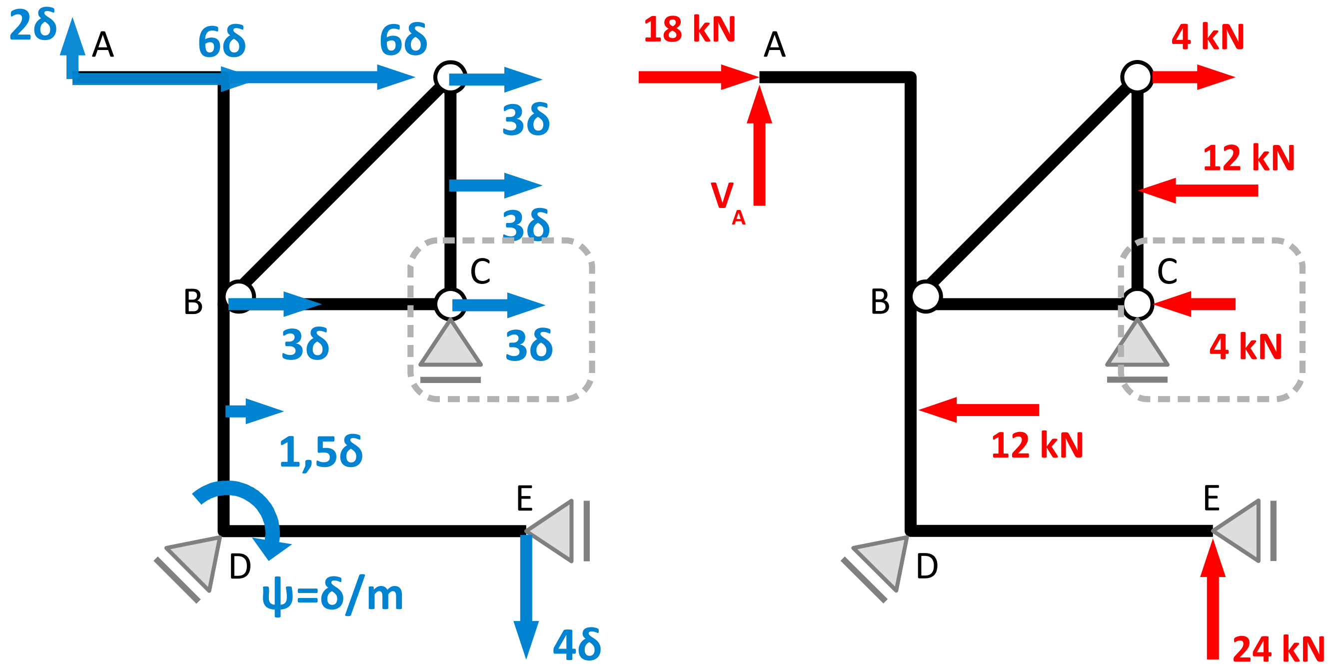


Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \sum_i \left[F_{i,x}\delta_{i,x} + F_{i,y}\delta_{i,y} \right] = 18\cdot 6\delta + V_A \cdot 2\delta + 4\cdot 3\delta - 12\cdot 3\delta$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3

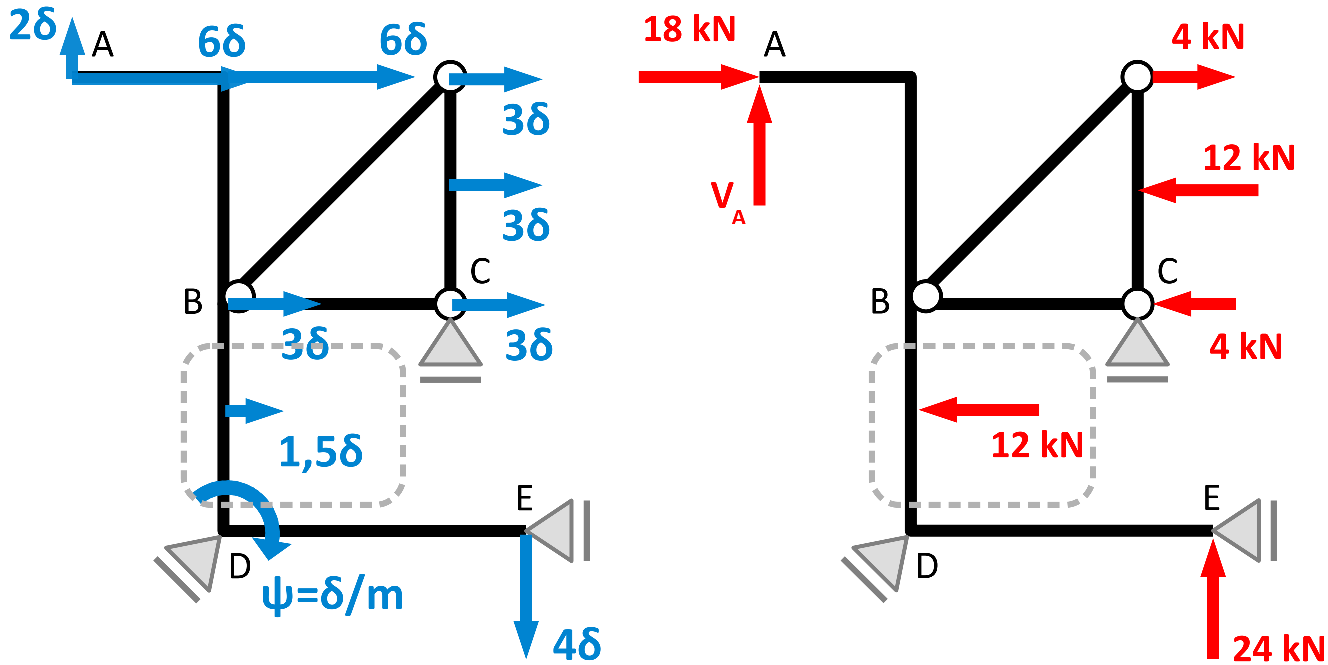


Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \sum_i \left[F_{i,x} \delta_{i,x} + F_{i,y} \delta_{i,y} \right] = 18 \cdot 6\delta + V_A \cdot 2\delta + 4 \cdot 3\delta - 12 \cdot 3\delta - 4 \cdot 3\delta$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3

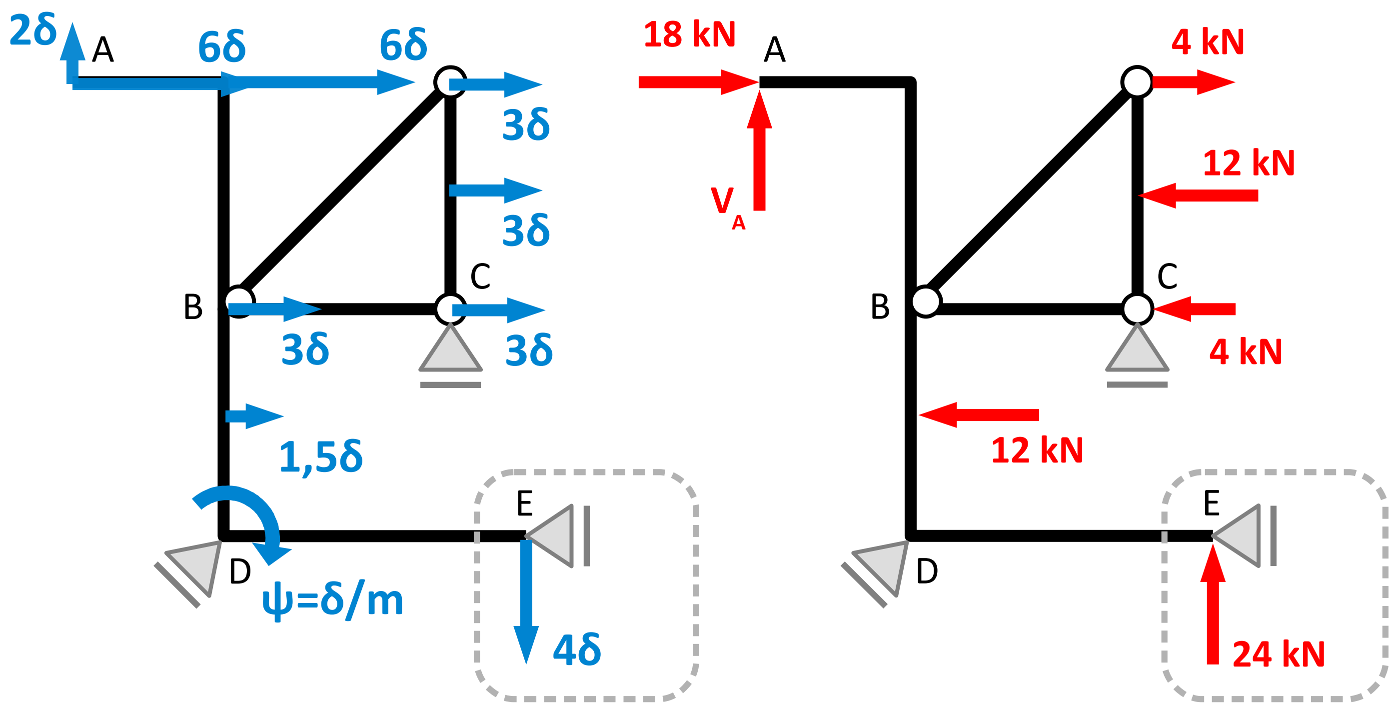


Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \sum_i \left[F_{i,x}\delta_{i,x} + F_{i,y}\delta_{i,y} \right] = 18 \cdot 6\delta + V_A \cdot 2\delta + 4 \cdot 3\delta - 12 \cdot 3\delta - 4 \cdot 3\delta - 12 \cdot 1{,}5\delta$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3

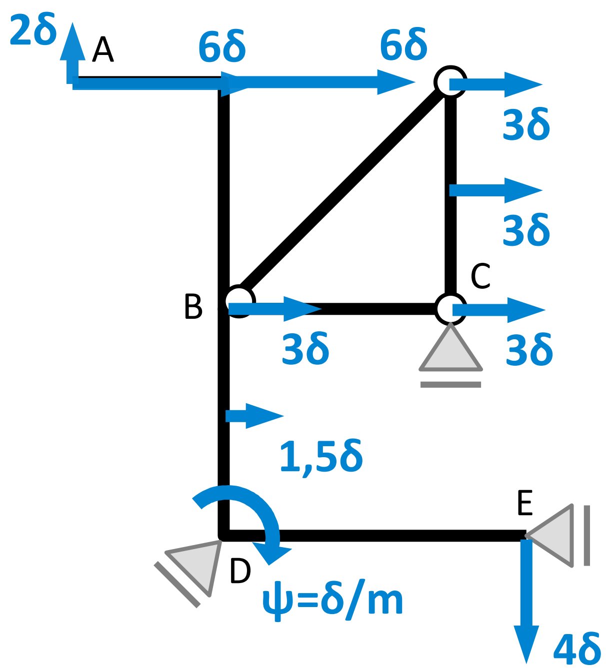


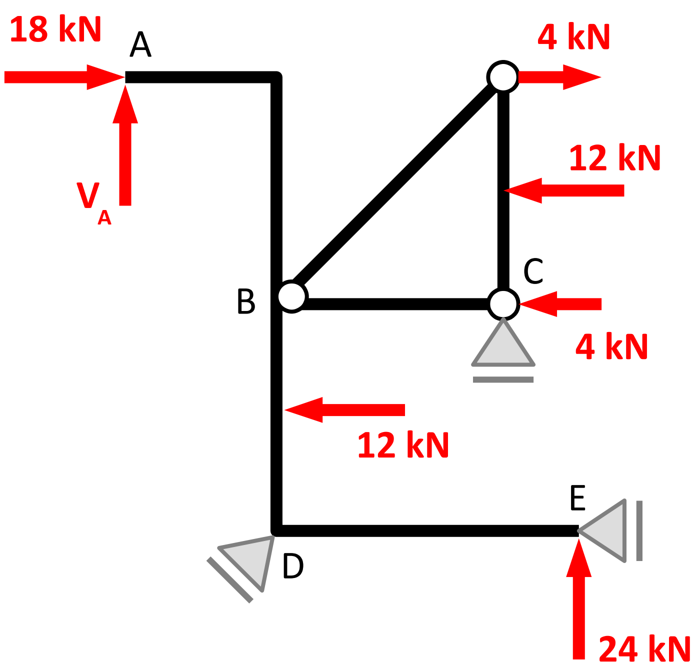
Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \sum_i \left[F_{i,x}\delta_{i,x} + F_{i,y}\delta_{i,y} \right] = 18\cdot 6\delta + V_A \cdot 2\delta + 4\cdot 3\delta - 12\cdot 3\delta - 4\cdot 3\delta - 12\cdot 1{,}5\delta - 24\cdot 4\delta$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3



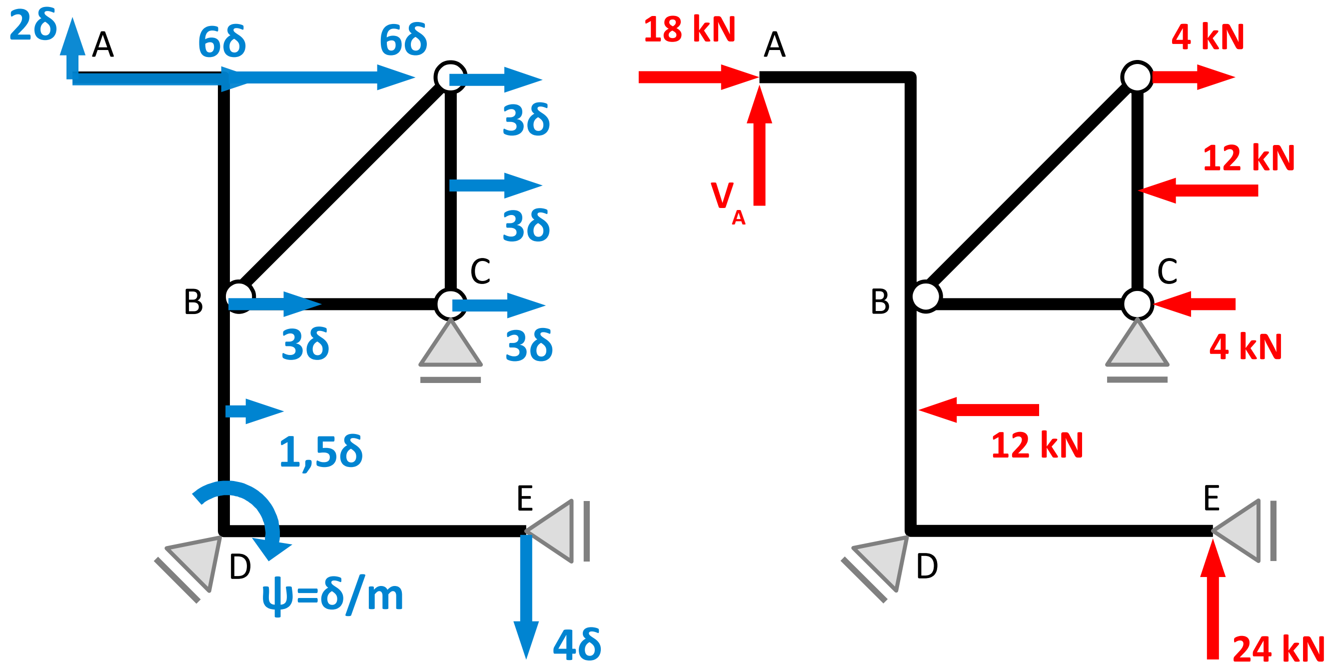


Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L=\sum_i \mathbf{F}_i\cdot\boldsymbol{\delta}_i=\sum_i\left[F_{i,x}\delta_{i,x}+F_{i,y}\delta_{i,y}\right]=-42\delta+2V_A\delta=(2V_A-42)\delta$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 3



Zasada prac wirtualnych:

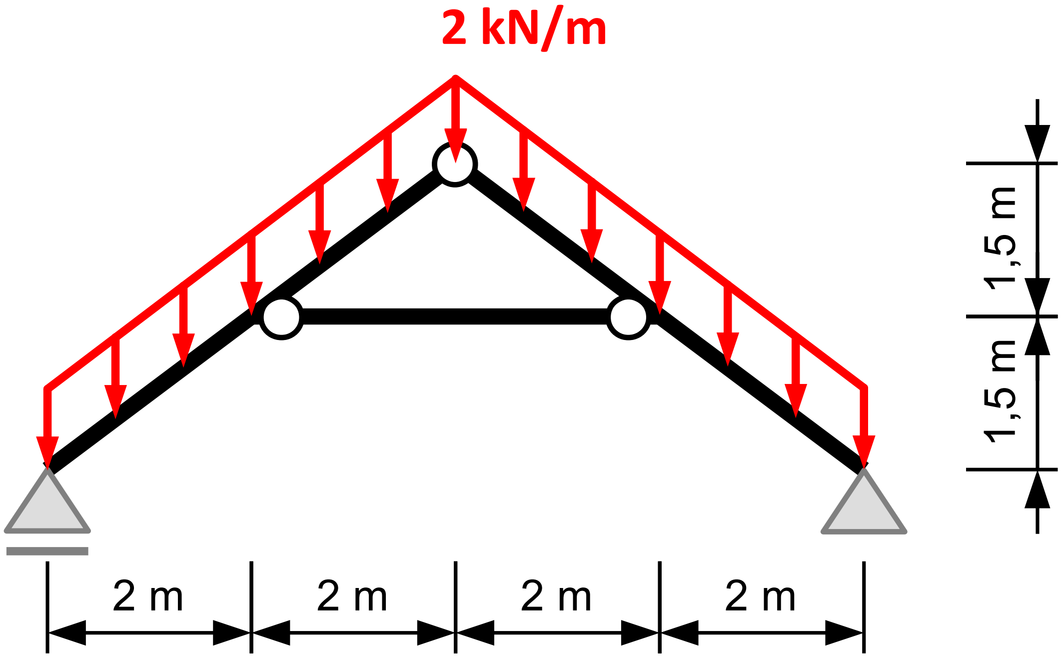
$$\delta L = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \sum_i \left[F_{i,x}\delta_{i,x} + F_{i,y}\delta_{i,y} \right] = (2V_A - 42)\delta = 0 \qquad \forall_{\delta}$$

$$2V_A - 42 = 0$$

$$V_A = 21 \text{ kN}$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 4



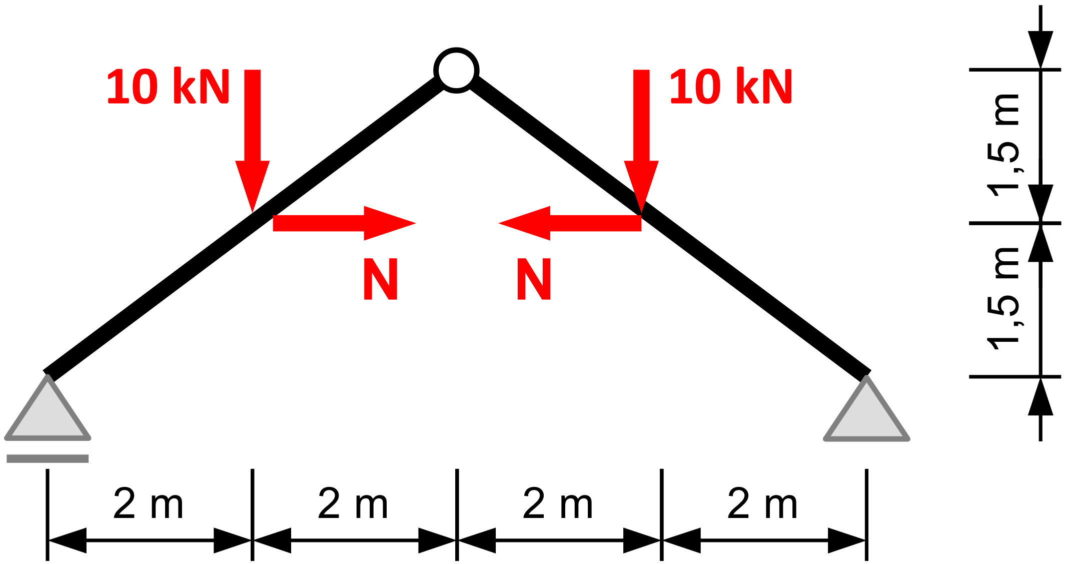
Wyznaczyć siłę rozporu w jętce.

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 4

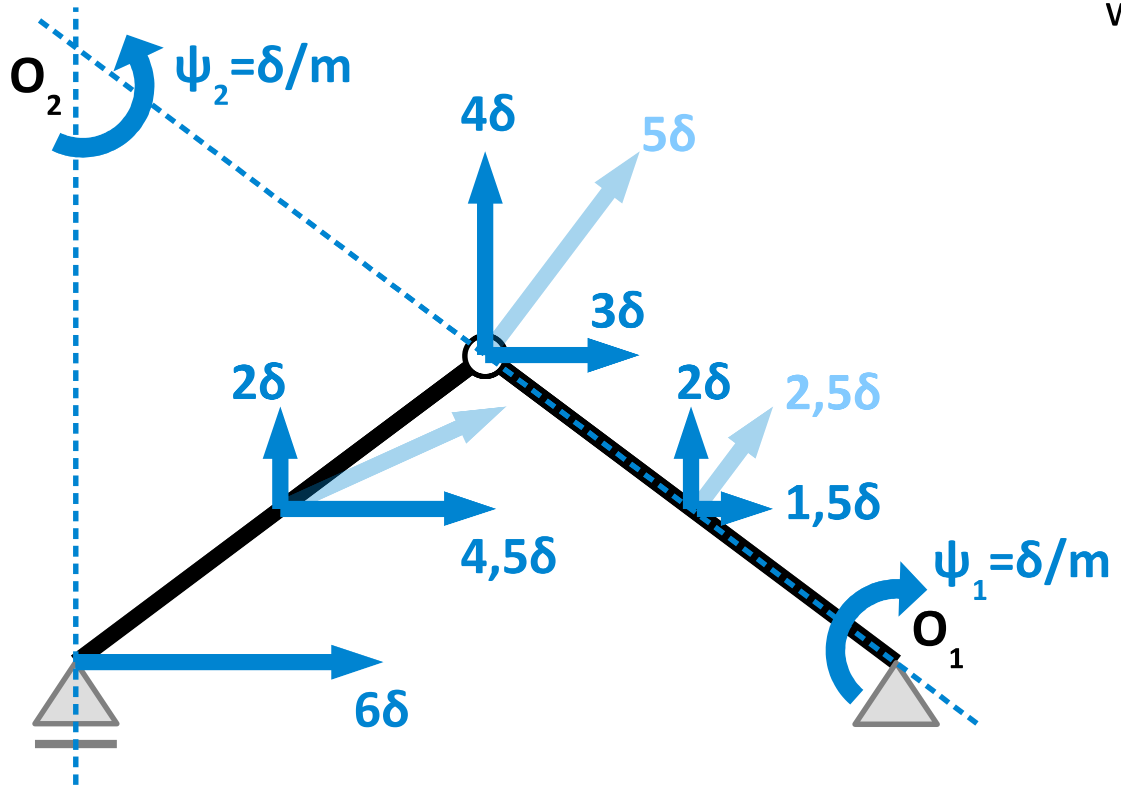
Zastępujemy wiązanie odpowiednią reakcją.

Zastępujemy obciążenie zewnętrzne statycznie równoważnym układem sił skupionych.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

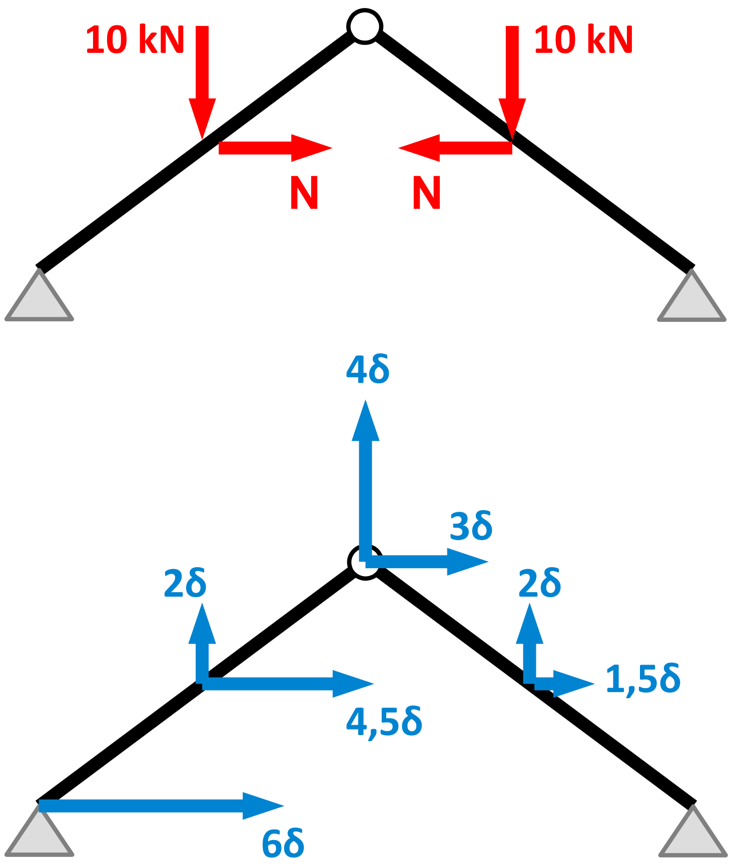
Przykład 4



Wyznaczamy pole przemieszczeń wirtualnych.

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 4



Obliczamy pracę wirtualną.

$$\delta L = -10\cdot 2\delta + N\cdot 4{,}5\,\delta - N\cdot 1{,}5\,\delta - 10\cdot 2\,\delta =$$
$$= -40\,\delta + 3\,N\,\delta$$

Zasada prac wirtualnych:

$$\delta L = (3\,N - 40)\,\delta = 0 \quad \forall_{\delta}$$

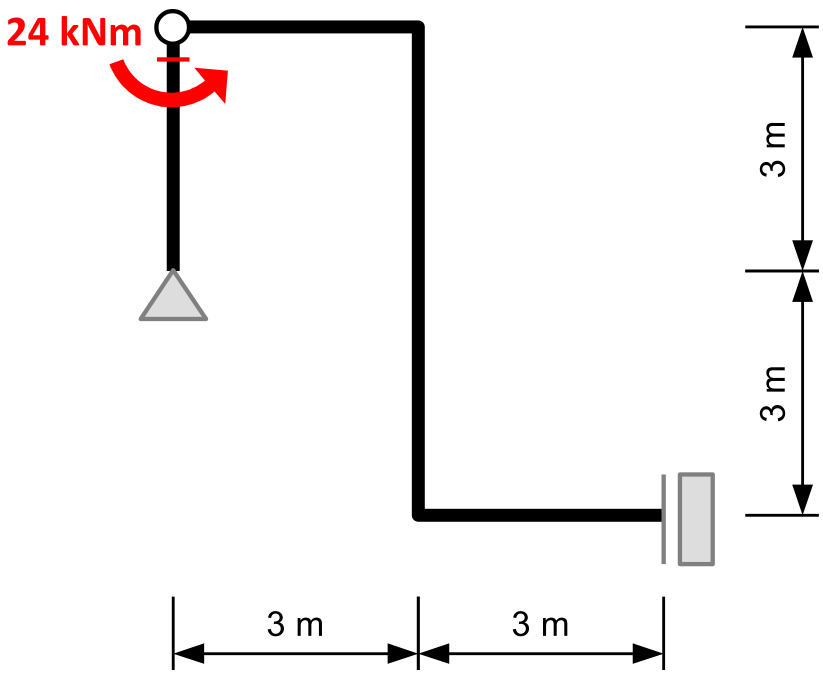
$$3\,N - 40 = 0$$

$$\boxed{N = 13{,}33\ \text{kN}}$$

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 5

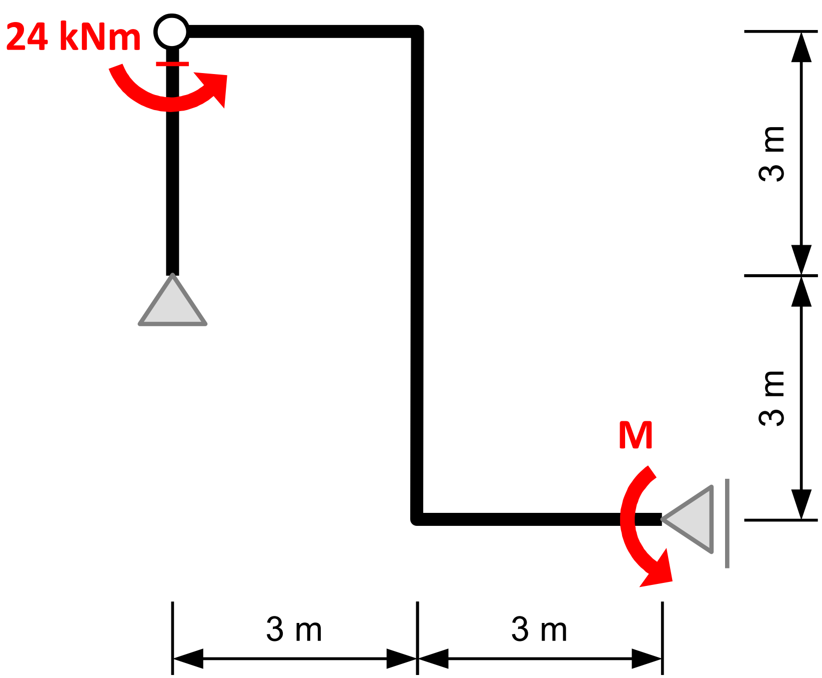
Wyznacz moment utwierdzenia, korzystając z zasady prac wirtualnych.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

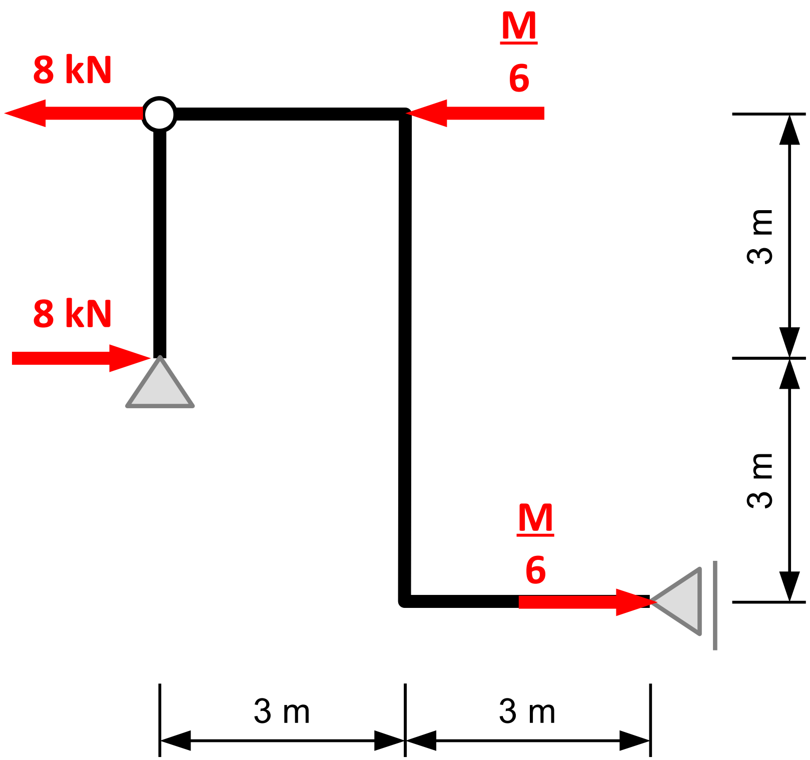
Przykład 5

Zastępujemy wiązanie odpowiednią reakcją.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 5

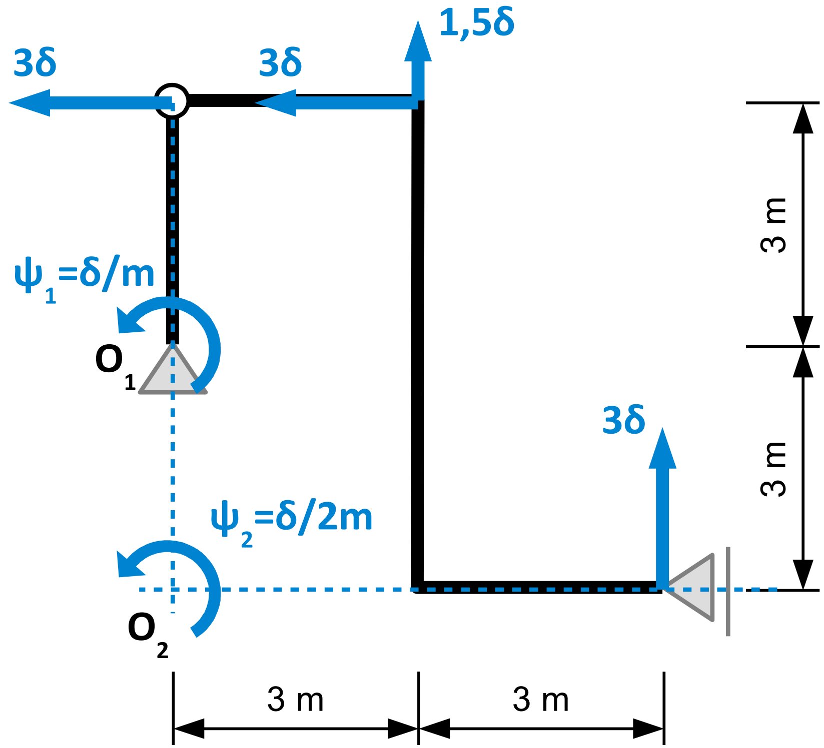


Zastępujemy układ obciążeń statycznie równoważnym układem sił skupionych.

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

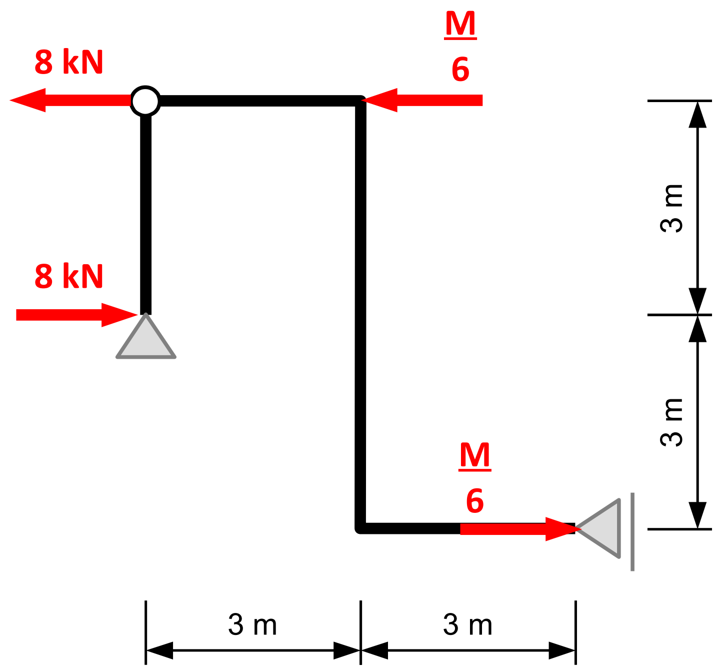
Przykład 5

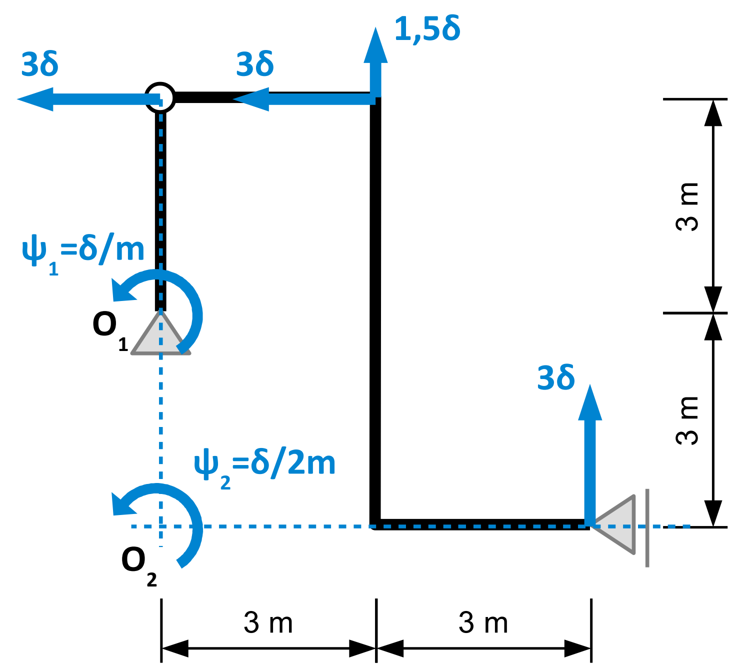
Wyznaczamy pole przemieszczeń wirtualnych.



WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 5





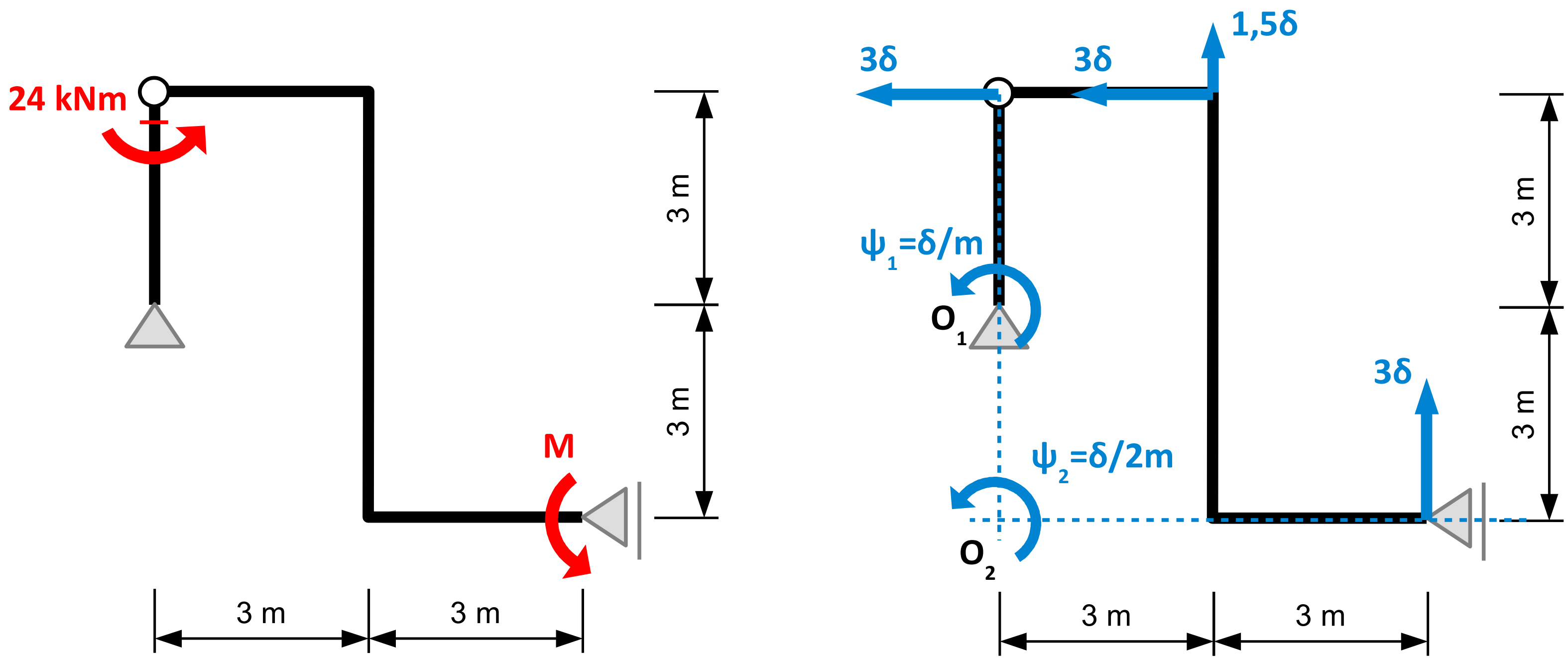
Zasada prac wirtualnych:

$$\delta L = 8\cdot 3\,\delta + \frac{M}{6}\cdot 3\,\delta = \left(24 + \frac{M}{2}\right)\delta = 0 \quad \underset{\delta}{\forall} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = -48\ \text{kNm}}$$

praca siły na przemieszczeniu

WYZNACZANIE REAKCJI Z ZPW

Przykład 5



Zasada prac wirtualnych:

$$\delta L = 24 \cdot \delta + M \cdot \frac{\delta}{2} = \left(24 + \frac{M}{2}\right)\delta = 0 \quad \underset{\delta}{\forall} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M = -48\ \mathrm{kNm}}$$

praca momentu na kącie obrotu

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ