

# MECHANIKA TEORETYCZNA

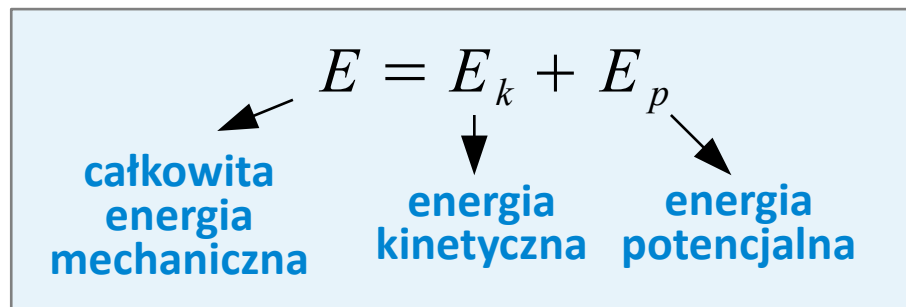
dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL

tel. 12 628 20 30

e-mail: [pszeptynski@pk.edu.pl](mailto:pszeptynski@pk.edu.pl)

# SIŁY DYSSYPATYWNE



### Siły konserwatywne (zachowawcze)

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

- obowiązuje **zasada zachowania energii**.
- przykład: siła grawitacji.
- szczególną klasę sił zachowawczych stanowią **siły potencjalne**, dla których istnieje funkcja skalarna  $V(x,y,z)$ , nazywana **potencjałem**, taka że siła potencjalna:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V = -\left[ \frac{\partial V}{\partial x}; \frac{\partial V}{\partial y}; \frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

**Każda siła potencjalna jest siłą zachowawczą.**

### Siły dyssypatywne (rozpraszające)

$$\frac{dE}{dt} \neq 0$$

- **energia zmienia swoją wartość**
- teoretycznie można mówić o siłach niezachowawczych, od których energia układu przyrasta (źródło energii) – takimi się nie zajmujemy..
- skutek działania sił dyssypatywnych **energia mechaniczna ulega rozproszeniu** – najczęściej na sposób ciepła.
- efekty dyssypacji związane są z szeroko rozumianymi zjawiskami **tarcia i tłumienia**.

## SIŁY DYSSYPATYWNE

tłumienie  
wewnętrzne

Dyssypacja energii związana z **niesprężystymi zjawiskami zachodzącymi w materiale**, tj. z:

- własnościami lepкими materiału (np. ciecze lepkie, materiały lepko-sprężyste)

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\text{naprężenie ścinające}}{\text{prędkość odkształcenia postaciowego}}$$

- zachodzeniem zjawisk nieodwracalnych, np. pojawieniem się odkształceń trwałych (plastycznych)

tłumienie  
zewewnętrzne

Dyssypacja energii wynikająca z **interakcji z innymi ciałami lub ośrodkiem**, w którym porusza się ciało

- **tarcie suche (ślizgowe, suwne)**  $F_d = \nu N$
- **opór lepki (wiskotyczny)**  $F_d = c v$
- **opór aerodynamiczny**  $F_d = d v^2$

Jest to podział raczej akademicki – własności lepkiej cieczy stanowią o jej tłumieniu wewnętrznym a także o tłumieniu zewnętrznym ciała, które zanurzone jest w takiej cieczy.

## TARCIE KONSTRUKCYJNE

**Tłumienie konstrukcyjne** – rozpraszanie energii w układzie złożonym (konstrukcji) na skutek **tarcia** między elementami składowymi tego układu, np.:

- tarcie na styku elementów konstrukcyjnych (styki przesuwne, przeguby, łączniki, dylatacje itp.)
- tłumienie w elementach niekonstrukcyjnych deformujących się razem z konstrukcją
- tarcie w pęknięciach

Z punktu widzenia elementów składowych jest to tłumienie zewnętrzne (tarcie). Z punktu widzenia konstrukcji zjawisku temu można nadać charakter tłumienia wewnętrznego (własność układu a nie interakcja z otoczeniem). W jednym i w drugim przypadku modelowanie matematyczne może być takie samo.

Macierzowe równanie ruchu dyskretnego układu mechanicznego

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ & & \ddots & \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ & & \ddots & \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}$$

## TARCIE KONSTRUKCYJNE

Macierzowe równanie ruchu dyskretnego układu mechanicznego

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ & & \ddots & \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ & & \ddots & \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P}$$

$\mathbf{M}$  – macierz mas

$\mathbf{C}$  – macierz tłumienia

$\mathbf{K}$  – macierz sztywności

$\mathbf{x}$  – wektor przemieszczeń węzłowych

$\mathbf{P}$  – wektor obciążenia

**Model tłumienia konstrukcyjnego Rayleigha:**

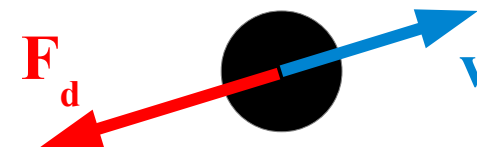
$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

$\alpha, \beta$  - stałe parametry charakterystyczne dla układu mechanicznego.

## SIŁY DYSSIPATYWNE

Siły tłumienia (tarcia) działają w kierunku przeciwnym do wektora prędkości.

Wersor kierunku prędkości  $\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{[\dot{x}; \dot{y}; \dot{z}]}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}$



Tarcie suche

$$\mathbf{F}_d = -b|\mathbf{v}|^0 \mathbf{e}_v \quad (\text{zagadnienia przedziałami liniowe, niejednorodne})$$

Tłumienie lepkie (wiskotyczne) liniowe

$$\mathbf{F}_d = -c|\mathbf{v}|^1 \mathbf{e}_v \quad (\text{zagadnienia liniowe})$$

Tłumienie aerodynamiczne (nieliniowe)

$$\mathbf{F}_d = -d|\mathbf{v}|^2 \mathbf{e}_v \quad (\text{zagadnienia nieliniowe})$$

# TARCIE SUCHE

## Siła tarcia suchego:

- **Wielkość** siły tarcia jest **niezależna od szybkości**.
- **Kierunek** siły tarcia jest **taki sam jak kierunek prędkości** (lub przemieszczenia wirtualnego).
- **Zwrot** siły tarcia jest **przeciwny do zwrotu prędkości** (lub przemieszczenia wirtualnego).

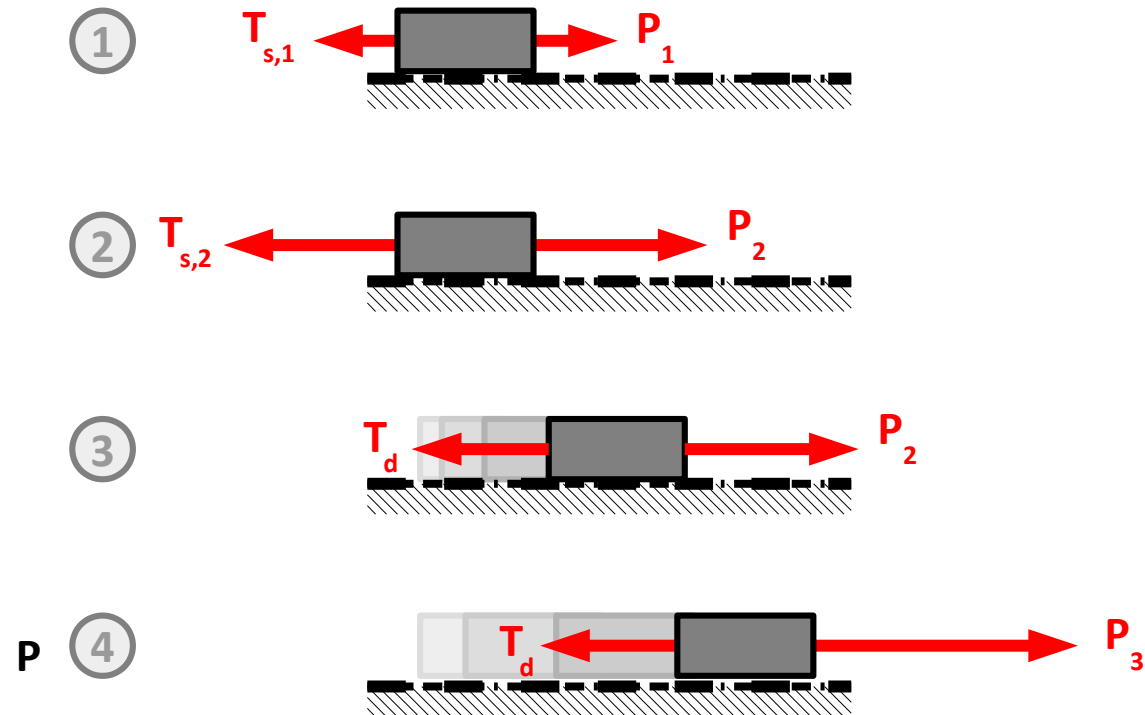
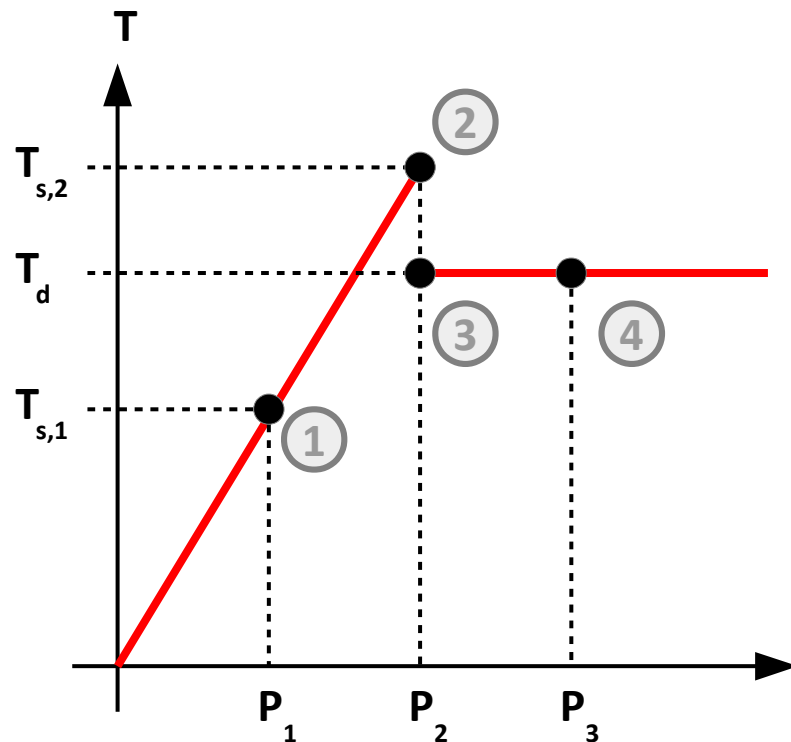
$$\mathbf{F}_d = -F_d \mathbf{e}_v$$

- **Siła tarcia ma charakter siły biernej (reakcji)** w tym sensie, że nie pojawia się sama z siebie, a jedynie jako odpowiedź na działanie czynnych sił zewnętrznych.
- Dopóki **ciało się nie porusza, siła tarcia nie wykonuje pracy** (zerowe przemieszczenie) i może być traktowana jako składowa **reakcji więzów gładkich**. Kierunek i zwrot siły tarcia odpowiadają pewnemu **przemieszczeniu wirtualnemu**.
- Siła tarcia to **reakcja wiązania szorstkiego** (dyssypacja energii, brak spełnienia zasady prac wirtualnych). Gdy **ciało się porusza, tarcie wykonuje pracę na przemieszczeniu** i ma charakter **zewnętrznej siły czynnej**. **Praca siły tarcia na przemieszczeniu jest zawsze niedodatnia** – tarcie nie może wywołać ruchu i dostarczać energii, a jedynie krępować ruch wymuszony innym czynnikiem i rozpraszać energię. Kierunek i zwrot siły tarcia odpowiadają rzeczywistej prędkości.



## TARCIE STATYCZNE I KINETYCZNE

- Siła tarcia rośnie proporcjonalnie do siły wymuszającej ruch, dopóki ciało jest nieruchome – jest to **tarcie statyczne**.
- Po rozpoczęciu ruchu siła tarcia jest stała – jest to **tarcie kinetyczne**.
- **Maksymalna siła tarcia statycznego jest większa od siły tarcia kinetycznego.**



# TARCIE COULOMBOWSKIE

Na podstawie obserwacji sformułowano **3 prawa tarcia suchego (Amontonsa-Coulomba)**:

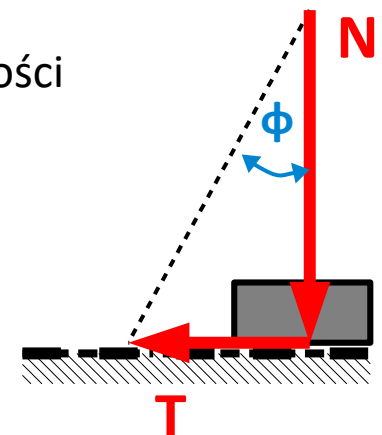
- **wielkość siły tarcia jest wprost proporcjonalna do siły nacisku**
- **wielkość siły tarcia nie zależy od pola powierzchni kontaktu** – zależy zatem od sumarycznej siły nacisku a nie od lokalnej intensywności naprężeń kontaktowych
- **wielkość siły tarcia w czasie ruchu jest niezależna od szybkości ruchu**

Model **tarcia coulombowskiego**:






$$|\mathbf{T}| = \nu |\mathbf{N}|$$

- $\mathbf{T}$  – **siła tarcia**, wektor równoległy i zwrócony przeciwnie do wektora prędkości
- $\mathbf{N}$  – **siła nacisku** wywieranego przez ciała na siebie nawzajem
- $\nu$  – **współczynnik tarcia** (statycznego lub kinetycznego)

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{|\mathbf{T}|}{|\mathbf{N}|} = \nu \quad \phi - \text{**kąt tarcia wewnętrzny**}$$



# WSPÓŁCZYNNIK TARCIA

			współczynnik tarcia statycznego	współczynnik tarcia kinetycznego
stal		stal	<b>0,15</b>	<b>0,10</b>
drewno		drewno	<b>0,60</b>	<b>0,25</b>
stal		beton	<b>0,50</b>	<b>0,30</b>
beton		drewno	<b>0,62</b>	
drewno		stal	<b>0,55</b>	<b>0,35</b>

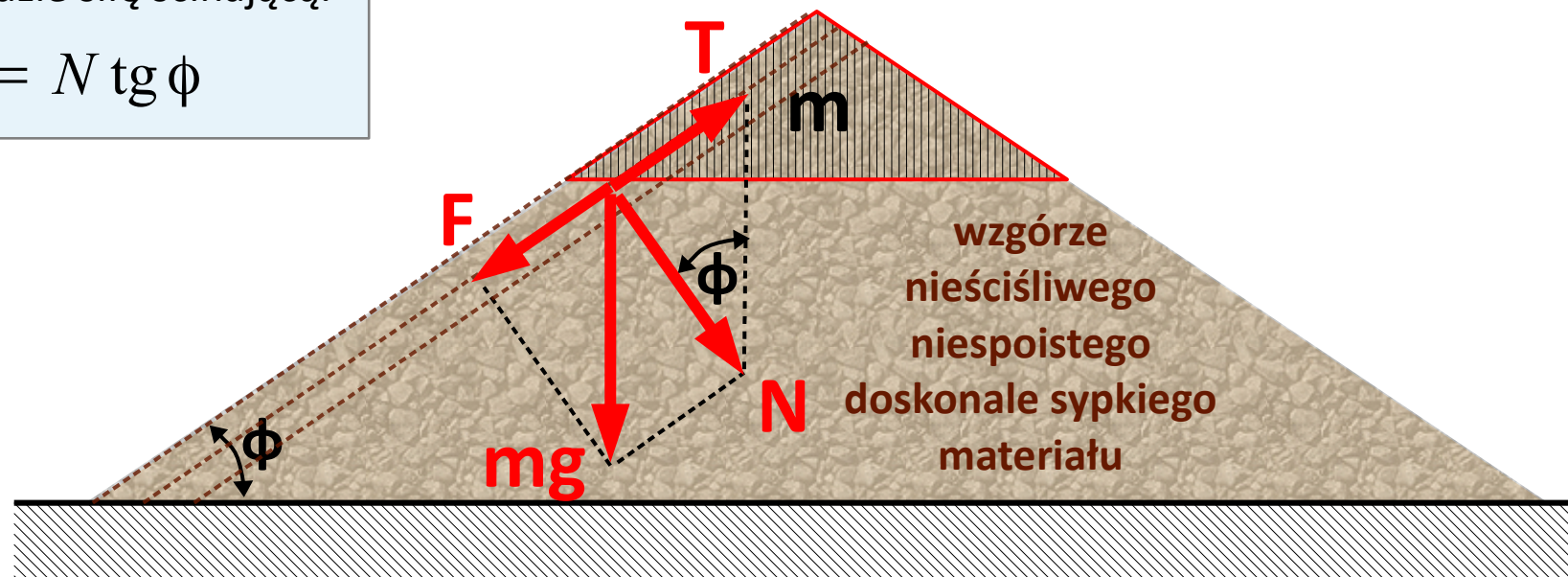
## KĄT TARCIA WEWNĘTRZNEGO

Ciężar masy  $m$  materiału rozkładamy na dwie składowe:

- $N$  – **nacisk**, siła dociskająca warstwy materiału do siebie.
- $F$  – **siła styczna, ścinająca** materiał, wymuszająca poślizg warstw materiału względem siebie.

Wzgórze będzie w równowadze,  
gdy tarcie warstw o siebie  
równoważyć będzie siłę ścinającą.

$$F = T = N \operatorname{tg} \phi$$



**Kąt nachylenia stoku swobodnie sypanego wzgórza doskonale sypkiego (niespoistego) materiału jest równy kątowi tarcia wewnętrznego tego materiału.**

# KĄT TARCIA WEWNĘTRZNEGO

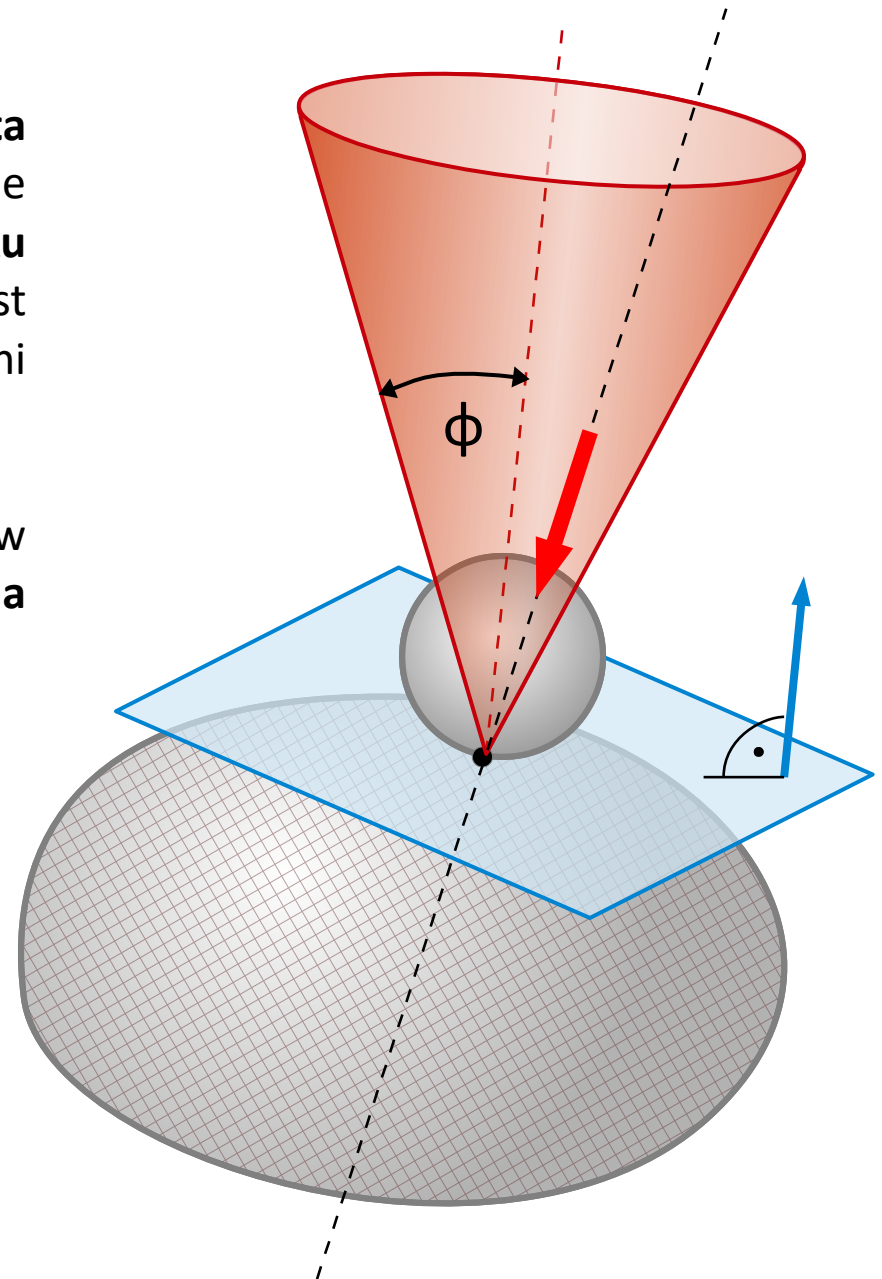
materiał	kąt tarcia wewnętrznego	współczynnik tarcia
pył	$26^\circ \div 35^\circ$	$0,488 \div 0,700$
piasek	$30^\circ \div 45^\circ$	$0,577 \div 1,000$
żwir	$35^\circ$	0,700
kamienie	$30^\circ$	0,577
glina	$20^\circ$	0,364
cement	$32^\circ$	0,625

# STOŻEK TARCIA

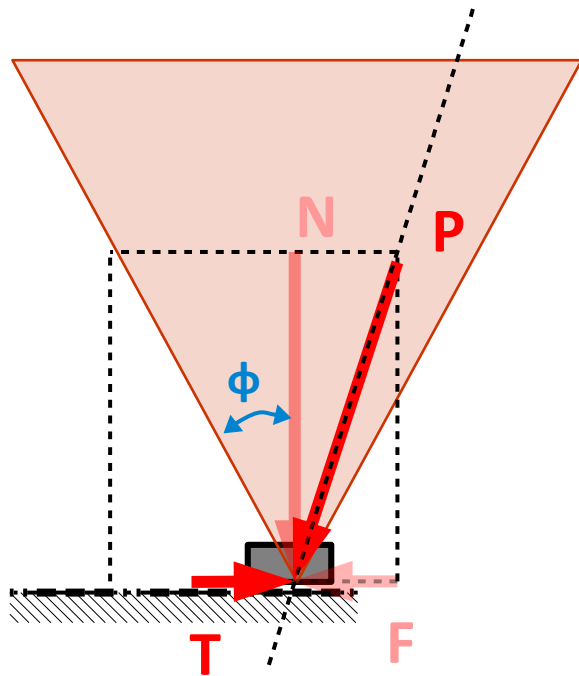
**Stożek tarcia** to obszar w przestrzeni, taki że, **jeśli prosta działania siły** działającej na ciało będące w kontakcie szorstkim (tarcie coulombowskie) **zawiera się w stożku tarcia, to ciało pozostanie w spoczynku** - tj. siła tarcia jest w stanie zrównoważyć składową styczną do powierzchni kontaktu.

**Kąt rozwarcia** osiowego przekroju poprzecznego w wierzchołku stożka wynosi **dwukrotność kąta tarcia wewnętrznego**, tj.  $2\phi$ , gdzie

$$\operatorname{tg} \phi = \nu$$



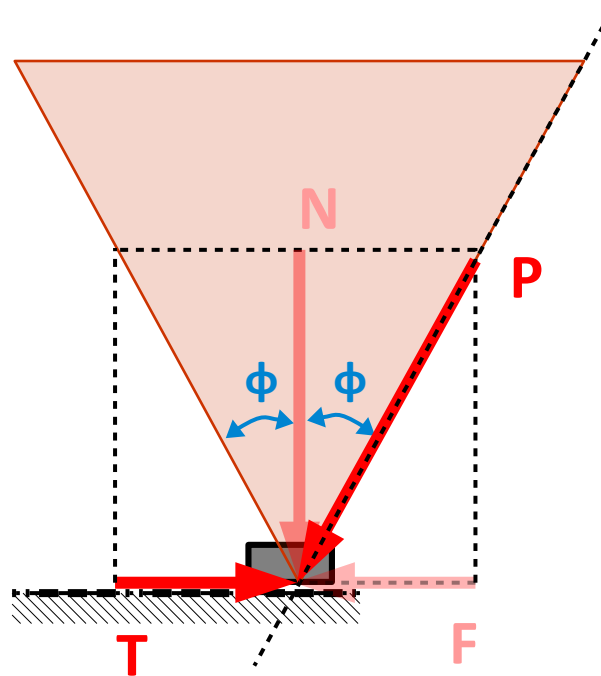
# STOŻEK TARCIA



$$T < T_{max}$$

$$T = F$$

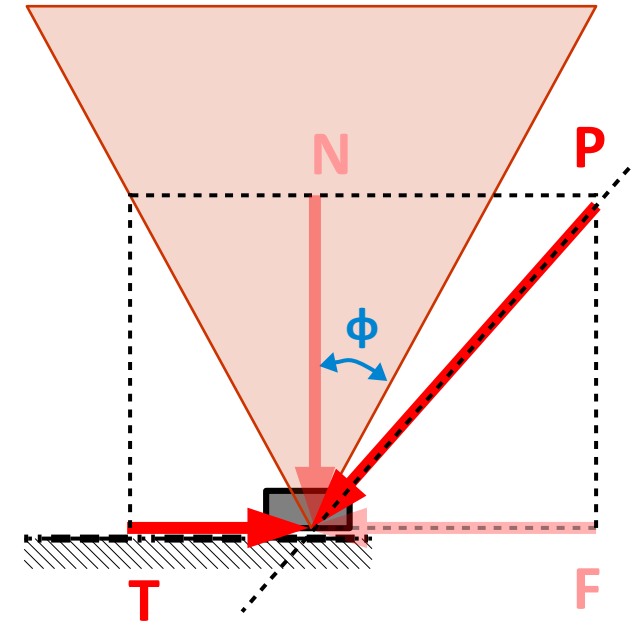
układ w równowadze



$$T = T_{max}$$

$$T = F$$

układ w równowadze



$$T = T_{max}$$

$$T < F$$

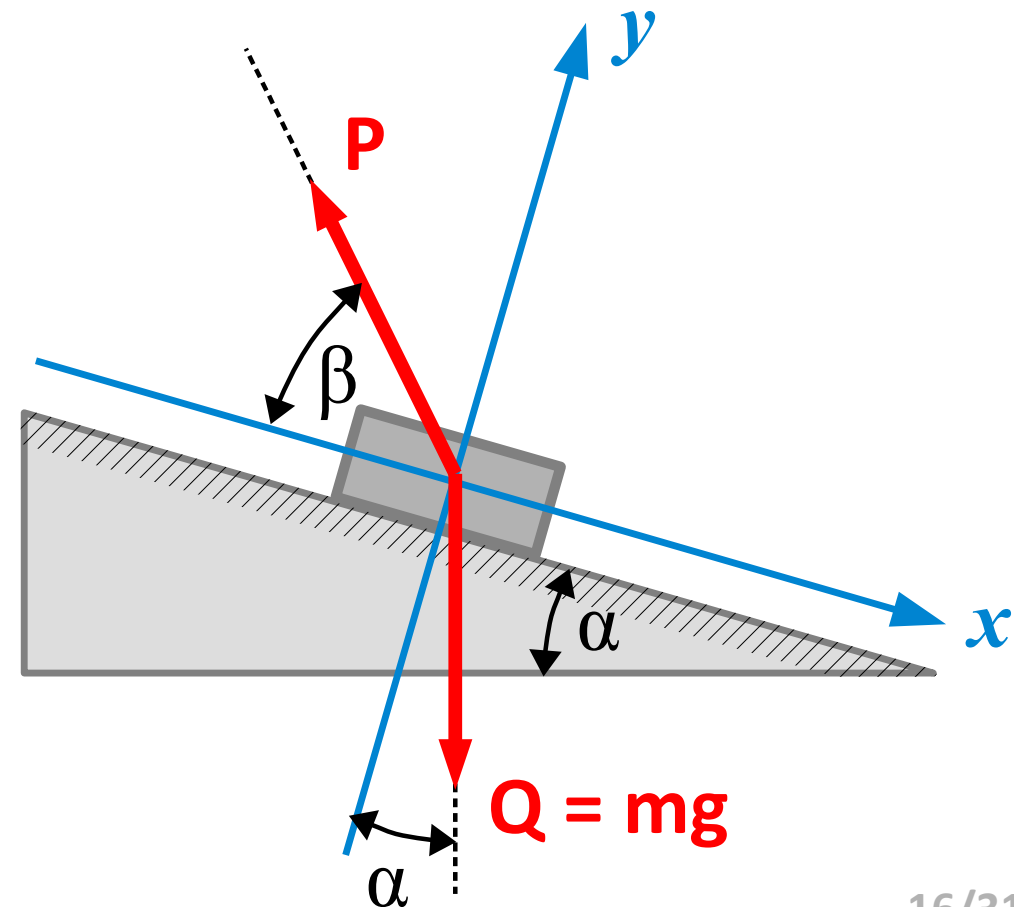
poślizg

**Wielkość siły tarcia nigdy nie przekracza wielkości siły wymuszającej ruch,  
Tarcie jest co najwyżej równe tej sile lub mniejsze.**

## SZORSTKA RÓWNIA POCHYŁA

Dane jest ciało o masie  $m$ , spoczywające na równi nachylonej do poziomu pod kątem  $\alpha$  i obciążone siłą zewnętrzną  $P$  przyłożoną pod kątem  $\beta$  do płaszczyzny równi. Współczynnik tarcia pomiędzy ciałem a powierzchnią równi wynosi  $\nu$ .

Dla jakich wielkości siły  $P$  ciało będzie w spoczynku?





## SZORSTKA RÓWNIA POCHYŁA

Równania równowagi z pominięciem tarcia:

$$\Sigma X = 0: \quad -P \cos \beta + Q \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0: \quad P \sin \beta - Q \cos \alpha = 0$$

Z pierwszego równania równowagi:

$$P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

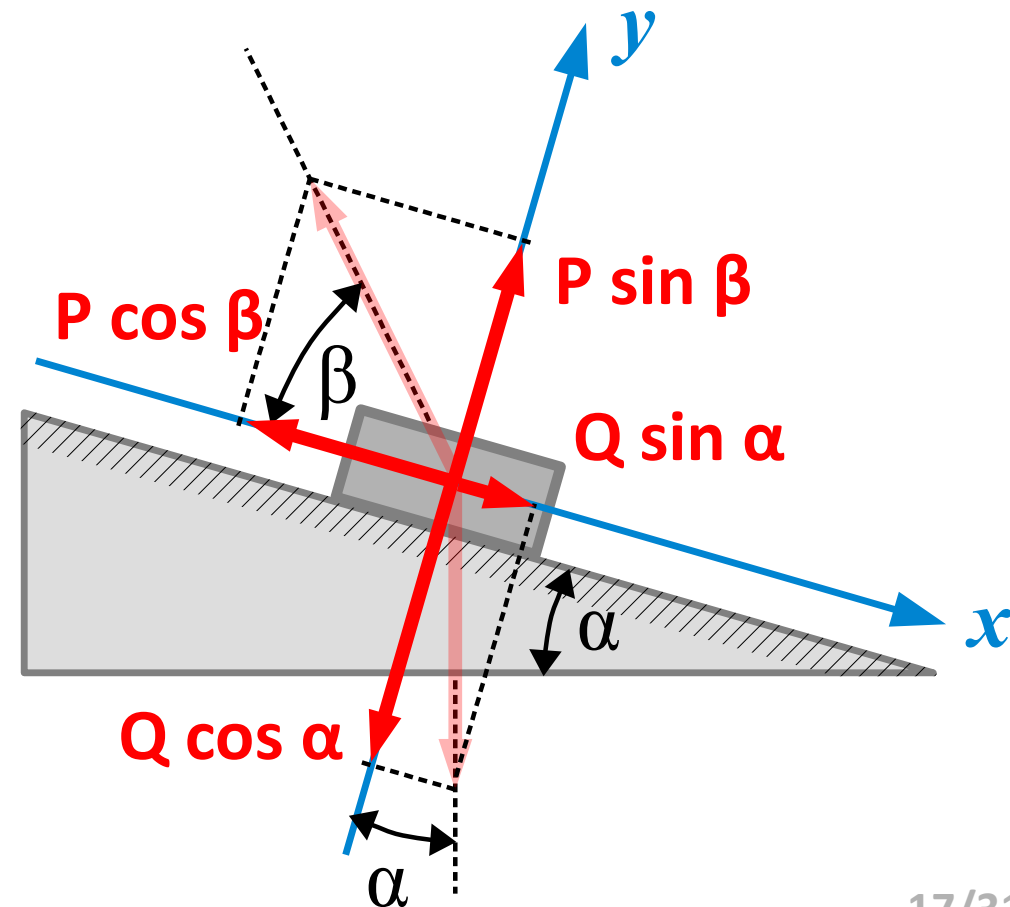
Siła nacisku:

$$N = Q \cos \alpha - P \sin \beta$$

$$N = Q \cos \alpha - Q \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta}$$

$$N = Q \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta}$$

$$N = Q \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$



## SZORSTKA RÓWNIA POCHYŁA

Równania równowagi z uwzględnieniem tarcia.

PRZYPADEK 1 – ciało przesuwające się w dół.

$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \\ T = N \operatorname{tg} \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P \cos \beta + Q \sin \alpha - T = 0 \\ T = \operatorname{tg} \phi (Q \cos \alpha - P \sin \beta) \end{cases}$$

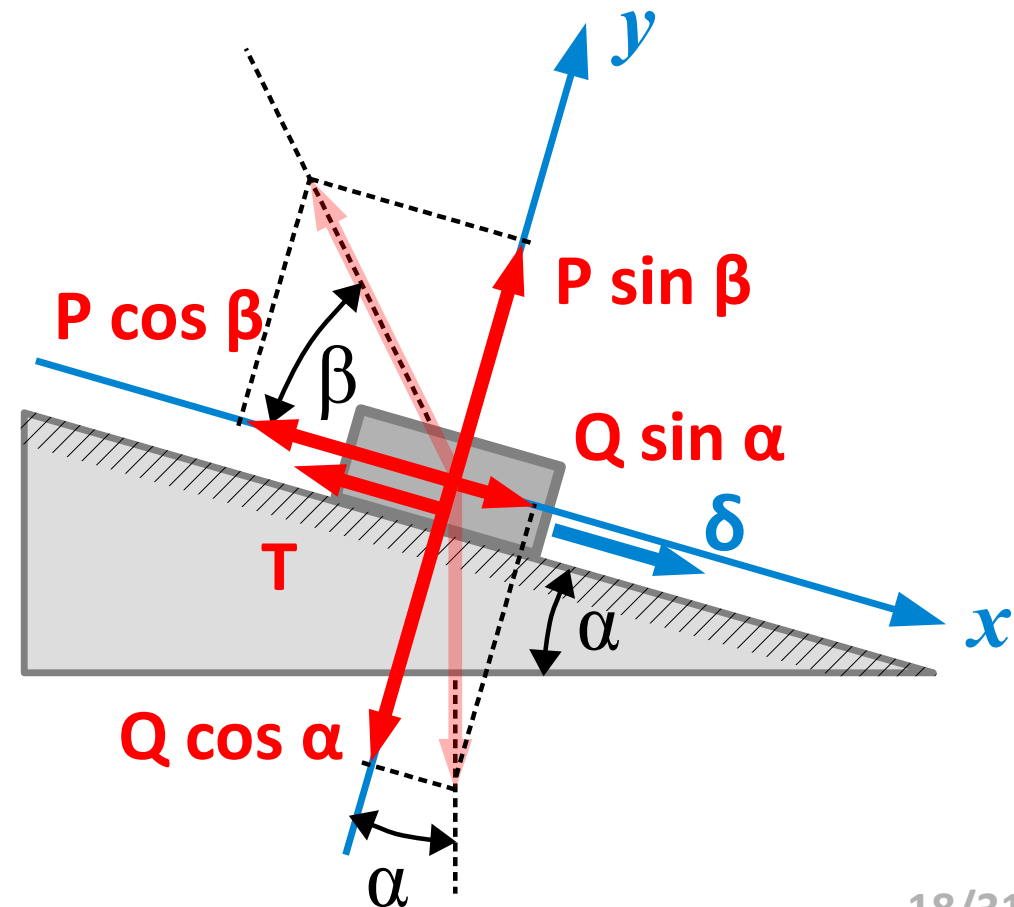
$$-P \cos \beta + Q \sin \alpha - \operatorname{tg} \phi (Q \cos \alpha - P \sin \beta) = 0$$

$$P(\operatorname{tg} \phi \sin \beta - \cos \beta) = Q(\operatorname{tg} \phi \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$P = Q \frac{\operatorname{tg} \phi \cos \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \phi \sin \beta - \cos \beta}$$

$$P = Q \frac{\cos \phi \sin \alpha - \sin \phi \cos \alpha}{\cos \phi \cos \beta - \sin \phi \sin \beta}$$

$$P_{\min} = Q \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos(\beta + \phi)}$$



## SZORSTKA RÓWNIA POCHYŁA

Równania równowagi z uwzględnieniem tarcia.

PRZYPADEK 2 – ciało przesuwające się w górę.

$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \\ T = N \operatorname{tg} \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P \cos \beta + Q \sin \alpha + T = 0 \\ T = \operatorname{tg} \phi (Q \cos \alpha - P \sin \beta) \end{cases}$$

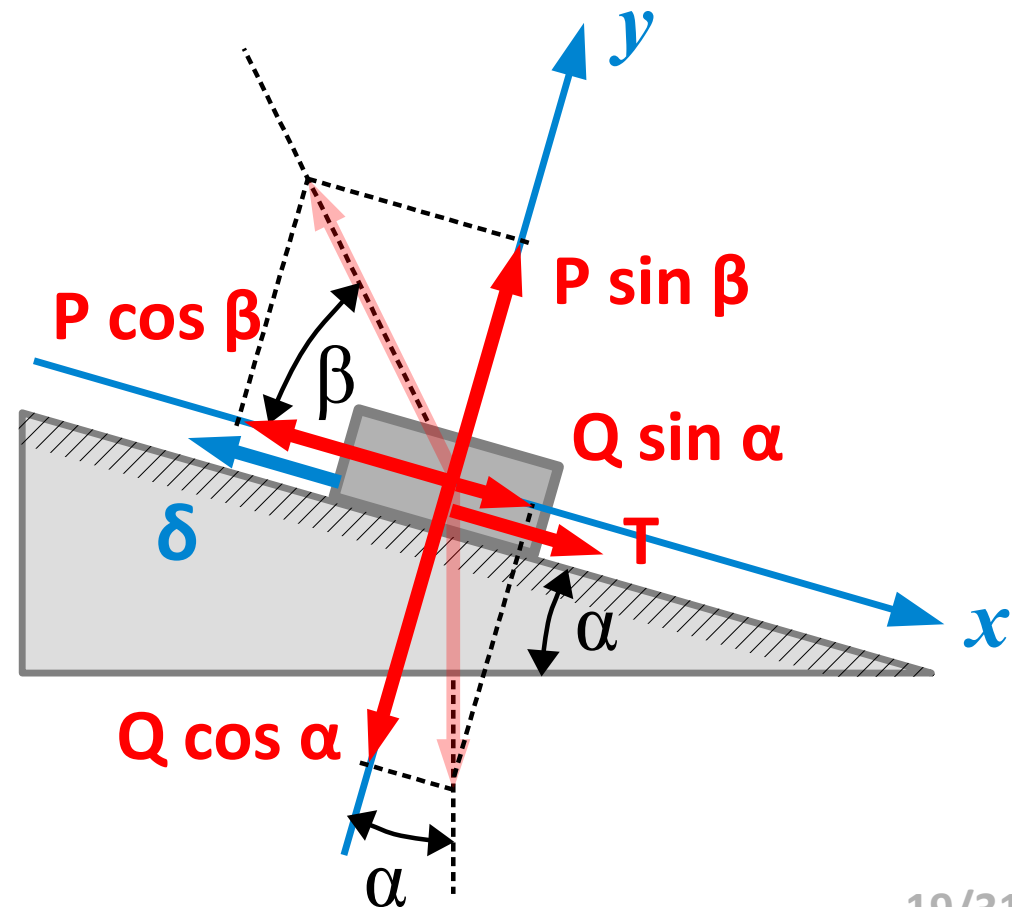
$$-P \cos \beta + Q \sin \alpha + \operatorname{tg} \phi (Q \cos \alpha - P \sin \beta) = 0$$

$$P(\operatorname{tg} \phi \sin \beta + \cos \beta) = Q(\operatorname{tg} \phi \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$P = Q \frac{\operatorname{tg} \phi \cos \alpha + \sin \alpha}{\operatorname{tg} \phi \sin \beta + \cos \beta}$$

$$P = Q \frac{\cos \phi \sin \alpha + \sin \phi \cos \alpha}{\cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta}$$

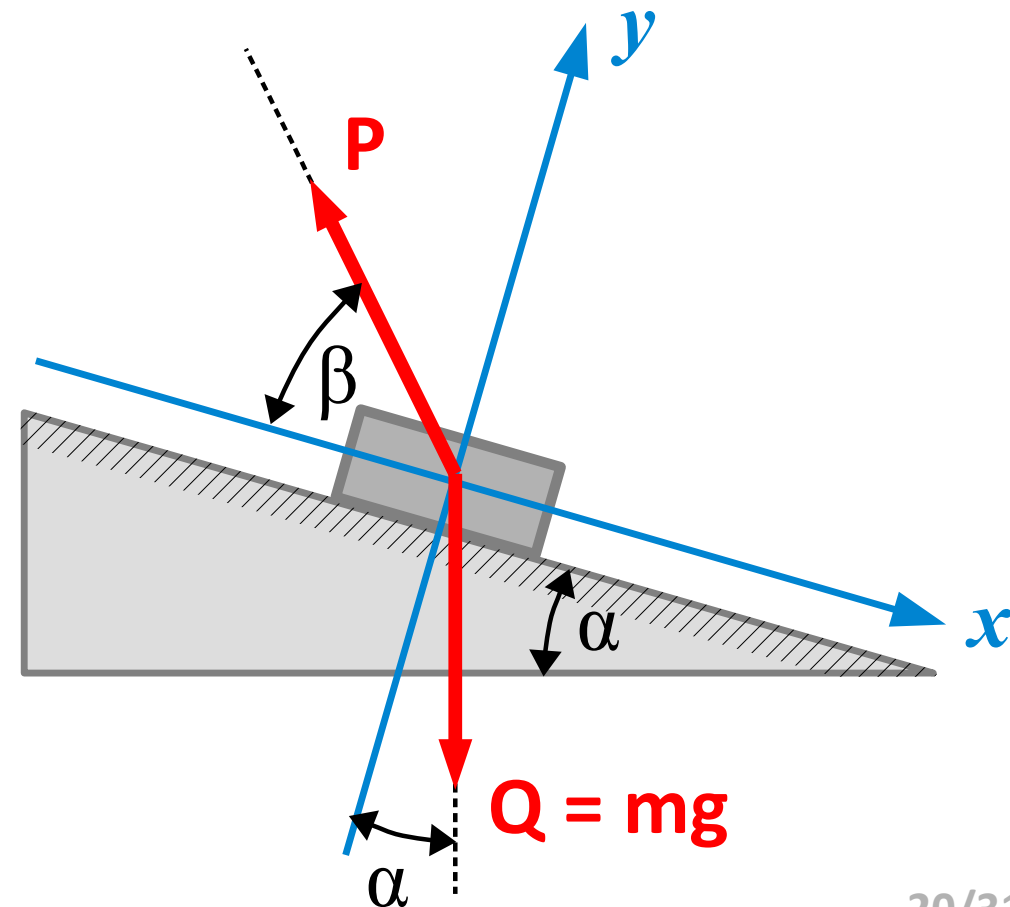
$$P_{max} = Q \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\cos(\beta - \phi)}$$



## SZORSTKA RÓWNIA POCHYŁA

$$P_{min} = Q \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos(\beta + \phi)} \leq P \leq P_{max} = Q \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\cos(\beta - \phi)}$$

Jeśli  $P_{min} \leq 0$ , wtedy układ jest w równowadze również przy braku siły  $P$ , tj. nacisk wywierany przez sam ciężar ciała wywołuje tarcie wystarczające do zrównoważenia stycznej składowej ciężaru, tj. do utrzymania ciała w spoczynku.



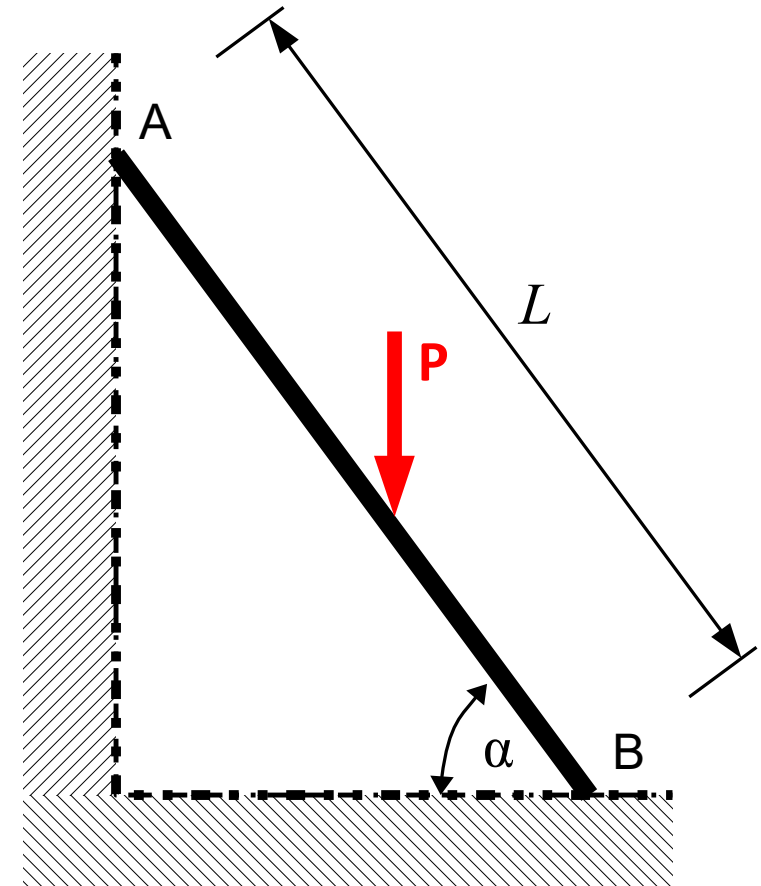
## RÓWNOWAGA BELKI OPARTEJ O PODŁOŻE SZORSTKIE

Dana jest belka podparta w dwóch punktach na podłożu szorstkim. Jak blisko środka belki można przyłożyć siłę pionową, aby belka pozostała w spoczynku?

$\alpha$  – kąt nachylenia belki

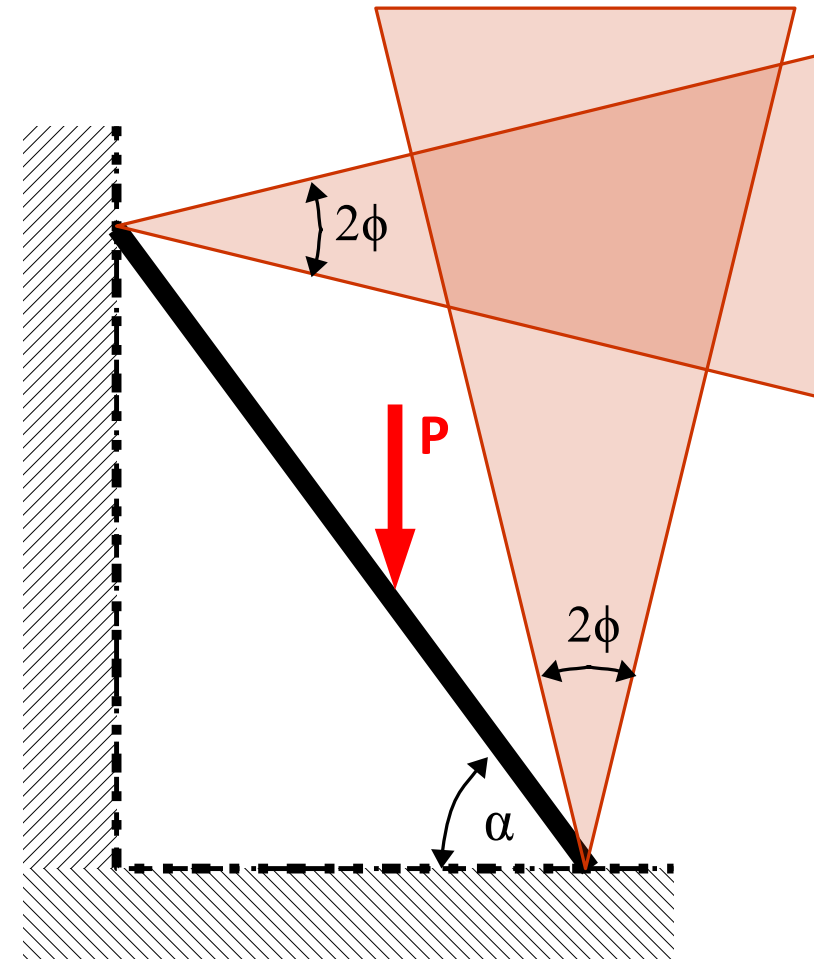
$L$  – długość belki

$v = \operatorname{tg} \varphi$  – współczynnik tarcia



# RÓWNOWAGA BELKI OPARTEJ O PODŁOŻE SZORSTKIE

Dopuszczalny zakres zmienności reakcji w punktach podparcia określony jest przez **stożki tarcia**.



## RÓWNOWAGA BELKI OPARTEJ O PODŁOŻE SZORSTKIE

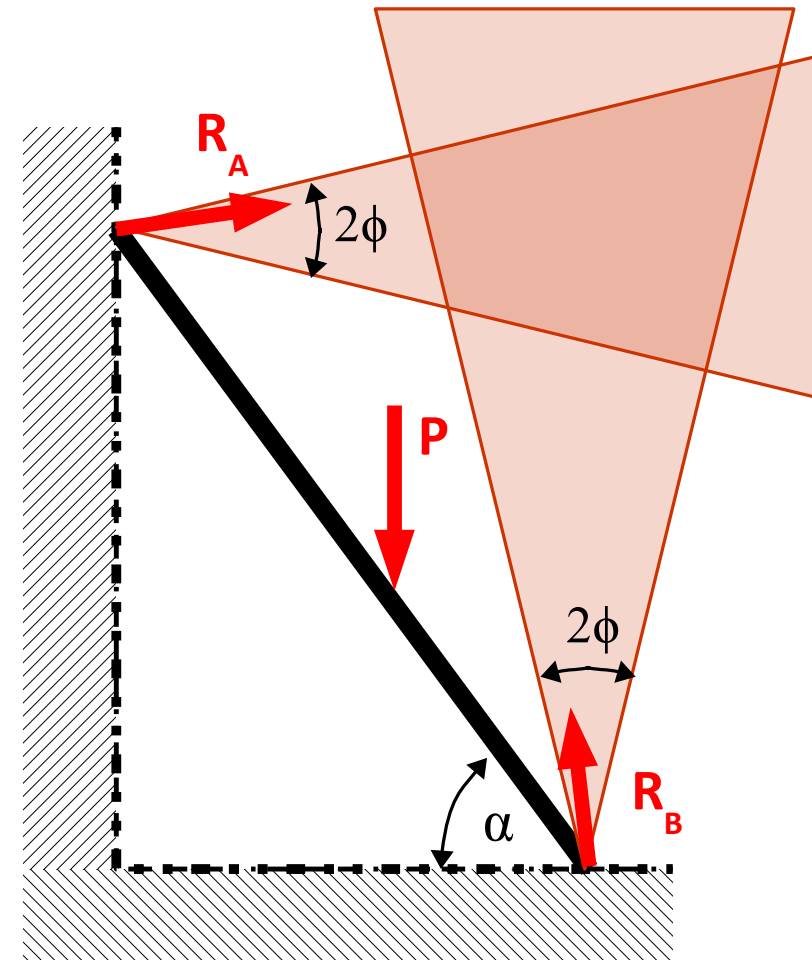
Spodziewamy się, że belka zsunie się w taki sposób, że:

- górny koniec przesunie się w dół,
- dolny koniec przesunie się w prawo.

W związku z tym:

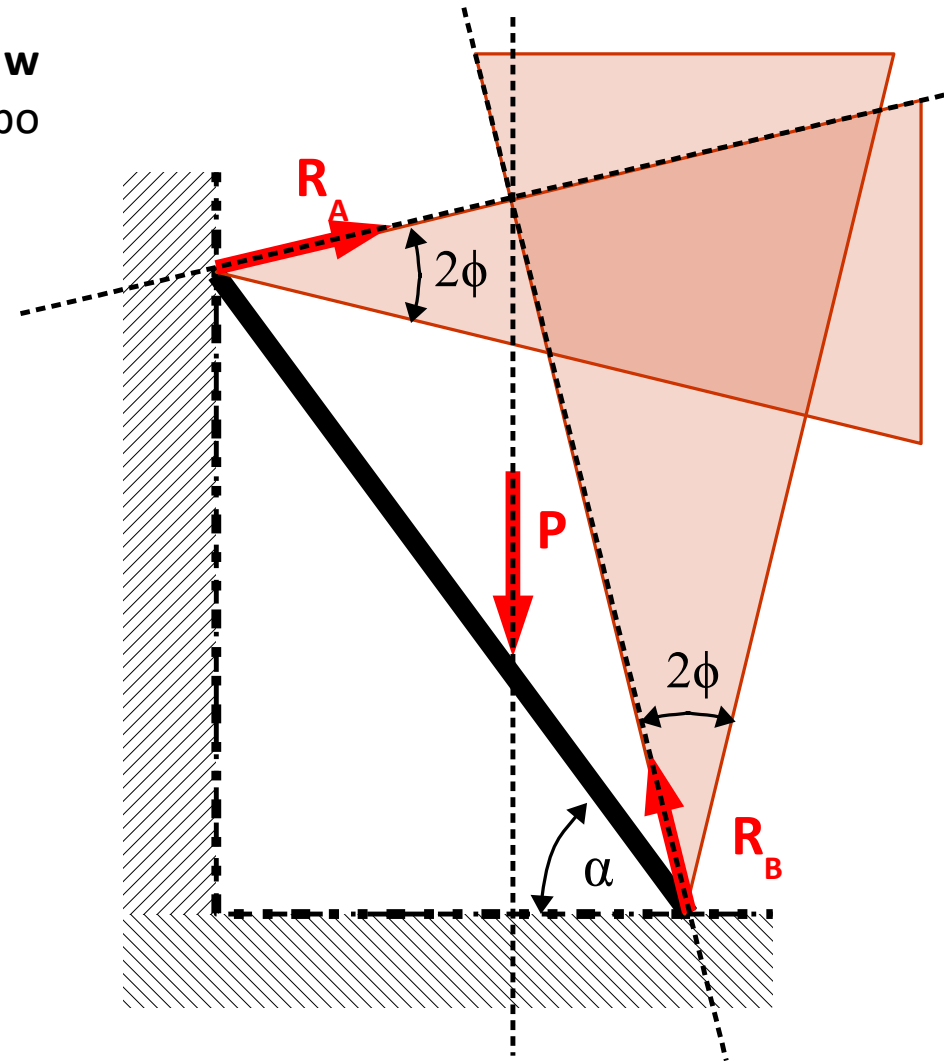
- siła tarcia na górnym końcu będzie działać w górę,
- siła tarcia na dolnym końcu będzie działać w lewo.

Reakcje te muszą zawierać się w stożkach tarcia.



# RÓWNOWAGA BELKI OPARTEJ O PODŁOŻE SZORSTKIE

Układ trzech sił jest w równowadze, jeśli leżą one w jednej płaszczyźnie i stanowią albo układ zbieżny albo układ równoległy.





## RÓWNOWAGA BELKI OPARTEJ O PODŁOŻE SZORSTKIE

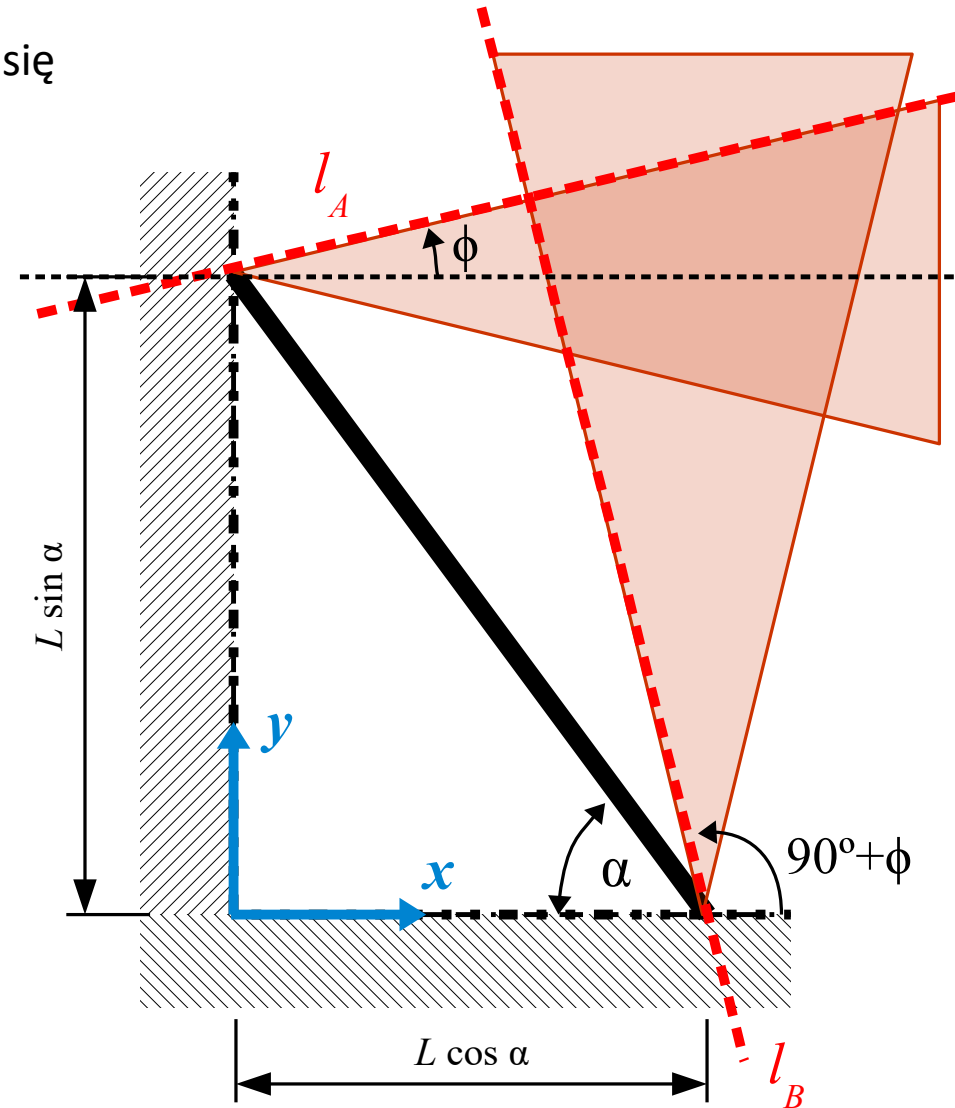
Punkt zbieżności układu sił zlokalizujemy na przecięciu się pobocznic stożków tarcia.

$$\begin{cases} l_A: & y = x \operatorname{tg} \phi + L \sin \alpha \\ l_B: & y = -x \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} + \frac{L \cos \alpha}{\operatorname{tg} \phi} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = L \frac{\cos \alpha - \operatorname{tg} \phi \sin \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = L \cos(\alpha + \phi) \cos \phi \\ y = L [\cos(\alpha + \phi) \sin \phi + \sin \alpha] \end{cases}$$

Ten wynik jest niezależny od wartości obciążenia.



# RÓWNOWAGA BELKI OPARTEJ O PODŁOŻE SZORSTKIE

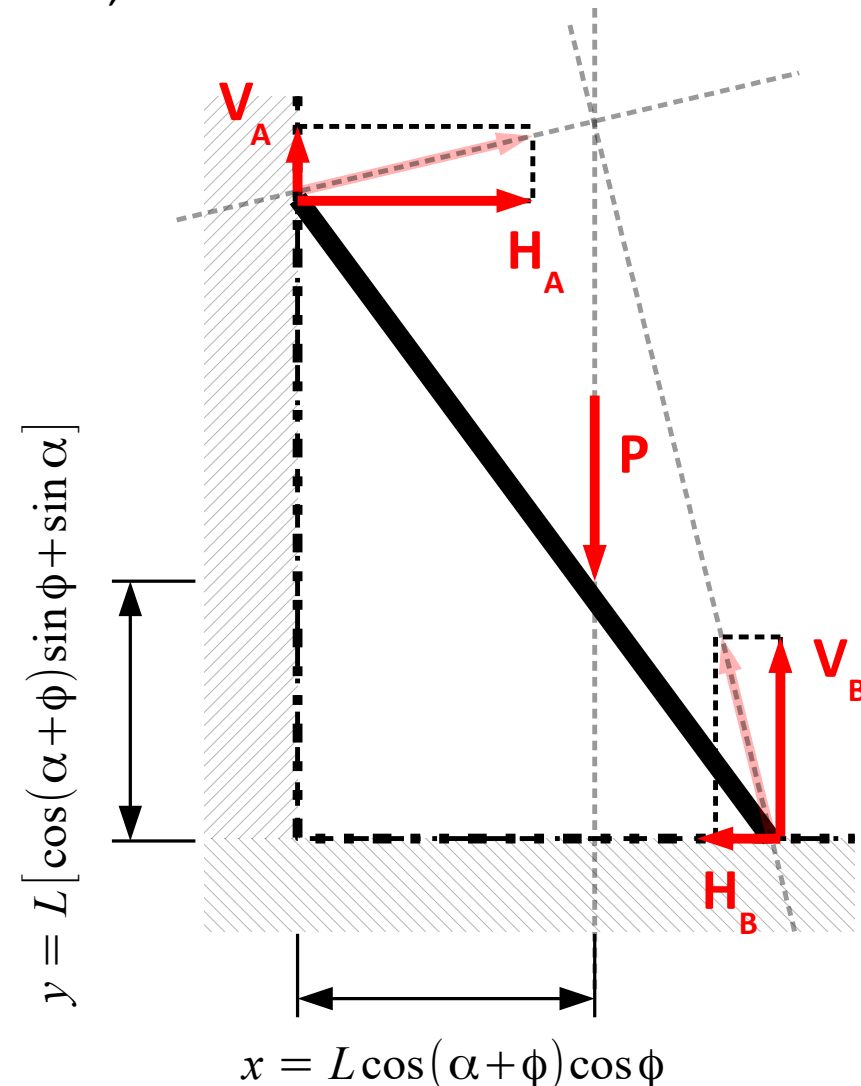
Otrzymaliśmy zbieżny układ sił. Aby był w równowadze, musi on spełniać równania równowagi.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_A = H_A \operatorname{tg} \phi \\ H_B = V_B \operatorname{tg} \phi \\ \Sigma X = 0: \quad H_A - H_B = 0 \\ \Sigma Y = 0: \quad V_A + V_B - P = 0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} H_A = P \sin \phi \cos \phi \\ V_A = P \sin^2 \phi \\ H_B = P \sin \phi \cos \phi \\ V_B = P \cos^2 \phi \end{array} \right.$$

**Ten wynik jest niezależny od położenia obciążenia.**



## TŁUMIENIE WISKOTYCZNE

**Siła tłumienia** jest proporcjonalna do **prędkości**. Ma:

- ten sam kierunek co wektor prędkości
- przeciwny zwrot co wektor prędkości
- wielkość wprost proporcjonalną do szybkości

$$\mathbf{F}_d = -c \mathbf{v}$$

**Współczynnik tłumienia**  $c$  wyznacza się

- **doświadczalnie** – np. mierząc spadek amplitudy drgań tłumionych.

$$c = \frac{2\delta\sqrt{km}}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}$$

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

$k$  – sztywność konstrukcji

$m$  – masa konstrukcji

- **teoretycznie** – np. dla **niewielkiej gładkiej kuli o promieniu  $R$**  poruszającej się z **niedużą prędkością** w **nieściśliwej cieczy o dużej lepkości dynamicznej  $\eta$**  wartość  $c$  określa **prawo Stokesa**:

$$c = 6\pi\eta R$$

# OPÓR AERODYNAMICZNY

Wielkość **siły tłumienia** jest **proporcjonalna** do **kwadratu szybkości**. Siła oporu aerodynamicznego ma:


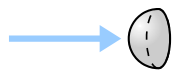





- ten sam kierunek co wektor prędkości
- przeciwny zwrot co wektor prędkości
- wielkość wprost proporcjonalną do kwadratu szybkości

$$\mathbf{F}_d = - \underbrace{\frac{1}{2} \rho C_d A}_d |\mathbf{v}|^2 \mathbf{e}_v \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$\rho$  – **gęstość** ośrodka tłumiącego, w którym porusza się ciało

$A$  – **pole powierzchni rzutu** ciała na płaszczyznę prostopadłą do kierunku prędkości

$C_d$  – **współczynnik oporu aerodynamicznego**

KSZTAŁT	$C_d$
Kula 	0,47
Półkula 	0,42
Stożek 	0,50
Sześcian 	1,05
Długi walec 	0,82
Krótki walec 	1,15
Ciało opływowe 	0,04

## TARCIE TOCZNE

**Tarcie toczne (opór toczenia)** – siła oporu pojawiająca się przy toczeniu się jednego ciała po powierzchni innego ciała.

- $P$  – siła ciągnąca
- $N$  – siła nacisku
- $R$  – reakcja podłoża
- $R_N$  – składowa reakcji, prostopadła do płaszczyzny kontaktu
- $R_T$  – składowa reakcji, styczna do płaszczyzny kontaktu
- $T$  – **siła tarcia tocznego**

- **Siła tarcia tocznego jest równa sile ciągnącej.**

$$P = T$$

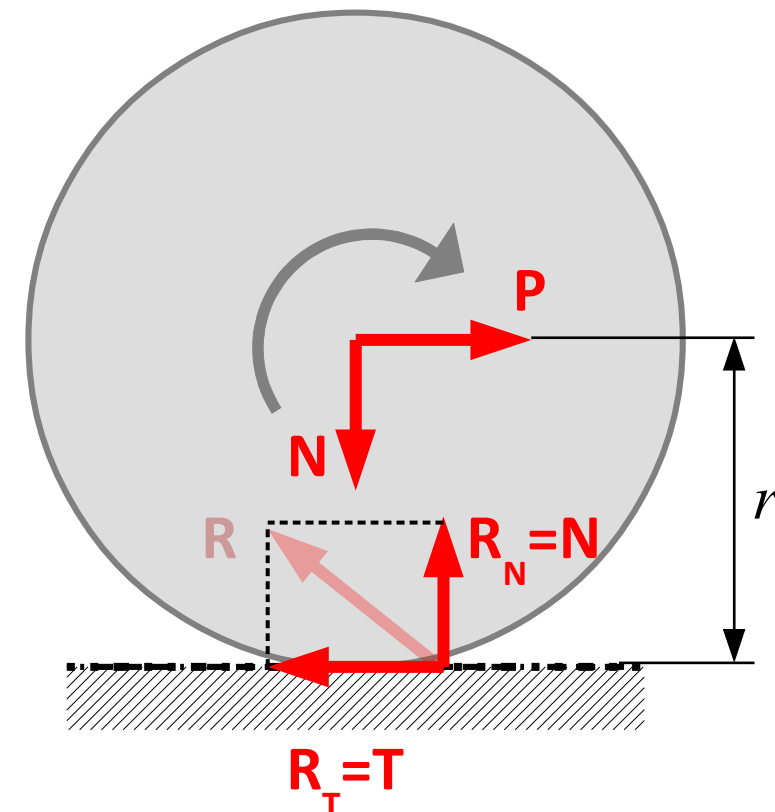
- **Moment wymuszający toczenie** to moment tej pary sił:

$$M = P r = T r$$

- Obserwujemy, że **moment ten jest proporcjonalny do nacisku**:

$$M = f N$$

$f$  – **współczynnik tarcia tocznego** o wymiarze m

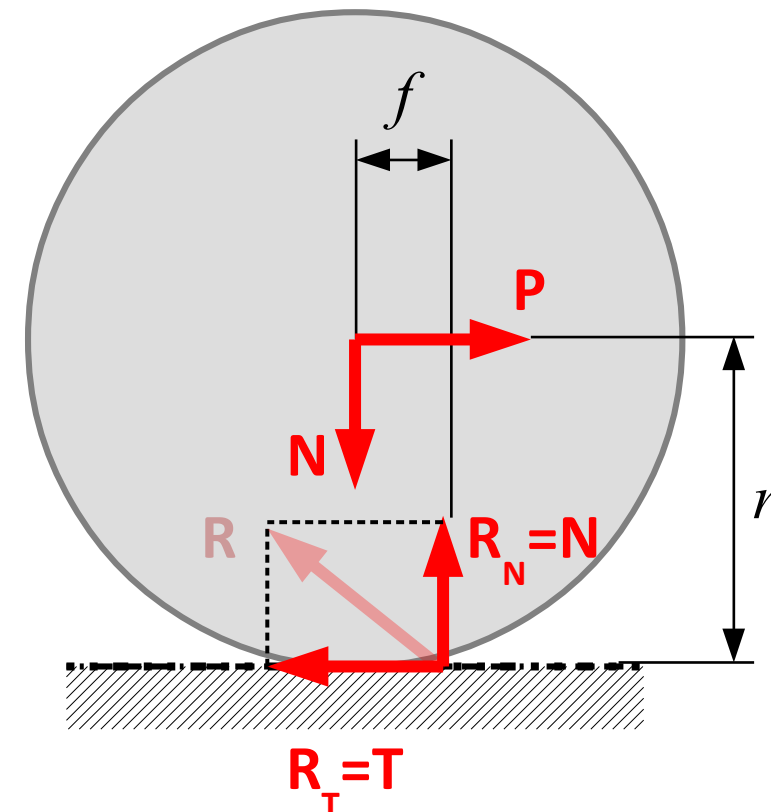


# TARCIE TOCZNE

materiał koła	materiał podłoża	współczynnik tarcia tocznego
drewno miękkie	drewno miękkie	0,0015 m
drewno miękkie	stal	0,0008 m
guma	beton	0,015-0,035 m
stal	asfalt	0,006 m
stal	bruk	0,0015 m
stal	stal	0,00005 m

- **Współczynnik tarcia tocznego** ma interpretacją odległości między prostymi działaniem siły nacisku oraz pionowej składowej reakcji podłoża.
- Taka para równowagi moment pary siły P i T.
- Układ jest w równowadze i koło toczy się bez przyspieszenia.

$$M = Pr = f N$$



**DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ**