MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

UKŁADY SIŁ

Coś sprawia, że rzeczy się **ruszają.**

Nazwijmy to coś **„siłą".**

To coś działa w określonym **kierunku**, z pewnym **zwrotem** i może być **duże** lub **małe**. Przyjmijmy więc **matematyczny model siły** w postaci **wektora:**

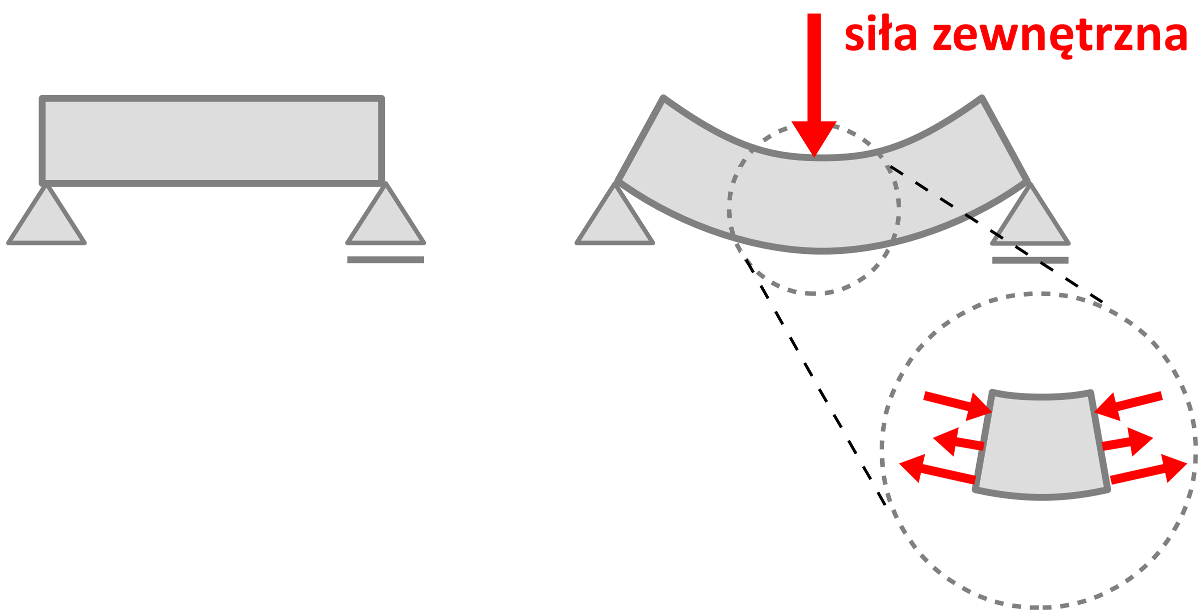
$$\mathbf{F} = [F_x \,;\, F_y \,;\, F_z]$$

Tylko... nikt sił nigdy nie widział...
...i nie wiadomo czy w ogóle istnieją...
...ale ten matematyczny model dobrze działa.

SIŁY

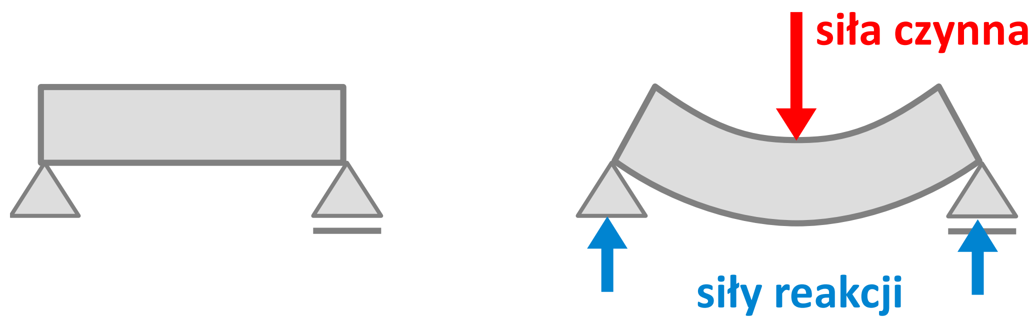
- Pochodzenie sił:
  - **SIŁY ZEWNĘTRZNE** – oddziaływania pochodzące z otoczenia lub od innych ciał materialnych.

  - **SIŁY WEWNĘTRZNE** – siły wzajemnego oddziaływania cząstek ciała odkształcalnego. Odpowiedź na deformację ciała spowodowaną czynnikami zewnętrznymi (siły zewnętrzne, temperatura, pole elektromagnetyczne itp.)



SIŁY

- Związek przyczynowo-skutkowy:
  - **SIŁY CZYNNE** – niezależne miary oddziaływania.
  - **SIŁY BIERNE** (**REAKCJE**) – pojawiają się jedynie jako odpowiedź na oddziaływanie sił czynnych. Są statycznym (siłowym) modelem więzi kinematycznych (przemieszczeniowych).

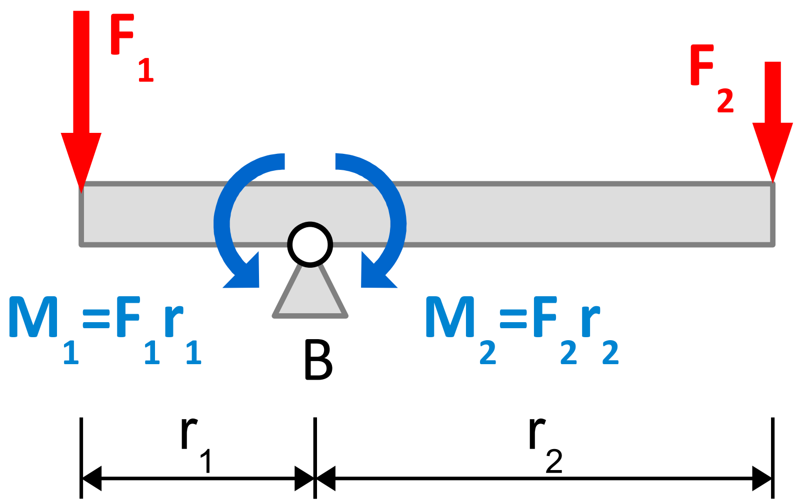


- **SIŁY BEZWŁADNOŚCI** (**SIŁY POZORNE**) – jeśli układ mechaniczny porusza się w **nieinercjalnym układzie odniesienia** (w którym nie obowiązuje II zasada dynamiki Newtona – np. przyspieszający samochód, kula ziemska), to **można wprowadzić pewne dodatkowe siły** do tego układu, takie że po ich uwzględnieniu **II zasada dynamiki Newtona jest spełniona**. Siły te nazywamy siłami bezwładności (np. siła odśrodkowa, siła Coriolisa itp.)

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU

- Dwie siły różnej wielkości mogą wzajemnie równoważyć swoje oddziaływanie powodujące ruch obrotowy. Zatem **miarą wymuszenia ruchu obrotowego jest nie sama siła, ale jakaś jej funkcja**.

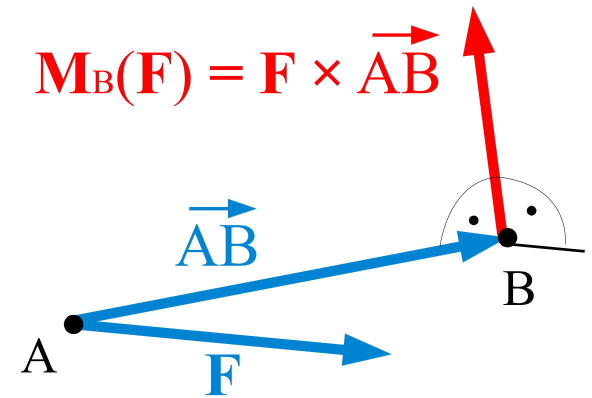
- Przykład dźwigni sugeruje, że ta miara jest **proporcjonalna do siły $\mathbf{F}$** i do **odległości od środka obrotu** B. Miarę tę nazywamy **momentem siły $\mathbf{F}$ względem punktu B**.



MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU

- **Momentem siły $\mathbf{F}$ względem punktu B** nazywamy **iloczyn wektorowy:**

$$\boxed{\mathbf{M}_B(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \times \overrightarrow{AB}}$$



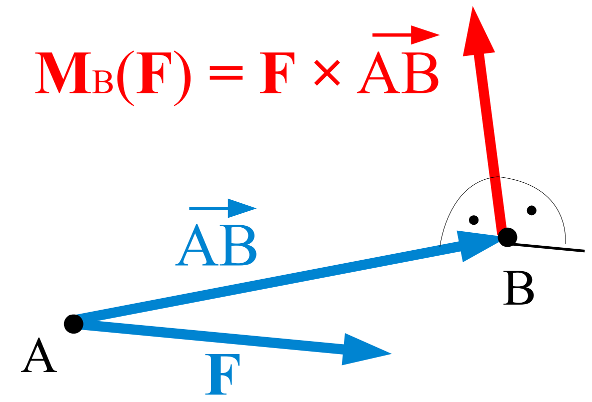
Punkt B nazywamy **biegunem momentu**.

- „moment = siła x ramię"
- najpierw siła, potem ramię.
- ramię – od siły do bieguna

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU

- **Momentem siły F względem punktu B** nazywamy **iloczyn wektorowy:**

$$\mathbf{M}_B(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \times \vec{\mathrm{AB}}$$

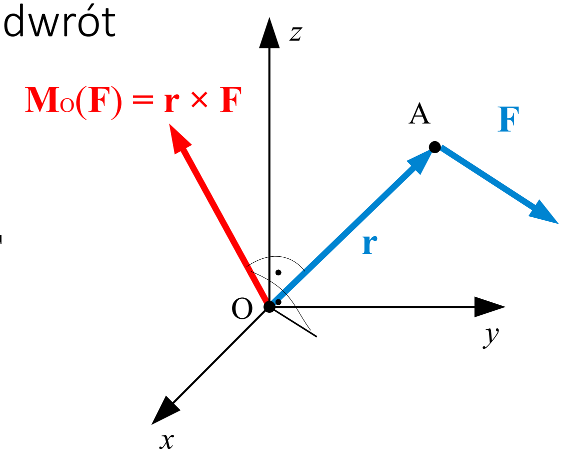


Punkt B nazywamy **biegunem momentu**.

- „moment = siła x ramię"
- najpierw siła, potem ramię.
- ramię – od siły do bieguna

Ale można też na odwrót

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

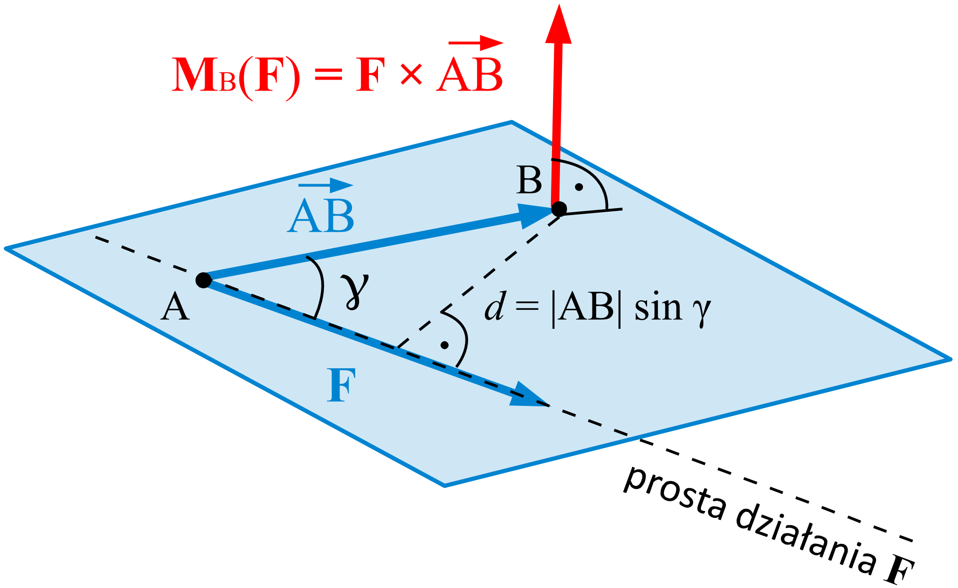


MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU

- Wielkość momentu:

$$|\mathbf{M}_B| = |\mathbf{F}|\,|\vec{AB}|\sin\gamma = F\,d$$

„moment = siła x ramię"



- Jeśli B leży na prostej działania **F**, wtedy:

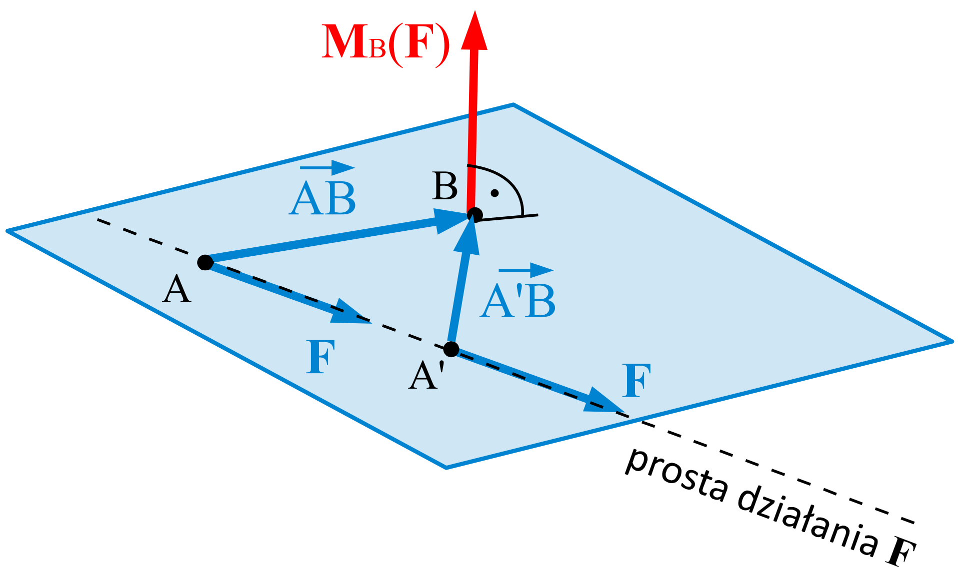
$$\vec{AB} \| \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_B = \mathbf{F} \times \vec{AB} = \mathbf{0}$$

Moment siły względem punktów leżących na jej prostej działania jest zerowy.

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU

- Jeśli przesuniemy siłę wzdłuż jej prostej działania, wtedy:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{F}\times\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathbf{F}\times\left(\overrightarrow{\mathrm{AA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\right) = \underbrace{\mathbf{F}\times\overrightarrow{\mathrm{AA'}}}_{=\,\mathbf{0}} + \mathbf{F}\times\overrightarrow{\mathrm{A'B}} = \mathbf{F}\times\overrightarrow{\mathrm{A'B}}$$

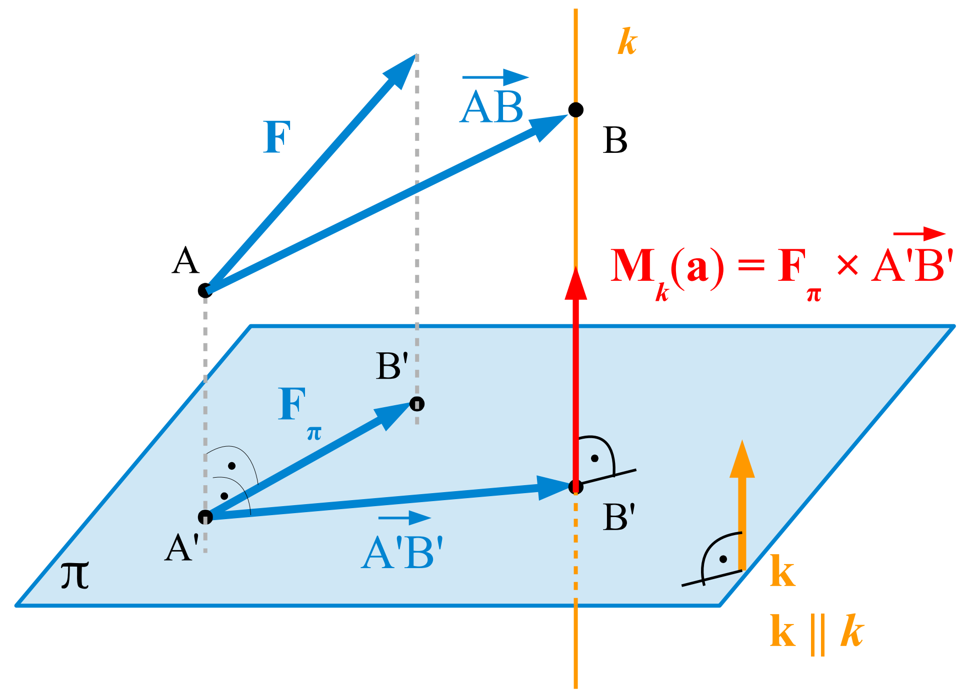


Przesuwanie siły wzdłuż jej prostej działania nie zmienia wartości momentu tej siły względem dowolnego bieguna.

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PROSTEJ

- **Momentem siły $\mathbf{F}$ względem prostej *k*** nazywamy moment rzutu siły $\mathbf{F}$ na dowolną płaszczyznę prostopadłą do k względem punktu przebicia tej płaszczyzny przez prostą *k*.

$$\mathbf{M}_k(\mathbf{F}) \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{F}_\pi \times \overrightarrow{A'B'}$$



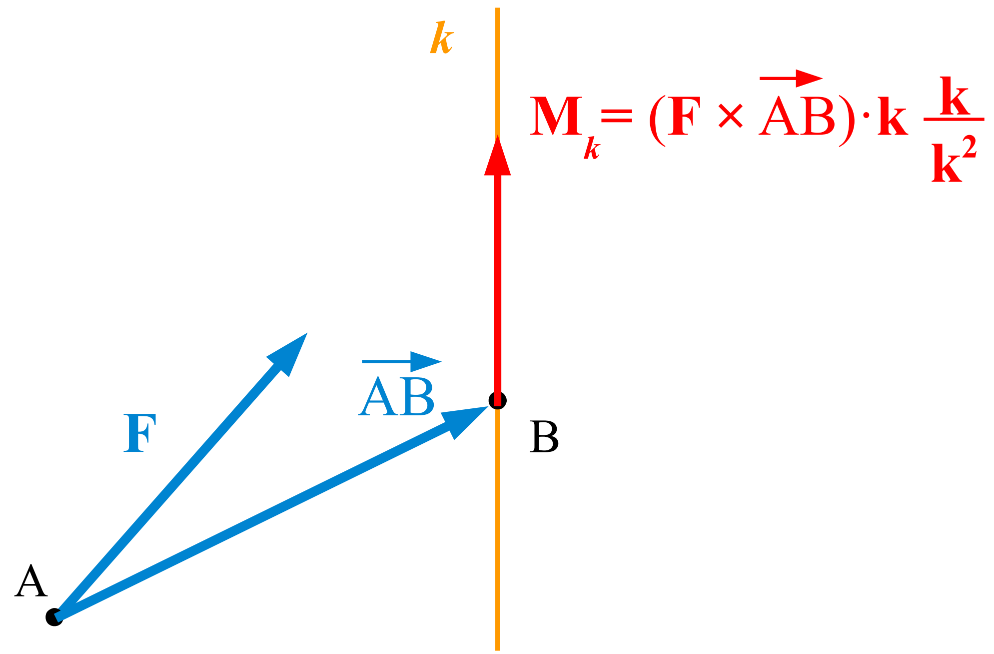
- **Moment niezerowej siły względem prostej *k* jest równy 0** jedynie wtedy, gdy **prosta *k* i prosta działania tej siły leżą w jednej płaszczyźnie**. Jeśli są one równoległe to rzut siły na płaszczyznę jest zerowy, a jeśli się przecinają, to punkt przebicia płaszczyzny przez prostą *k* leży na prostej działania rzutu siły.

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PROSTEJ

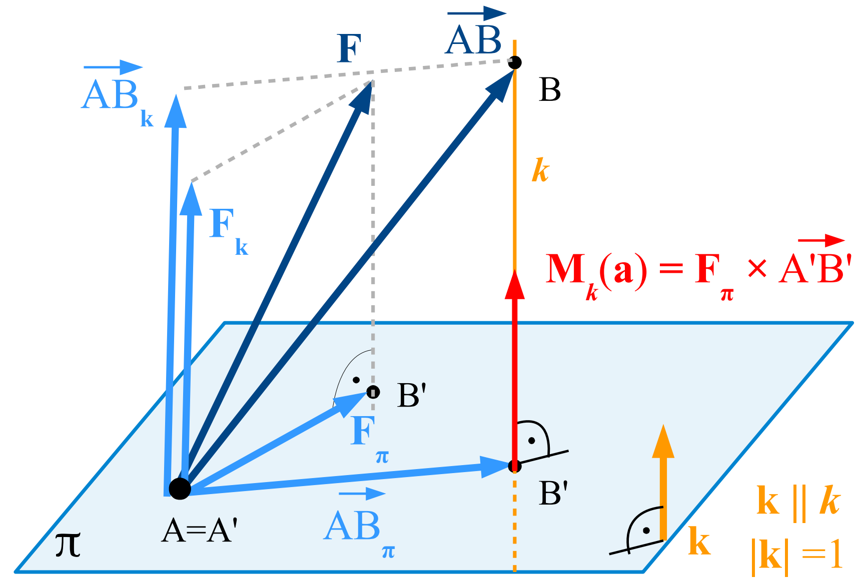
TWIERDZENIE 1

Moment siły $\mathbf{F}$ względem prostej *k* jest równy **rzutowi momentu** siły F względem dowolnego punktu prostej *k* na kierunek prostej *k*.

$$\mathbf{M}_k(\mathbf{F}) = \frac{\left(\mathbf{F}\times\overrightarrow{AB}\right)\cdot\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\mathbf{k}\ , \quad B\in k\ , \quad \mathbf{k}\| k$$



MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PROSTEJ



DOWÓD:

$$[\mathbf{M}_B\cdot\mathbf{k}]\mathbf{k} = \left[(\mathbf{F}\times\vec{AB})\cdot\mathbf{k}\right]\mathbf{k} =$$

$$= \left[\left((\mathbf{F}_\pi+\mathbf{F}_k)\times(\vec{AB}_\pi+\vec{AB}_k)\right)\cdot\mathbf{k}\right]\mathbf{k} =$$

$$= \left[\left(\mathbf{F}_\pi\times\vec{AB}_\pi + \mathbf{F}_\pi\times\vec{AB}_k + \mathbf{F}_k\times\vec{AB}_\pi + \mathbf{F}_k\times\vec{AB}_k\right)\cdot\mathbf{k}\right]\mathbf{k} =$$

$$= \left[\left(\mathbf{F}_\pi\times\vec{AB}_\pi\right)\cdot\mathbf{k} + \underbrace{\left(\mathbf{F}_\pi\times\vec{AB}_k\right)\cdot\mathbf{k}}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\left(\mathbf{F}_k\times\vec{AB}_\pi\right)\cdot\mathbf{k}}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\left(\mathbf{F}_k\times\vec{AB}_k\right)\cdot\mathbf{k}}_{=\mathbf{0}}\right]\mathbf{k} = \left[\left(\mathbf{F}_\pi\times\vec{AB}_\pi\right)\cdot\mathbf{k}\right]\mathbf{k} \overset{\text{df}}{=} \mathbf{M}_k$$

ponieważ $(\mathbf{F}_\pi\times\vec{AB}_k)\perp\mathbf{k}$ — ponieważ $(\mathbf{F}_k\times\vec{AB}_\pi)\perp\mathbf{k}$ — ponieważ $\mathbf{F}_k \parallel \vec{AB}_\pi$

$$= \left(\mathbf{F}_\pi\times\vec{AB}_\pi\right) \overset{\text{df}}{=} \mathbf{M}_k$$

■QED

TWIERDZENIE O ZMIANIE BIEGUNA

TWIERDZENIE 2

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_B + \mathbf{F} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

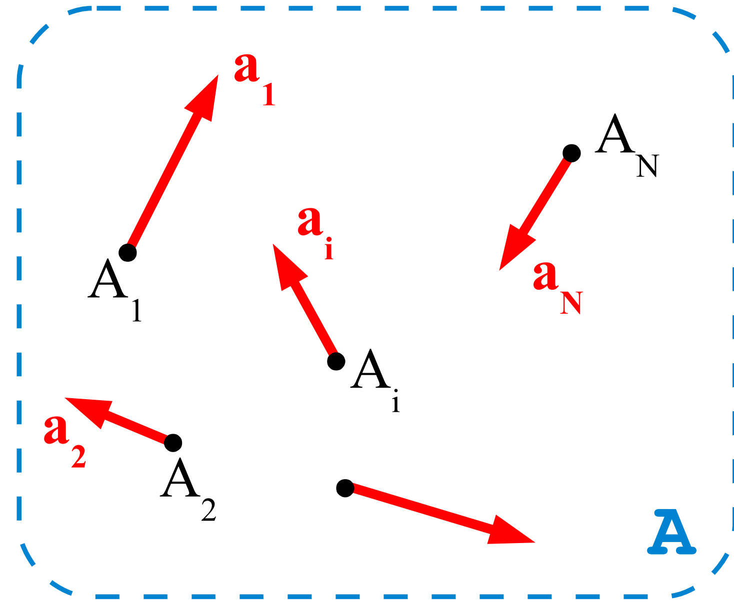
DOWÓD:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{F} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathbf{F} \times \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \right) = \underbrace{\mathbf{F} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}}_{= \mathbf{M}_B} + \mathbf{F} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \mathbf{M}_B + \mathbf{F} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

■QED

UKŁAD SIŁ

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \mathbf{a}_N \\ \mathrm{A}_N \end{pmatrix} \right\}$$



Suma układu:

$$\mathbf{S}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i$$

Moment układu wzgl. B:

$$\mathbf{M}_B(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_B(\mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i \mathrm{B}}$$

Parametr układu:

$$K(\mathbf{A}) = \mathbf{S}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{M}_B(\mathbf{A})$$

TWIERDZENIE O ZMIANIE BIEGUNA DLA UKŁADU SIŁ

$$\mathbf{M}_C(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_B(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A}) \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

DOWÓD:

$$\mathbf{M}_C(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{C}}) = \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{a}_i \times (\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\right] = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{B}}}_{=\mathbf{M}_B(\mathbf{A})} + \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}) =$$

$$= \mathbf{M}_B(\mathbf{A}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{a}_i)}_{\mathbf{S}(\mathbf{A})} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \mathbf{M}_B(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A}) \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

■QED

TWIERDZENIA O MOMENCIE UKŁADU

TWIERDZENIE 3

Moment układu względem wszystkich punktów leżącej na prostej równoległej do wektora sumy układu jest taki sam.

DOWÓD:

$$\vec{BC} \| \mathbf{S}(\mathbb{A}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_C(\mathbb{A}) = \mathbf{M}_B(\mathbb{A}) + \underbrace{\mathbf{S}(\mathbb{A}) \times \vec{BC}}_{\substack{=\mathbf{0} \\ \text{ponieważ } \mathbf{S} \| \vec{BC}}} = \mathbf{M}_B(\mathbb{A})$$

■QED

TWIERDZENIE 4

Jeśli suma układu jest zerowa, to moment układu jest taki sam dla każdego bieguna.

DOWÓD:

$$\mathbf{S}(\mathbb{A}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \underset{B,C}{\forall} \quad \mathbf{M}_C(\mathbb{A}) = \mathbf{M}_B(\mathbb{A}) + \underbrace{\mathbf{S}(\mathbb{A}) \times \vec{BC}}_{\substack{=\mathbf{0} \\ \text{ponieważ } \mathbf{S}=\mathbf{0}}} = \mathbf{M}_B(\mathbb{A})$$

■QED

TWIERDZENIA O MOMENCIE UKŁADU

TWIERDZENIE 5

Jeśli moment układu względem 3 niewspółliniowych punktów jest taki sam, to suma tego układu jest zerowa.

DOWÓD:

Założenia: $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_C \,, \quad \vec{AC} \nparallel \vec{BC} \,, \quad |\vec{AC}| \neq 0 \,, \quad |\vec{BC}| \neq 0$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_C = \mathbf{M}_A + \mathbf{S} \times \vec{AC} \\ \mathbf{M}_C = \mathbf{M}_B + \mathbf{S} \times \vec{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{S} \times \vec{AC} = \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \times \vec{BC} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{a} = \mathbf{0} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0} \vee \mathbf{a} \| \mathbf{b} \right)$$

Wobec założeń musi być: $\mathbf{S} = \mathbf{0}$

■QED

TWIERDZENIE O PARAMETRZE UKŁADU

Parametr układu jest stały – jego wartość nie zależy od wyboru bieguna momentu.

DOWÓD:

$$K_B = \mathbf{S}(\mathbb{A})\cdot\mathbf{M}_B(\mathbb{A})\,,\quad K_C = \mathbf{S}(\mathbb{A})\cdot\mathbf{M}_C(\mathbb{A})$$

$$K_C = \mathbf{S}\cdot\mathbf{M}_C = \mathbf{S}\cdot\left[\mathbf{M}_B + \mathbf{S}\times\vec{\mathrm{BC}}\right] = \underbrace{\mathbf{S}\cdot\mathbf{M}_B}_{K_B} + \underbrace{\mathbf{S}\cdot\left[\mathbf{S}\times\vec{\mathrm{BC}}\right]}_{\substack{=0 \\ \text{ponieważ } \mathbf{S}\perp(\mathbf{S}\times\vec{\mathrm{BC}})}} = K_B$$

■QED

Parametr układu jest miarą **rzutu momentu układu na kierunek sumy**.

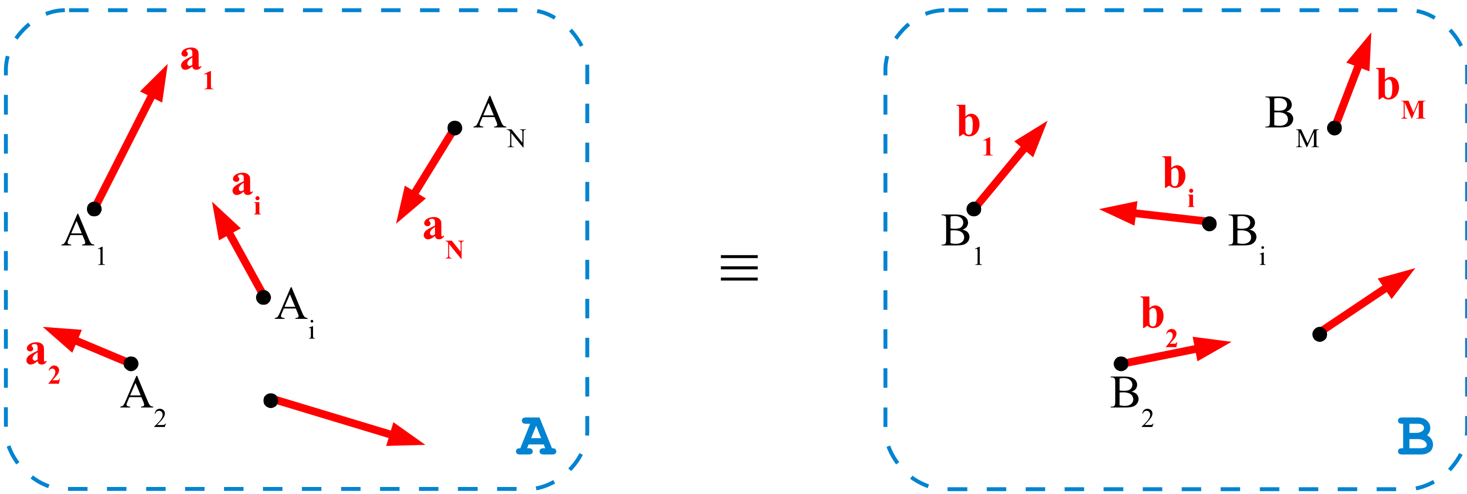
$$(\mathbf{M}_B)_{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{M}_B\cdot\mathbf{S}}{\mathbf{S}^2}\mathbf{S} = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\mathbf{S}$$

Ponieważ **parametr układu i suma układu są stałe** dla danego układu, zatem **składowa momentu układu na kierunku sumy jest stała** – **zmianie może ulegać jedynie składowa prostopadła do kierunku sumy**.

RÓWNOWAŻNOŚĆ UKŁADÓW SIŁ

Dwa układy sił nazywamy **równoważnymi**, jeśli ich **suma** oraz **momenty względem wszystkich punktów** są **takie same**.

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{S}(\mathbf{A}) = \mathbf{S}(\mathbf{B}) \\ \underset{P}{\forall}\, \mathbf{M}_P(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{B}) \end{cases}$$



$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \mathbf{a}_N \\ \mathrm{A}_N \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathrm{B}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathrm{B}_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \mathbf{b}_M \\ \mathrm{B}_M \end{pmatrix} \right\}$$

TWIERDZENIA O RÓWNOWAŻNOŚCI UKŁADÓW SIŁ

TWIERDZENIE 6

Jeśli dla dwóch układów sił ich **suma** oraz **momenty względem jednego punktu** są **takie same**, wtedy te układy są **równoważne.**

$$\begin{cases} \mathbf{S}(\mathbf{A}) = \mathbf{S}(\mathbf{B}) \\ \underset{P}{\exists} \mathbf{M}_P(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{B}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$$

DOWÓD:

$$\mathbf{S}(\mathbf{A}) = \mathbf{S}(\mathbf{B})$$

$$\mathbf{M}_P(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{B})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q(\mathbf{A}) &= \mathbf{M}_P(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A}) \times \vec{PQ} = \\ &= \mathbf{M}_P(\mathbf{B}) + \mathbf{S}(\mathbf{B}) \times \vec{PQ} = \mathbf{M}_Q(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

■QED

TWIERDZENIA O RÓWNOWAŻNOŚCI UKŁADÓW SIŁ

TWIERDZENIE 7

Jeśli dla dwóch układów sił ich **momenty względem trzech niewspółliniowych punktów** są **takie same**, wtedy te układy są **równoważne.**

$$\begin{cases} \mathbf{M}_P(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{B}) \\ \mathbf{M}_Q(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_Q(\mathbf{B}) \\ \mathbf{M}_R(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_R(\mathbf{B}) \end{cases} \wedge \begin{cases} \vec{\mathrm{PQ}} \nparallel \vec{\mathrm{PR}} \\ |PQ| \neq 0 \\ |PR| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$$

DOWÓD:

$$\mathbf{M}_Q(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A}) \times \vec{\mathrm{PQ}} \qquad \mathbf{M}_R(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A}) \times \vec{\mathrm{PR}}$$

$$\mathbf{M}_Q(\mathbf{B}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{B}) + \mathbf{S}(\mathbf{B}) \times \vec{\mathrm{PQ}} \qquad \mathbf{M}_R(\mathbf{B}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{B}) + \mathbf{S}(\mathbf{B}) \times \vec{\mathrm{PR}}$$

$$\mathbf{M}_Q(\mathbf{A}) - \mathbf{M}_Q(\mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[\mathbf{M}_P(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A}) \times \vec{\mathrm{PQ}}\right] - \left[\mathbf{M}_P(\mathbf{B}) + \mathbf{S}(\mathbf{B}) \times \vec{\mathrm{PQ}}\right] = \left[\mathbf{S}(\mathbf{A}) - \mathbf{S}(\mathbf{B})\right] \times \vec{\mathrm{PQ}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_R(\mathbf{A}) - \mathbf{M}_R(\mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[\mathbf{M}_P(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A}) \times \vec{\mathrm{PR}}\right] - \left[\mathbf{M}_P(\mathbf{B}) + \mathbf{S}(\mathbf{B}) \times \vec{\mathrm{PR}}\right] = \left[\mathbf{S}(\mathbf{A}) - \mathbf{S}(\mathbf{B})\right] \times \vec{\mathrm{PR}} = \mathbf{0}$$

TWIERDZENIA O RÓWNOWAŻNOŚCI UKŁADÓW SIŁ

DOWÓD c.d.:

$$\begin{cases} \left[\mathbf{S}(\mathbb{A}) - \mathbf{S}(\mathbb{B})\right] \times \vec{PQ} = \mathbf{0} \\ \left[\mathbf{S}(\mathbb{A}) - \mathbf{S}(\mathbb{B})\right] \times \vec{PR} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{a} = \mathbf{0} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0} \vee \mathbf{a} \| \mathbf{b}\right)$$

Wobec założeń musi być: $\left[\mathbf{S}(\mathbb{A}) - \mathbf{S}(\mathbb{B})\right] = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S}(\mathbb{A}) = \mathbf{S}(\mathbb{B})$

Na mocy twierdzenia 6: $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$

■QED

TWIERDZENIA O RÓWNOWAŻNOŚCI UKŁADÓW SIŁ

TWIERDZENIE 8

Jeśli dla dwóch układów sił ich **momenty względem dwóch punktów** oraz **rzuty ich sum na prostą zawierającą te punkty** są **takie same**, wtedy te układy są **równoważne.**

$$\begin{cases} \mathbf{M}_P(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{B}) \\ \mathbf{M}_Q(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_Q(\mathbf{B}) \end{cases} \wedge \quad \frac{\mathbf{S}(\mathbf{A})\cdot\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\mathbf{k} = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\mathbf{k}\ , \quad \begin{cases} \vec{\mathrm{PQ}} \| \mathbf{k} \\ |PQ| \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$$

DOWÓD:

$$\frac{\mathbf{S}(\mathbf{A})\cdot\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\mathbf{k} - \frac{\mathbf{S}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\mathbf{k} = \frac{1}{\mathbf{k}^2}\left[\left(\mathbf{S}(\mathbf{A}) - \mathbf{S}(\mathbf{B})\right)\cdot\mathbf{k}\right]\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a} = \mathbf{0} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0} \vee \mathbf{a} \perp \mathbf{b})$ skąd: $\boxed{\left[\mathbf{S}(\mathbf{A}) - \mathbf{S}(\mathbf{B})\right] = \mathbf{0} \vee \left[\mathbf{S}(\mathbf{A}) - \mathbf{S}(\mathbf{B})\right] \perp \mathbf{k}}$

TWIERDZENIA O RÓWNOWAŻNOŚCI UKŁADÓW SIŁ

DOWÓD c.d.:

$$\mathbf{M}_Q(\mathtt{A}) = \mathbf{M}_P(\mathtt{A}) + \mathbf{S}(\mathtt{A})\times\vec{PQ} \qquad \mathbf{M}_Q(\mathtt{B}) = \mathbf{M}_P(\mathtt{B}) + \mathbf{S}(\mathtt{B})\times\vec{PQ}$$

$$\mathbf{M}_Q(\mathtt{A}) - \mathbf{M}_Q(\mathtt{B}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[\mathbf{M}_P(\mathtt{A})+\mathbf{S}(\mathtt{A})\times\vec{PQ}\right]-\left[\mathbf{M}_P(\mathtt{B})+\mathbf{S}(\mathtt{B})\times\vec{PQ}\right] = \left[\mathbf{S}(\mathtt{A})-\mathbf{S}(\mathtt{B})\right]\times\vec{PQ} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a}=\mathbf{0} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0} \vee \mathbf{a}\|\mathbf{b})$$ skąd: $$\boxed{\left[\mathbf{S}(\mathtt{A})-\mathbf{S}(\mathtt{B})\right] = \mathbf{0} \vee [\mathbf{S}(\mathtt{A}) - \mathbf{S}(\mathtt{B})] \| \mathbf{k}}$$

$$\boxed{\begin{cases}\left[\mathbf{S}(\mathtt{A})-\mathbf{S}(\mathtt{B})\right] = \mathbf{0} \vee [\mathbf{S}(\mathtt{A}) - \mathbf{S}(\mathtt{B})] \| \mathbf{k} \\ \left[\mathbf{S}(\mathtt{A})-\mathbf{S}(\mathtt{B})\right] = \mathbf{0} \vee [\mathbf{S}(\mathtt{A}) - \mathbf{S}(\mathtt{B})] \perp \mathbf{k}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\mathbf{S}(\mathtt{A})-\mathbf{S}(\mathtt{B})\right] = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}(\mathtt{A}) = \mathbf{S}(\mathtt{B})}$$

Na mocy twierdzenia 6: $\mathtt{A}\equiv\mathtt{B}$

■QED

CHARAKTERYSTYKA UKŁADÓW SIŁ

- **Suma układu**: $$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i$$ **STAŁA**
- **Parametr układu**: $$K = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_B$$ **STAŁY (niezmiennik)**
- **Moment układu wzgl. B**: $$\mathbf{M}_B = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i \times \overrightarrow{A_i B}$$ **Zależny od wyboru B**

Moment można rozłożyć na 2 składowe:

- Składowa równoległa do sumy: $$[\mathbf{M}_B]_{\parallel \mathbf{S}} = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\mathbf{S}$$ **STAŁA**
- Składowa prostopadła do sumy: $$[\mathbf{M}_B]_{\perp \mathbf{S}} = \mathbf{M}_B - \frac{K}{\mathbf{S}^2}\mathbf{S}$$ **Zależna od wyboru B**

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ