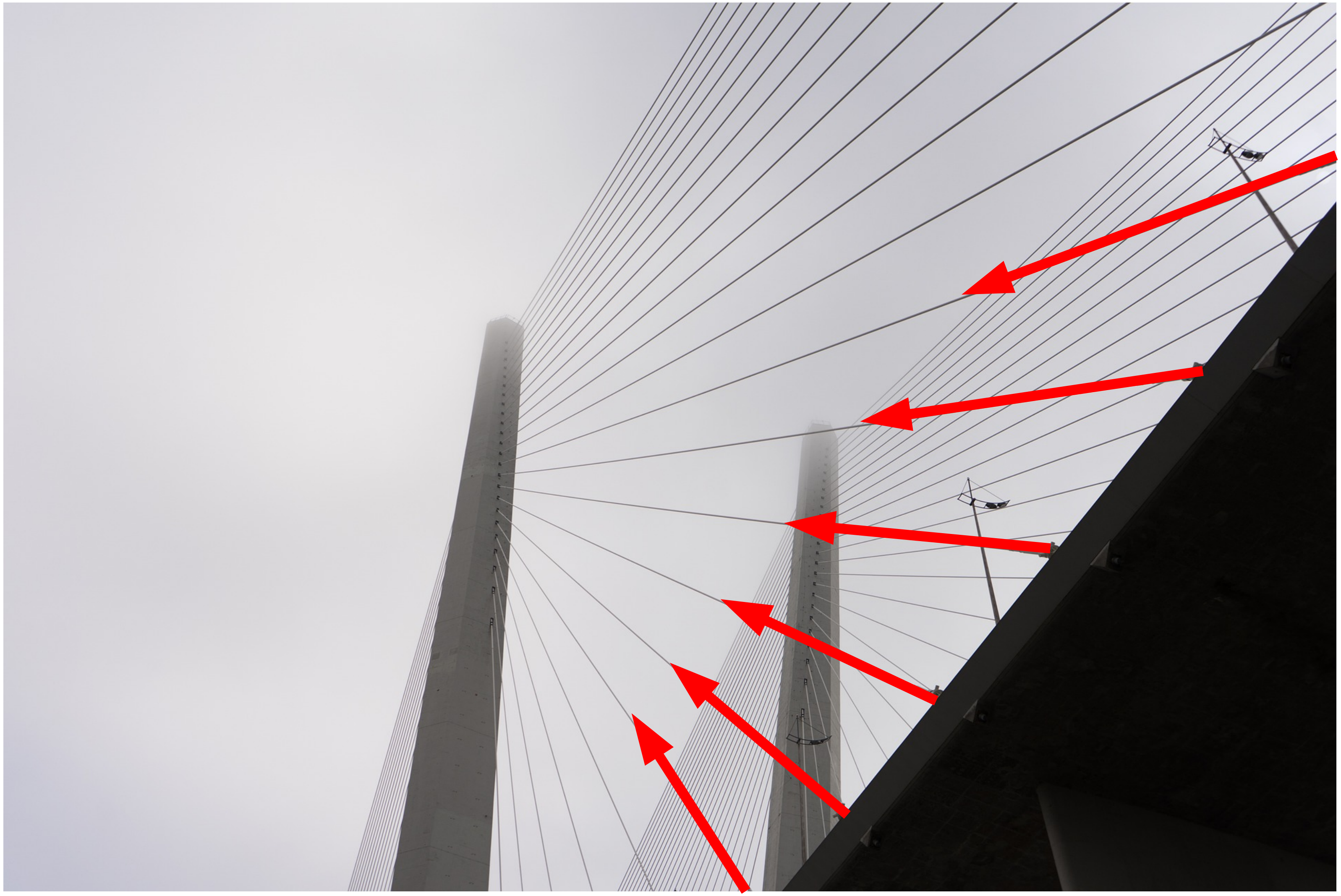
# MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ



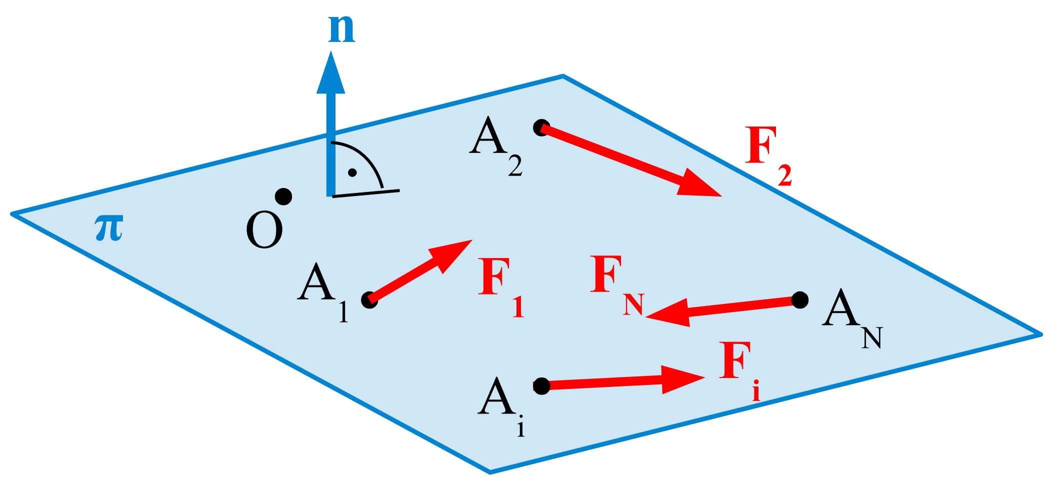
PŁASKI UKŁAD SIŁ

# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ

## PŁASKI UKŁAD SIŁ

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathrm{A}_N \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underset{\mathbf{n}}{\exists}\ \underset{O}{\exists} : \underset{i}{\forall} \quad \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = 0\ , \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}_i} \cdot \mathbf{n} = 0$$




Punkt O i normalna **n** wyznaczają płaszczyznę $\pi$ układu sił.

Dla dowolnego punktu P należącego do tej płaszczyzny:

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \in \pi \\ \mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^{N} \left( \mathbf{F}_i \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i \mathrm{P}} \right) \perp \pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underset{P}{\forall} \quad K = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_P = 0$$

**Parametr układu płaskiego jest równy 0**.

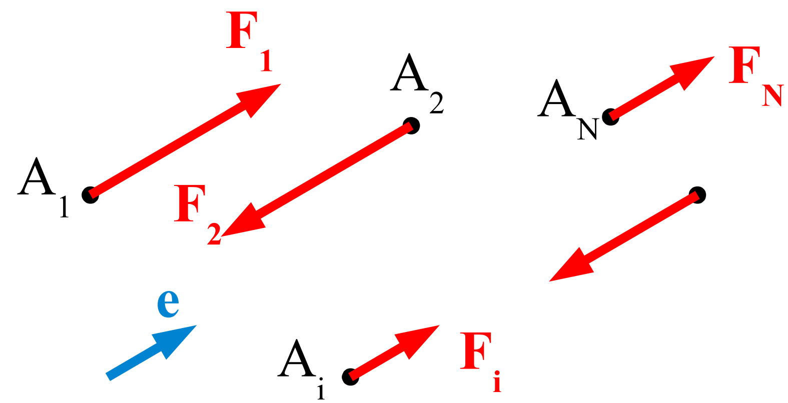
# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ

**RÓWNOLEGŁY UKŁAD SIŁ**

# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ

## RÓWNOLEGŁY UKŁAD SIŁ

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathrm{A}_N \end{pmatrix} \right\}, \qquad \underset{\mathbf{e}}{\exists} : \underset{i}{\forall} \quad \mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}$$




Dla dowolnego punktu P możemy napisać:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} F_i \mathbf{e}$$

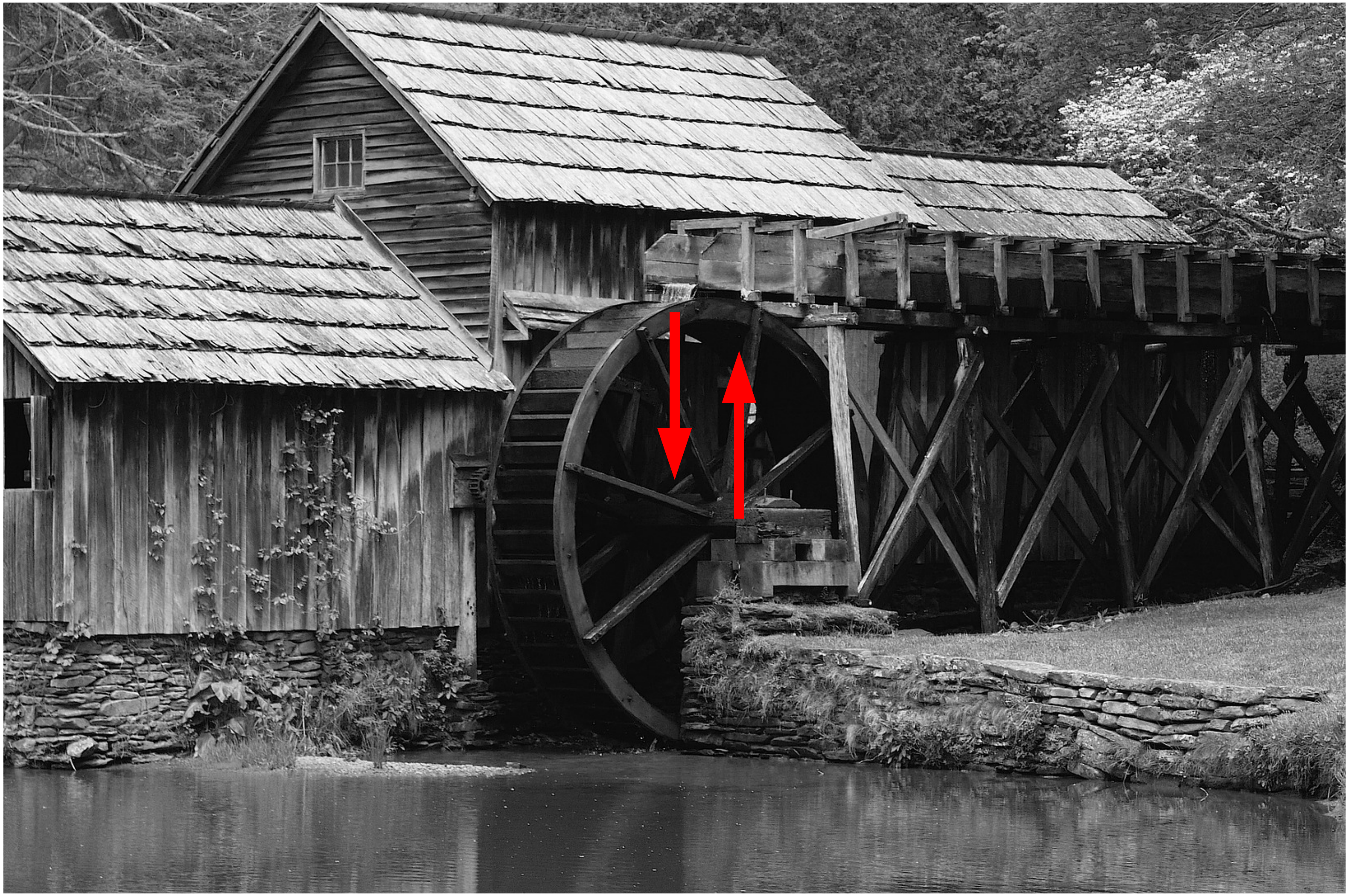
$$\mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^{N} \left( \mathbf{F}_i \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i \mathrm{P}} \right) = \sum_{i=1}^{N} F_i \left( \mathbf{e} \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i \mathrm{P}} \right)$$

Każdy z wektorów powyższej sumy jest z definicji iloczynu wektorowego prostopadły do wektora $\mathbf{e}$, który z kolei jest równoległy do sumy. Suma wektorów prostopadłych do $\mathbf{e}$ nie może dać składowej równoległej do $\mathbf{e}$ , zatem:

$$\underset{P}{\forall} \quad K = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_P = 0$$

**Parametr układu równoległego jest równy 0.**

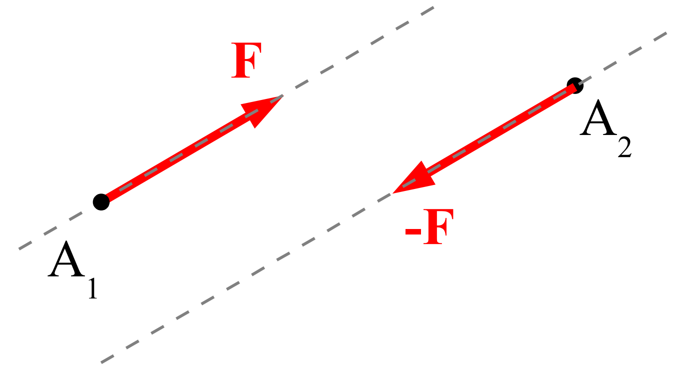
# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ



**PARA SIŁ**

# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ

## PARA SIŁ




$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathrm{A}_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

**Suma pary jest równa 0.**

Dla dowolnych dwóch punktów P i Q :

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_P + \underbrace{\mathbf{S}}_{=\mathbf{0}} \times \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \mathbf{M}_P$$

**Moment pary jest stały.**

$$\underset{P}{\forall} \quad K = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_P = 0$$

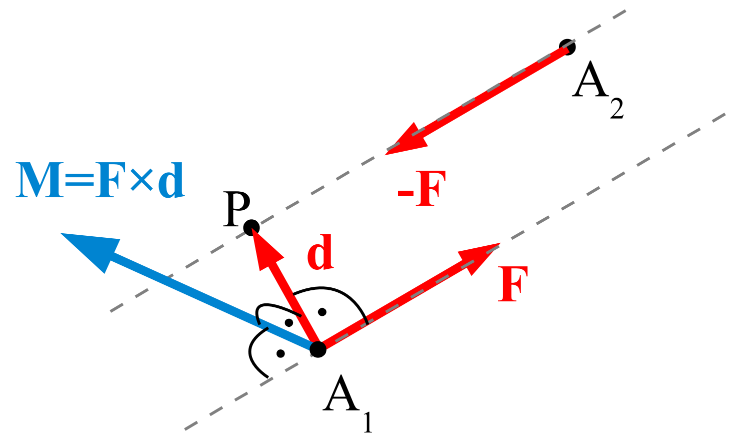
**Parametr pary jest równy 0.**

# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ

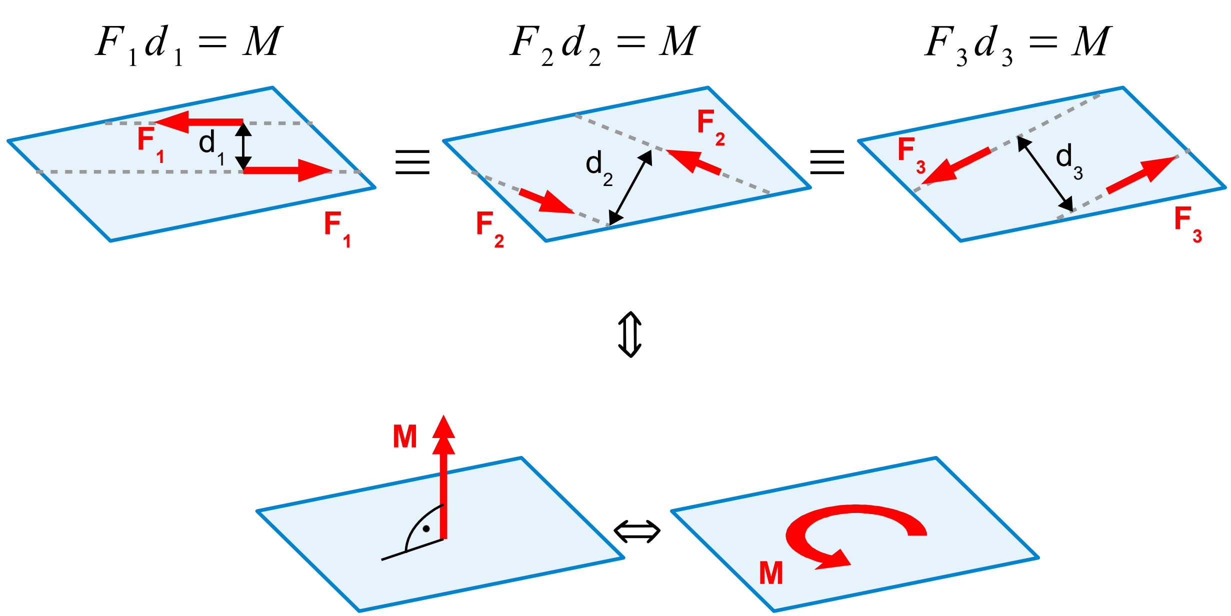
## PARA SIŁ

Moment pary obliczyć możemy prosto względem punktu leżącego na prostej działania jednej z sił pary:

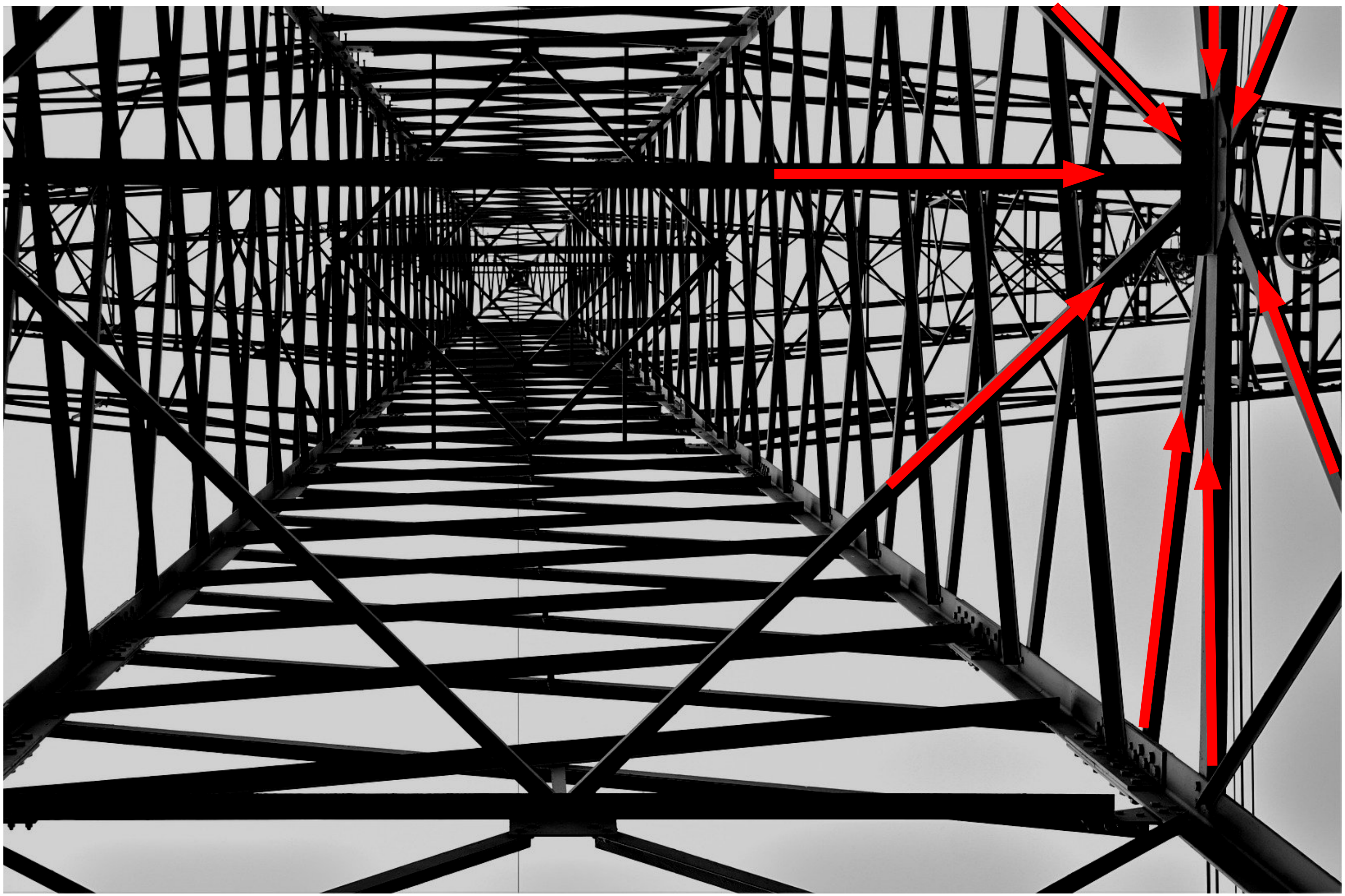
$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{d} \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{M}| = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{d}|$$ „siła × ramię”




**Para jest reprezentantem wektora momentu.**



# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ



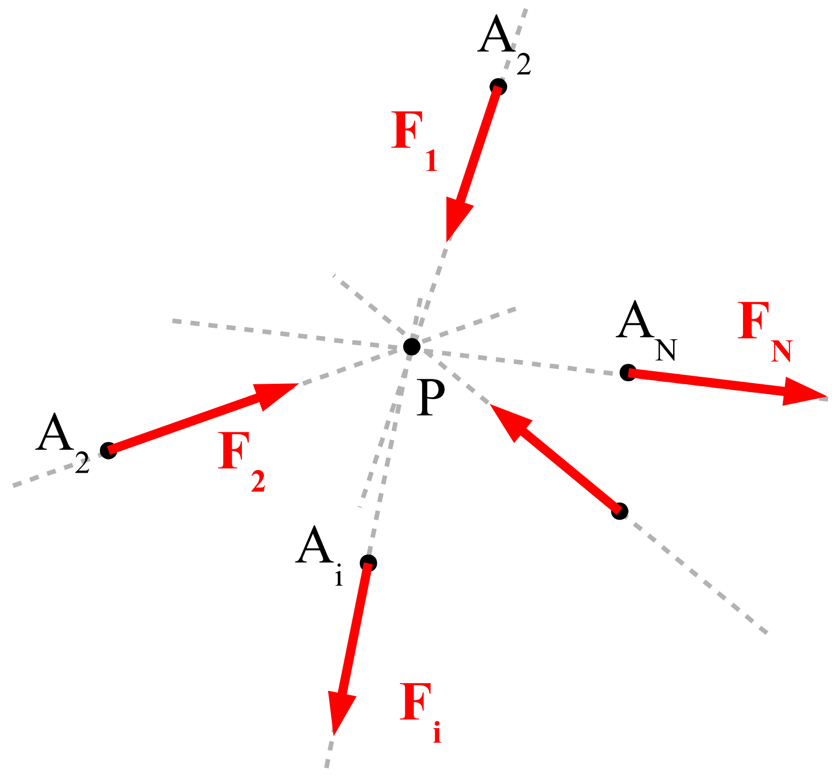
**ZBIEŻNY UKŁAD SIŁ**

# SZCZEGÓLNE PRZYPADKI UKŁADÓW SIŁ

## ZBIEŻNY UKŁAD SIŁ

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathrm{A}_N \end{pmatrix} \right\},$$

$$\underset{P}{\exists} : \underset{i}{\forall} \quad \mathbf{M}_P(\mathbf{F}_i) = \mathbf{0}$$




Dla punktu P : $\mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_P(\mathbf{F}_i) = \mathbf{0}$

$$K = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_P = 0$$

**Parametr układu zbieżnego jest równy 0**.

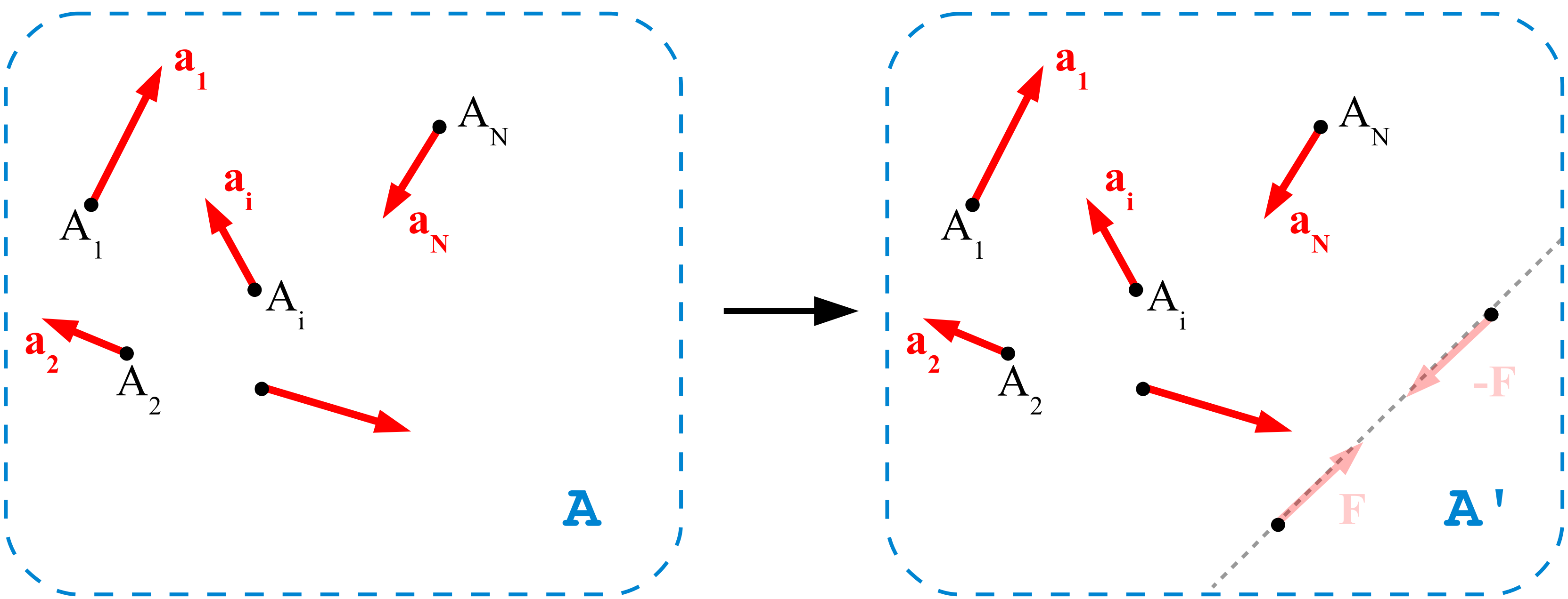
Układ zbieżny, którego suma jest zerowa ma w związku z tym stały moment. Skoro jest układem zbieżnym, zatem moment ten również musi być zerowy:

$$\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \underset{Q}{\forall} \ \mathbf{M}_Q = \underbrace{\mathbf{M}_P}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{S}}_{=\mathbf{0}} \times \vec{\mathrm{PQ}} = \mathbf{0}$$

Układ zbieżny o zerowej sumie nazywać będziemy **układem zerowym**.

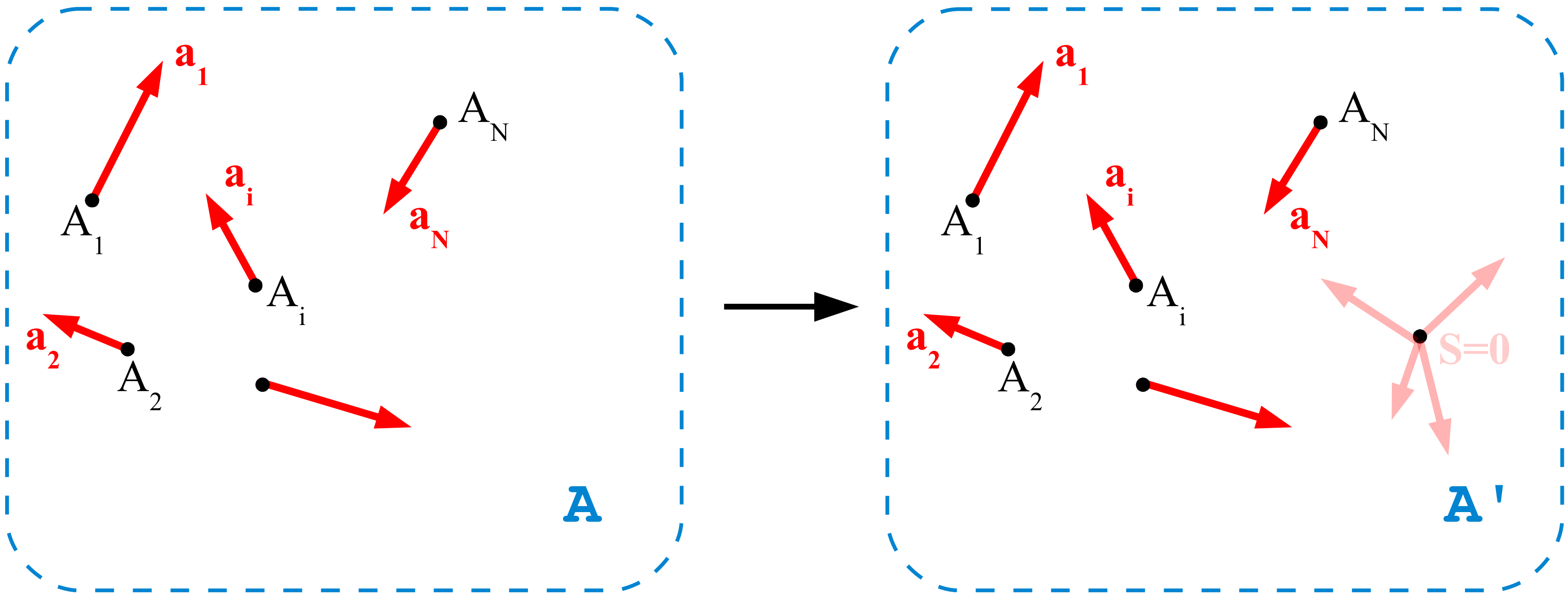
# PRZEKSZTAŁCENIA ELEMENTARNE UKŁADÓW SIŁ

- **Przekształcenie elementarne I rodzaju** – dodanie do układu **dwóch sił przeciwnych leżących na jednej prostej**.



# PRZEKSZTAŁCENIA ELEMENTARNE UKŁADÓW SIŁ

- **Przekształcenie elementarne II rodzaju** – dodanie do **układu zbieżnego układu sił o zerowej sumie**.



# PRZEKSZTAŁCENIA ELEMENTARNE UKŁADÓW SIŁ

- Przekształcenia elementarne nie zmieniają sumy i momentu układu.
  - Z definicji suma dodanych układów jest równa 0 zatem nie zmienia sumy układu
  - Dla każdego dodanego układu istnieje punkt, względem którego moment tego dodanego układu jest zerowy. Z twierdzenia o zmianie bieguna wnioskujemy, że moment pierwotnego układu nie zmienia się.

Przekształcenia elementarne pozwalają nam:

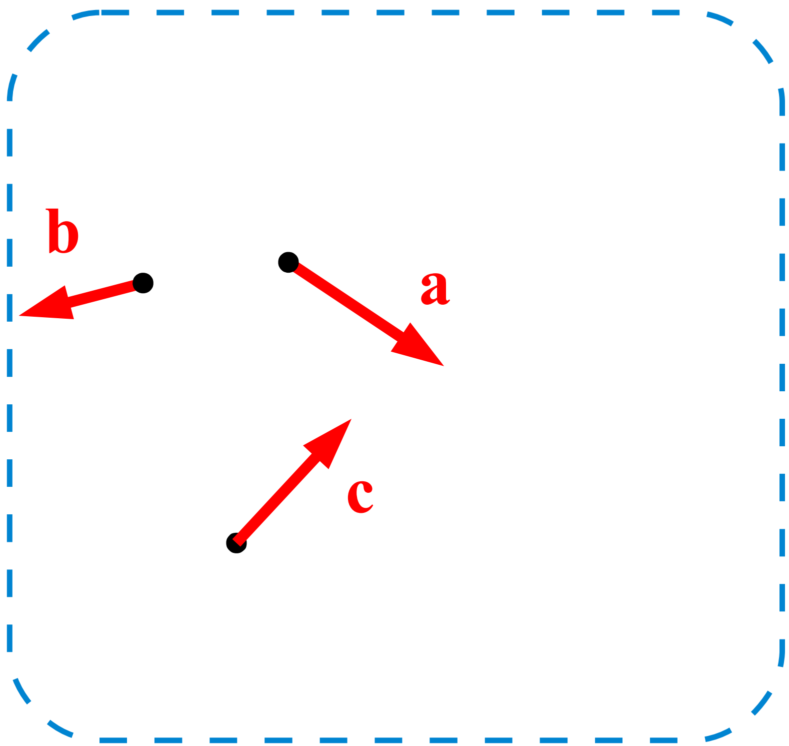
- **Przesuwać siły** wzdłuż ich prostych działania
- **Zastępować układ sił zbieżnych jedną siłą**, równą sumie tego układu.
- **Zastępować siłę układem sił zbieżnych** zaczepionych w tym samym punkcie i mających sumę równą zastępowanej sile.

**TWIERDZENIE**

**Dowolny układ sił można przekształcić za pomocą przekształceń elementarnych I i II rodzaju w dowolny inny układ sił, który jest równoważny układowi pierwotnemu**.

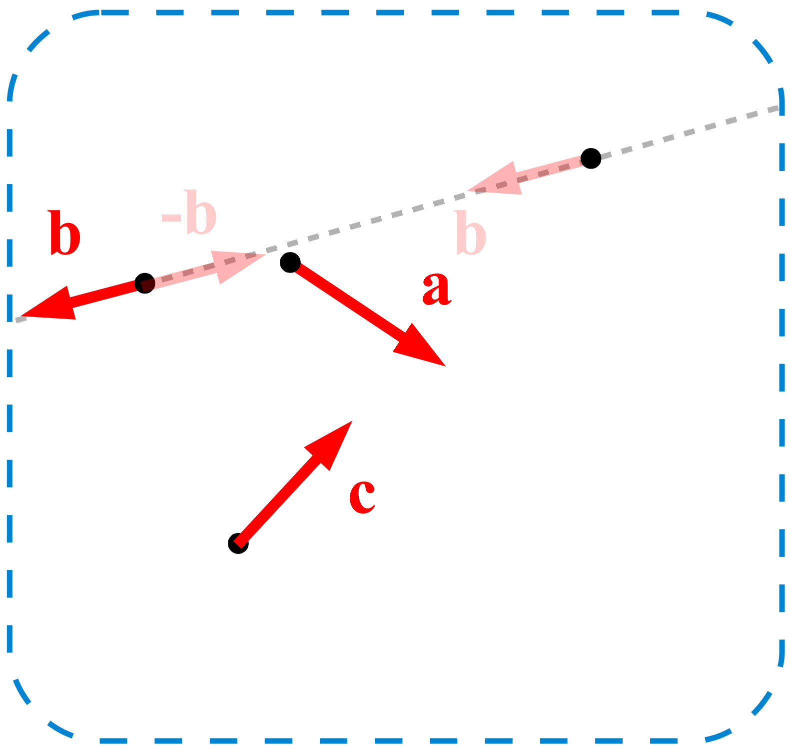
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



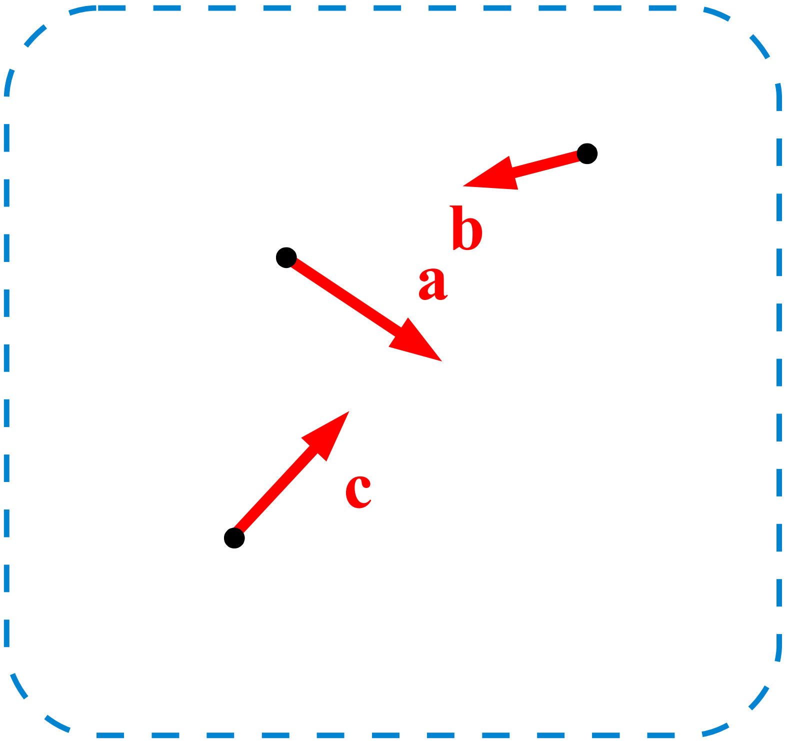
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



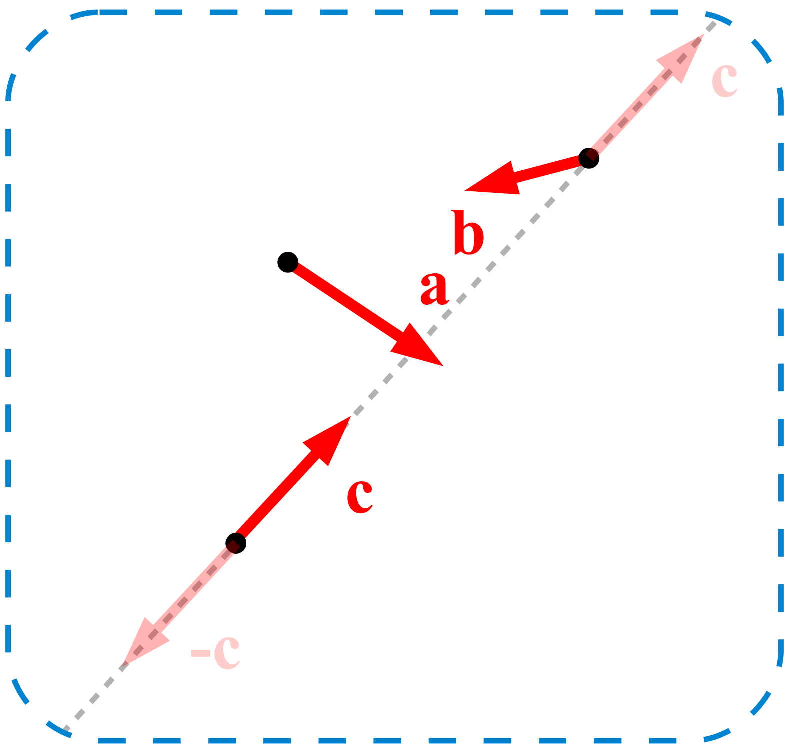
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



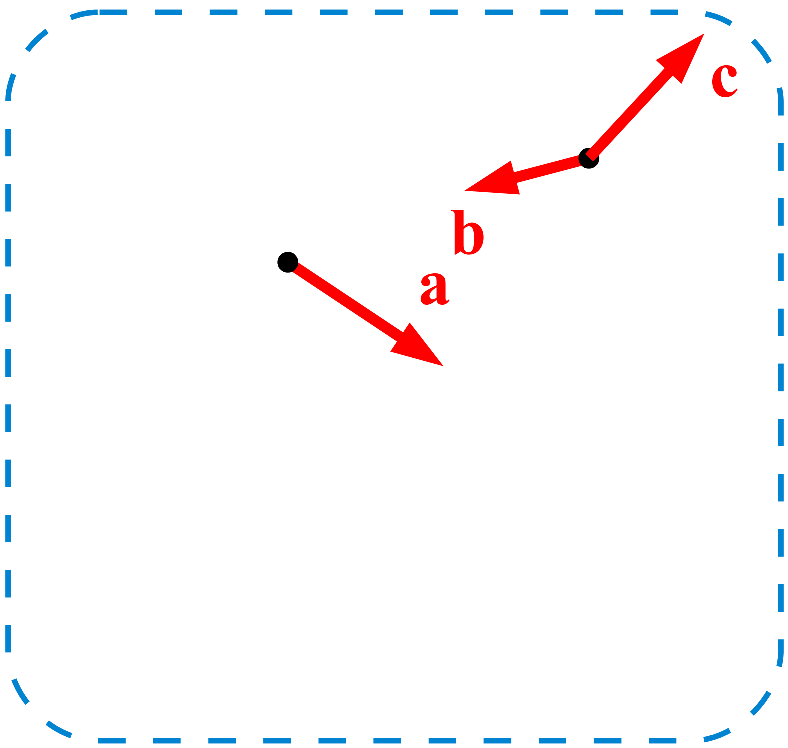
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



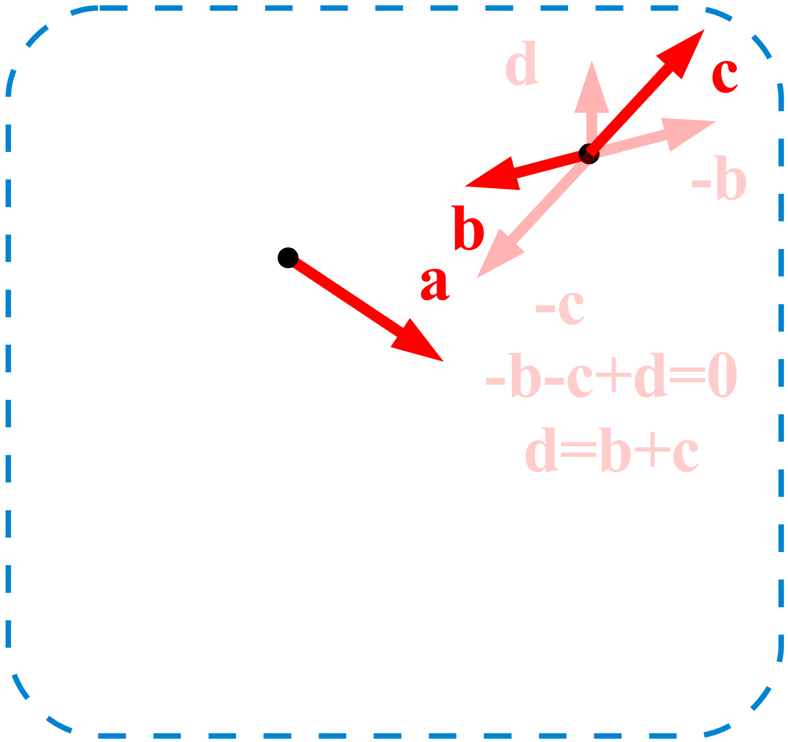
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



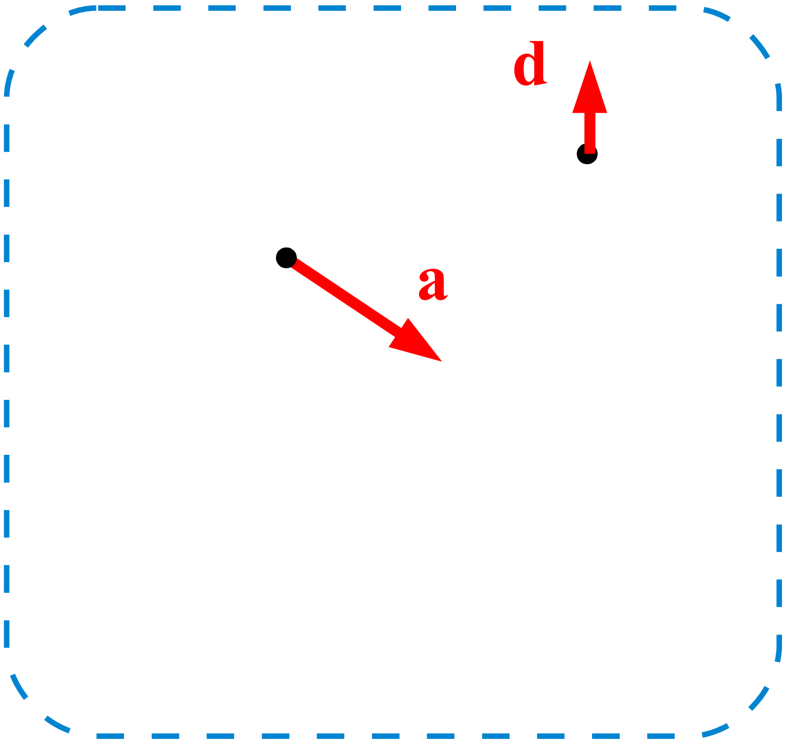
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

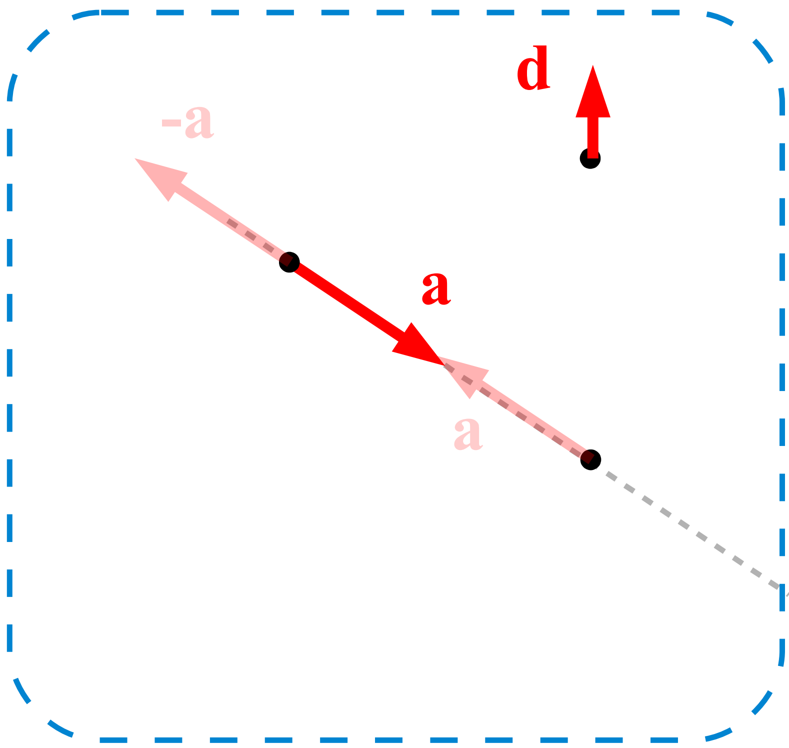
**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



dr inż. Paweł Szeptyński

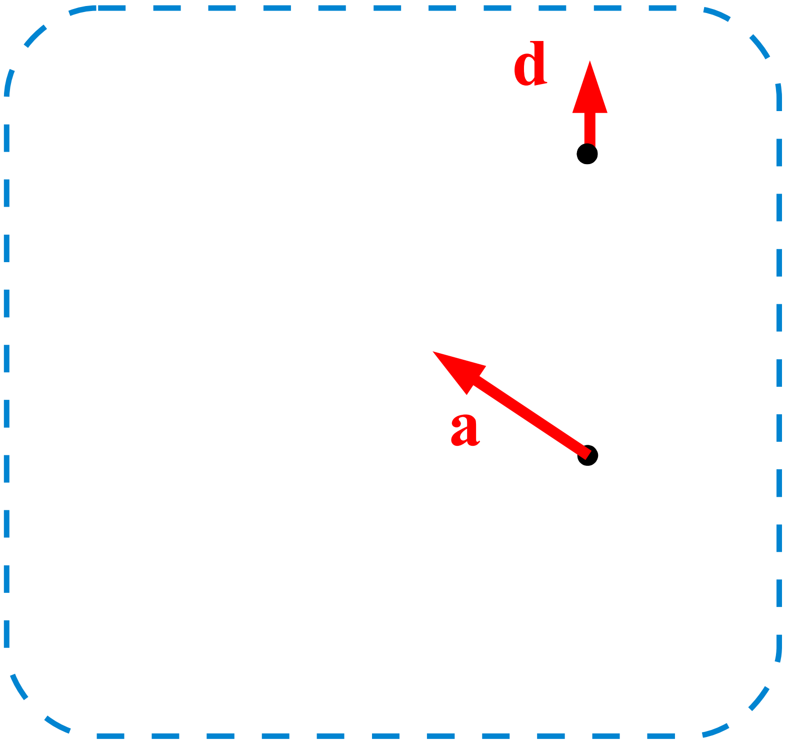
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



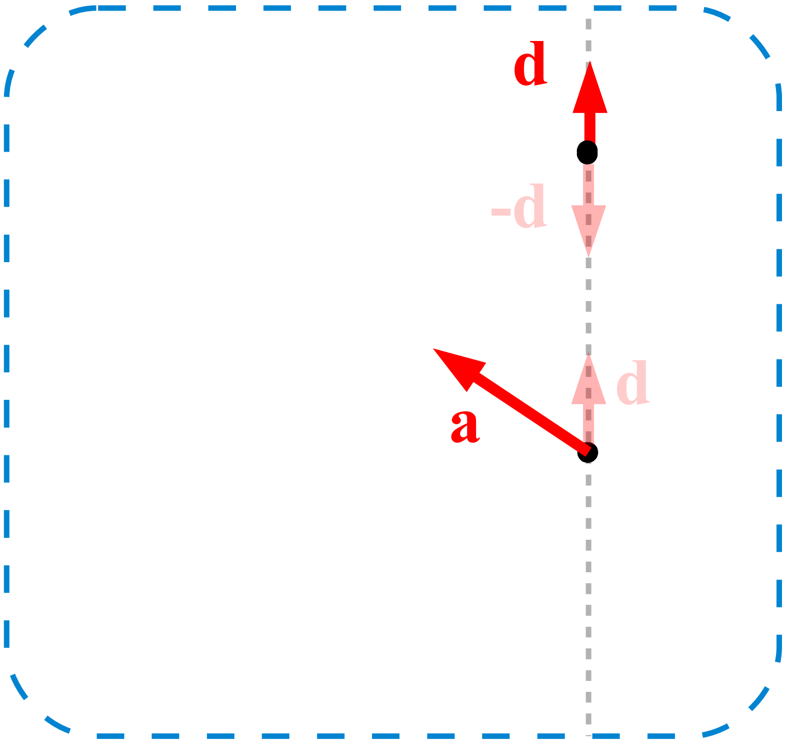
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



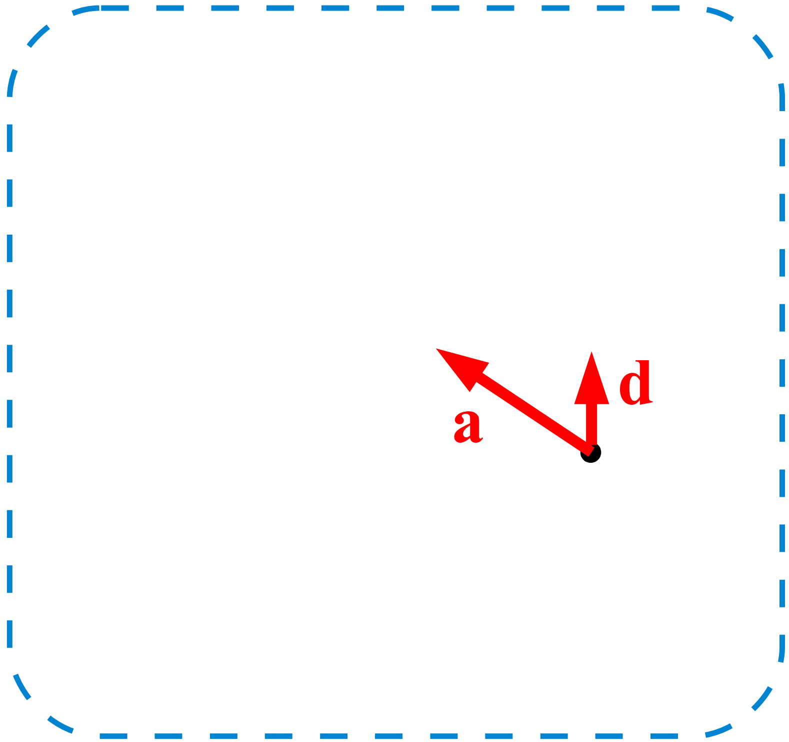
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



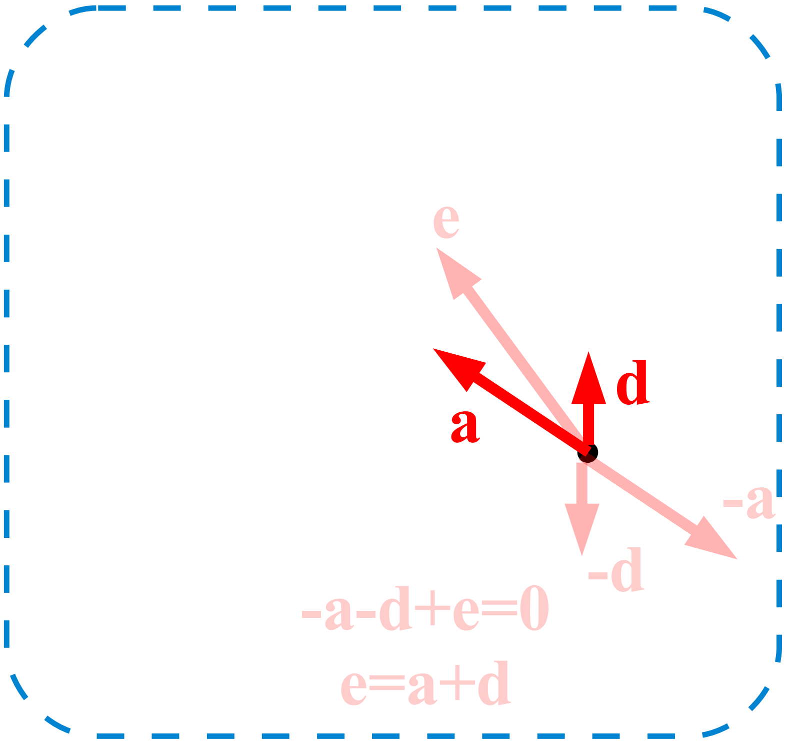
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



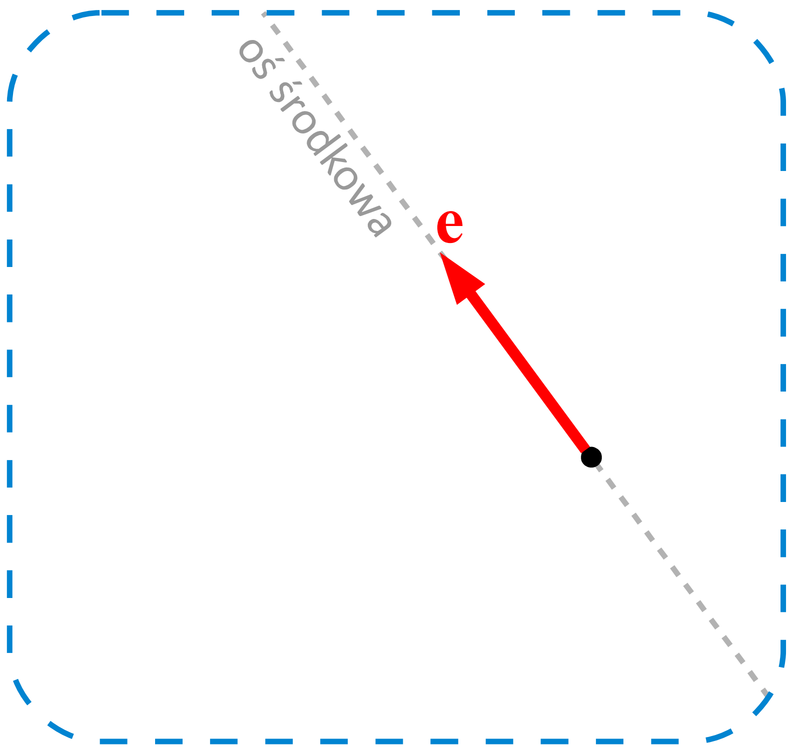
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcją układu sił** nazywamy **zastąpienie danego układu sił układem równoważnym** składającym się z **mniejszej liczby sił**.



# REDUKCJA UKŁADU SIŁ

**Redukcja w punkcie**

**Redukcja do najprostszej postaci**

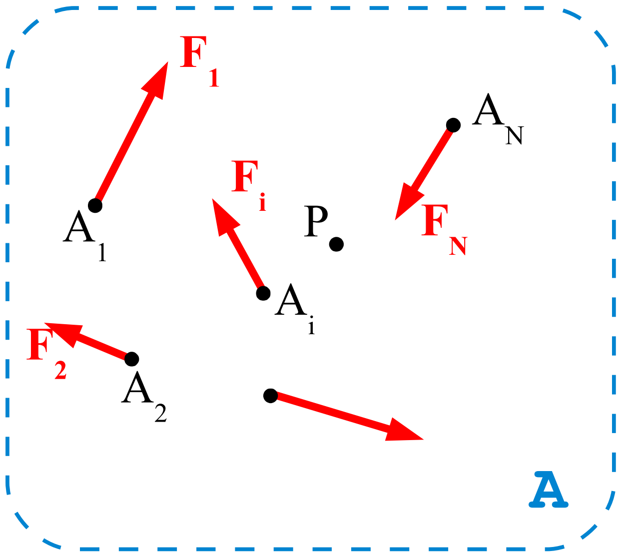
- **Redukcja w punkcie P** – redukcja układu do **zaczepionej w punkcie P siły równej sumie** układu wyjściowego oraz do **dowolnej pary sił o momencie równym momentowi układu wyjściowego względem P**.
  - Możliwa dla **każdego układu** i w **każdym punkcie**.
  - W ogólności nowy układ zawiera **3 siły**.

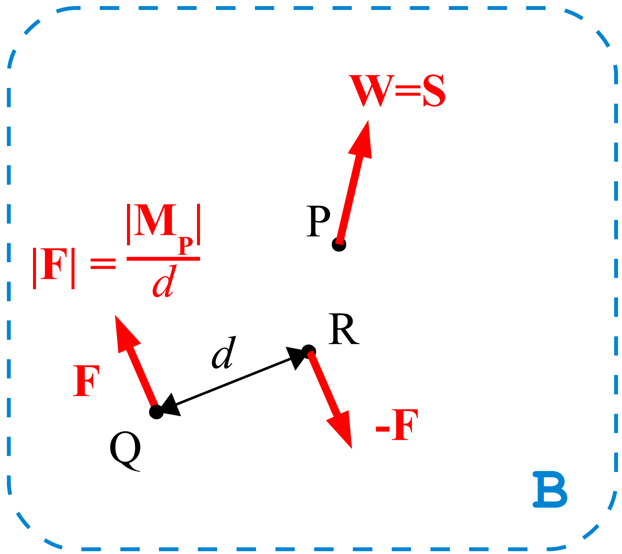
- **Redukcja do najprostszej postaci** – redukcja do 3 lub mniej sił. **W zależności od charakteru układu**:
  - możliwa jest **w każdym punkcie** lub w punktach należących do tzw. **osi środkowej układu.**
  - Nowy układ zawiera **1, 2 lub 3 siły**.

# REDUKCJA UKŁADU SIŁ W PUNKCIE

- Redukcja układu do **zaczepionej w punkcie P siły równej sumie** układu wyjściowego oraz do **dowolnej pary sił o momencie równym momentowi układu wyjściowego względem P**.

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathrm{A}_N \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \mathrm{P} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathrm{Q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix} \right\}$$




$$\mathbf{S}(\mathbb{A}) = \mathbf{S} \qquad \mathbf{S}(\mathbb{B}) = \mathbf{S}$$

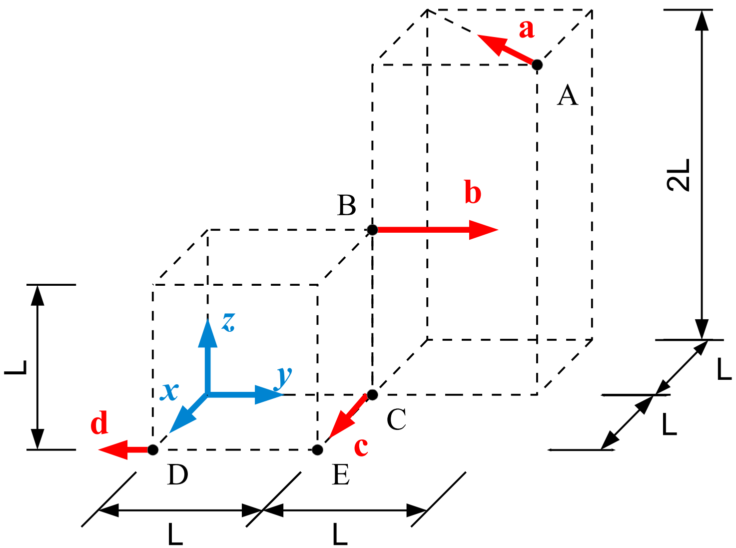
$$\mathbf{M}_P(\mathbb{A}) = \mathbf{M}_P \qquad \mathbf{M}_P(\mathbb{B}) = \mathbf{M}_P$$

$$\begin{cases} \mathbf{S}(\mathbb{A}) = \mathbf{S}(\mathbb{B}) \\ \mathbf{M}_P(\mathbb{A}) = \mathbf{M}_P(\mathbb{B}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}}$$

# REDUKCJA UKŁADU SIŁ W PUNKCIE - przykład

Zredukować podany układ sił w punkcie E.

- wyznaczyć sumę układu
- wyznaczyć moment układu względem E




$$|\mathbf{a}| = P\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = [-P;-P;0]$$
$$|\mathbf{b}| = 3P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = [0;3P;0]$$
$$|\mathbf{c}| = P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = [P;0;0]$$
$$|\mathbf{d}| = P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = [0;-P;0] \quad +$$

$$\mathbf{S} = [0;P;0]$$

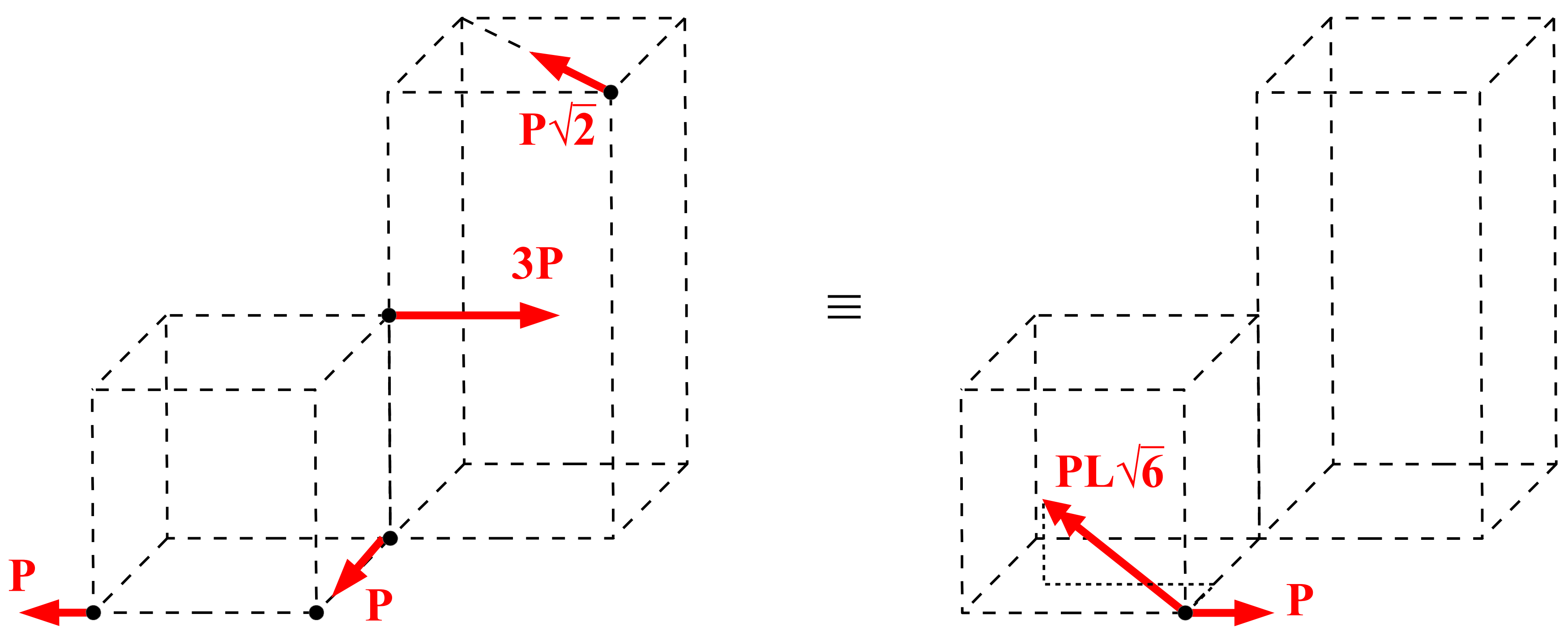
$$\mathbf{M}_E = \mathbf{a}\times\vec{AE} + \mathbf{b}\times\vec{BE} + \mathbf{c}\times\vec{CE} + \mathbf{d}\times\vec{DE}$$

$$\mathbf{a}\times\vec{AE} = [-P;-P;0]\times[L;-L;-2L] = [2PL;-2PL;2PL]$$
$$\mathbf{b}\times\vec{BE} = [0;3P;0]\times[L;0;-L] = [-3PL;0;-3PL]$$
$$\mathbf{c}\times\vec{CE} = [P;0;0]\times[L;0;0] = [0;0;0]$$
$$\mathbf{d}\times\vec{DE} = [0;-P;0]\times[0;L;0] = [0;0;0] \quad +$$

$$\mathbf{M}_E = [-PL;-2PL;-PL]$$

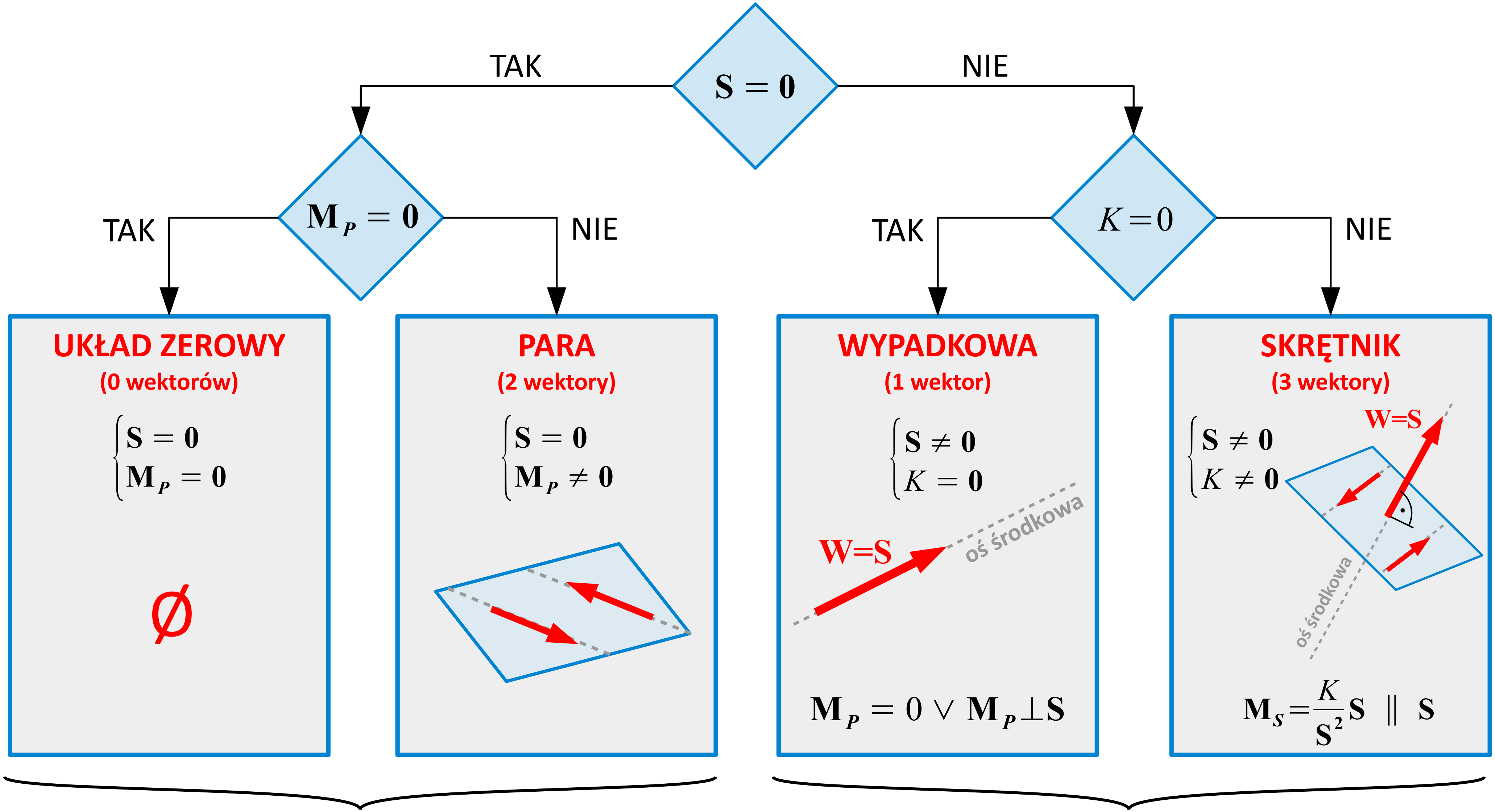
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ W PUNKCIE - przykład

Redukcja w punkcie E.




Podany układ sił redukuje się w punkcie E do wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [0\,;P\,;0]$ oraz do dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_E = [-PL\,;-2\,PL\,;-PL]$

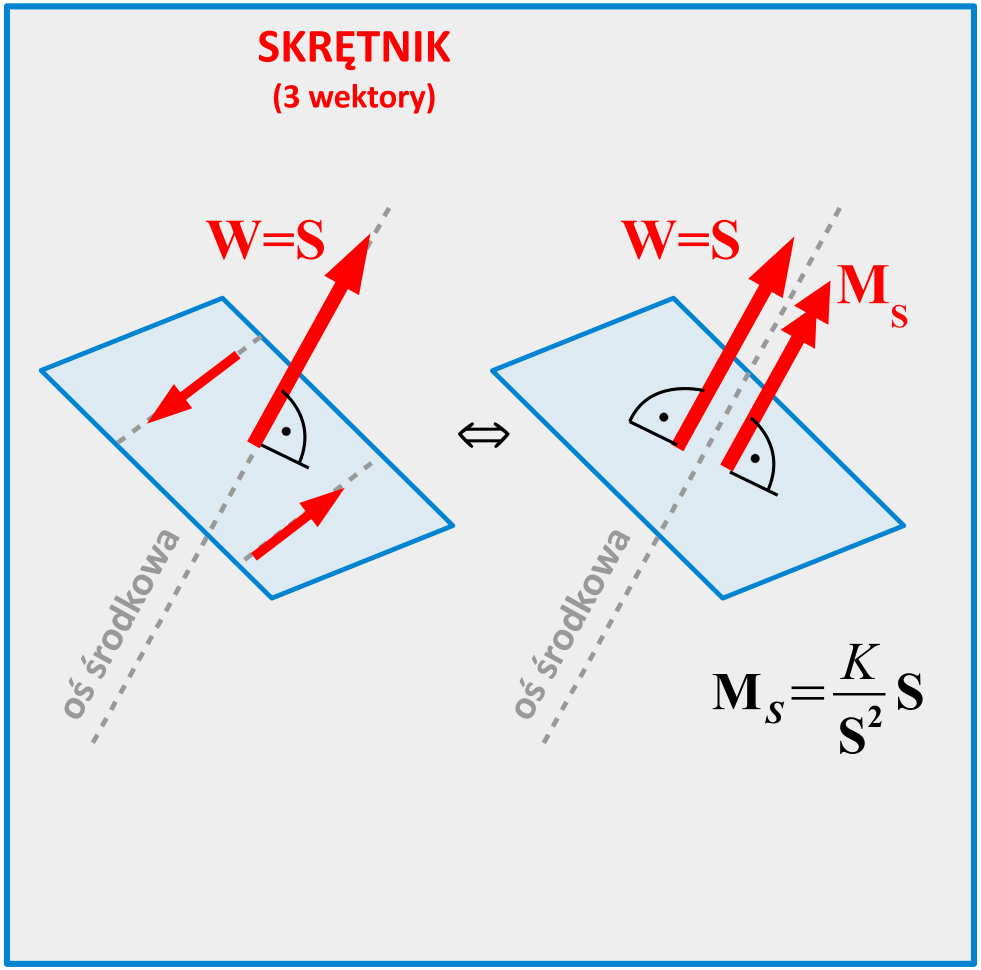
# REDUKCJA UKŁADU SIŁ DO NAJPROSTSZEJ POSTACI



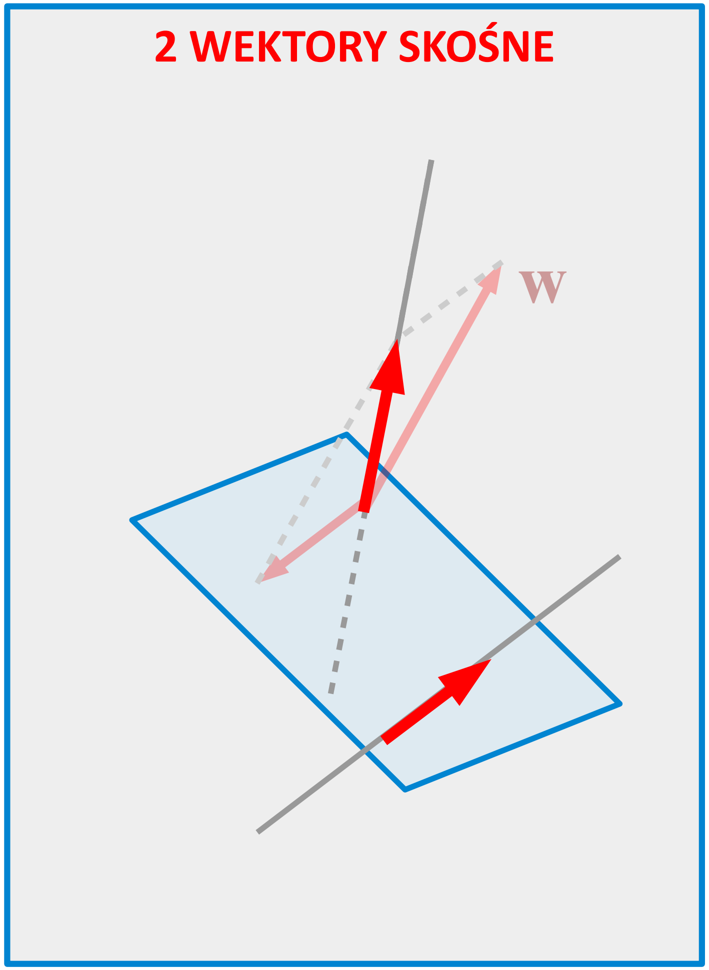

Redukcja do najprostszej postaci
**taka sama w każdym punkcie**

Redukcja do najprostszej postaci
**możliwa tylko w punktach osi środkowej**

# REDUKCJA SKRĘTNIKA DO DWÓCH WEKTORÓW SKOŚNYCH




≡




Skrętnik (**śruba statyczna**) ma jaśniejszą interpretację fizyczną:

- $M_s$ – moment wkręcający śrubę
- S – siła rozciągająca / ściskająca śrubę

# OŚ ŚRODKOWA

**Oś środkowa** – miejsce geometryczne punktów, względem których **moment układu ma zerową składową prostopadłą do sumy**.

Przypuśćmy, że Q należy do osi środkowej. Wtedy:

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_S = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\mathbf{S}$$

Wzór powyższy jest poprawny również dla $K = 0$.

Chcemy znaleźć **wszystkie punkty należące do osi środkowej**. Ponieważ moment układu musi być względem nich stały, zatem:

- albo suma układu jest zerowa – ale wtedy układ redukuje się do pary lub układu zerowego
- albo oś środkowa jest równoległa do sumy.

Zakładamy zatem, że $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$. Przypuśćmy, że znamy moment względem dowolnego punktu P. Z twierdzenia o zmianie bieguna:

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_P + \mathbf{S} \times \vec{\mathrm{PQ}} = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\mathbf{S}$$

# OŚ ŚRODKOWA

Pomnóżmy wektorowo przez sumę obie strony równania

$$(\mathbf{M}_P \times \mathbf{S}) + (\mathbf{S} \times \vec{PQ}) \times \mathbf{S} = \frac{K}{\mathbf{S}^2} \underbrace{\mathbf{S} \times \mathbf{S}}_{=0}$$

$$(\mathbf{S} \times \vec{PQ}) \times \mathbf{S} = \mathbf{S} \times \mathbf{M}_P$$

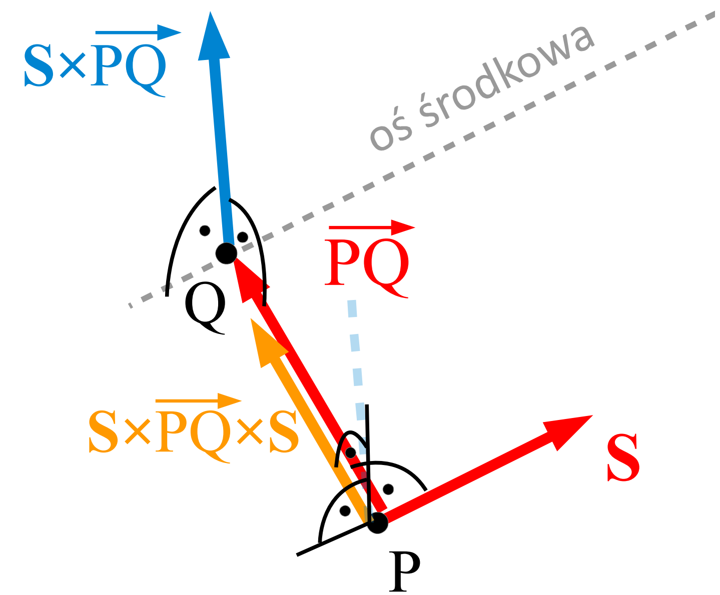
Rozważmy wektor $(\mathbf{S} \times \vec{PQ}) \times \mathbf{S}$

Jest on prostopadły zarówno do $\mathbf{S}$ jak i do $(\mathbf{S} \times \vec{PQ})$

Ponieważ punkt Q możemy wybrać dowolnie, zatem wybierzmy go w taki sposób, aby $\vec{PQ}$ był prostopadły do $\mathbf{S}$ .

Taki punkt zawsze istnieje – jest to punkt prostej znajdujący się **najbliżej danego punktu P**. Z reguły prawej dłoni mamy wtedy:

$$(\mathbf{S} \times \vec{PQ}) \times \mathbf{S} \ \uparrow\uparrow \ \vec{PQ}$$




**Znamy zatem kierunek i zwrot wektora** $\vec{PQ}$. Jeśli tylko znajdziemy jego długość, wtedy dla dowolnie przyjętego punktu P znajdziemy punkt Q należący do osi środkowej. Ponieważ wiemy, że jest równoległa do sumy, zatem będziemy mogli ją wtedy wyznaczyć.

# OŚ ŚRODKOWA

Znajdźmy długość wektora:

$$|(\mathbf{S}\times\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\times\mathbf{S}| = |(\mathbf{S}\times\overrightarrow{\mathrm{PQ}})|\,|\mathbf{S}|\sin\sphericalangle(\mathbf{S}\times\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,;\mathbf{S}) =$$

$$= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\,|\mathbf{S}|^2\sin\sphericalangle(\mathbf{S};\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\sin\sphericalangle(\mathbf{S}\times\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,;\mathbf{S})$$

Z własności iloczynu wektorowego: $\sin\sphericalangle(\mathbf{S}\times\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,;\mathbf{S}) = \sin 90^\circ = 1$

Dla przyjętego punktu Q: $\sin\sphericalangle(\mathbf{S};\overrightarrow{\mathrm{PQ}}) = \sin 90^\circ = 1$

Zatem $|(\mathbf{S}\times\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\times\mathbf{S}| = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\,|\mathbf{S}|^2$

Jeśli podzielimy wektor $(\mathbf{S}\times\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\times\mathbf{S}$ przez kwadrat długości sumy otrzymamy wektor $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ .

Wykorzystując wyprowadzoną wcześniej zależność:

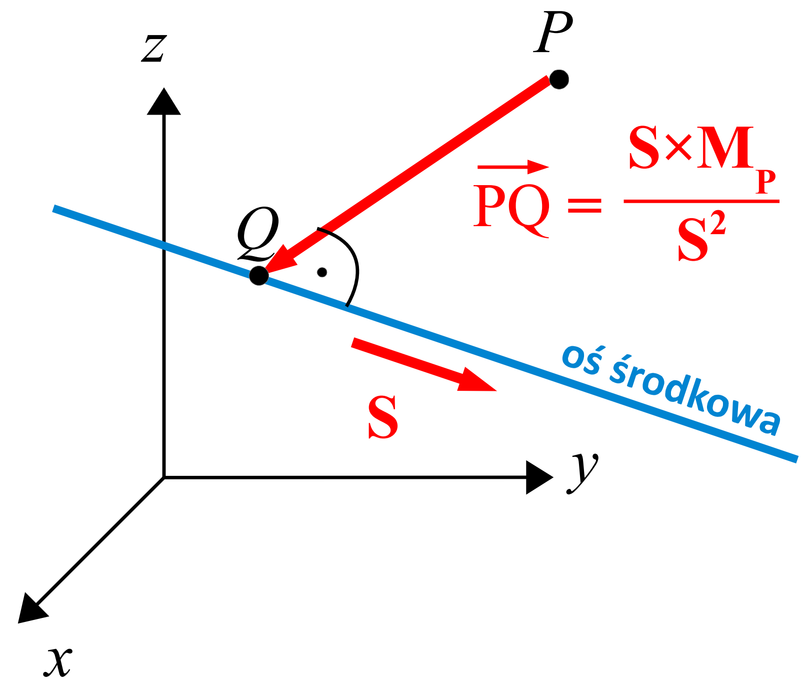
$$(\mathbf{S}\times\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\times\mathbf{S} = \mathbf{S}\times\mathbf{M}_P \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_P}{\mathbf{S}^2}}$$

# OŚ ŚRODKOWA

$$\mathbf{r}(\lambda) = \vec{OQ} + \lambda\,\mathbf{k}$$

$$Q \in k\ , \quad \mathbf{k} \| k$$

$$\boxed{\mathbf{r}(\lambda) = \left[ \vec{OP} + \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{M}_P}{\mathbf{S}^2} \right] + \lambda\,\mathbf{S}}$$



# OŚ ŚRODKOWA

Alternatywny sposób wyznaczania równań osi środkowej. Przyjmujemy, że znamy sumę układu $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, współrzędne pewnego punktu P, oraz moment układu względem P.

Szukamy punktów $\mathrm{Q} = (x,y,z)$ należących do osi środkowej. Z twierdzenia o zmianie bieguna:

$$\mathbf{M}_P + \mathbf{S} \times \vec{\mathrm{PQ}} = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\mathbf{S}$$

W składowych: $[M_{Px}; M_{Py}; M_{Pz}] + [S_x; S_y; S_z] \times [(x-x_P);(y-y_P);(z-z_P)] = \frac{K}{\mathbf{S}^2}[S_x; S_y; S_z]$

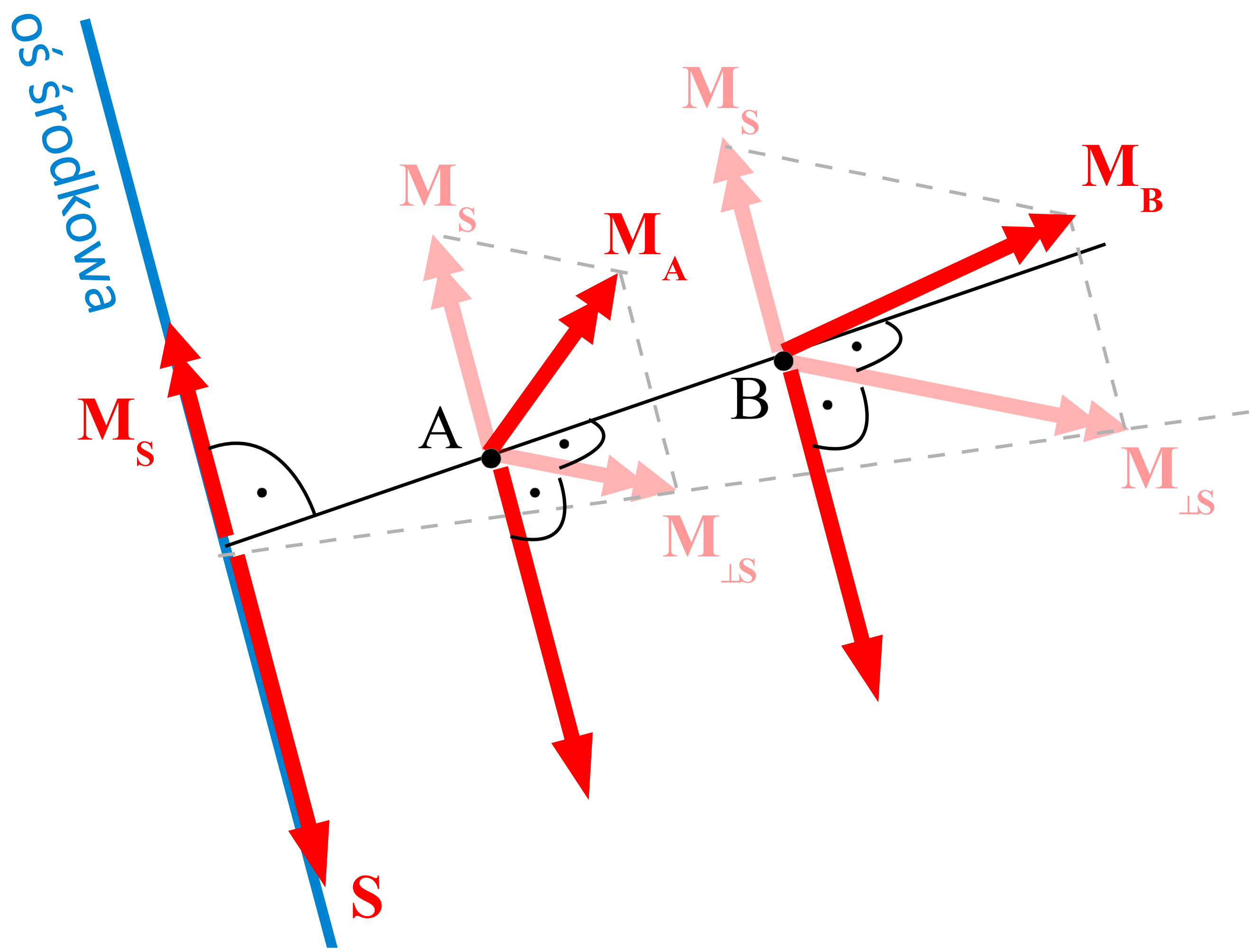
Co daje nam zależny układ równań liniowych na współrzędne $(x, y, z)$ punktów osi środkowej:

$$\begin{cases} S_y z - S_z y = S_y z_P - S_z y_P + \dfrac{K S_x}{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} - M_{Px} & (R1) \\ S_z x - S_x z = S_z x_P - S_x z_P + \dfrac{K S_y}{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} - M_{Py} & (R2) \\ S_x y - S_y x = S_x y_P - S_y x_P + \dfrac{K S_z}{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} - M_{Pz} & (R3) \end{cases}$$

Jest to **układ równań zależnych**: $S_x \cdot (R1) + S_y \cdot (R2) + S_z \cdot (R3) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$
Prosta w przestrzeni dana jest jednoznacznie układem dwóch równań.

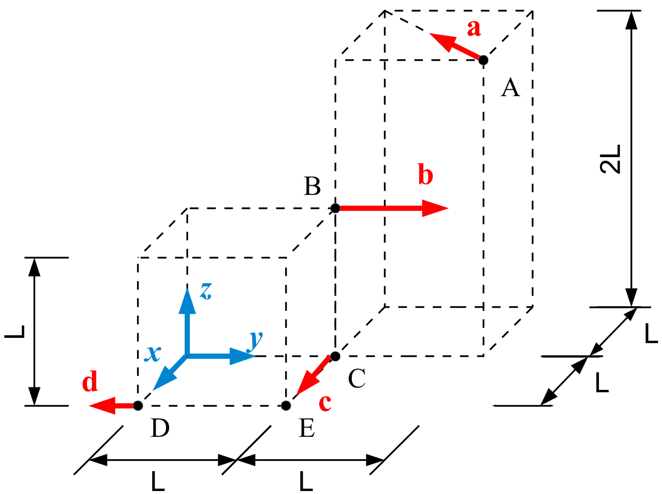
# OŚ ŚRODKOWA

Moment układu względem punktów osi środkowej jest najmniejszy.



# REDUKCJA UKŁADU SIŁ DO NAJPROSTSZEJ POSTACI - przykład

Najpierw należy zredukować podany układ sił do najprostszej postaci.




$$|\mathbf{a}| = P\sqrt{2}$$
$$|\mathbf{b}| = 3P$$
$$|\mathbf{c}| = P$$
$$|\mathbf{d}| = P$$

$$\mathbf{S} = [0; P; 0]$$
$$\mathbf{M}_E = [-PL; -2PL; -PL]$$
$$K = \mathbf{S}\cdot\mathbf{M}_E = -2P^2L$$

$K \neq 0 \Rightarrow$ **skrętnik**

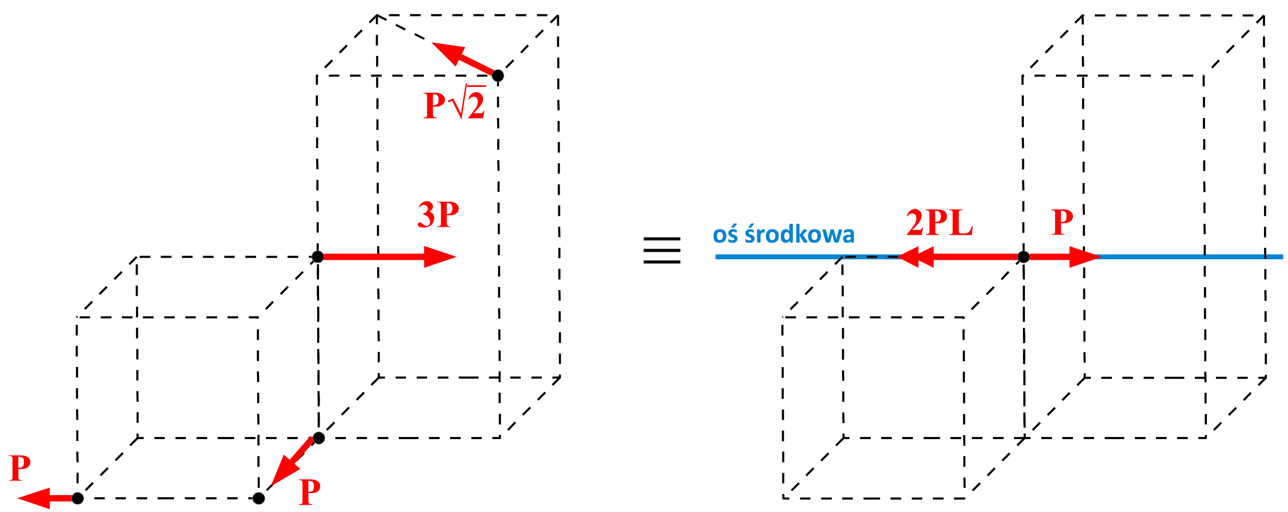
**Moment w skrętniku**: $$\mathbf{M}_S = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\mathbf{S} = [0; -2PL; 0]$$

**Oś środkowa**: $$\vec{OE} = [L; L; 0]$$

$$\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_E}{\mathbf{S}^2} = [-L; 0; L]$$

$$\mathbf{r}(\lambda) = \vec{OE} + \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_E}{\mathbf{S}^2} + \lambda\mathbf{S} = \begin{cases} x(\lambda) = L - L + \lambda\cdot 0 = 0 \\ y(\lambda) = L + 0 + \lambda\cdot P = L + \lambda P \\ z(\lambda) = 0 + L + \lambda\cdot 0 = L \end{cases}$$

# REDUKCJA UKŁADU SIŁ DO NAJPROSTSZEJ POSTACI - przykład




Podany układ sił redukuje w najprostszej postaci do skrętnika złożonego z:

- wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [0\,;P\,;0]$ zaczepionego w dowolnym punkcie osi środkowej danej równaniami:

$$\mathbf{r}(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda) = 0 \\ y(\lambda) = L + \lambda P \\ z(\lambda) = L \end{cases}$$

- dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_S = [0\,;-2\,PL\,;0]$ równoległym do sumy.

# DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ