MECHANIKA TEORETYCZNA

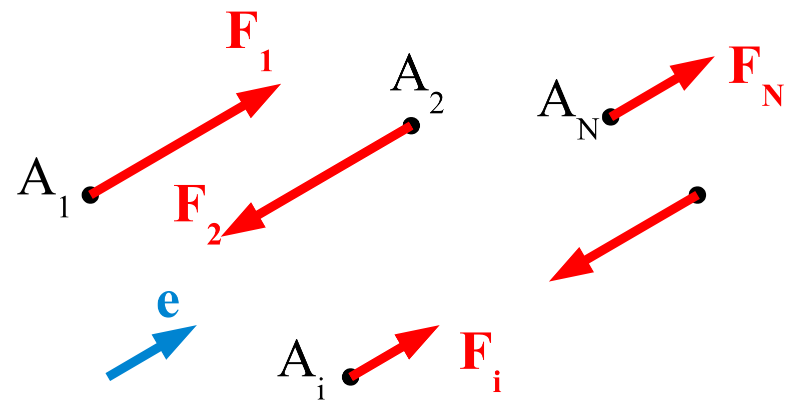
dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathrm{A}_N \end{pmatrix} \right\}, \qquad \underset{\mathbf{e}}{\exists} : \underset{i}{\forall} \quad \mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}$$



Dla dowolnego punktu P należącego do tej płaszczyzny:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} F_i \mathbf{e}$$

$$\mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i \mathrm{P}} \right) = \sum_{i=1}^{N} F_i \left(\mathbf{e} \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i \mathrm{P}} \right)$$

Każdy z wektorów powyższej sumy jest z definicji iloczynu wektorowego prostopadły do wektora $\mathbf{e}$, który z kolei jest równoległy do sumy. Suma wektorów prostopadłych do $\mathbf{e}$ nie może dać składowej równoległej do $\mathbf{e}$, zatem:

$$\underset{P}{\forall} \quad K = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_P = 0$$

Parametr układu równoległego jest równy 0.

UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

$$K = 0$$

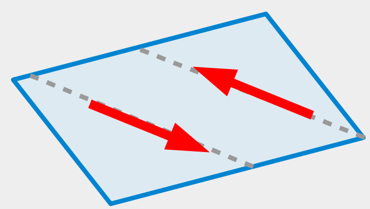
UKŁAD ZEROWY

$$\begin{cases} \mathbf{S} = 0 \\ \mathbf{M}_P = 0 \end{cases}$$

Ø

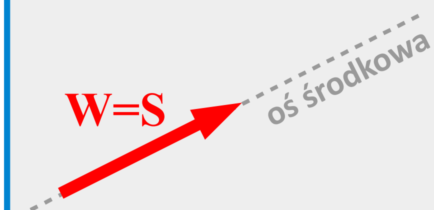
PARA

$$\begin{cases} \mathbf{S} = 0 \\ \mathbf{M}_P \neq 0 \end{cases}$$



WYPADKOWA

$$\mathbf{S} \neq 0$$

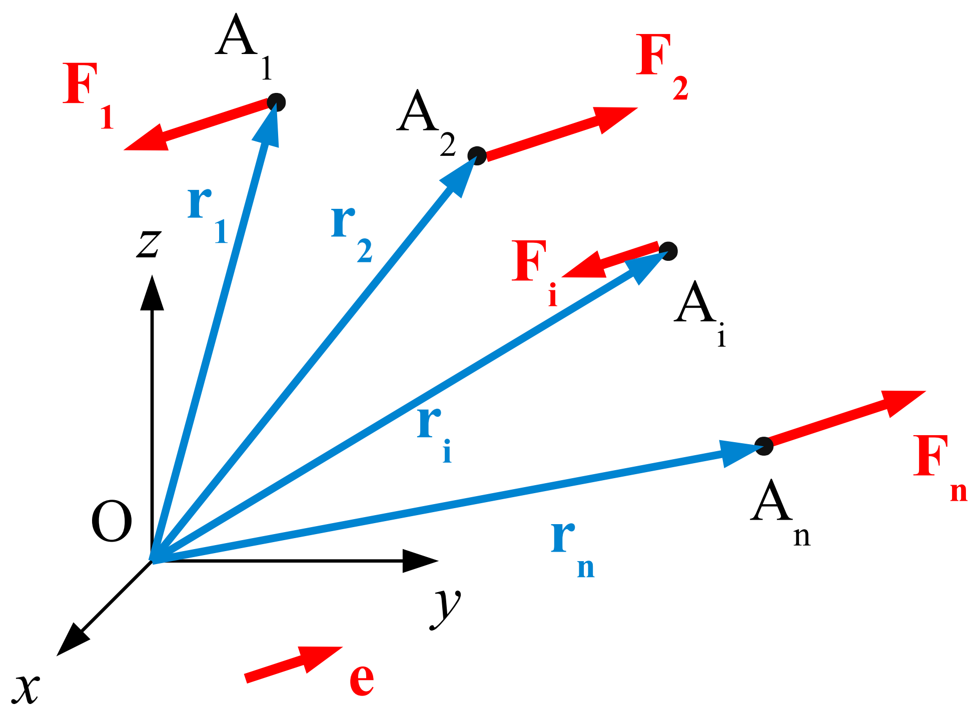


Układ równoległy nie może zostać zredukowany do skrętnika.

UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

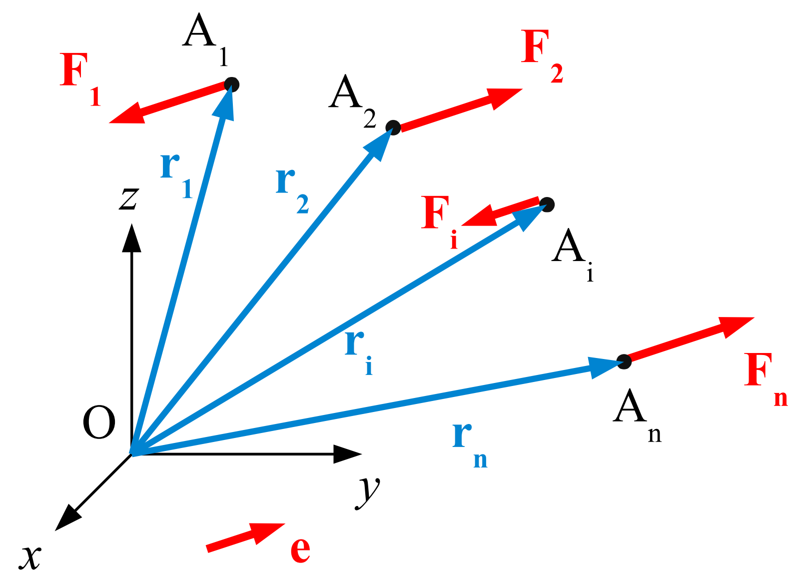
Układ równoległy może być w pełni opisany przez:

- **wersor kierunku** wszystkich sił $\quad \mathbf{e}\ , \quad |\mathbf{e}| = 1$
- **wektory wodzące punktów zaczepienia** sił $\quad \mathbf{r}_i \quad , i = 1, 2, \ldots, N$
- **wielkości** sił $\quad F_i \quad , i = 1, 2, \ldots, N$



UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

Wyznaczanie osi środkowej układu równoległego dla $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$



- Wyznaczamy sumę układu:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{e}$$

- Wyznaczamy moment układu względem O:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} F_i \left(\mathbf{e} \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{O}}\right) = \sum_{i=1}^{n} F_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{e}\right)$$

- Następnie, korzystając z twierdzenia o zmianie bieguna, wyznaczamy moment układu względem nieznanego punktu należącego do osi środkowej. Moment ten musi być zerowy

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + \mathbf{S} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{e}\right) + \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{e} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{e}\right) - \sum_{i=1}^{n} F_i \overrightarrow{\mathrm{OP}} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

Wyznaczanie osi środkowej układu równoległego dla $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(F_i \mathbf{r}_i - F_i \vec{\mathrm{OP}}\right)\right] \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a} = \mathbf{0} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0} \vee \mathbf{a} \| \mathbf{b})$$

Z założenia $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$. Poszukujemy jakiegokolwiek rozwiązania. Jeśli przyjmiemy, że pierwszy wektor w iloczynie jest zerowy, wtedy uzyskany wynik będzie niezależny od kierunku wersora:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(F_i \mathbf{r}_i - F_i \vec{\mathrm{OP}}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(F_i \mathbf{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(F_i \vec{\mathrm{OP}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(F_i \mathbf{r}_i\right) - \vec{\mathrm{OP}} \sum_{i=1}^{n}\left(F_i\right) = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{OP}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r}(\lambda) = \vec{\mathrm{OP}} + \lambda \mathbf{S}$$

wektor wodzący
środka układu sił równoległych

równanie
osi środkowej

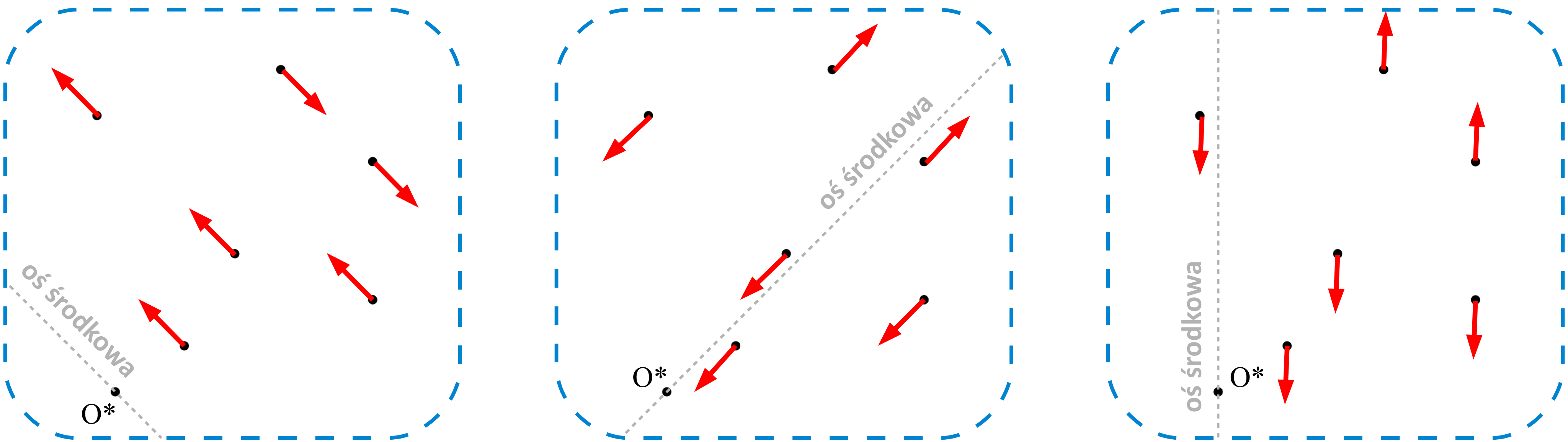
UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

$$\vec{OO^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Wszystkie układy sił równoległych, w których:

- **punkty zaczepienia sił są takie same,**
- **wielkości tych sił są takie same,**

mają ten sam środek. Jest to **punkt przecięcia się osi środkowych wszystkich takich układów**.
Zmiana kierunku sił nie wpływa na zmianę położenia środka układu.



UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

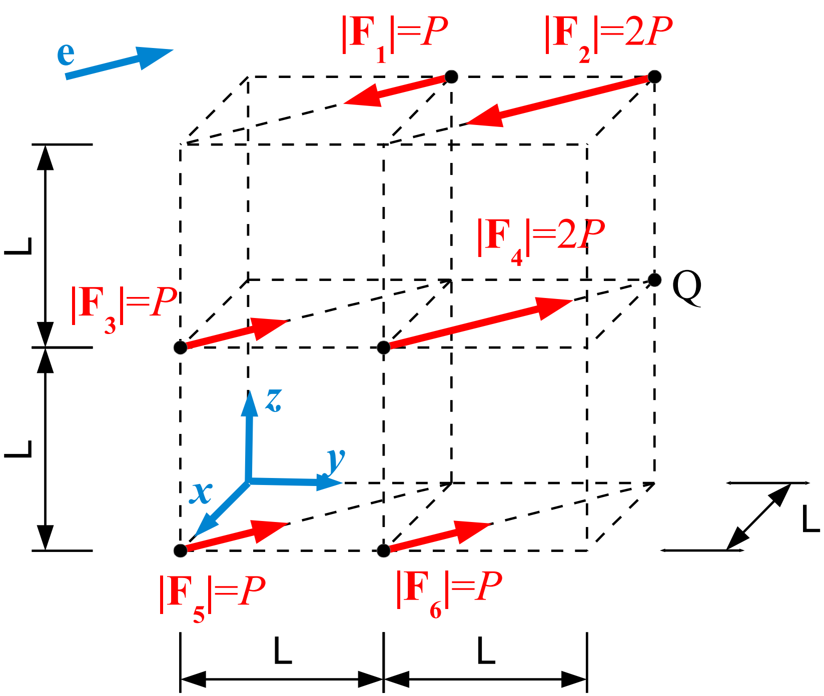
Do wyznaczenia momentu układu najłatwiej skorzystać z twierdzenia o zmianie bieguna:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_{O^*} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{M}_{Q} = \mathbf{M}_{O^*} + \mathbf{S} \times \overrightarrow{\mathrm{O}^*\mathrm{Q}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_{Q} = \mathbf{S} \times \overrightarrow{\mathrm{O}^*\mathrm{Q}}$$

- Do wyznaczenia środka układu nie potrzeba wykonywać żadnego mnożenia wektorowego.
- Do wyznaczenia momentu dowolnie dużego układu równoległego względem dowolnego punktu wystarczy jedno mnożenie wektorowe

UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH – przykład

Zredukować poniższy układu sił równoległych do najprostszej postaci oraz w punkcie Q:



Wersor kierunku sił:

$$\mathbf{e} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 0\right]$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= -P & F_1\mathbf{r_1} &= -P[0;L;2L] \\
F_2 &= -2P & F_2\mathbf{r_2} &= -2P[0;2L;2L] \\
F_3 &= P & F_3\mathbf{r_3} &= P[L;0;L] \\
F_4 &= 2P & F_4\mathbf{r_4} &= 2P[L;L;L] \\
F_5 &= P & F_5\mathbf{r_5} &= P[L;0;0] \\
F_6 &= P \quad + & F_6\mathbf{r_6} &= P[L;L;0] \quad +
\end{aligned}$$

$$S = \sum_{i=1}^{N} F_i = 2P \qquad \mathbf{m} = \sum_{i=1}^{N} F_i\mathbf{r}_i = [5PL;-2PL;-3PL]$$

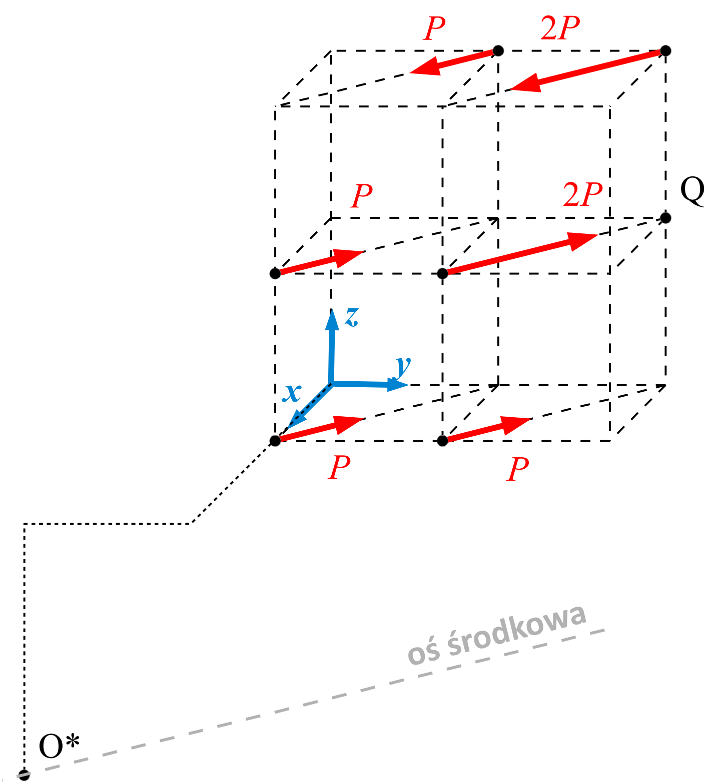
Suma:

$$\mathbf{S} = S\,\mathbf{e} = \left[-P\sqrt{2}\ ;\ P\sqrt{2}\ ;\ 0\right]$$

Środek układu:

$$\vec{OO^*} = \frac{\mathbf{m}}{S} = \left[\frac{5}{2}L;-L;-\frac{3}{2}L\right]$$

UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH – przykład



Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wypadkowej $\mathbf{W}=\mathbf{S}$ zaczepionej w dowolnym punkcie osi środkowej zawierającej środek układu O^* i równoległej do $\mathbf{S}$.

Moment układu względem Q:

$$\vec{\mathrm{OO}^*} = \left[\frac{5}{2}L;-L;-\frac{3}{2}L\right]$$

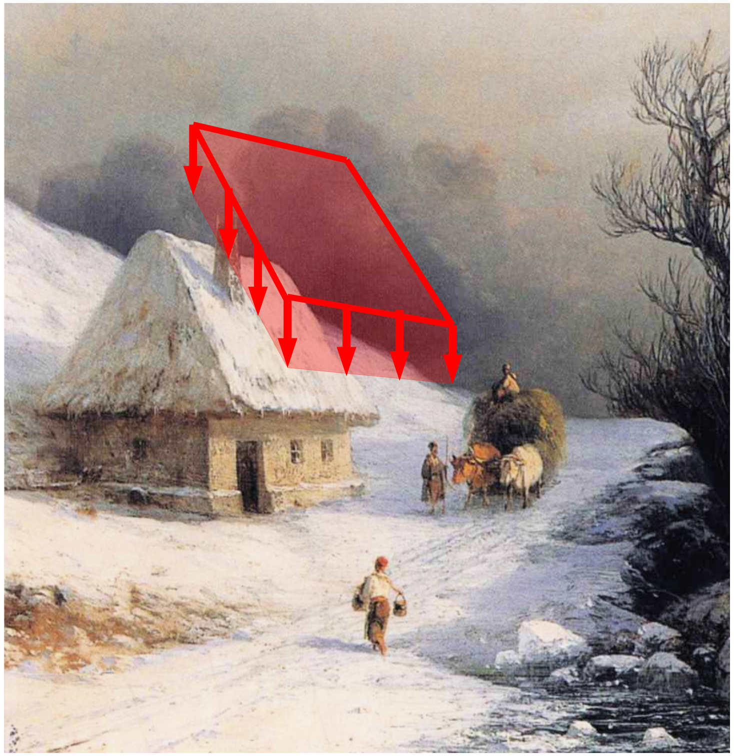
$$\vec{\mathrm{OQ}} = \left[0;2L;L\right]$$

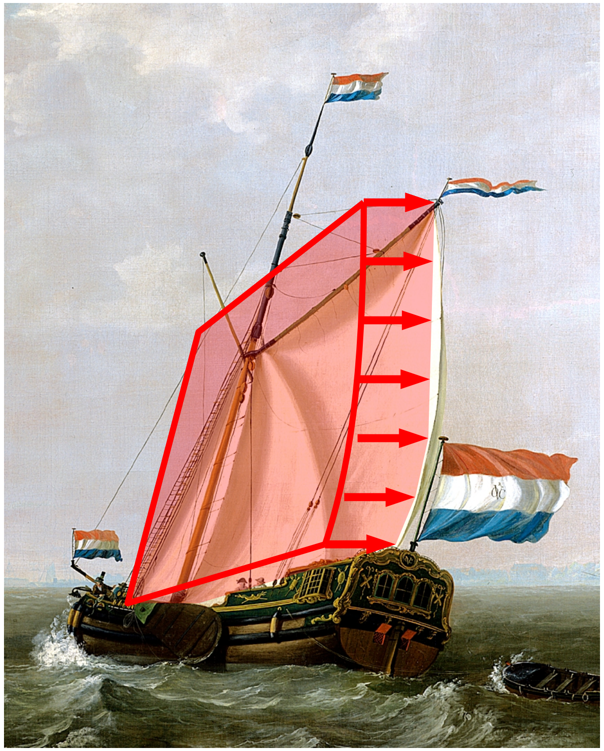
$$\vec{\mathrm{O^*Q}} = \vec{\mathrm{OQ}}-\vec{\mathrm{OO}^*} = \left[-\frac{5}{2}L;3L;\frac{5}{2}L\right]$$

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{S}\times\vec{\mathrm{O^*Q}} = \left[\frac{5}{\sqrt{2}}PL\;;\;\frac{5}{\sqrt{2}}PL\;;\;-\frac{1}{\sqrt{2}}PL\right]$$

Podany układ sił redukuje się w punkcie Q wektora $\mathbf{W}=\mathbf{S}$ zaczepionego w Q oraz do dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_Q$.

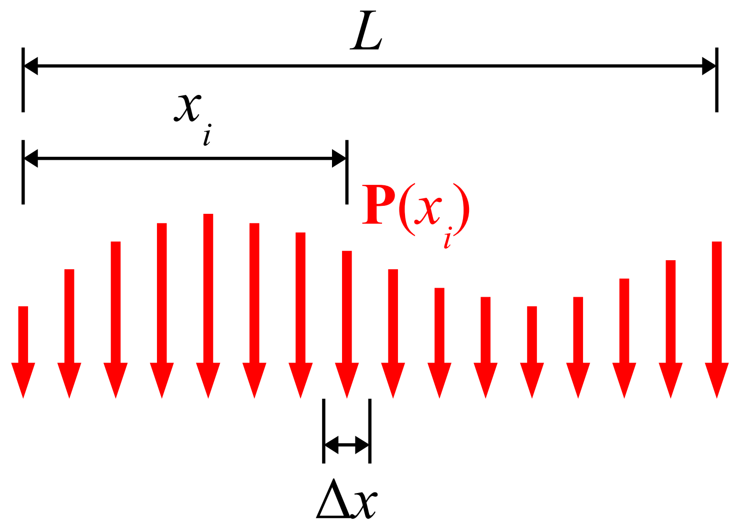
CIĄGŁE UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH





CIĄGŁE UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

Układ nieskończenie wielu sił równoległych



- **gęstość obciążenia** $$q(x_i) = \frac{P(x_i)}{\Delta x}$$
- **suma** $$S = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{N} q(x_i)\Delta x = \int_0^L q(x)\,\mathrm{d}x$$
- **moment** $$M = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{N} q(x_i) x_i \Delta x = \int_0^L x\, q(x)\,\mathrm{d}x$$
- **środek układu** $$x^* = \frac{M}{S} = \frac{\int_0^L x\, q(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L q(x)\,\mathrm{d}x}$$

CIĄGŁE UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

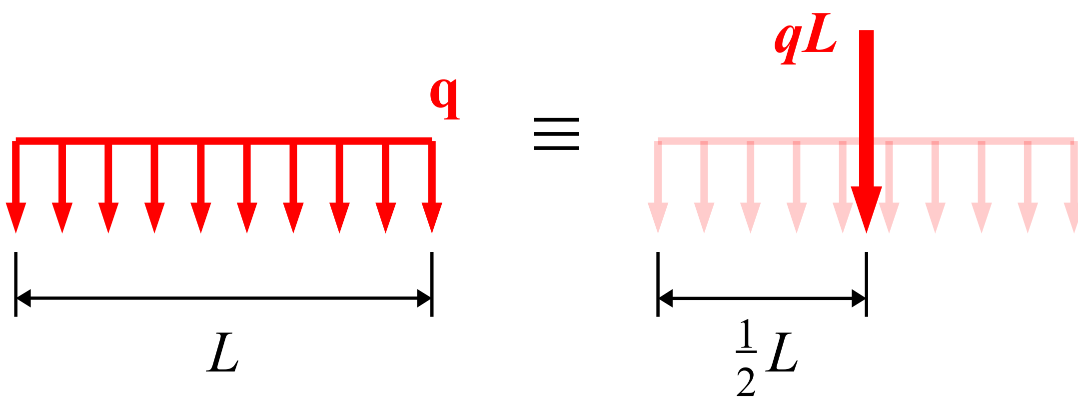
Obciążenie jednorodne (prostokątne)

$$q(x) = q = const.$$

$$S = \int_0^L q(x)\,\mathrm{d}x = qL$$

$$M = \int_0^L x\,q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{qL^2}{2}$$

$$x^* = \frac{M}{S} = \frac{L}{2}$$



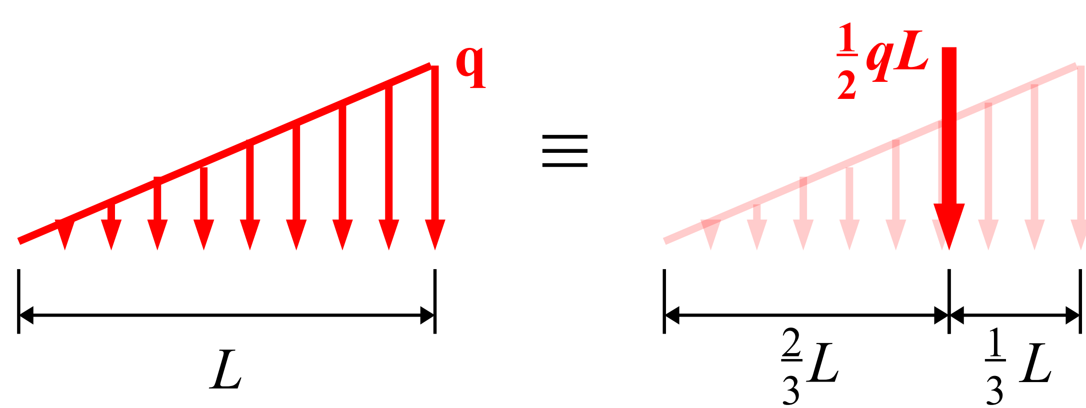
Obciążenie liniowe (trójkątne)

$$q(x) = \frac{q}{L}x$$

$$S = \int_0^L q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{qL}{2}$$

$$M = \int_0^L x\,q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{qL^2}{3}$$

$$x^* = \frac{M}{S} = \frac{2}{3}L$$



CIĄGŁE UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

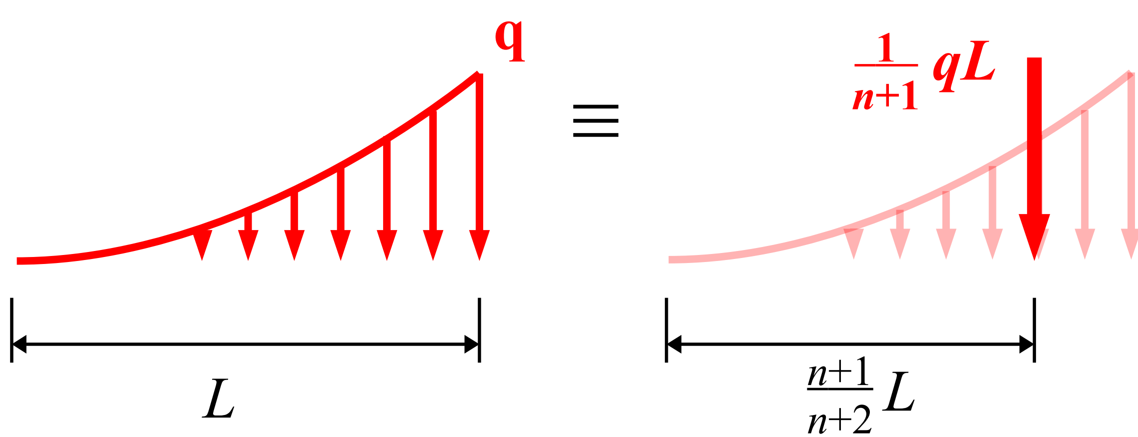
Obciążenie nieliniowe

$$q(x) = \frac{q}{L^n} x^n$$

$$S = \int_0^L q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{qL}{n+1}$$

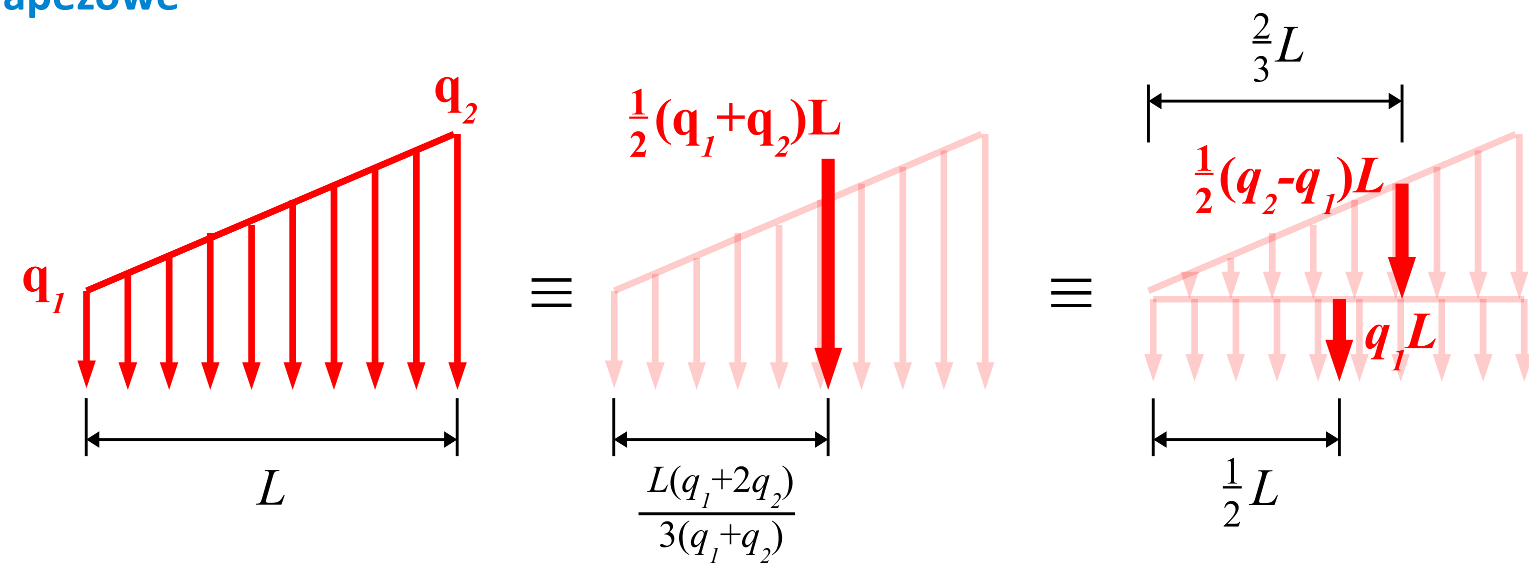
$$M = \int_0^L x\,q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{qL^2}{n+2}$$

$$x^* = \frac{M}{S} = \frac{n+1}{n+2} L$$

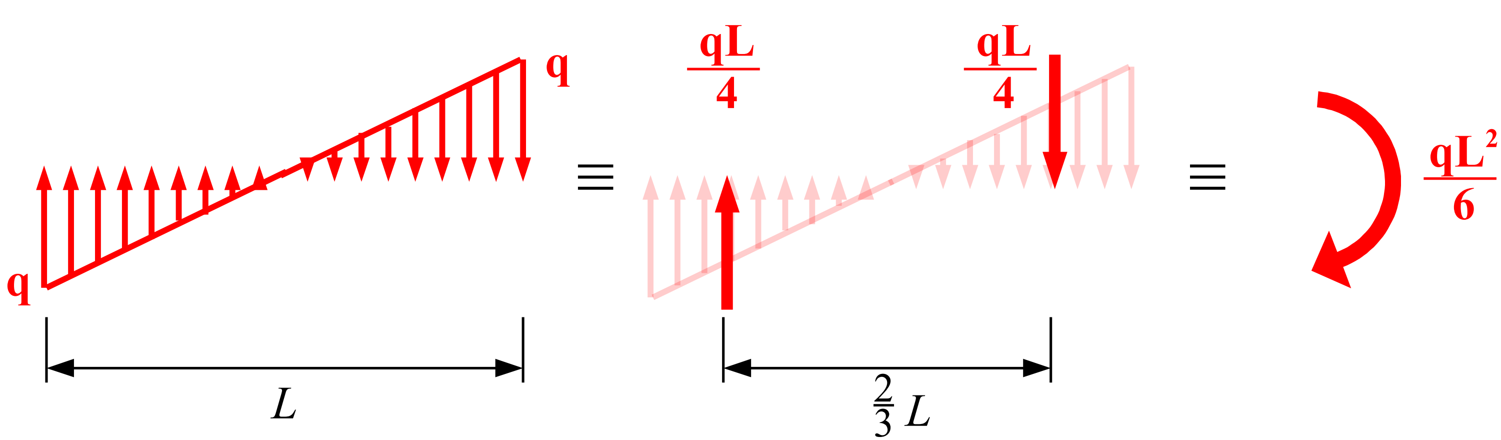


CIĄGŁE UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

Obciążenie trapezowe



Obciążenie liniowe antysymetryczne



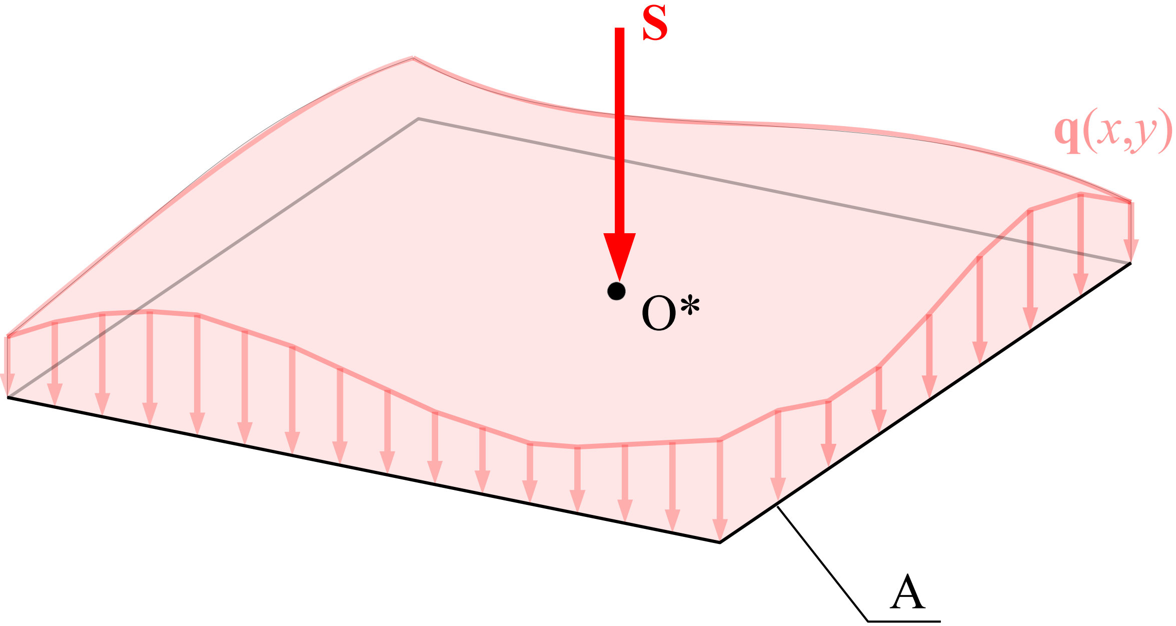
CIĄGŁE UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

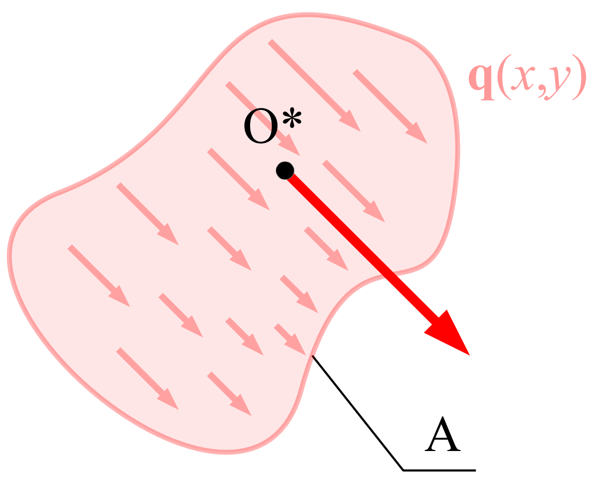
Ciągły układ sił równoległych na płaszczyźnie

$$S = \iint_A q(x, y)\,\mathrm{d}A$$

$$m_x = \iint_A x\,q(x, y)\,\mathrm{d}A \qquad \mathbf{r}^* = \left[\frac{m_x}{S}\,;\,\frac{m_y}{S}\right]$$

$$m_y = \iint_A y\,q(x, y)\,\mathrm{d}A$$





CIĄGŁE UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

Ciągły układ sił równoległych w przestrzeni

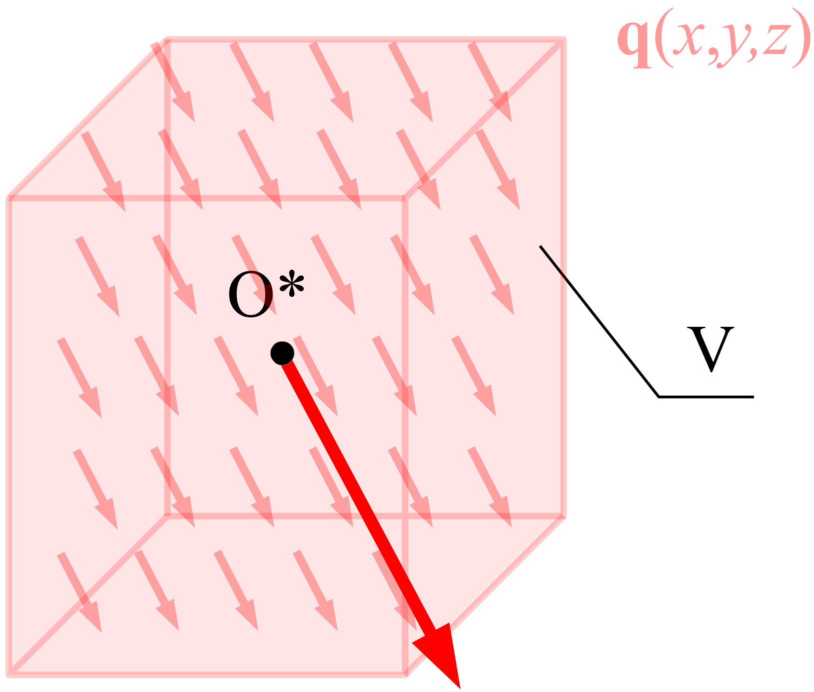
$$S = \iiint_V q(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$m_x = \iiint_V x\,q(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$m_y = \iiint_V y\,q(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$m_z = \iiint_V z\,q(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$\mathbf{r}^* = \left[\frac{m_x}{S}\,;\,\frac{m_y}{S}\,;\,\frac{m_z}{S}\right]$$

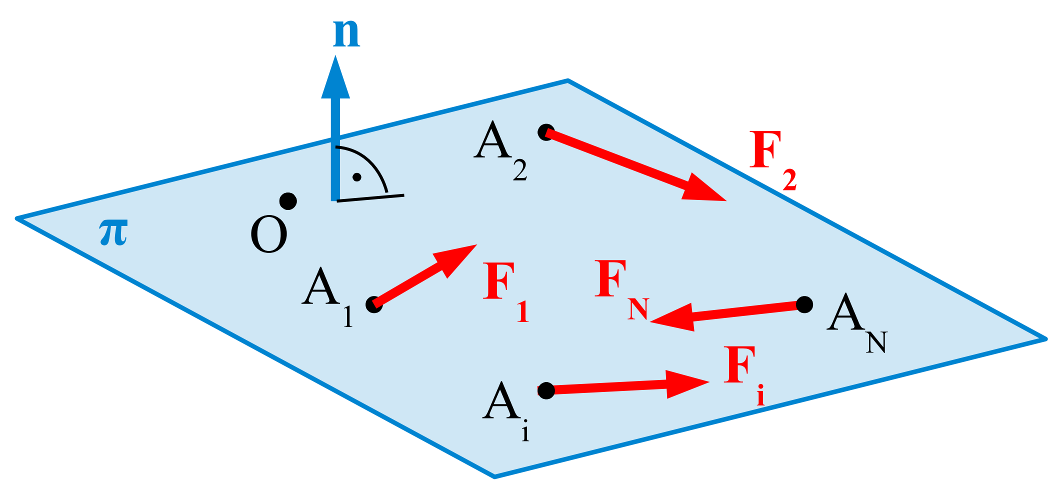


PŁASKIE UKŁADY SIŁ

PŁASKI UKŁAD SIŁ

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathrm{A}_N \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underset{\mathbf{n}}{\exists}\ \underset{O}{\exists} : \underset{i}{\forall} \quad \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \ , \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}_i} \cdot \mathbf{n} = 0$$



Punkt O i normalna $\mathbf{n}$ wyznaczają płaszczyznę π układu sił.

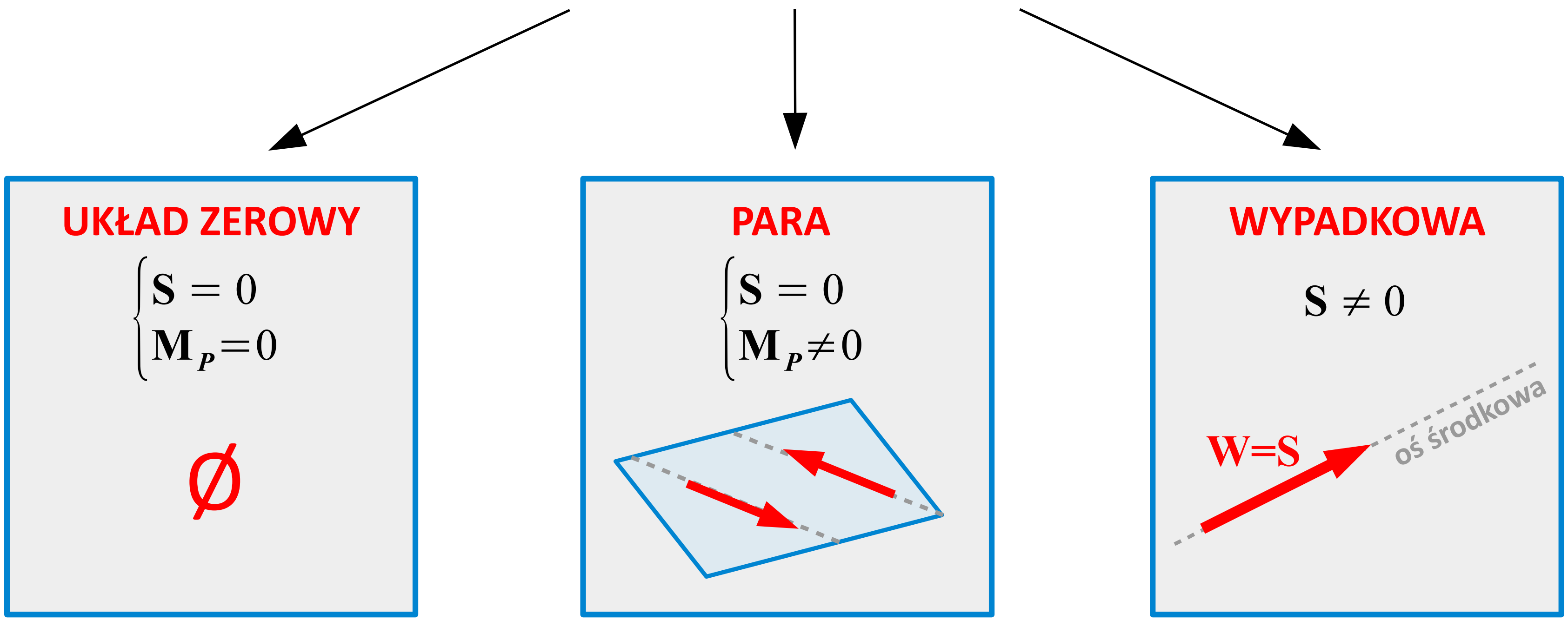
Dla dowolnego punktu P należącego do tej płaszczyzny:

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \ \in \ \pi \\ \mathbf{M}_P = \sum\limits_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i \times \overrightarrow{\mathrm{A}_i \mathrm{P}} \right) \ \perp \ \pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underset{P}{\forall} \quad K = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_P = 0$$

Parametr układu płaskiego jest równy 0.

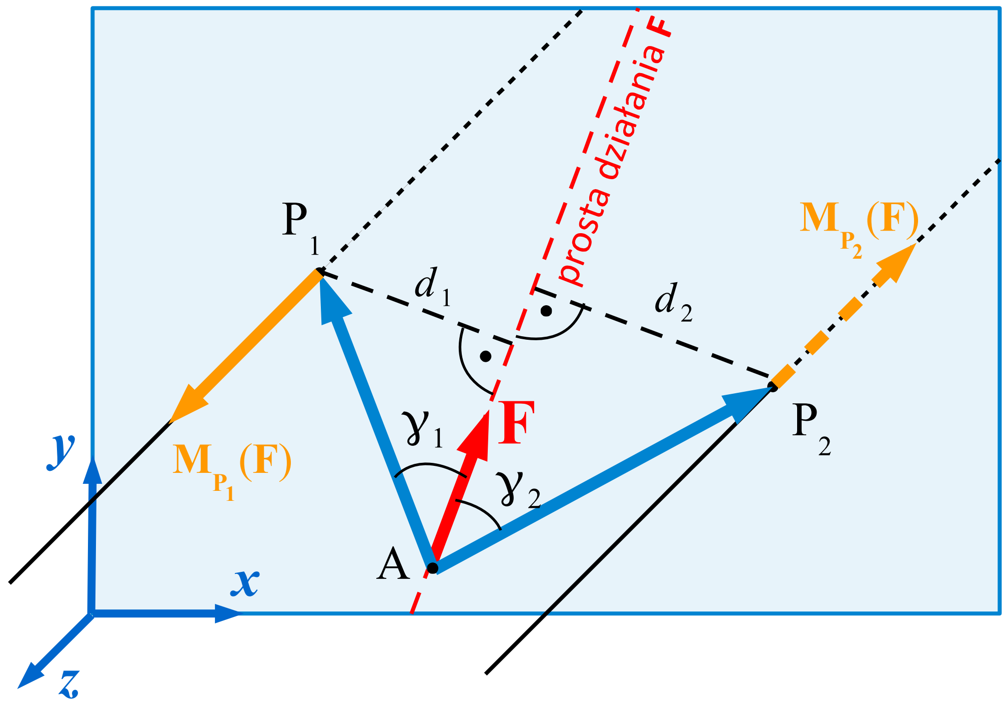
PŁASKI UKŁAD SIŁ

$$K = 0$$



Układ płaski nie może zostać zredukowany do skrętnika.

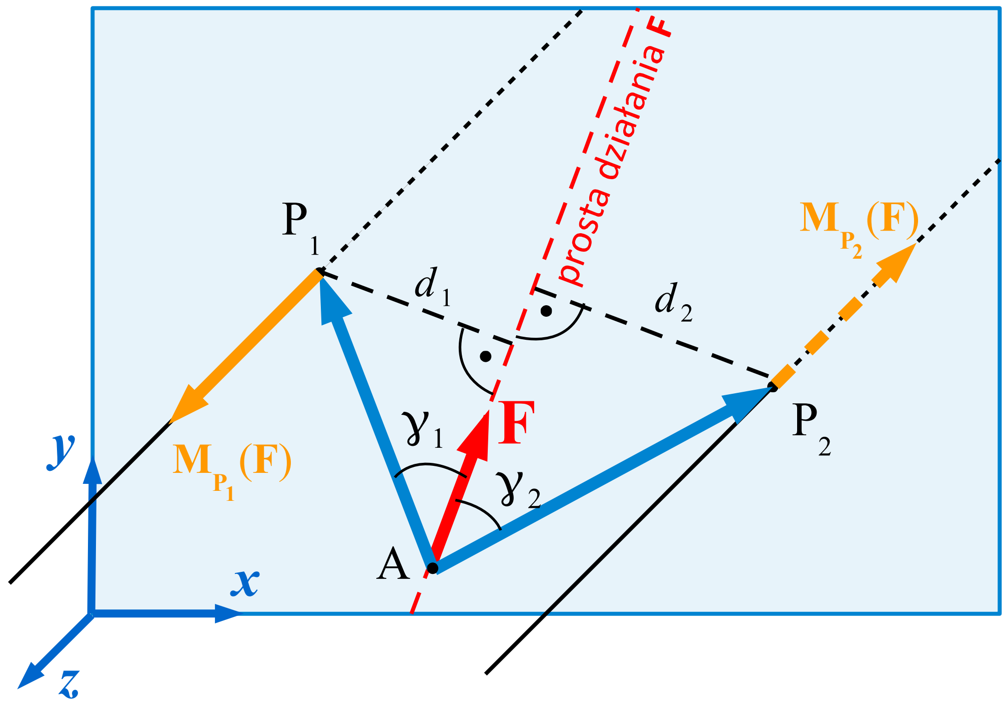
PŁASKI UKŁAD SIŁ



Na płaszczyźnie (x,y):

- **wektory wodzące punktów:** $\vec{OP} = [x \; ; \; y \; ; \; 0]$
- wektory **sił:** $\mathbf{F} = [F_x \; ; \; F_y \; ; \; 0]$
- wektory **momentów:** $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \vec{AP} = [0 \; ; \; 0 \; ; \; M_z]$

PŁASKI UKŁAD SIŁ



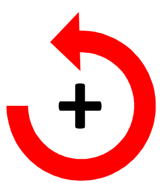
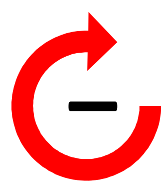
$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}|\,|\vec{AP}|\sin\gamma = |\mathbf{F}|d = |M_z|$$

$$M_z > 0 \qquad\qquad M_z < 0$$

PŁASKI UKŁAD SIŁ

Wyznaczanie momentu siły w układzie płaskim.

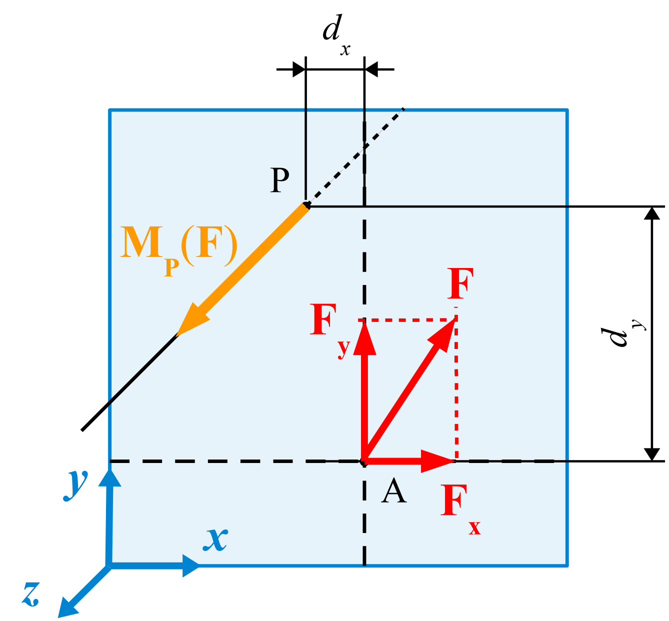
- **Kierunek**: prostopadły do płaszczyzny układu $\mathbf{M} = [0\ ;\ 0\ ;\ M_z]$

- **Zwrot**: $M_z > 0$  $M_z < 0$ 

- **Długość**: $M = F\,d$

  „moment = siła × ramię”

  - **siła pozioma → ramię pionowe**
  - **siła pionowa → ramię poziome**



PŁASKI UKŁAD SIŁ

Wyznaczanie osi środkowej dla układów redukujących się do wypadkowej.

Znamy: $\mathbf{S} = [S_x \,;\, S_y \,;\, 0]$

$\mathbf{M}_{\boldsymbol{P}} = [0 \,;\, 0 \,;\, M_P]$ $\quad \vec{\mathrm{OP}} = [x_P ; y_P ; 0]$

Poszukujemy punktu Q=$(x,y,0)$ należącego do osi środkowej. Z twierdzenia o zmianie bieguna:

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{Q}} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{P}} + \mathbf{S} \times \vec{\mathrm{PQ}} = \mathbf{0}$$

$$[0 ; 0 ; M_P] + [S_x ; S_y ; 0] \times [x - x_P ; y - y_P ; 0] = [0,0,0]$$

$$\boxed{S_x (y - y_P) - S_y (x - x_P) + M_P = 0}$$

równanie osi środkowej

PŁASKI UKŁAD SIŁ

Dla P=O=(0,0,0) wzór przyjmuje postać:

$$S_x y - S_y x + M_O = 0$$

Dla $S_y \neq 0$

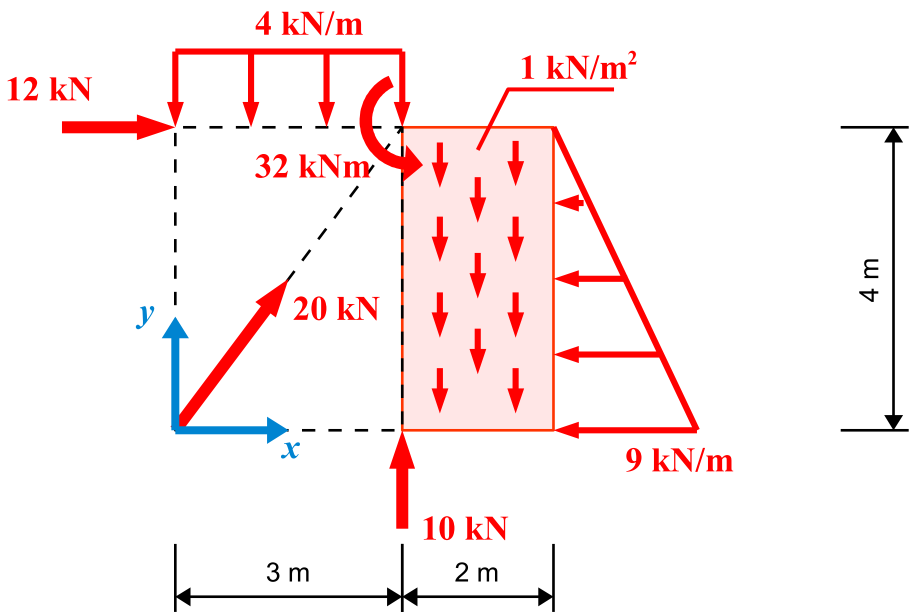
$$y = \frac{S_y}{S_x} x - \frac{M_O}{S_x}$$

Dla $S_x \neq 0$

$$x = \frac{S_x}{S_y} y + \frac{M_O}{S_y}$$

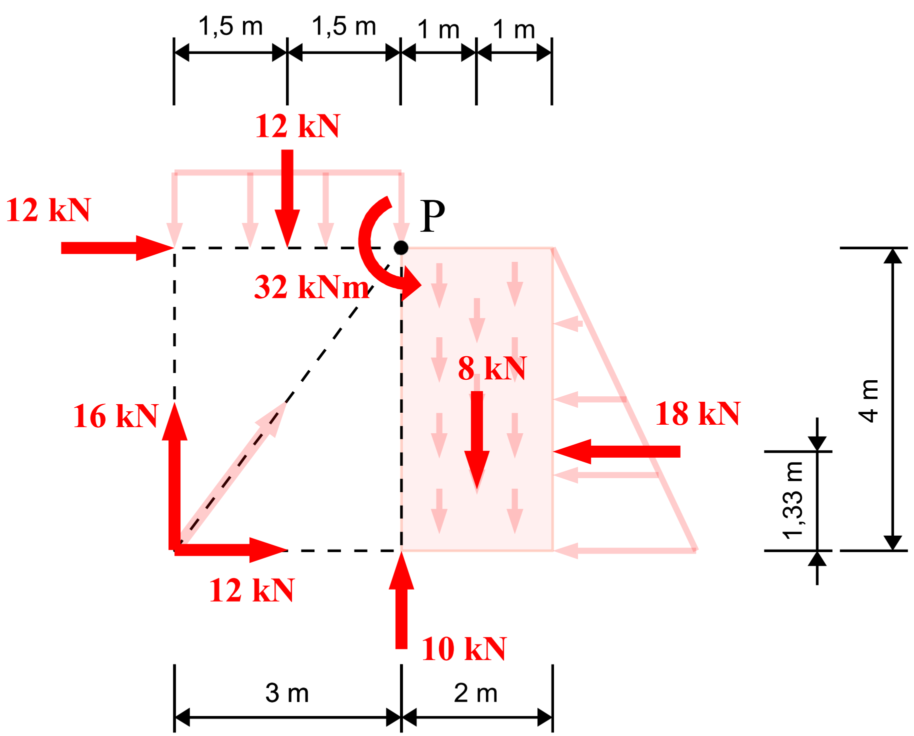
PŁASKI UKŁAD SIŁ – przykład

Zredukować podany układ sił do najprostszej postaci.



- Zastąpić obciążenia ciągłe wypadkowymi
- Rozłożyć siły ukośne na składowe – pionową i poziomę

PŁASKI UKŁAD SIŁ – przykład



$$S_x = 12 - 18 + 12 = 6 \quad [\mathrm{kN}]$$

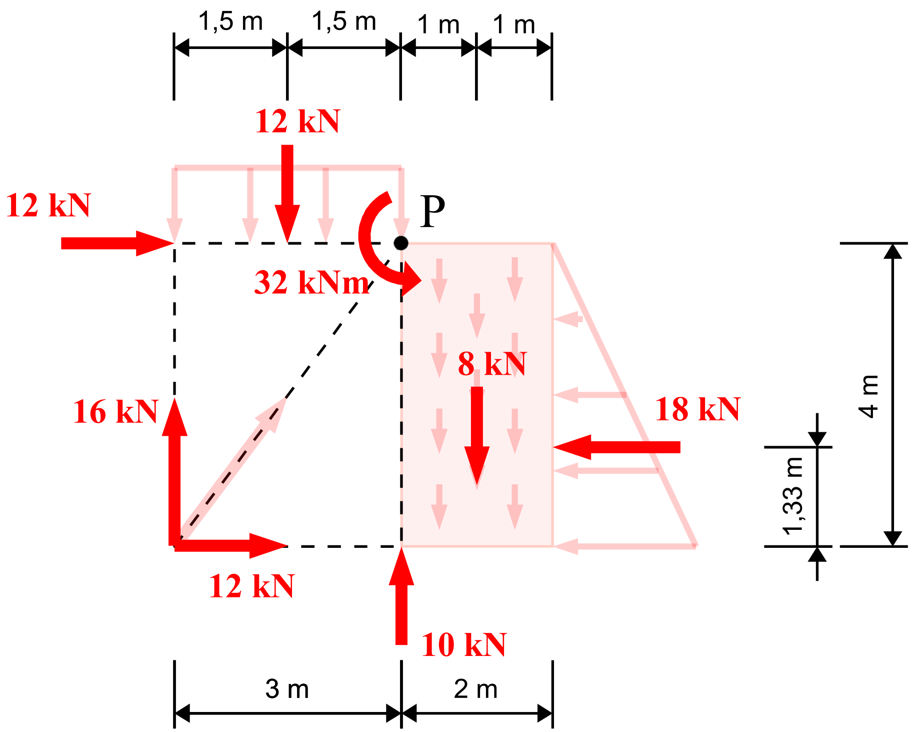
$$S_y = -12 - 8 + 16 + 10 = 6 \quad [\mathrm{kN}]$$

$$M_P = +12 \cdot \frac{3}{2} + 32 - 8 \cdot 1 - 18 \cdot \frac{8}{3} = -6 \quad [\mathrm{kNm}]$$

Podany układ sił redukuje się w punkcie P do wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [S_x, S_y, 0]$ zaczepionego w P oraz do dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_P = [0, 0, M_P]$

$$\mathbf{S} = [S_x; S_y; 0] = [6; 6; 0] \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$ **wypadkowa**

PŁASKI UKŁAD SIŁ – przykład



Poszukujemy punktu Q = (x,y,0) należącego do osi środkowej. Z twierdzenia o zmianie bieguna:

$$\mathrm{P} = (3,4,0)$$

$$\mathrm{Q} = (x,y,0)$$

$$\vec{\mathrm{PQ}} = [x-3\,;y-4\,;0]$$

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_P + \mathbf{S}\times\vec{\mathrm{PQ}} = \mathbf{0}$$

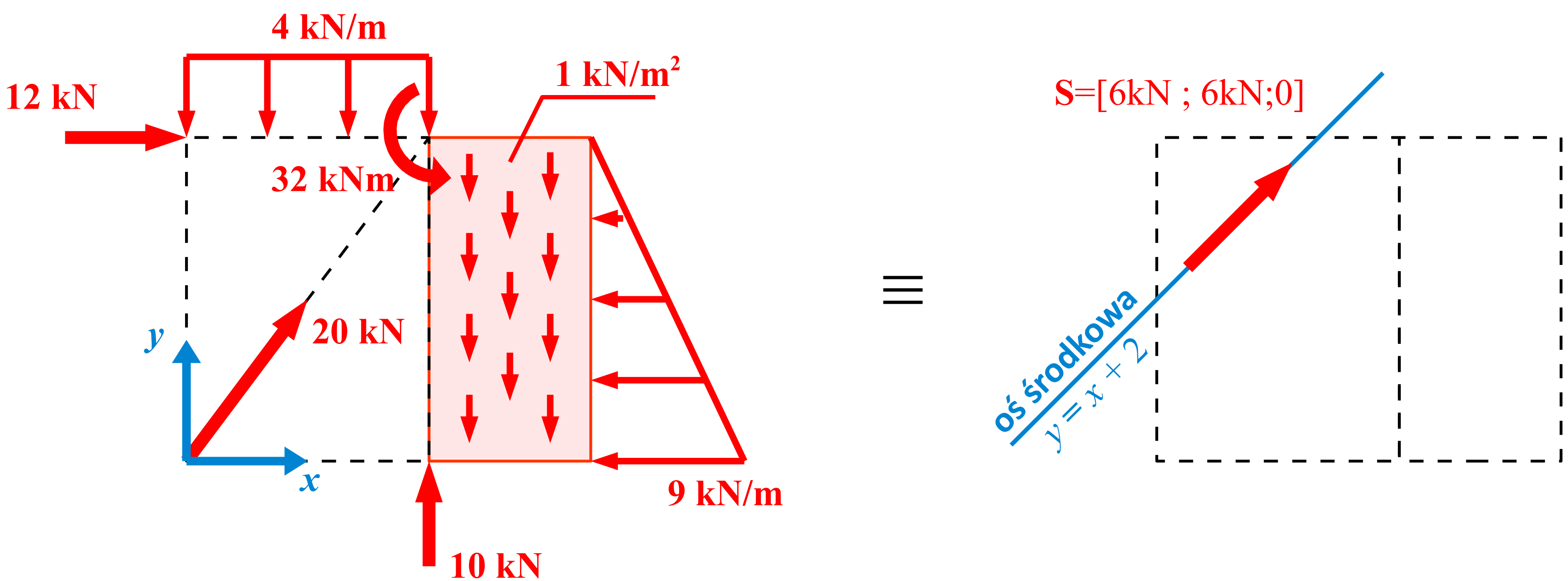
$$[0\,;0\,;-6]+[6\,;6\,;0]\times[x-3\,;y-4\,;0] = [0,0,0]$$

$$[0\,;0\,;-6]+[0\,;0\,;6(y-4)-6(x-3)] = [0,0,0]$$

$$6y-6x-12 = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y = x+2}$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wektora $\mathbf{W}=\mathbf{S}=[S_x,S_y,0]$ zaczepionego w dowolnym punkcie osi środkowej o równaniu $y = x+2$

PŁASKI UKŁAD SIŁ – przykład



Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wektora $\mathbf{W}=\mathbf{S}=[S_x,S_y,0]$ zaczepionego w dowolnym punkcie osi środkowej o równaniu $y = x+2$