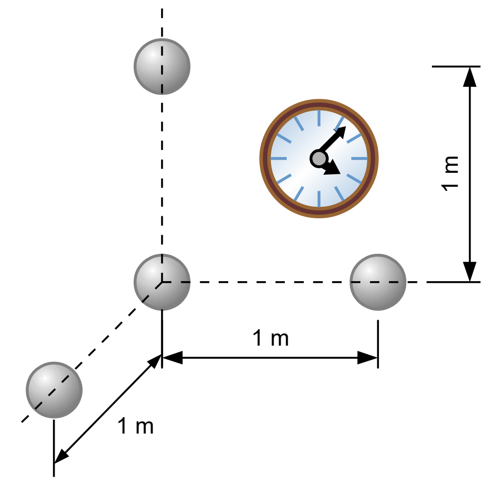
MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

WEKTOROWY OPIS RUCHU PUNKTU

KINEMATYKA



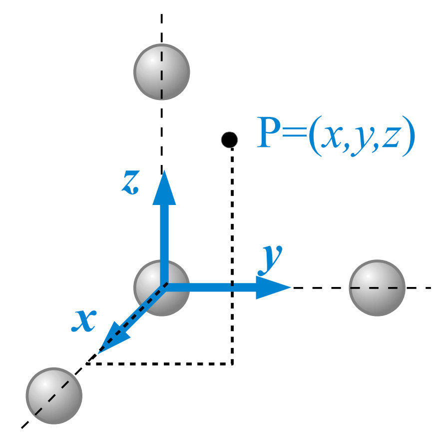
- Układ odniesienia – układ punktów w przestrzeni, który umożliwia w sposób jednoznaczny wyznaczyć:

  - położenie ciał
  - odległości w przestrzeni
  - upływ czasu

  W przestrzeni fizycznej wyznaczają go **4 niewspółpłaszczyznowe punkty**.

  - Bazowe kierunki w przestrzeni wyznaczone są przez proste łączące te punkty.

  - **Odległości między dowolnymi innymi punktami** w przestrzeni wyraża się jako **wielokrotności odległości między punktami wyznaczającymi układ odniesienia**.



- Układ współrzędnych – funkcja, jednoznaczne przyporządkowanie punktom przestrzeni ciągów liczb.

POŁOŻENIE

- Wektor wodzący punktu

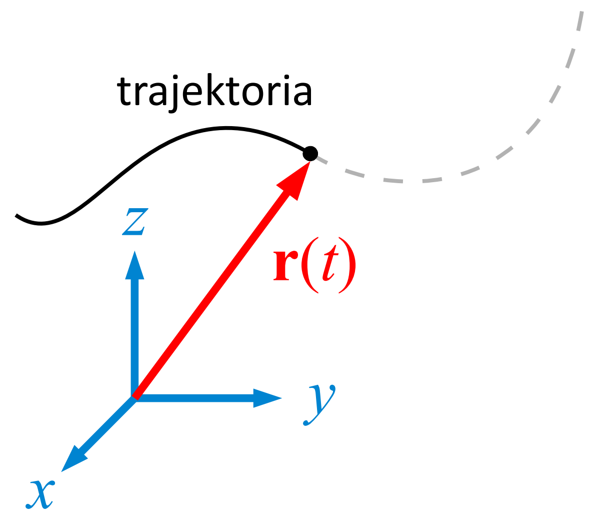
$$\mathbf{r} = [x, y, z]$$

- Ruch – zmiana położenia w czasie.

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

Trajektoria (tor) ruchu – krzywa przestrzenna jaką zakreśla punkt poruszający się w przestrzeni.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \\ z = f_z(t) \end{cases}$$

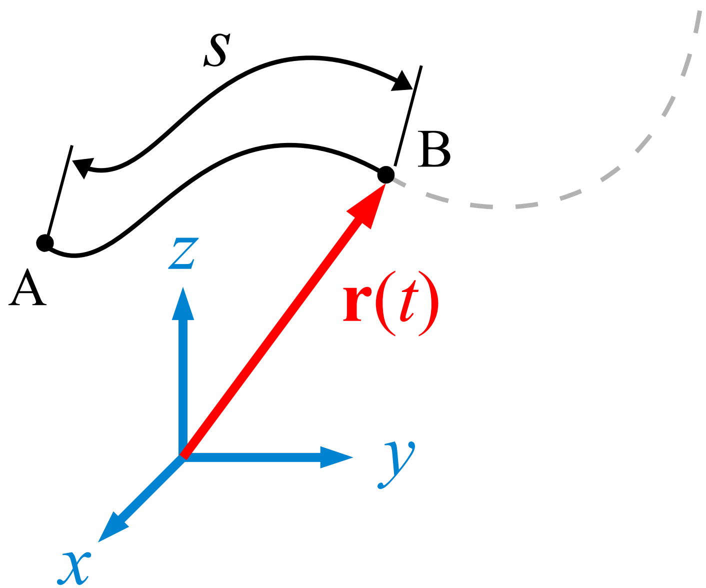


W **mechanice klasycznej** **czas** może być interpretowany jako **parametr trajektorii** rozpatrywanej jako **krzywa przestrzenna.**

DROGA

- **Droga** – długość trajektorii:

$$\mathbf{r}(\lambda) = \begin{cases} x = f_x(\lambda) \\ y = f_y(\lambda) \\ z = f_z(\lambda) \end{cases}$$



Droga przebyta między punktami A i B:

$$s_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda$$

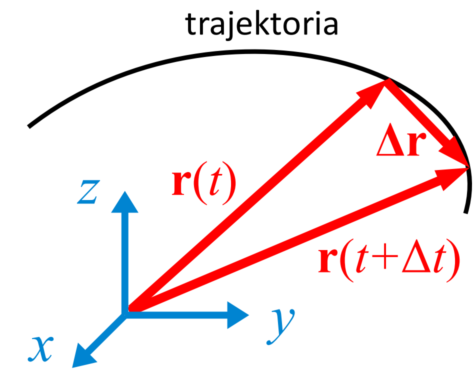
Parametr naturalny krzywej, to taki parametr s, że

$$s_{AB} = s_B - s_A$$

W przypadku **ruchu niejednostajnego czas nie jest parametrem naturalnym**.

PRĘDKOŚĆ

- **Przemieszczenie** – zmiana położenia: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- **Prędkość** – wektorowa miara **zmiany położenia w czasie**:



Prędkość średnia: $$\mathbf{v}_{śr} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

Prędkość (chwilowa): $$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}$$

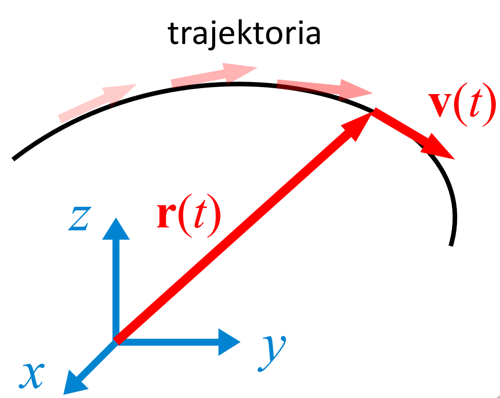
$$\mathbf{v} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t};\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right] = [\dot{x}(t)\ ;\ \dot{y}(t)\ ;\ \dot{z}(t)]$$

Szybkość: $$v = |\mathbf{v}|$$

Wektor prędkości można wyznaczyć przez wersor styczny krzywej:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\,\mathbf{T}$$

Wektor prędkości jest zatem zawsze **styczny do trajektorii**.



PRZYSPIESZENIE

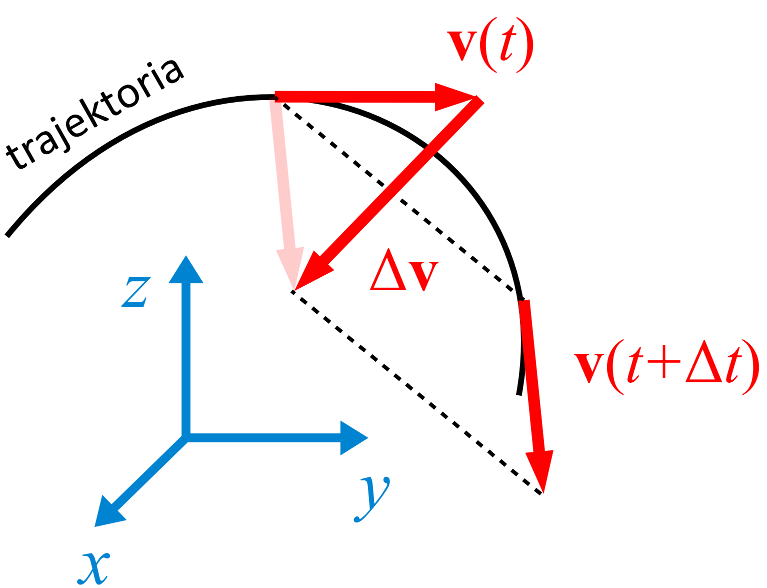
- **Przyspieszenie** – wektorowa miara **zmiany prędkości w czasie**:

Przyspieszenie średnie: $$\mathbf{a}_{śr} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Przyspieszenie (chwilowe):

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} ; \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} ; \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\right] = [\ddot{x}(t) \ ; \ \ddot{y}(t) \ ; \ \ddot{z}(t)]$$



PRZYSPIESZENIE STYCZNE I NORMALNE

Zróżniczkujmy wektor prędkości wyrażony przez wersor styczny krzywej

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{s}\,\mathbf{T}\right) = \frac{\mathrm{d}\dot{s}}{\mathrm{d}t}\mathbf{T} + \dot{s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}\,\mathbf{T} + \dot{s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}\,\mathbf{T} + \left(\dot{s}\right)^2\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$$

Korzystając ze wzorów Freneta-Serreta:

$$\boxed{\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{T} + \left(\dot{s}\right)^2 \kappa\,\mathbf{N}}$$

Składową na kierunku stycznym nazywamy przyspieszeniem stycznym:

$$\mathbf{a}_s = \ddot{s}\,\mathbf{T} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}\mathbf{v}$$

Składową na kierunku normalnym nazywamy przyspieszeniem normalnym:

$$\mathbf{a}_n = \left(\dot{s}\right)^2 \kappa\,\mathbf{N} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_s$$

Przyspieszenie nie ma składowej binormalnej.

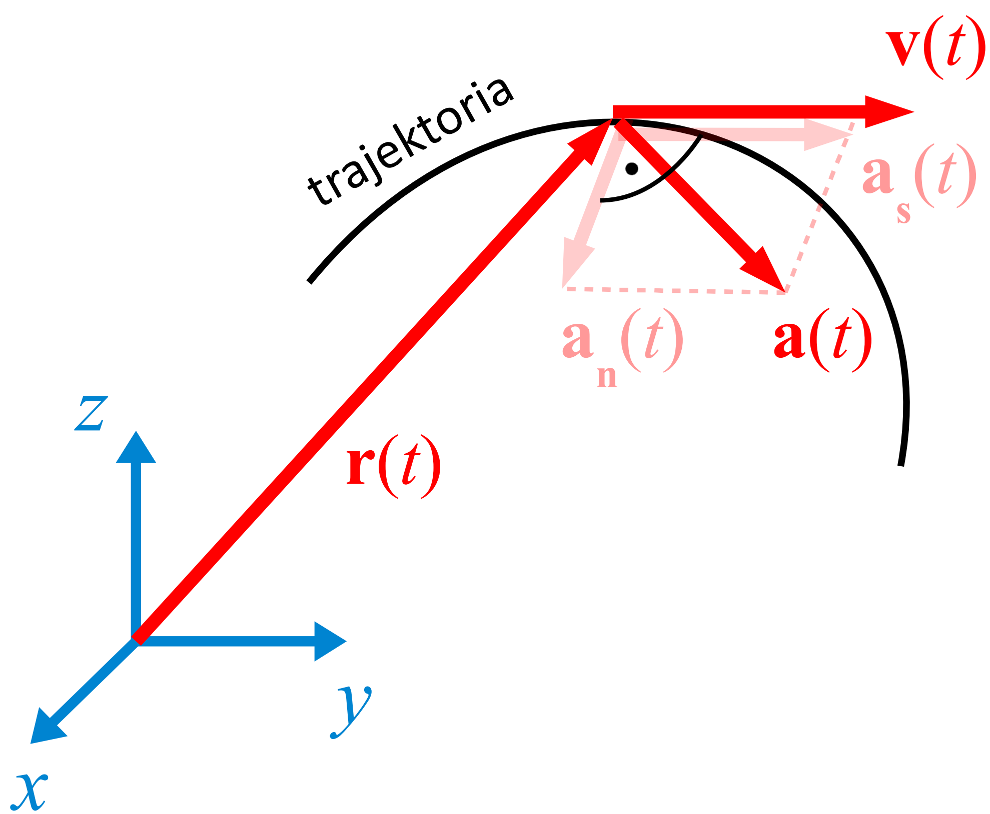
PRZYSPIESZENIE STYCZNE I NORMALNE

Przyspieszenie styczne

- jest miarą niejednostajności ruchu, tj. **zmiany szybkości** (długości wektora prędkości).

Przyspieszenie normalne

- jest miarą zakrzywienia trajektorii, tj. **zmiany kierunku wektora prędkości.**



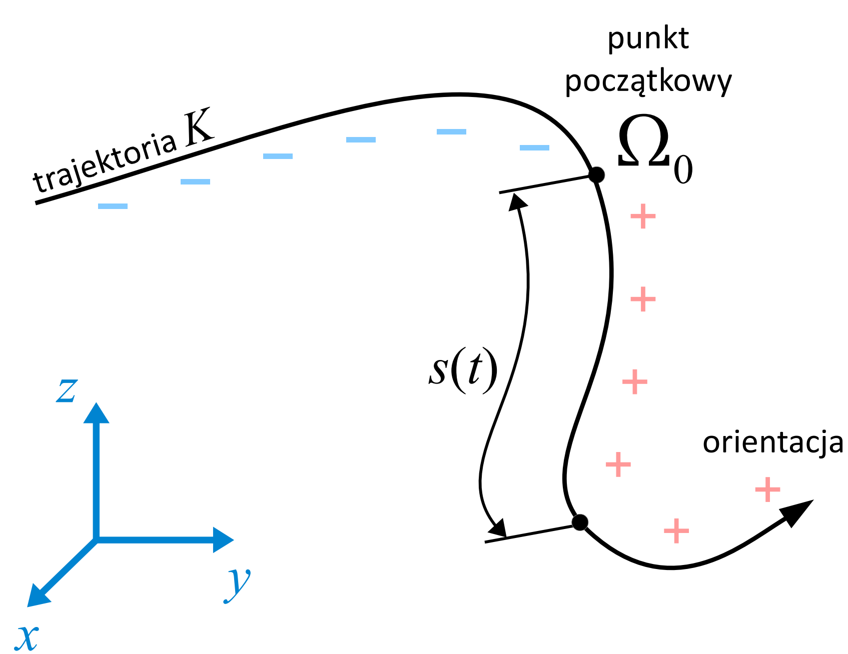
OPIS NATURALNY RUCHU PUNKTU

ELEMENTY OPISU NATURALNEGO

- **Trajektoria –** krzywa przestrzenna K dana np. równaniami parametrycznymi
- **Punkt początkowy** ruchu należący do krzywej $\Omega_0 \in K$ – położenie w chwili $\mathbf{r}_{\Omega_0} = \mathbf{r}(t=0)$
- **Funkcja ruchu** określająca miarę przebytej drogi jako funkcję czasu $s = s(t)$
- **Orientacja ruchu** określająca zwrot przemieszczenia odpowiadającego danej funkcji ruchu.

Równania parametryczne
toru ruchu (trajektorii)

$$K: \begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases}$$

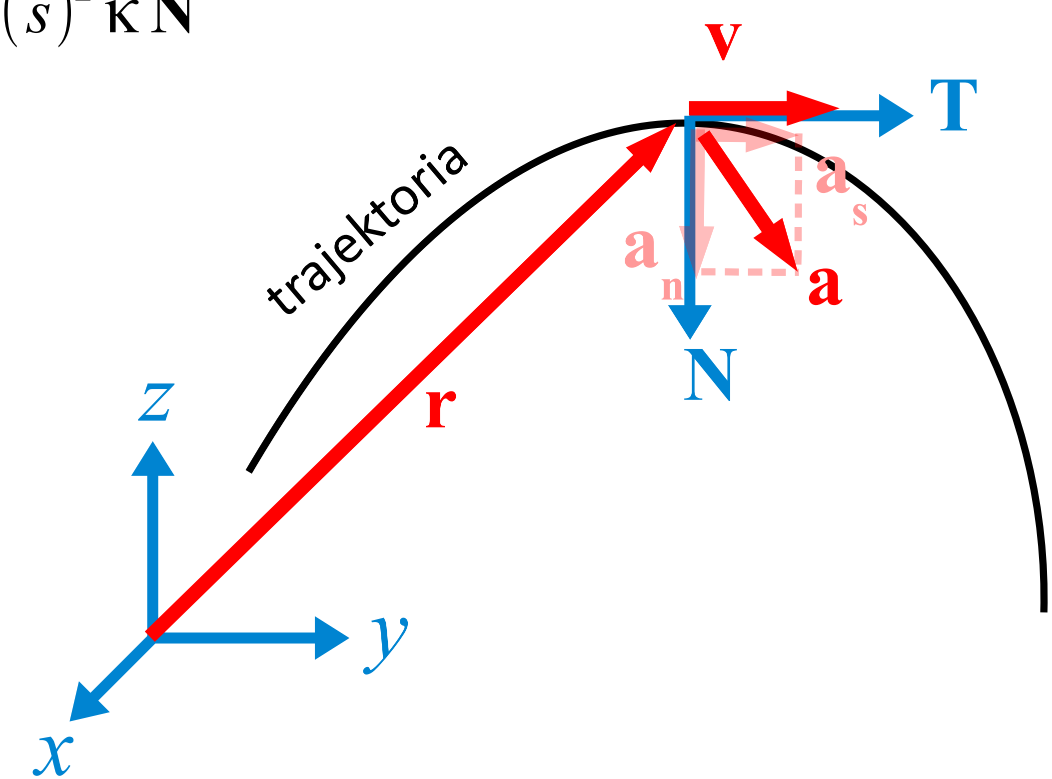


PRĘDKOŚĆ I PRZYSPIESZENIE W OPISIE NATURALNYM

Dla znanej trajektorii możemy wyznaczyć wektor styczny i normalny:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s} \qquad \mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s} \quad \text{gdzie} \quad \kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{T}}{\mathrm{d}\,s}\right|^{-1}$$

- **prędkość**: $\mathbf{v} = \dot{s}\,\mathbf{T}$
- **przyspieszenie**: $\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{T} + \left(\dot{s}\right)^2 \kappa\,\mathbf{N}$
  - **przyspieszenie styczne**: $\mathbf{a}_s = \ddot{s}\,\mathbf{T}$
  - **przyspieszenie normalne**: $\mathbf{a}_n = \left(\dot{s}\right)^2 \kappa\,\mathbf{N}$



OPIS WEKTOROWY → OPIS NATURALNY

- **Równania parametryczne trajektorii** są tożsame ze składowymi wektora położenia jako funkcji czasu. **Parametrem trajektorii jest czas**.

$$\mathbf{r}(t)=\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad K:\ \begin{cases} x=x(\lambda=t) \\ y=y(\lambda=t) \\ z=z(\lambda=t) \end{cases}$$

- **Funkcja ruchu** wyznaczana jest przez obliczenie drogi:

$$s(t)=\int_{\lambda=0}^{t}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda$$

- **Punkt początkowy** ma współrzędne równe składowym **wektora położenia w chwili**

$$\Omega_0=\left(x(t=0)\ ;\ y(t=0)\ ;\ z(t=0)\right)$$

- **Orientacja toru** określana jest na podstawie **przyrostu wektora położenia dla dodatniego przyrostu czasu**.

OPIS NATURALNY → OPIS WEKTOROWY

- Wyznaczamy drogę (parametr naturalny) jako funkcję przyjętego w równaniach toru parametru:

$$s(\lambda)=\int_{\lambda_0}^{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda$$

- Przyrównujemy obliczoną drogę do funkcji ruchu określając znak odpowiednio do orientacji toru:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\lambda>0\\ \mathbf{r}(\lambda_0+\Delta\lambda)\to\Omega_+\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega_+\in K_+ & \Rightarrow\quad s(t)=s(\lambda)\\ \Omega_+\in K_- & \Rightarrow\quad s(t)=-s(\lambda)\end{cases}$$

- Wyznaczamy zależność między parametrem krzywej a czasem:

$$s(\lambda)=\pm s(t)\qquad\Rightarrow\qquad\lambda=\lambda(t)$$

- Podstawiamy do równań parametrycznych krzywej. Równania te są składowymi wektora położenia wyrażonymi jako funkcje czasu:

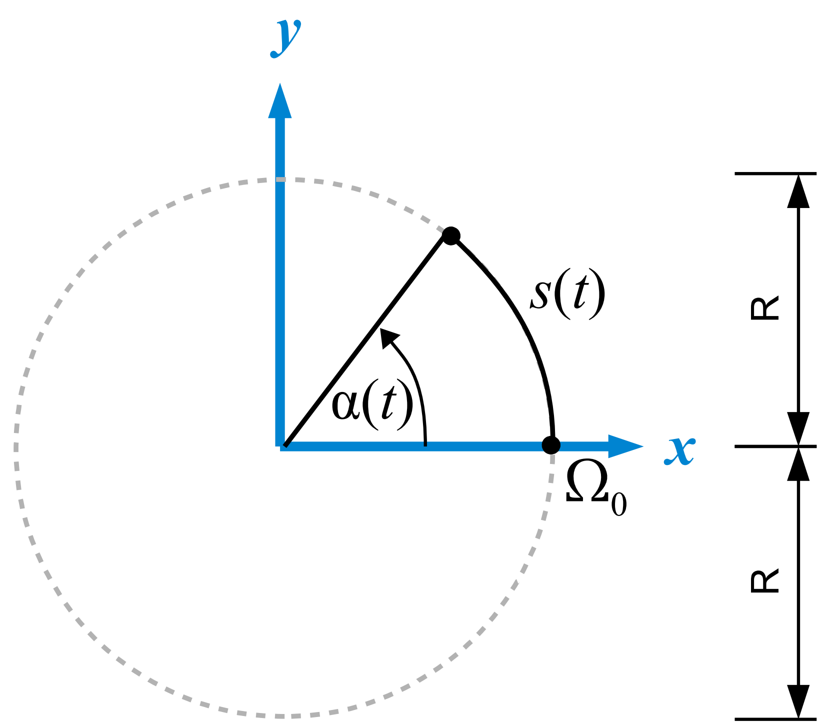
$$K:\begin{cases}x=x(\lambda(t))\\ y=y(\lambda(t))\\ z=z(\lambda(t))\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\mathbf{r}(t)=\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

RUCH PO OKRĘGU

RUCH PO OKRĘGU W OPISIE NATURALNYM

- **Trajektoria** jest **okręgiem**:

$$K: \begin{cases} x(\alpha) = R\cos\alpha \\ y(\alpha) = R\sin\alpha \\ z(\alpha) = 0 \end{cases}$$



- **Droga kątowa**: $\alpha = \alpha(t)$

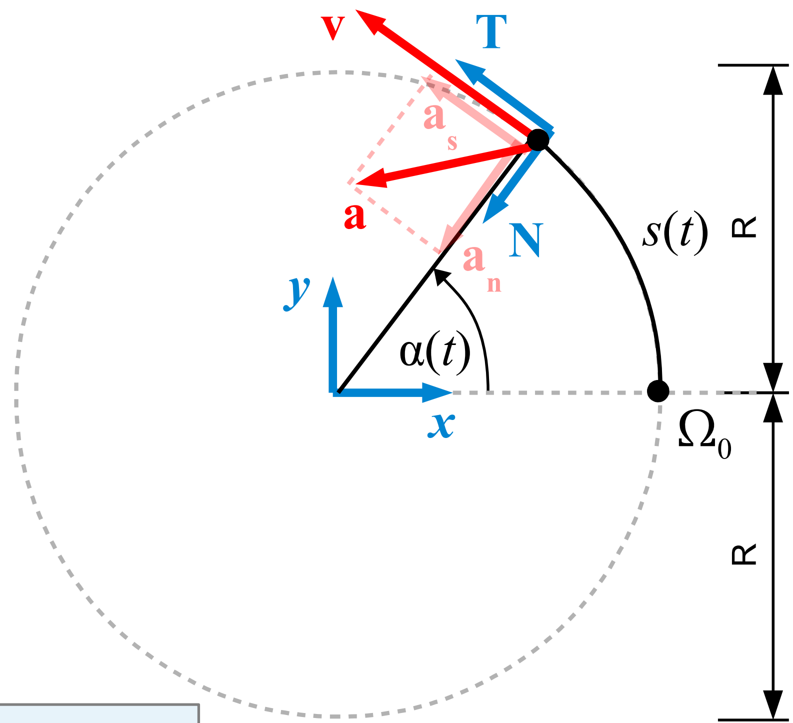
- **Droga** (łukowa):

$$s(t) = \int_0^{\alpha(t)} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\alpha(t)} \sqrt{R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = R\alpha(t)$$

$$\boxed{s(t) = R\alpha(t)}$$

RUCH PO OKRĘGU W OPISIE NATURALNYM

- **prędkość kątowa**: $$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$
- **przyspieszenie kątowe**: $$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}$$

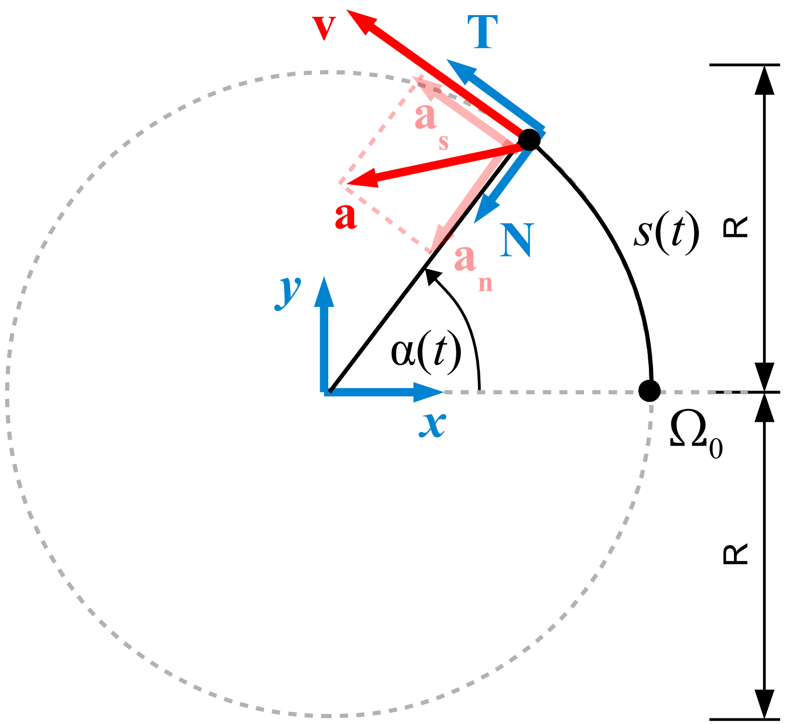


prędkość: $$\mathbf{v} = \dot{s}\,\mathbf{T} = \dot{\alpha}\,R\,\mathbf{T} = \omega\,R\,\mathbf{T}$$

przyspieszenie: $$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{T} + \kappa(\dot{s})^2\mathbf{N} = \varepsilon\,R\,\mathbf{T} + \omega^2 R\,\mathbf{N}$$

- **prędkość**: $$\dot{s} = \omega R$$
- **przyspieszenie styczne**: $$\ddot{s} = \varepsilon R$$
- **przyspieszenie normalne**: $$\kappa(\dot{s})^2 = \frac{1}{R}(\omega R)^2 = \omega^2 R$$

RUCH PO OKRĘGU W OPISIE WEKTOROWYM



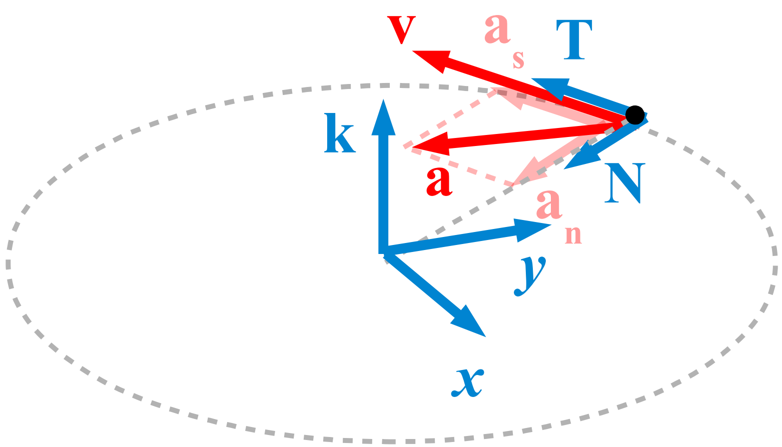
$$\mathbf{T} = [-\sin\alpha \ ; \ \cos\alpha \ ; \ 0]$$

$$\mathbf{N} = [-\cos\alpha \ ; \ -\sin\alpha \ ; \ 0]$$

- **prędkość**: $\mathbf{v} = \omega R \mathbf{T}$
- **przyspieszenie styczne**: $\mathbf{a}_s = \varepsilon R \mathbf{T}$
- **przyspieszenie normalne**: $\mathbf{a}_n = \omega^2 R \mathbf{N}$

RUCH PO OKRĘGU W OPISIE WEKTOROWYM

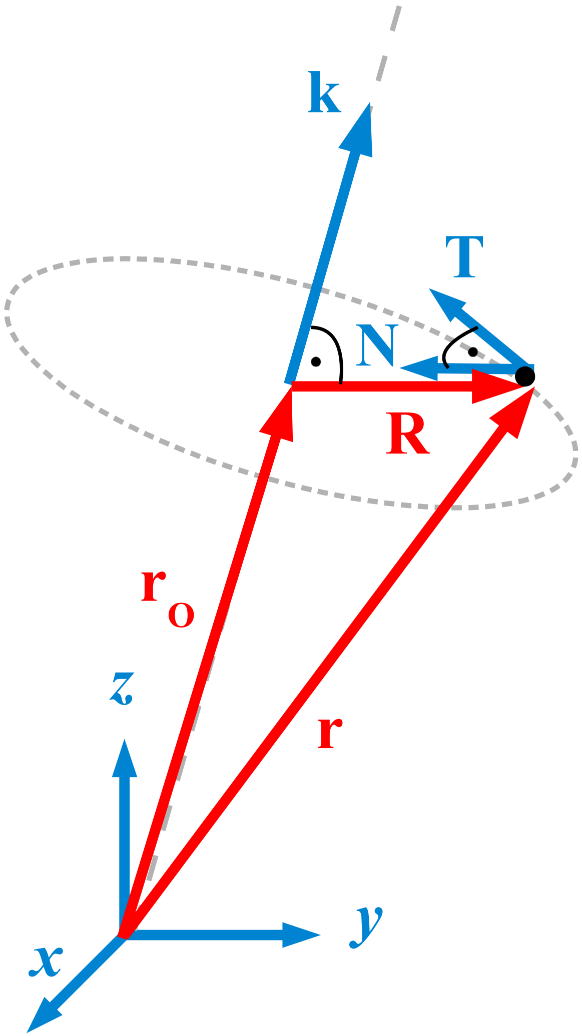
$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r} &= R[\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha\ ;\ 0]\\ \mathbf{k} &= [0\ ;\ 0\ ;\ 1]\\ \mathbf{T} &= [-\sin\alpha\ ;\ \cos\alpha\ ;\ 0]\\ \mathbf{N} &= [-\cos\alpha\ ;\ -\sin\alpha\ ;\ 0]\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}\mathbf{k}\times\mathbf{r} &= R\,\mathbf{T}\\ \mathbf{k}\times\mathbf{T} &= \mathbf{N}\end{aligned}$$



- **wektor prędkości kątowej**: $\boldsymbol{\omega} \overset{\text{df}}{=} \omega\,\mathbf{k} = [0\,;0\,;\omega]$
- **wektor przyspieszenia kątowego**: $\boldsymbol{\varepsilon} \overset{\text{df}}{=} \varepsilon\,\mathbf{k} = [0\,;0\,;\varepsilon]$

- **wektor prędkości**: $\mathbf{v} = \omega R\,\mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}$
- **wektor przyspieszenia stycznego**: $\mathbf{a}_s = \varepsilon R\,\mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a}_s = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}}$
- **wektor przyspieszenia normalnego**: $\mathbf{a}_n = \omega^2 R\,\mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}}$

RUCH PO OKRĘGU W OPISIE WEKTOROWYM



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{R} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{v} = \omega\,R\,\mathbf{T}$$

$$\mathbf{R} = -R\,\mathbf{N} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{a}_s = \varepsilon\,R\,\mathbf{T}$$

$$\mathbf{a}_n = \omega^2 R\,\mathbf{N}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}_o+\mathbf{R}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_o}_{=0}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R} = \omega\,R\,\mathbf{T} = \mathbf{v}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{a}_s &= \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}\\ \mathbf{a}_n &= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\end{aligned}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}) = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{R} + \boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{R} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} =$$
$$= \varepsilon\,R\,\mathbf{T} + \omega^2 R\,\mathbf{N} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_n$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ