MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

RUCH WZGLĘDNY

RUCH WZGLĘDNY

$\{O, x, y, z\}$ – nieruchomy układ odniesienia

$\{O', \xi, \eta, \zeta\}$ – ruchomy układ odniesienia

BEZWZGLĘDNY OPIS RUCHU

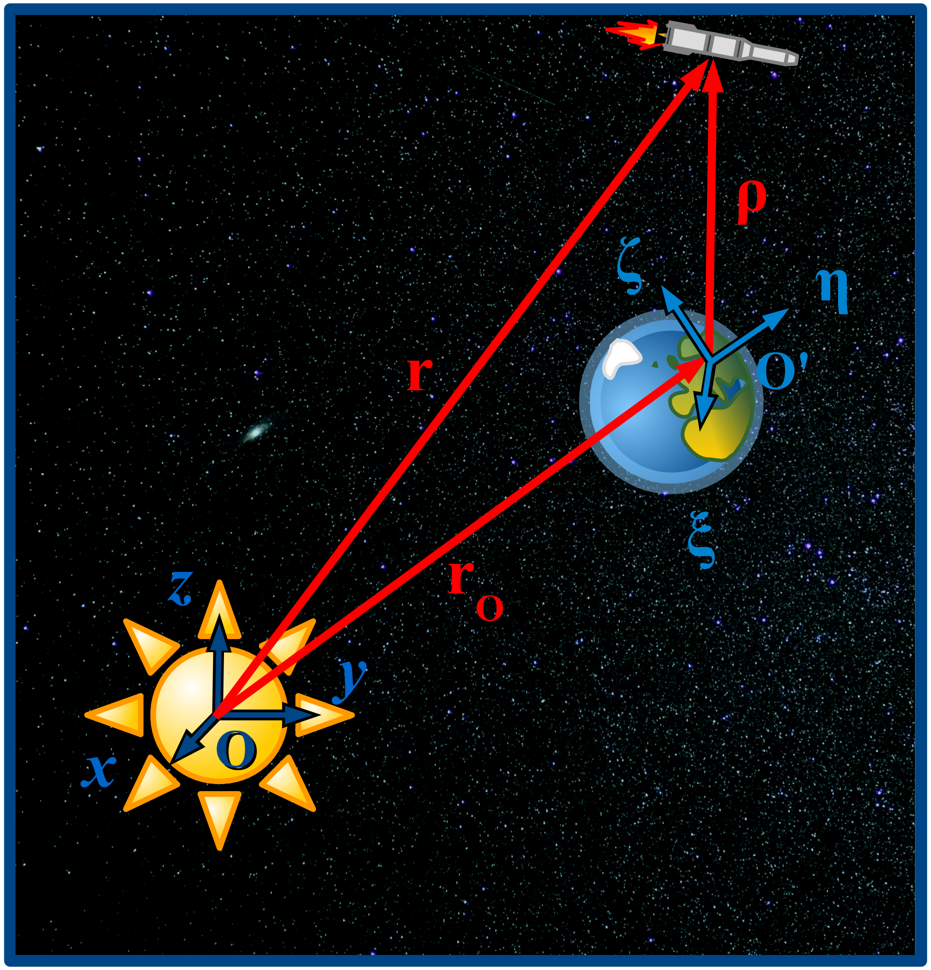
Położenie obiektu w $\{O,x,y,z\}$: $\mathbf{r} = [x, y, z]$

WZGLĘDNY OPIS RUCHU

Położenie obiektu w $\{O',\xi,\eta,\zeta\}$: $\boldsymbol{\rho} = [\xi, \eta, \zeta]$

Położenie O' w $\{O,x,y,z\}$: $\mathbf{r}_O = [x_O, y_O, z_O]$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}$$



RUCH WZGLĘDNY

$$\mathbf{r} = [x, y, z] \quad \text{w} \quad \{O, x, y, z\}$$

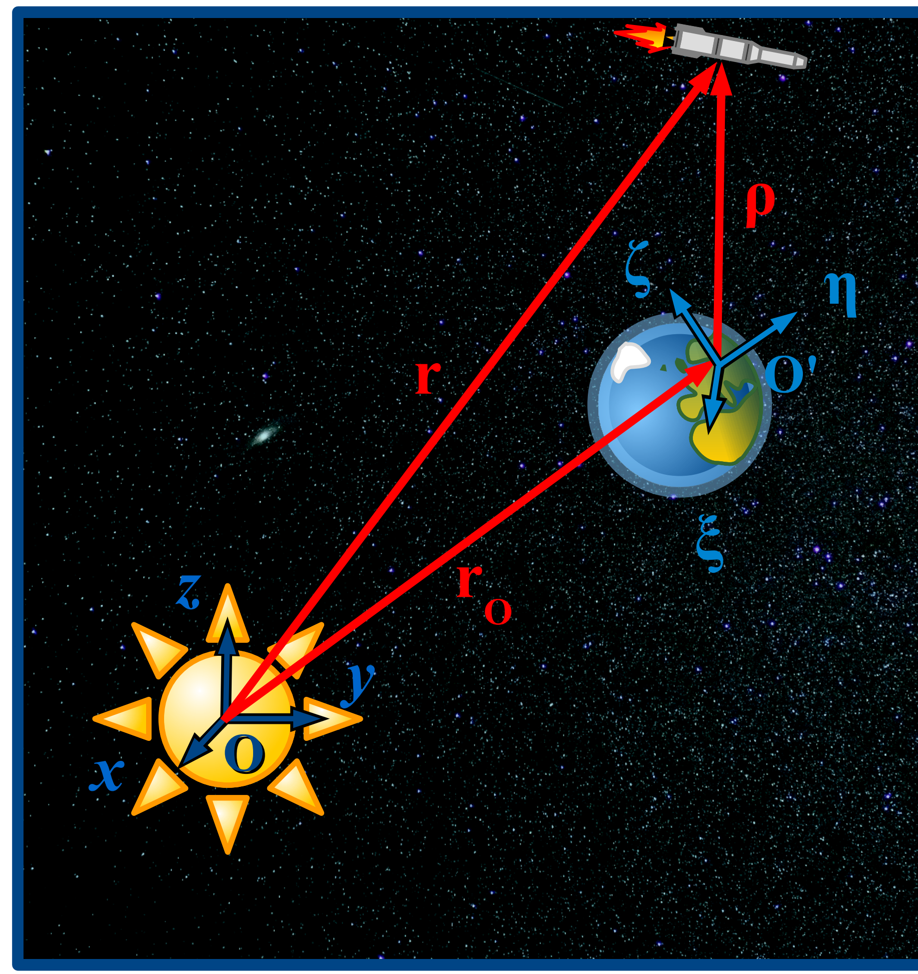
$$\mathbf{r}_O = [x_O, y_O, z_O] \quad \text{w} \quad \{O, x, y, z\}$$

$$\boldsymbol{\rho} = [\xi, \eta, \zeta] \quad \text{w} \quad \{O', \xi, \eta, \zeta\}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{\begin{cases} x = x_o + \xi \\ y = y_o + \eta \\ z = z_o + \zeta \end{cases}}$$



RUCH WZGLĘDNY

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$$

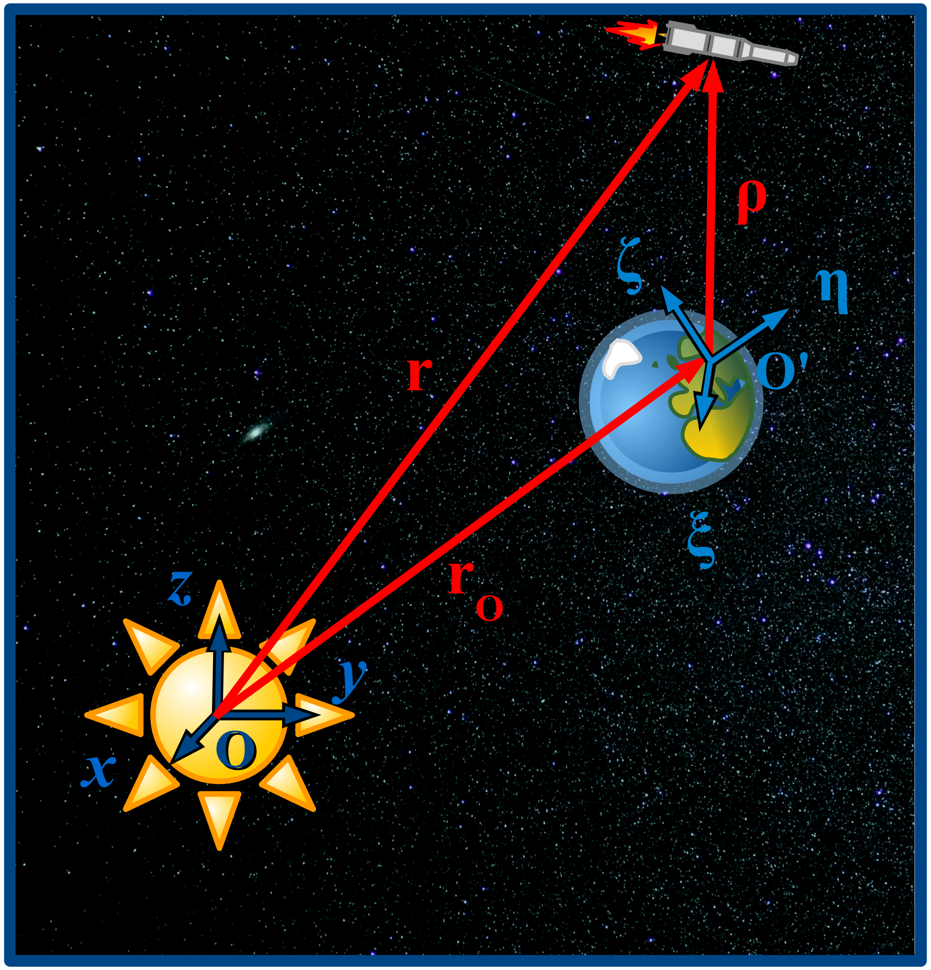
$$\mathbf{r}_O = x_O\,\mathbf{e}_x + y_O\,\mathbf{e}_y + z_O\,\mathbf{e}_z$$

$$\boldsymbol{\rho} = \xi\,\mathbf{e}_\xi + \eta\,\mathbf{e}_\eta + \zeta\,\mathbf{e}_\zeta$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}(x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z) &= \\ = (x_O\,\mathbf{e}_x + y_O\,\mathbf{e}_y + z_O\,\mathbf{e}_z) &+ (\xi\,\mathbf{e}_\xi + \eta\,\mathbf{e}_\eta + \zeta\,\mathbf{e}_\zeta)\end{aligned}$$



PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

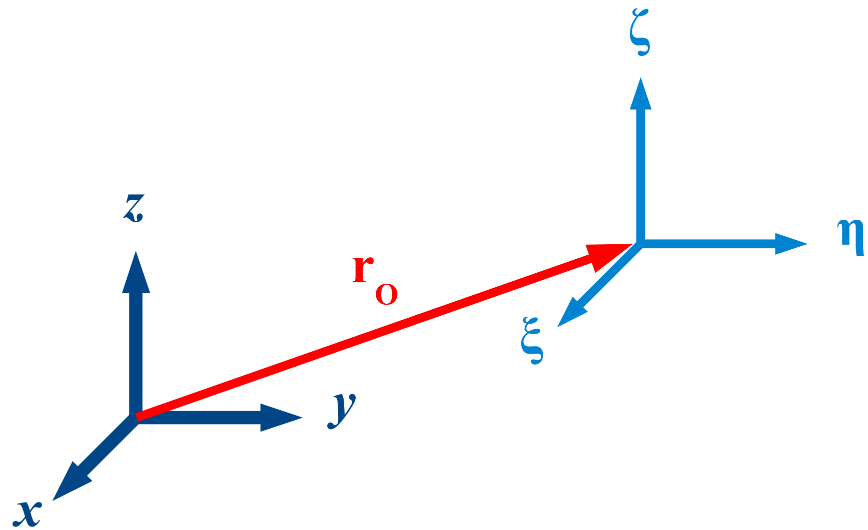
$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z = \\ &= f_\xi \mathbf{e}_\xi + f_\eta \mathbf{e}_\eta + f_\zeta \mathbf{e}_\zeta\end{aligned}$$

Jeśli $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ oraz $(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$ są bazami **ortonormalnymi**, to przekształcenie jednej w drugą jest złożeniem:

- **przesunięcia równoległego**
- **obrotu**

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE (translacja)

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_\zeta\end{aligned}\right\} \Rightarrow [f_x, f_y, f_z] = [f_\xi, f_\eta, f_\zeta]$$



PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z = \\ &= f_\xi \mathbf{e}_\xi + f_\eta \mathbf{e}_\eta + f_\zeta \mathbf{e}_\zeta \end{aligned}$$

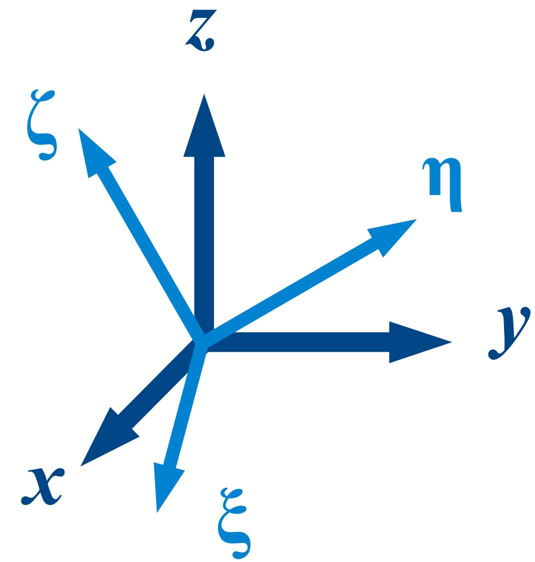
OBRÓT

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_\xi) = \overbrace{f_x(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\xi) + f_y(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_\xi) + f_z(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\xi)}^{\mathbf{f}\text{ w bazie nieruchomej}} = \overbrace{f_\xi\underbrace{(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_\xi)}_{=1} + f_\eta\underbrace{(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_\xi)}_{=0} + f_\zeta\underbrace{(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_\xi)}_{=0}}^{\mathbf{f}\text{ w bazie ruchomej}} = f_\xi$$

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_\eta) = \dots$$

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_\zeta) = \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_\xi &= (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x) f_x + (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y) f_y + (\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z) f_z \\ f_\eta &= (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x) f_x + (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y) f_y + (\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z) f_z \\ f_\zeta &= (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x) f_x + (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y) f_y + (\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z) f_z \end{aligned}}$$



PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

OBRÓT

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$[f^\xi]$ **macierz składowych w** $\{O', \xi, \eta, \zeta\}$

$[A_x^\xi]$ **macierz przejścia**

$[f^x]$ **macierz składowych w** $\{O, x, y, z\}$

$$[\mathrm{f}^\xi] = [\mathrm{A}_x^\xi] \cdot [\mathrm{f}^x]$$

PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

OBRÓT

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\xi = [1,0,0]_{\{\xi,\eta,\zeta\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_\xi = [(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x);(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y);(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z)]_{\{x,y,z\}}$$

$$\mathbf{e}_\eta = [0,1,0]_{\{\xi,\eta,\zeta\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_\eta = [(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x);(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y);(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z)]_{\{x,y,z\}}$$

$$\mathbf{e}_\zeta = [0,0,1]_{\{\xi,\eta,\zeta\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_\zeta = [(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x);(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y);(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z)]_{\{x,y,z\}}$$

PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

OBRÓT

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\xi = [1,0,0]_{\{\xi,\eta,\zeta\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_\xi = \left[(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x);(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y);(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z)\right]_{\{x,y,z\}}$$

$$\mathbf{e}_\eta = [0,1,0]_{\{\xi,\eta,\zeta\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_\eta = \left[(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x);(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y);(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z)\right]_{\{x,y,z\}}$$

$$\mathbf{e}_\zeta = [0,0,1]_{\{\xi,\eta,\zeta\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_\zeta = \left[(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x);(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y);(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z)\right]_{\{x,y,z\}}$$

i-ty wiersz macierzy przejścia to składowe **i-tego wersora nowej bazy w starej bazie**

PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

OBRÓT

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_x = [1,0,0]_{\{x,y,z\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_x = [(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x);(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x);(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x)]_{\{\xi,\eta,\zeta\}}$$

$$\mathbf{e}_y = [0,1,0]_{\{x,y,z\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_y = [(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y);(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y);(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y)]_{\{\xi,\eta,\zeta\}}$$

$$\mathbf{e}_z = [0,0,1]_{\{x,y,z\}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_z = [(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z);(\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z);(\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z)]_{\{\xi,\eta,\zeta\}}$$

i-ta kolumna macierzy przejścia to składowe **i-tego wersora starej bazy w nowej bazie**

PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

OBRÓT

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi = |\mathbf{e}_x|\,|\mathbf{e}_\xi| \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_x;\mathbf{e}_\xi) = \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_x;\mathbf{e}_\xi)$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_x;\mathbf{e}_\xi) & \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_x;\mathbf{e}_\eta) & \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_x;\mathbf{e}_\zeta) \\ \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_y;\mathbf{e}_\xi) & \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_y;\mathbf{e}_\eta) & \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_y;\mathbf{e}_\zeta) \\ \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_z;\mathbf{e}_\xi) & \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_z;\mathbf{e}_\eta) & \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_z;\mathbf{e}_\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix}$$

- wektory starej i nowej bazy są jednostkowe:

Suma kwadratów elementów w danym wierszu (kolumnie) jest równa 1.

- wektory starej bazy są parami ortogonalne:

Iloczyn skalarny dwóch różnych kolumn jest równy 0.

- wektory nowej bazy są parami ortogonalne:

Iloczyn skalarny dwóch różnych wierszy jest równy 0.

PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

OBRÓT

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) \\ (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) \\ (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} [\mathrm{f}^\xi] = [\mathrm{A}_x^\xi] \cdot [\mathrm{f}^x] \\ [\mathrm{f}^x] = [\mathrm{A}_x^\xi]^\mathrm{T} \cdot [\mathrm{f}^\xi] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{f}^\xi] = [\mathrm{A}_x^\xi][\mathrm{A}_x^\xi]^\mathrm{T} \cdot [\mathrm{f}^\xi] \quad \forall_{[\mathrm{f}^\xi]} \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{A}_x^\xi]^{-1} = [\mathrm{A}_x^\xi]^\mathrm{T}$$

$$\det[\mathrm{A}_x^\xi] = \pm 1$$

Macierz przejścia to **macierz ortogonalna**.

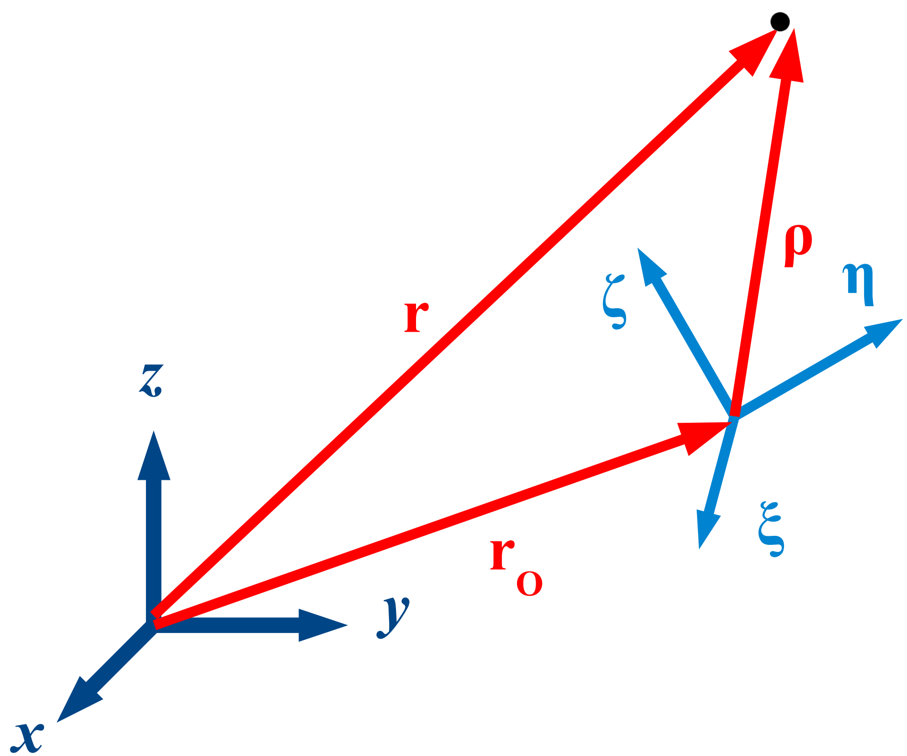
PRZEKSZTAŁCENIE SKŁADOWYCH

zapis absolutny:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\mathrm{O} + \boldsymbol{\rho}$$

zapis macierzowy:

$$[\mathrm{r}^x] = [\mathrm{r}_O{}^x] + [\mathrm{A}_x^\xi]^\mathrm{T} \cdot [\rho^\xi]$$



POCHODNA ABSOLUTNA

W układzie **nieruchomym**:

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z\right)$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{f}} = \dot{f}_x \mathbf{e}_x + \dot{f}_y \mathbf{e}_y + \dot{f}_z \mathbf{e}_z}$$

W układzie **ruchomym**:

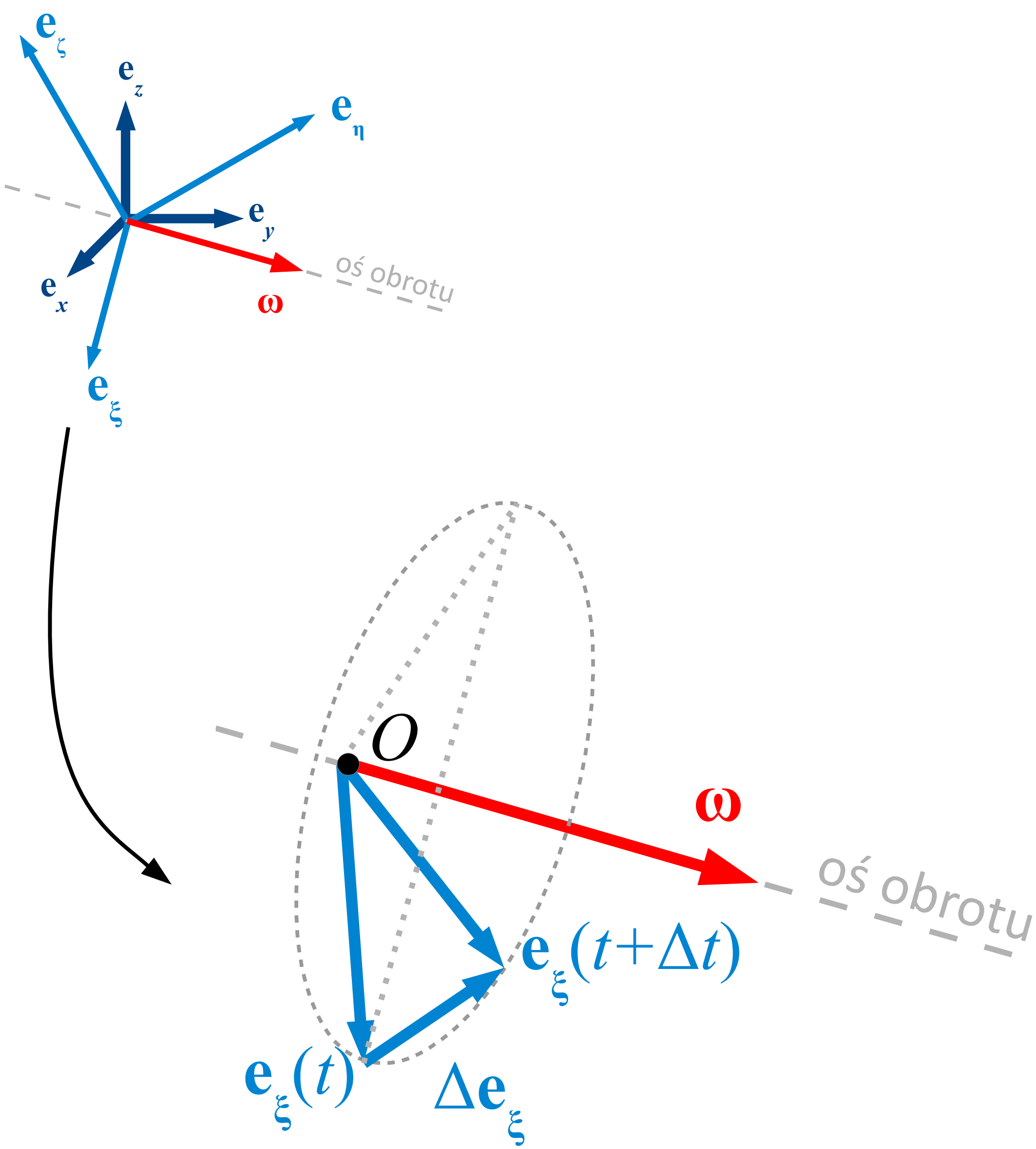
$$\mathbf{f} = f_\xi \mathbf{e}_\xi + f_\eta \mathbf{e}_\eta + f_\zeta \mathbf{e}_\zeta$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_\xi \mathbf{e}_\xi + f_\eta \mathbf{e}_\eta + f_\zeta \mathbf{e}_\zeta\right)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \underbrace{\dot{f}_\xi \mathbf{e}_\xi + \dot{f}_\eta \mathbf{e}_\eta + \dot{f}_\zeta \mathbf{e}_\zeta}_{\dot{\mathbf{f}}_w} + \underbrace{f_\xi \dot{\mathbf{e}}_\xi + f_\eta \dot{\mathbf{e}}_\eta + f_\zeta \dot{\mathbf{e}}_\zeta}_{\dot{\mathbf{f}}_u}$$

pochodna bezwzględna — **pochodna względna (lokalna)** — **pochodna unoszenia (konwekcyjna)**

POCHODNA ABSOLUTNA W OBRACAJĄCYM SIĘ UKŁADZIE ODNIESIENIA



$$\boxed{\dot{\mathbf{e}}_\xi = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_\xi}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\xi}$$

$$\dot{\mathbf{f}}_u = f_\xi \dot{\mathbf{e}}_\xi + f_\eta \dot{\mathbf{e}}_\eta + f_\zeta \dot{\mathbf{e}}_\zeta$$

$$\dot{\mathbf{f}}_u = f_\xi (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\xi) + f_\eta (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\eta) + f_\zeta (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\zeta)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_u = \boldsymbol{\omega} \times (f_\xi \mathbf{e}_\xi + f_\eta \mathbf{e}_\eta + f_\zeta \mathbf{e}_\zeta)$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{f}}_u = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{f}}_b = \dot{\mathbf{f}}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}}$$

PRĘDKOŚĆ W OBRACAJĄCYM SIĘ UKŁADZIE ODNIESIENIA

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}) = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}_O}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_u} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\rho}}_w}_{\mathbf{v}_w}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_u + \mathbf{v}_w$$

$\mathbf{v}_u = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$ **prędkość unoszenia**

$\mathbf{v}_w = \dot{\boldsymbol{\rho}}_w$ **prędkość względna**

Operator $\dot{(\ )}_w$ oznacza pochodną względną, tj. pochodną względem czasu w układzie ruchomym, obliczaną tak jakby był on nieruchomy.

PRZYSPIESZENIE W OBRACAJĄCYM SIĘ UKŁADZIE ODNIESIENIA

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\mathbf{v}_u + \mathbf{v}_w\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dot{\mathbf{r}}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_w\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dot{\mathbf{r}}_O\right) + \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}\,t}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_w\right) =$$

$$= \ddot{\mathbf{r}}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_w + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right) + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_w + \boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w =$$

$$= \underbrace{\ddot{\mathbf{r}}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{a}_u} + \underbrace{\ddot{\boldsymbol{\rho}}_w}_{\mathbf{a}_w} + \underbrace{2\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w}_{\mathbf{a}_C} =$$

$$= \mathbf{a}_u + \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_C$$

PRZYSPIESZENIE W OBRACAJĄCYM SIĘ UKŁADZIE ODNIESIENIA

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_u + \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_C$$

$$\mathbf{a}_u = \ddot{\mathbf{a}}_O + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{a}_E} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{a}_R}$$

przyspieszenie unoszenia

$\mathbf{a}_E$ – **przyspieszenie transwersalne (Eulera)**

$\mathbf{a}_R$ – **przyspieszenie odśrodkowe**

$$\mathbf{a}_w = \ddot{\boldsymbol{\rho}}_w$$

przyspieszenie względne

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w$$

przyspieszenie Coriolisa

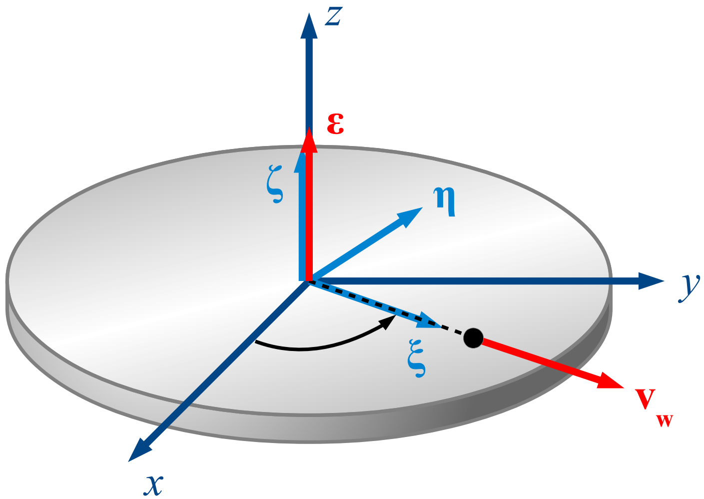
Operator $(\dot{\ })_w$ oznacza pochodną względną, tj. pochodną względem czasu w układzie ruchomym, obliczaną tak jakby był on nieruchomy.

PRZYKŁAD

Jest rok 1890. Młody inżynier-hydraulik, pan Victor Hatherley, po dramatycznych przejściach minionego roku, w wyniku których stracił kciuk, oraz po krótkiej rekonwalescencji postanowił wrócić do pracy zawodowej. Jest szary jesienny poranek. To zlecenie mało być całkiem zwyczajne...

Gdy Hatherley był jeszcze przy maszynie, karuzela zaczęła się kręcić. Z każdą chwilą coraz szybciej...

PRZYKŁAD



Dane:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [0,0,\varepsilon]_{\{x,y,z\}} \quad \varepsilon = const.$$

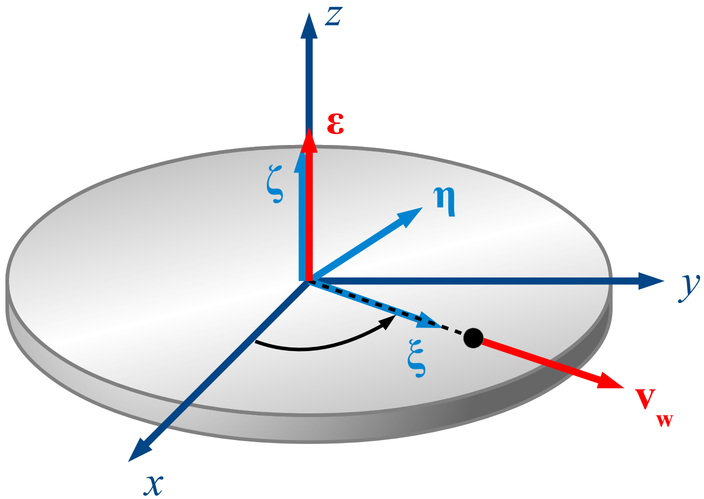
$$\mathbf{v}_w = [v,0,0]_{\{\xi,\eta,\zeta\}}, \quad v = const.$$

$$\mathbf{r}(t=0) = [0,0,0]$$

Szukane:

$$\mathbf{v}, \mathbf{a} = ?$$

PRZYKŁAD



W układzie **ruchomym**:

prędkość względna: $\mathbf{v}_w = [v, 0, 0]_{\{\xi,\eta,\zeta\}}, \quad v = const.$

położenie: $\boldsymbol{\rho} = \int_{\tau=0}^{t} \mathbf{v}_w \, d\tau = [vt, 0, 0]$

W układzie **nieruchomym**:

prędkość kątowa:

$$\omega = \int_{\tau=0}^{t} \varepsilon \, d\tau = \varepsilon t + C_1$$

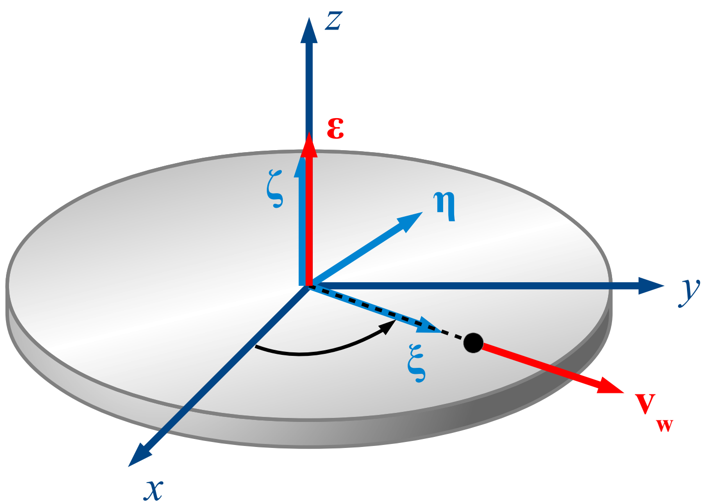
$$\omega(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \varepsilon t}$$

droga kątowa:

$$\alpha = \int_{\tau=0}^{t} \omega \, d\tau = \int_{\tau=0}^{t} \varepsilon \tau \, d\tau = \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_2$$

$$\alpha(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\varepsilon t^2}{2}}$$

PRZYKŁAD



$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{r}_O = \mathbf{0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$$

Macierz przejścia:

$$\mathbf{e}_x = [1\,;0\,;0] \qquad \mathbf{e}_\xi = [\cos\alpha\,;\sin\alpha\,;0]$$

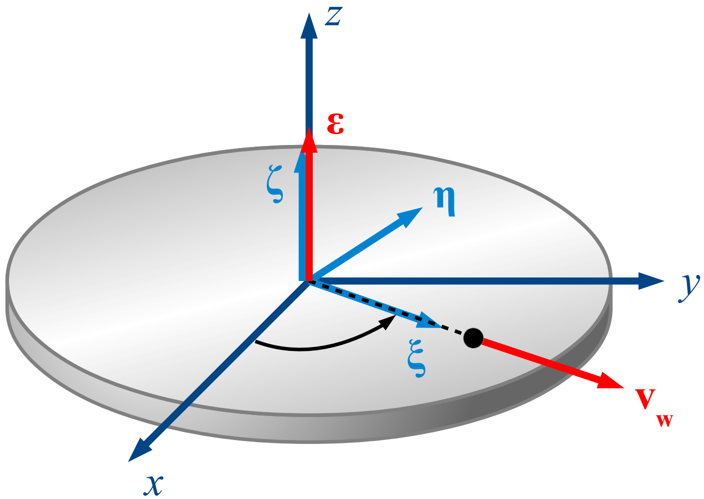
$$\mathbf{e}_y = [0\,;1\,;0] \qquad \mathbf{e}_\eta = [-\sin\alpha\,;\cos\alpha\,;0]$$

$$\mathbf{e}_z = [0\,;0\,;1] \qquad \mathbf{e}_\zeta = [0\,;0\,;1]$$

$$\Rightarrow \quad [\mathrm{A}_x^\xi] = [(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x)] = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) & \sin\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\rho^x] = [A_x^\xi]^{\mathrm{T}}[\rho^\xi]: \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} - \eta\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \xi\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + \eta\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\,t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ v\,t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD



W układzie nieruchomym:

położenie:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} v\,t\cos\dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ v\,t\sin\dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

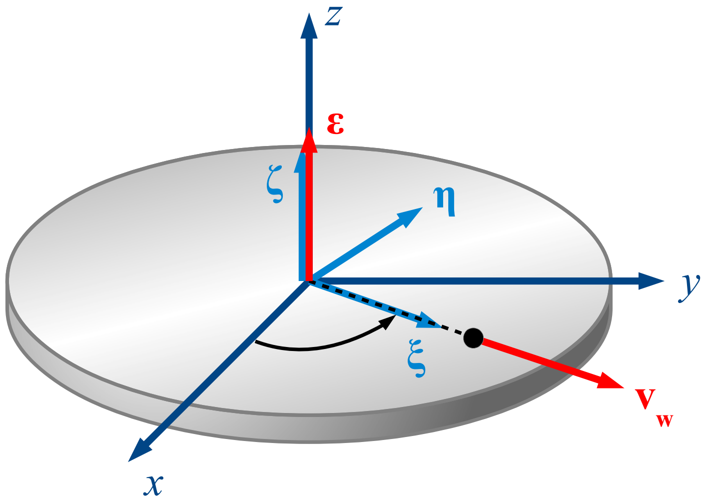
prędkość:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v\cos\dfrac{\varepsilon t^2}{2} - v\dfrac{\varepsilon t^2}{2}\sin\dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ v\sin\dfrac{\varepsilon t^2}{2} + v\dfrac{\varepsilon t^2}{2}\cos\dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

przyspieszenie:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3\,v\,\varepsilon\,t\sin\dfrac{\varepsilon t^2}{2} - v\,\varepsilon^2 t^3\cos\dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ 3\,v\,\varepsilon\,t\cos\dfrac{\varepsilon t^2}{2} - v\,\varepsilon^2 t^3\sin\dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD



W układzie ruchomym:

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_u} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\rho}}_w}_{\mathbf{v}_w}$$

$$\boldsymbol{\omega}: \quad \begin{bmatrix}\omega_\xi\\ \omega_\eta\\ \omega_\zeta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} & \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} & 0\\ -\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} & \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\ \varepsilon t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\ \varepsilon t\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_O = [0;0;0]$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} = \times\begin{matrix}[0;0;\varepsilon t]\\ [vt;0;0]\end{matrix} = [0;v\varepsilon t^2;0]$$

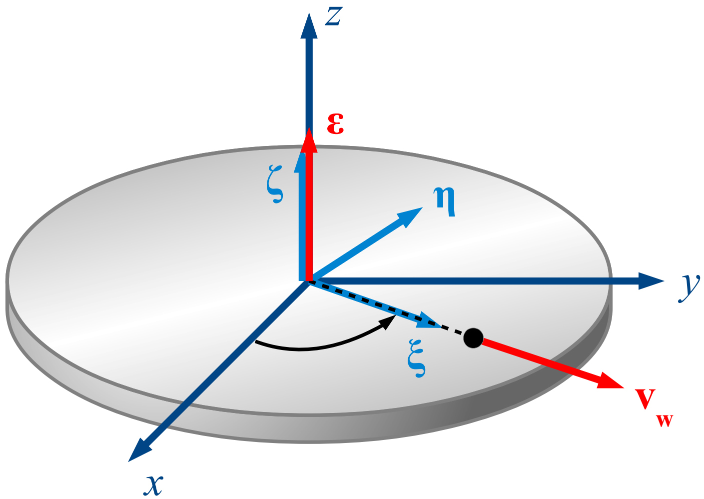
$$\mathbf{v}_w = [v;0;0]$$

prędkość bezwzględna: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_w = [0;0;0] + [0;v\varepsilon t^2;0] + [v;0;0] = [v;v\varepsilon t^2;0]$

prędkość unoszenia: $\mathbf{v}_u = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} = [0;v\varepsilon t^2;0] = [0;v\omega t;0]$

prędkość względna: $\mathbf{v}_w = \dot{\boldsymbol{\rho}}_w = [v;0;0]$

PRZYKŁAD



W układzie nieruchomym:

prędkość bezwzględna:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} & -\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} & 0 \\ \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} & \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v\varepsilon t^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} - v\varepsilon t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ v\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + v\varepsilon t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

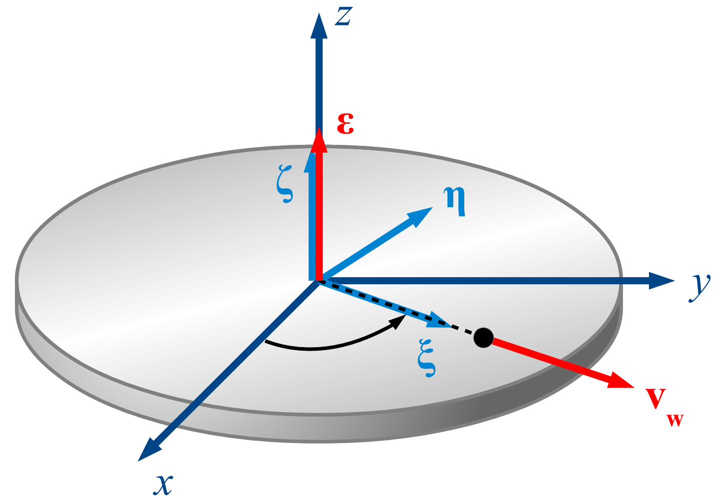
prędkość unoszenia:

$$\mathbf{v}_u = \begin{bmatrix} -v\varepsilon t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ v\varepsilon t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

prędkość względna:

$$\mathbf{v}_u = \begin{bmatrix} v\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ v\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD



W układzie **ruchomym**:

$$\mathbf{a} = \underbrace{\ddot{\mathbf{a}}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{a}_u} + \underbrace{\ddot{\boldsymbol{\rho}}_w}_{\mathbf{a}_w} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w}_{\mathbf{a}_c}$$

$$\mathbf{a}_O = [0;0;0]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [0;0;\varepsilon]$$

$$\boldsymbol{\omega} = [0;0;\varepsilon t]$$

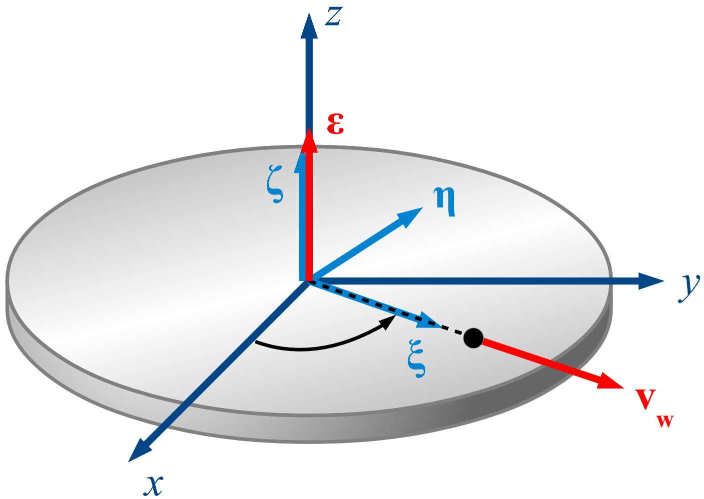
$$\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} = \times\begin{matrix}[0;0;\varepsilon]\\ [vt;0;0]\end{matrix} = [0;v\varepsilon t;0]$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) = \times\begin{matrix}[0;0;\omega]\\ [0;v\varepsilon t^2;0]\end{matrix} = [-v\varepsilon^2 t^3;0;0]$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v;0;0] = [0;0;0]$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w = \times\begin{matrix}[0;0;\varepsilon t]\\ [v;0;0]\end{matrix} = [0;v\varepsilon t;0]$$

PRZYKŁAD



W układzie ruchomym:

przyspieszenie bezwzględne:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{a}}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_w + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w =$$
$$= [-v\varepsilon^2 t^3 ; 3v\varepsilon t ; 0]$$

przyspieszenie unoszenia:

$$\mathbf{a}_u = \ddot{\mathbf{a}}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} = [-v\varepsilon^2 t^3 ; v\varepsilon t ; 0]$$

przyspieszenie względne:

$$\mathbf{a}_w = \ddot{\boldsymbol{\rho}}_w = [0 ; 0 ; 0]$$

przyspieszenie Coriolisa:

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_w = [0 ; 2v\varepsilon t ; 0]$$

PRZYKŁAD

W układzie **ruchomym**:

$$\mathbf{a} = [-v\varepsilon^2 t^3 ; 3v\varepsilon t ; 0]$$

$$[0 ; 3v\varepsilon t ; 0]$$

przyspieszenie odśrodkowe

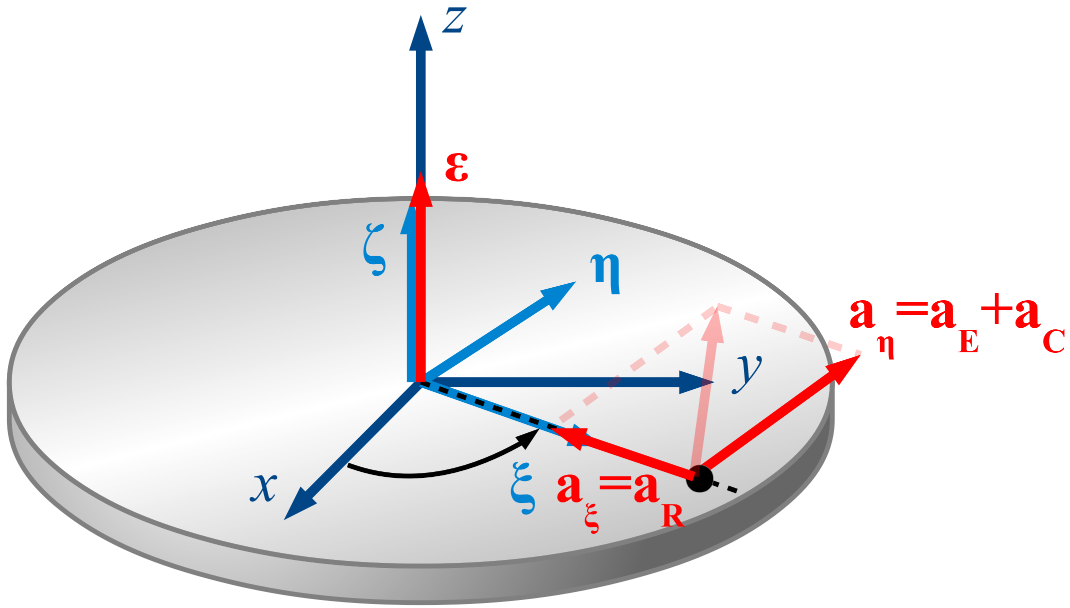
$$\mathbf{a}_R = [-v\varepsilon^2 t^3 ; 0 ; 0] = \\ = [-\rho\omega^2 ; 0 ; 0]$$

przyspieszenie Eulera

$$\mathbf{a}_E = [0 ; v\varepsilon t ; 0] = \\ = [0 ; \varepsilon\rho ; 0]$$

przyspieszenie Coriolisa

$$\mathbf{a}_C = [0 ; 2v\varepsilon t ; 0] = \\ = [0 ; 2v\omega ; 0]$$



PRZYKŁAD

W układzie **ruchomym**:

$$\mathbf{a} = [-v\varepsilon^2 t^3 ; 3v\varepsilon t ; 0]$$

$$[0 ; 3v\varepsilon t ; 0]$$

przyspieszenie odśrodkowe

$$\mathbf{a}_R = [-v\varepsilon^2 t^3 ; 0 ; 0] = \\ = [-\rho\omega^2 ; 0 ; 0]$$

- Wzdłuż kierunku odśrodkowego
- Proporcjonalne do odległości od środka obrotu i kwadratu prędkości kątowej

przyspieszenie Eulera

$$\mathbf{a}_E = [0 ; v\varepsilon t ; 0] = \\ = [0 ; \varepsilon\rho ; 0]$$

- Wzdłuż kierunku ruchu obrotowego
- Proporcjonalne do odległości od środka obrotu i przyspieszenia kątowego

przyspieszenie Coriolisa

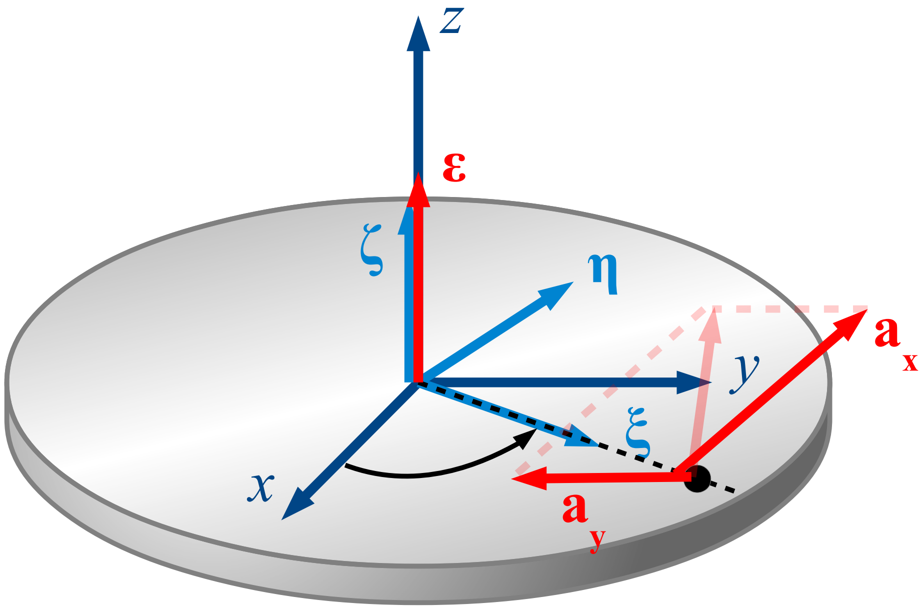
$$\mathbf{a}_C = [0 ; 2v\varepsilon t ; 0] = \\ = [0 ; 2v\omega ; 0]$$

- Wzdłuż kierunku ruchu obrotowego
- Proporcjonalne do prędkości względnej i prędkości kątowej

PRZYKŁAD

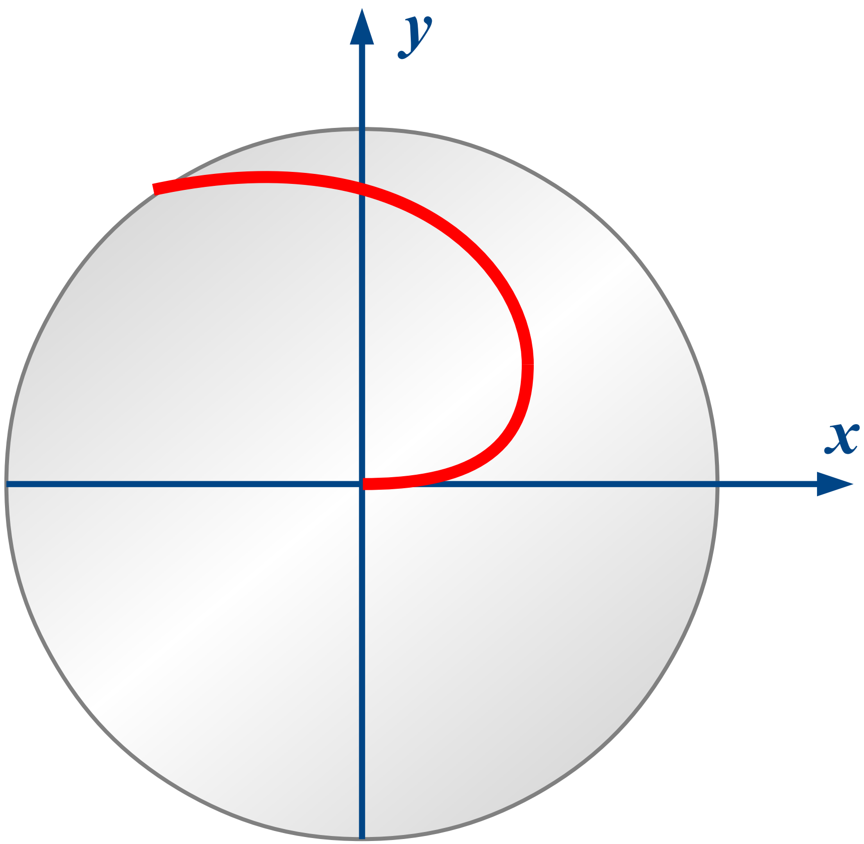
W układzie **nieruchomym**:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} & -\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} & 0 \\ \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} & \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v\varepsilon^2 t^3 \\ 3v\varepsilon t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3v\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - v\varepsilon^2 t^3\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ 3v\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} - v\varepsilon^2 t^3\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

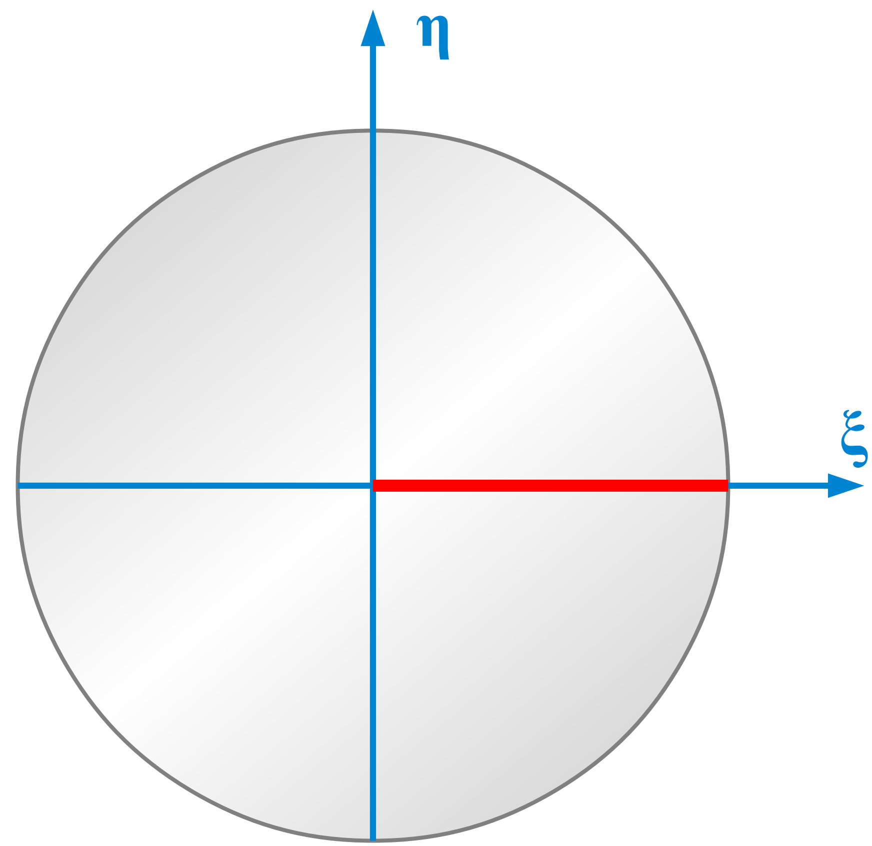


PRZYKŁAD

W układzie nieruchomym:



W układzie ruchomym:



INERCJALNE I NIEINERCJALNE UKŁADY ODNIESIENIA

Inercjalnym układem odniesienia nazywamy taki układ odniesienia, w którym obowiązuje zasada inercji, tj. **I zasada dynamiki Newtona**:

Jeśli w danym układzie odniesienia na ciało nie działa żadna siła,
to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym

Wszystkie układy inercjalne są sobie równoważne a transformacja współrzędnych punktu i czasu zdarzenia (**transformacja Galileusza**) z jednego takiego układu do dowolnego innego jest złożeniem:

- **przesunięcia równoległego w przestrzeni** $(\mathbf{r}', t') = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O, t) \qquad \dot{\mathbf{r}}_O = \mathbf{0}$
- **obrotu** $(\mathbf{r}', t') = (\mathbf{Q}\mathbf{r}, t) \qquad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}$
- **jednostajnego prostoliniowego ruchu** $(\mathbf{r}', t') = (\mathbf{r} - \mathbf{v}t, t) \qquad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$
- **przesunięcia w czasie** $(\mathbf{r}', t') = (\mathbf{r}, t - t_0)$

INERCJALNE I NIEINERCJALNE UKŁADY ODNIESIENIA

Nieinercjalnym układem odniesienia nazywamy taki układ odniesienia, w którym nie obowiązuje I zasada dynamiki Newtona, tj:

W nieinercjalnym układzie odniesienia jeśli na ciało nie działa żadna siła,
ciało porusza się z przyspieszeniem lub po torze zakrzywionym
(bez przyczyny widocznej dla obserwatora w takim układzie)

Każdy układ odniesienia który porusza się z niezerowym przyspieszeniem, tj. ze zmienną szybkością (niezerowe przyspieszenie styczne) lub po zakrzywionym torze (niezerowe przyspieszenie normalne) jest układem nieinercjalnym.

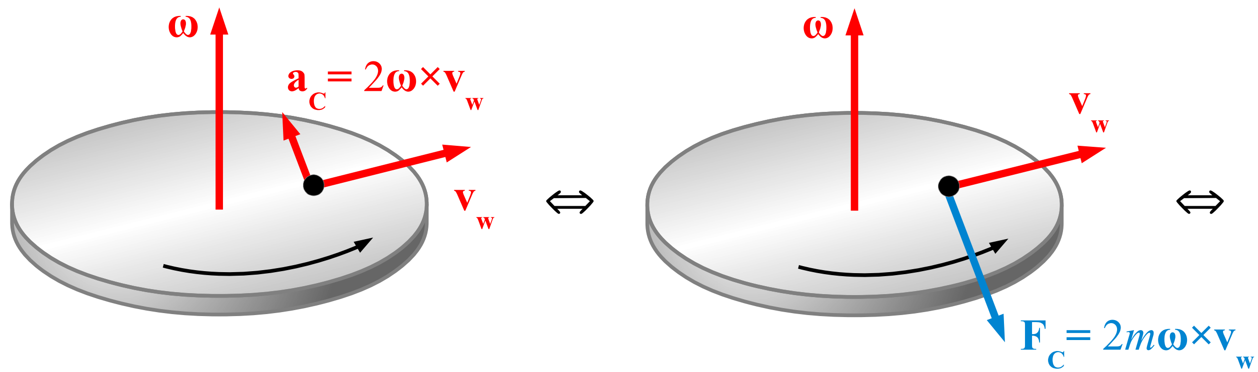
Układ nieinercjalny może być traktowany jak inercjalny jeśli wprowadzi się do niego **dodatkowe siły pozorne** (**siły bezwładności**) – wtedy **ruch jest zgodny z II zasadą dynamiki Newtona**. Np. w układzie nieinercjalnym o początku w początku pewnego układu inercjalnego i obracającego się wokół prostej przechodzącej przez ten punkt wyróżniamy następujące siły pozorne:

- **siła odśrodkowa**: $$\mathbf{F}_R = -m\,\mathbf{a}_R = -m\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$
- **transwersalna siła bezwładności Eulera**: $$\mathbf{F}_E = -m\,\mathbf{a}_E = -m\,\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho}$$
- **siła Coriolisa**: $$\mathbf{F}_c = -m\,\mathbf{a}_c = -2m\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w$$

PRZYSPIESZENIE CORIOLISA → SIŁA CORIOLISA

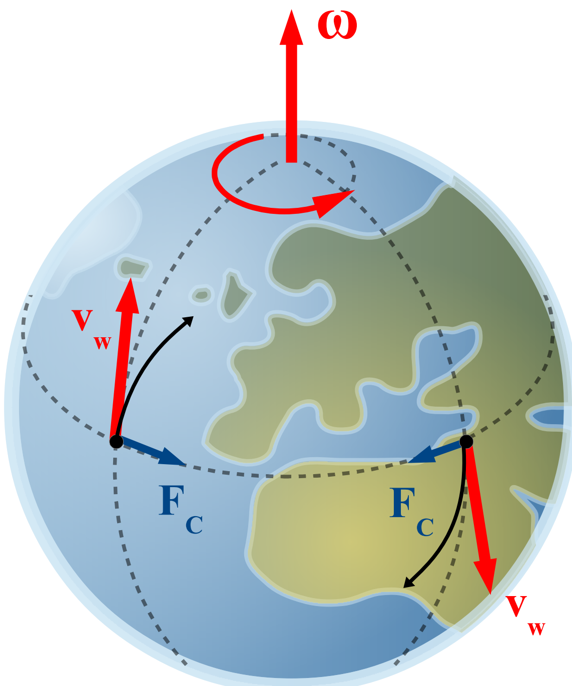
$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w \qquad \mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w$$

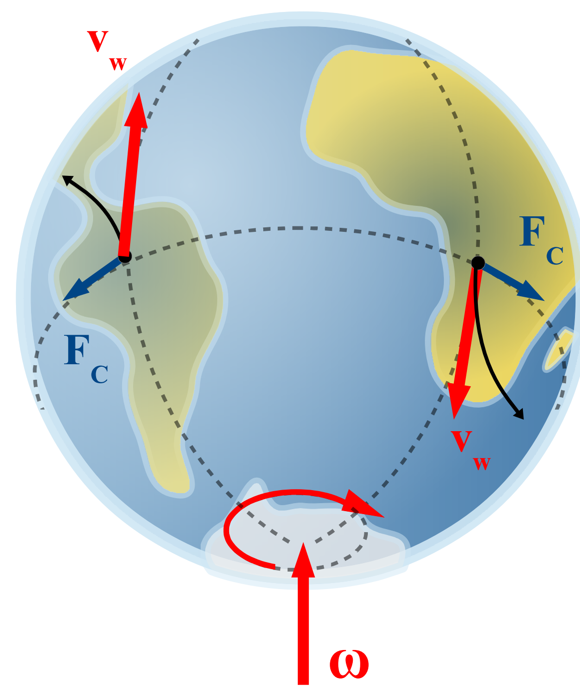
w układzie nieruchomym ⇔ w układzie ruchomym traktowanym jak układ inercjalny ⇔ w układzie ruchomym traktowanym jak układ inercjalny



Jeśli **z punktu widzenia obserwatora w** układzie ruchomym **na ciało** nie działa żadna siła na kierunku $\mathbf{F}_C$, to zaobserwuje on, że **ciało zaczyna** skręcać **tak,** jakby działała na niego siła $\mathbf{F}_C$. Dopiero po dodaniu takiej fikcyjnej siły ruch zgodny jest z II zasadą dynamiki Newtona.

Wiatry, cyklony, prądy wodne...





...na półkuli północnej skręcają w prawo

...na półkuli południowej skręcają w lewo

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ