MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

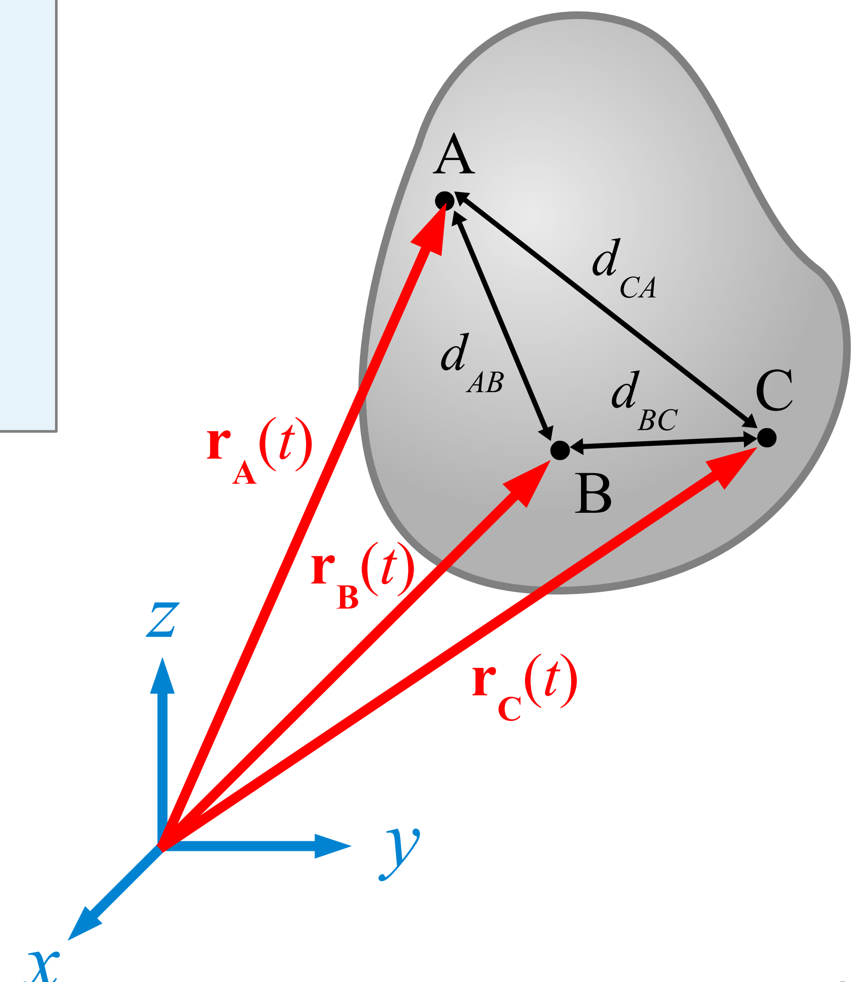
KINEMATYKA BRYŁY SZTYWNEJ

BRYŁA SZTYWNA

Bryła sztywna (ciało sztywne, nieodkształcalne) – układ punktów materialnych, taki że odległość między każdymi dwoma punktami tego układu jest stała.

$$\forall_{A,B,C} \quad \begin{aligned} d_{AB} &= |\mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t)| = const. \\ d_{BC} &= |\mathbf{r}_C(t) - \mathbf{r}_B(t)| = const. \\ d_{CA} &= |\mathbf{r}_A(t) - \mathbf{r}_C(t)| = const. \end{aligned}$$

Jest to model ciała stałego o dużej sztywności, tj. takiego, którego deformacja jest tak niewielka, że nie wpływa istotnie na ruch ciała, jako całości.



BRYŁA SZTYWNA

Dane:

$$\mathbf{r}_A = [x_A; y_A; z_A] \qquad d_{AD}$$
$$\mathbf{r}_B = [x_B; y_B; z_B] \qquad d_{BD}$$
$$\mathbf{r}_C = [x_C; y_C; z_C] \qquad d_{CD}$$

Szukane: $\mathbf{r}_D = [x_D; y_D; z_D]$

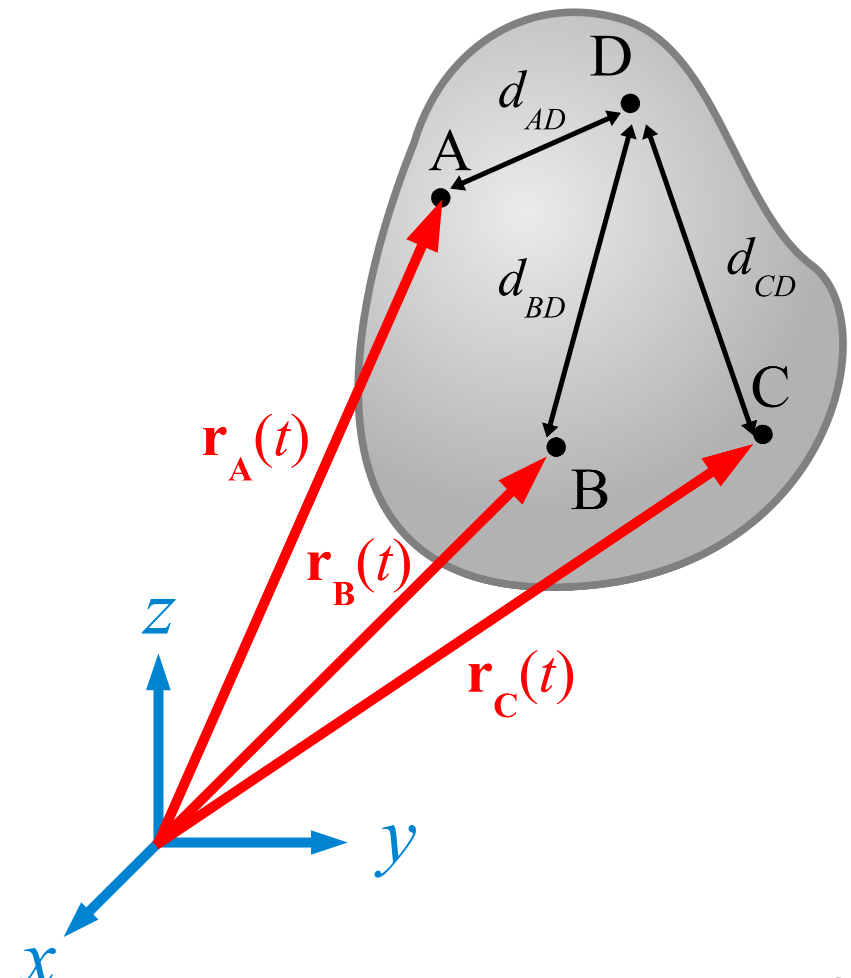
Rozwiązanie:

Zagadnienie wyznaczenia punktu przecięcia się 3 sfer:

$$\begin{cases} d_{AD}^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2 \\ d_{BD}^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2 \\ d_{CD}^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2 \end{cases}$$

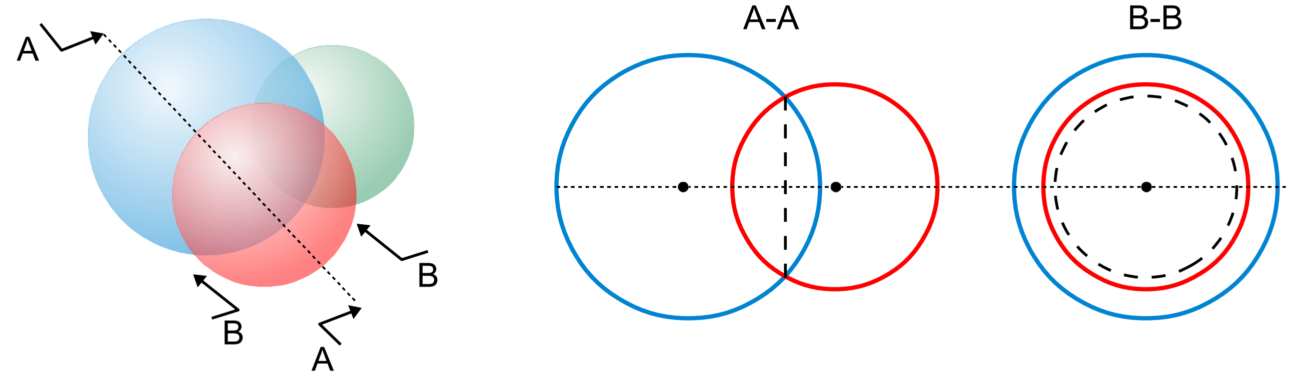
$$\downarrow$$

Układ 3 równań nieliniowych
na 3 niewiadome x_D, y_D, z_D

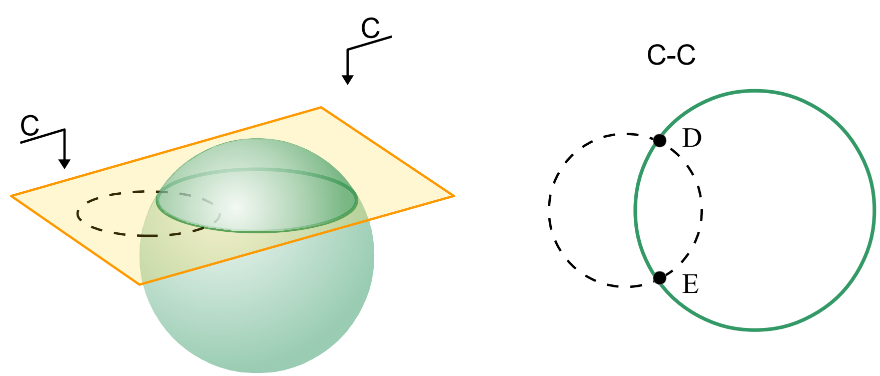


BRYŁA SZTYWNA

1) Znaleźć krawędź wspólną dwóch sfer:



2) Znaleźć punkty wspólne wyznaczonej krawędzi i trzeciej sfery:



3) Wybrać właściwy z dwóch punktów:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = [\vec{A'B'}, \vec{A'C'}, \vec{A'D'}]$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = -[\vec{A'B'}, \vec{A'C'}, \vec{A'E'}]$$

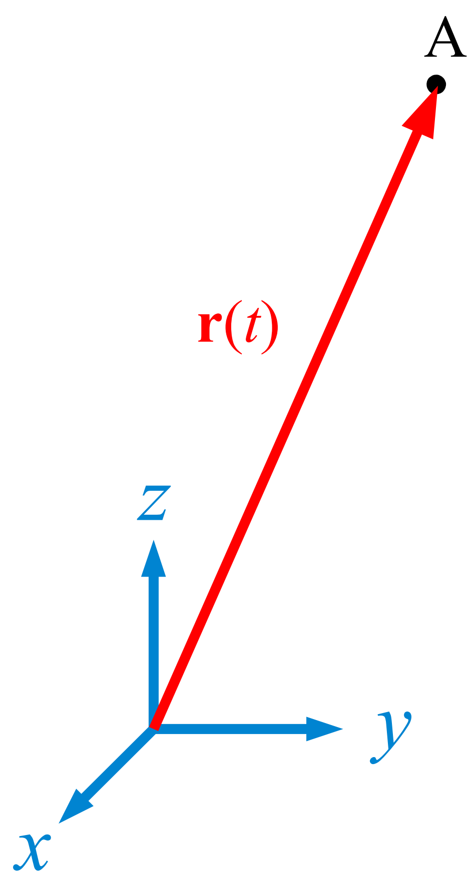
LICZBA STOPNI SWOBODY

Liczba stopni swobody (LSS, NDOF - „number of degrees of freedom”) - minimalna liczba niezależnych parametrów umożliwiających jednoznaczne wyznaczenie położenia wszystkich punktów ciała w każdej chwili ruchu.

$$\mathbf{r} = [\, x \,;\, y \,;\, z \,] \quad \Rightarrow \quad \text{3 składowe}$$

LSS punktu w przestrzeni:

$$\boxed{LSS = 3}$$



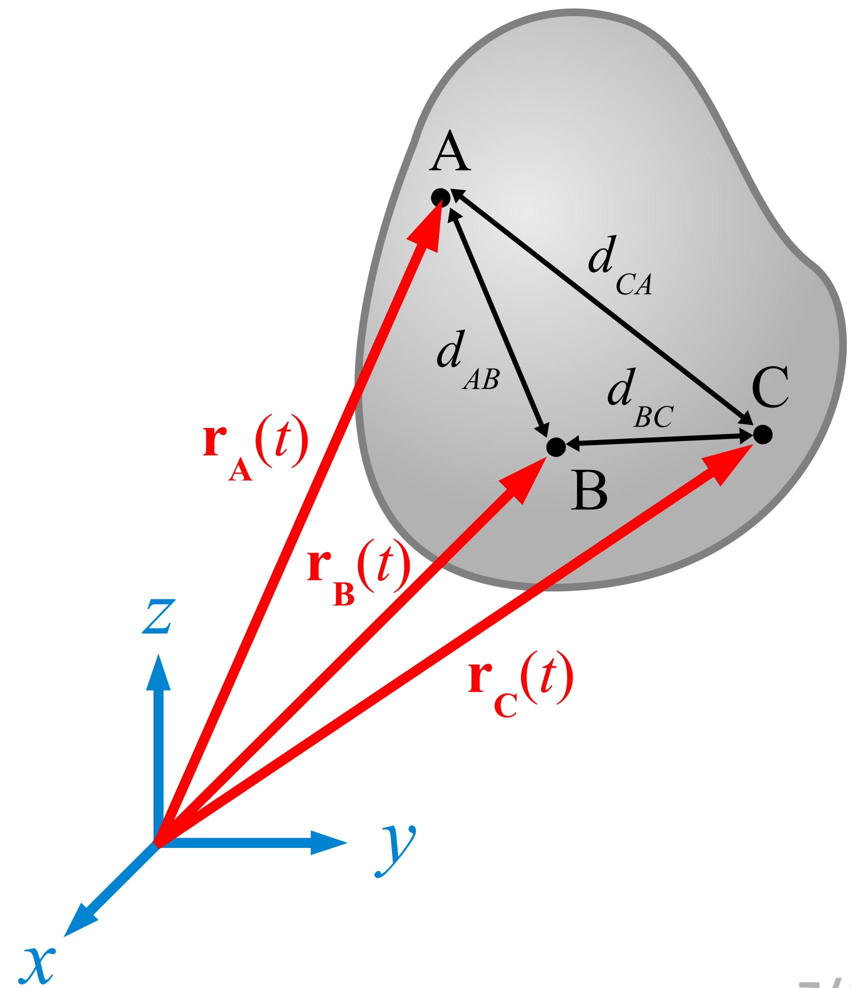
LICZBA STOPNI SWOBODY

Liczba stopni swobody (LSS, NDOF - „number of degrees of freedom”) - minimalna liczba niezależnych parametrów umożliwiających jednoznaczne wyznaczenie położenia wszystkich punktów ciała w każdej chwili ruchu.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= [x_A; y_A; z_A] \\ \mathbf{r}_B &= [x_B; y_B; z_B] \\ \mathbf{r}_C &= [x_C; y_C; z_C] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \text{9 składowych}$$

Te składowe **nie są niezależne**. Związane są zależnościami:

$$\left.\begin{aligned} d_{AB} &= |\mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t)| = const. \\ d_{BC} &= |\mathbf{r}_C(t) - \mathbf{r}_B(t)| = const. \\ d_{CA} &= |\mathbf{r}_A(t) - \mathbf{r}_C(t)| = const. \end{aligned}\right. \quad \text{3 zależności wiążące}$$



LSS bryły sztywnej w przestrzeni:

$$\boxed{LSS = 9 - 3 = 6}$$

RUCH BRYŁY SZTYWNEJ JAKO RUCH ZŁOŻONY

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_B$$

W układzie nieruchomym:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x) \\ (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y) \\ (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) & (\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_B \\ \eta_B \\ \zeta_B \end{bmatrix}$$

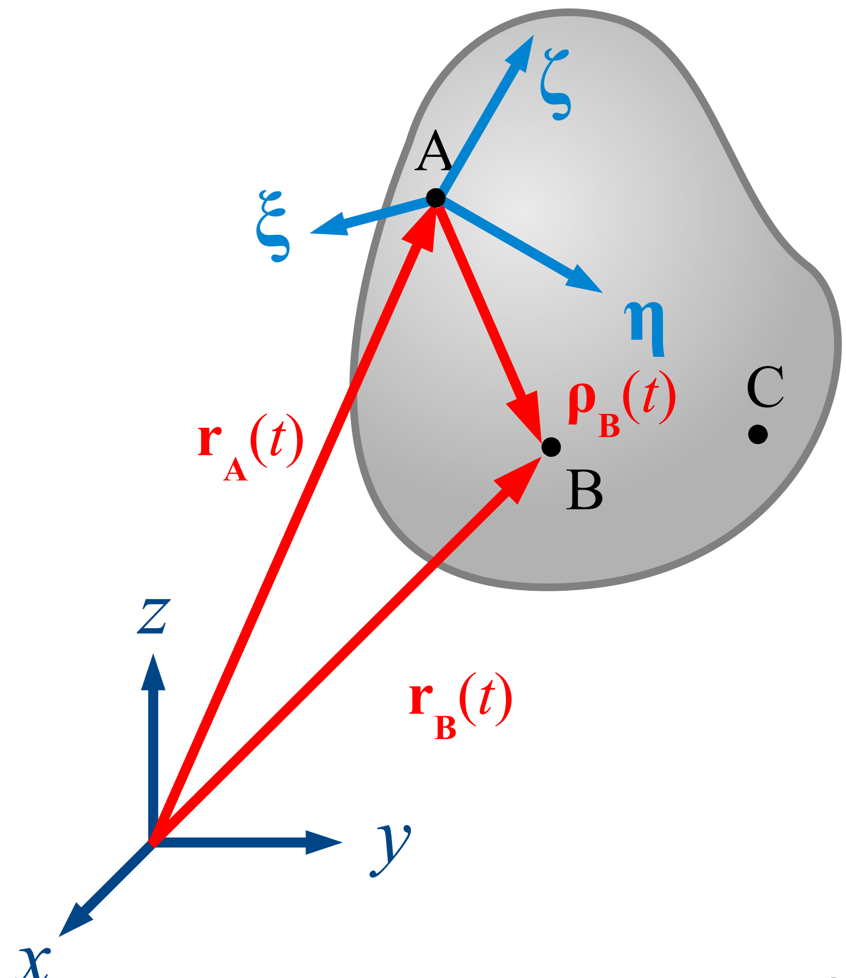
TRANSLACJA
3 niezależne składowe

Przesunięcia wzdłuż 3 prostopadłych kierunków

OBRÓT
9 składowych
-3 warunki unormowania
-3 warunki ortogonalności
= 3 niezależne składowe

Obroty wokół 3 prostopadłych kierunków

$$\boxed{LSS = 6}$$



LICZBA STOPNI SWOBODY NA PŁASZCZYŹNIE

MASA PUNKTOWA (punkt materialny):

$$\mathbf{r} = [x\,;y] \quad \Rightarrow$$ 2 składowe

LSS punktu na płaszczyźnie:

$$\boxed{LSS = 2}$$

BRYŁA SZTYWNA:

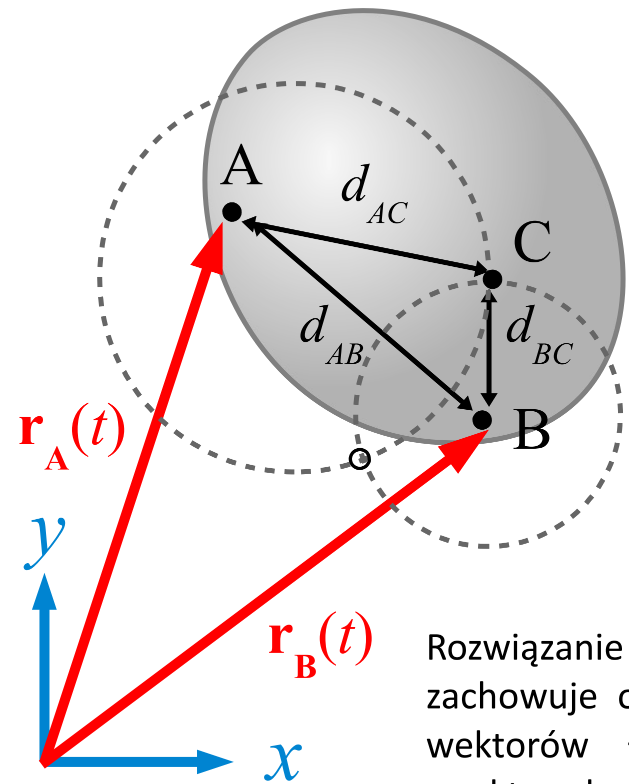
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= [x_A\,;y_A] \\ \mathbf{r}_B &= [x_B\,;y_B] \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$ 4 składowe

Te składowe nie są niezależne. Związane są zależnościami:

$$d_{AB} = |\mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t)| = const.$$ 1 zależność wiążąca

LSS bryły sztywnej na płaszczyźnie:

$$\boxed{LSS = 4 - 1 = 3}$$



Rozwiązanie właściwe zachowuje orientację wektorów łączących punkty w bryle.

RUCH BRYŁY SZTYWNEJ NA PŁASZCZYŹNIE JAKO RUCH ZŁOŻONY

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_B$$

W układzie nieruchomym:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x) \\ (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_B \\ \eta_B \end{bmatrix}$$

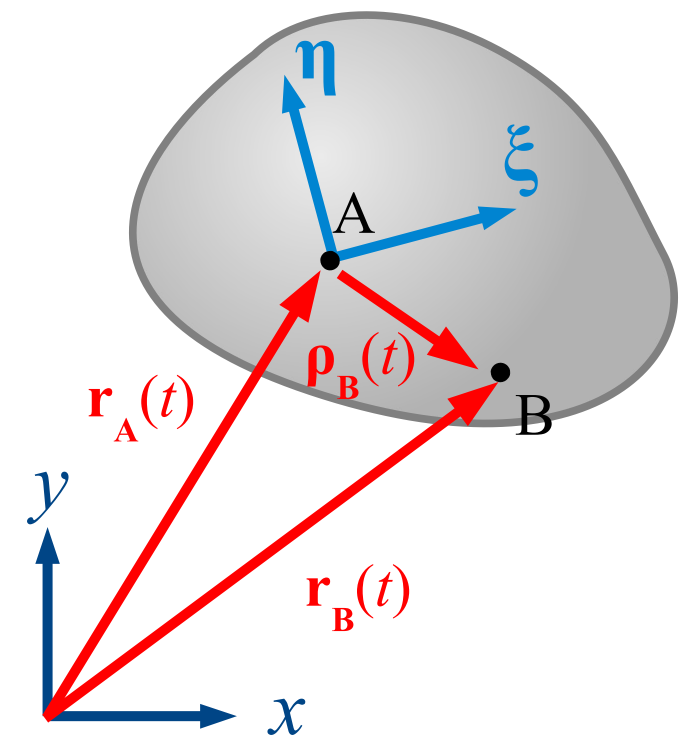
TRANSLACJA
2 niezależne składowe

Przesunięcia wzdłuż 2 prostopadłych kierunków

OBRÓT
4 składowe
-2 warunki unormowania
-1 warunek ortogonalności
= 1 niezależna składowa

Obrót wokół osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu

$$LSS = 3$$

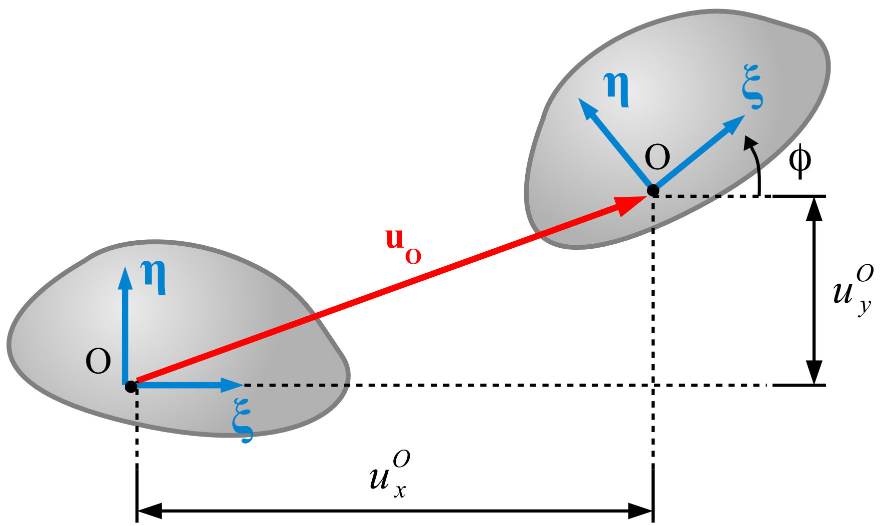


RUCH BRYŁY SZTYWNEJ NA PŁASZCZYŹNIE JAKO RUCH ZŁOŻONY

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_B$$

W układzie **nieruchomym**:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x^O \\ u_y^O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$



$$\left\{ u_x^O, u_y^O, \phi \right\} \quad \Rightarrow \quad LSS = 3$$

Ruch płaski:

- **Przemieszczenie poziome** u_x^O
- **Przemieszczenie pionowe** u_y^O
- **obrót** ϕ

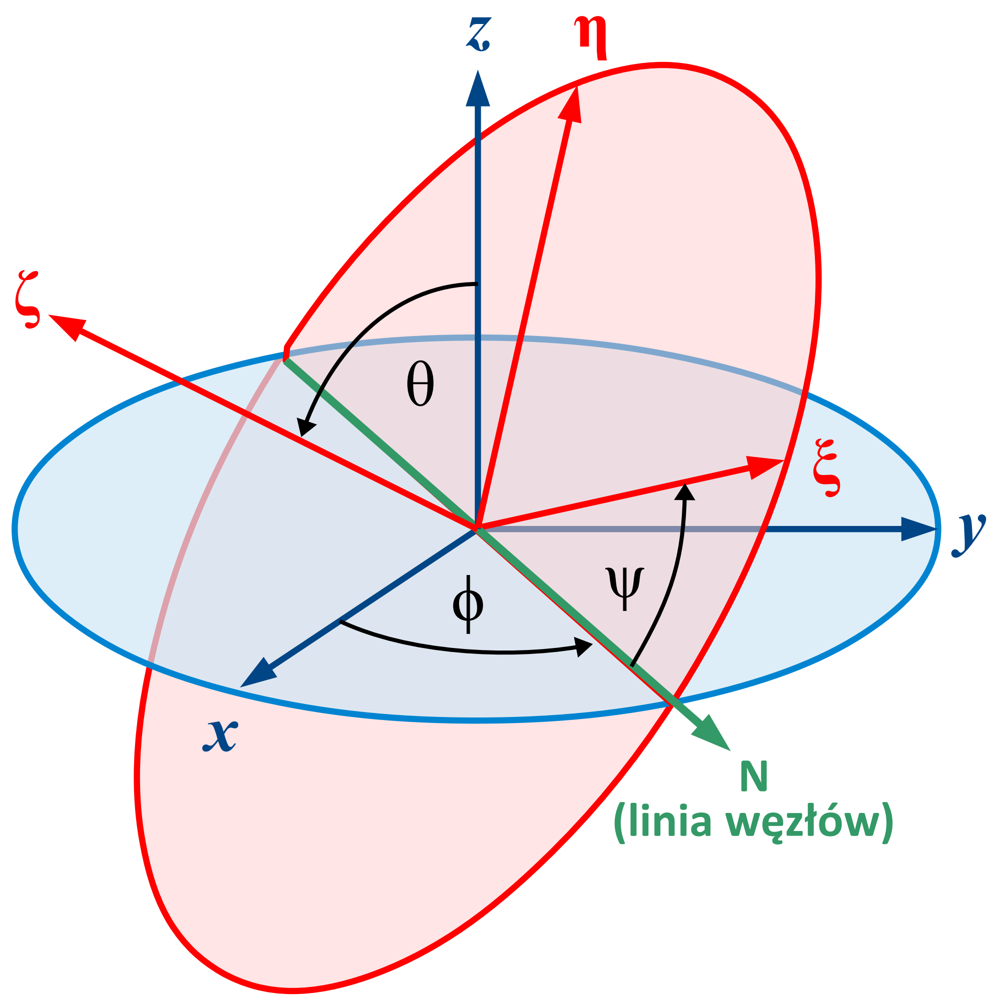
KĄTY EULERA

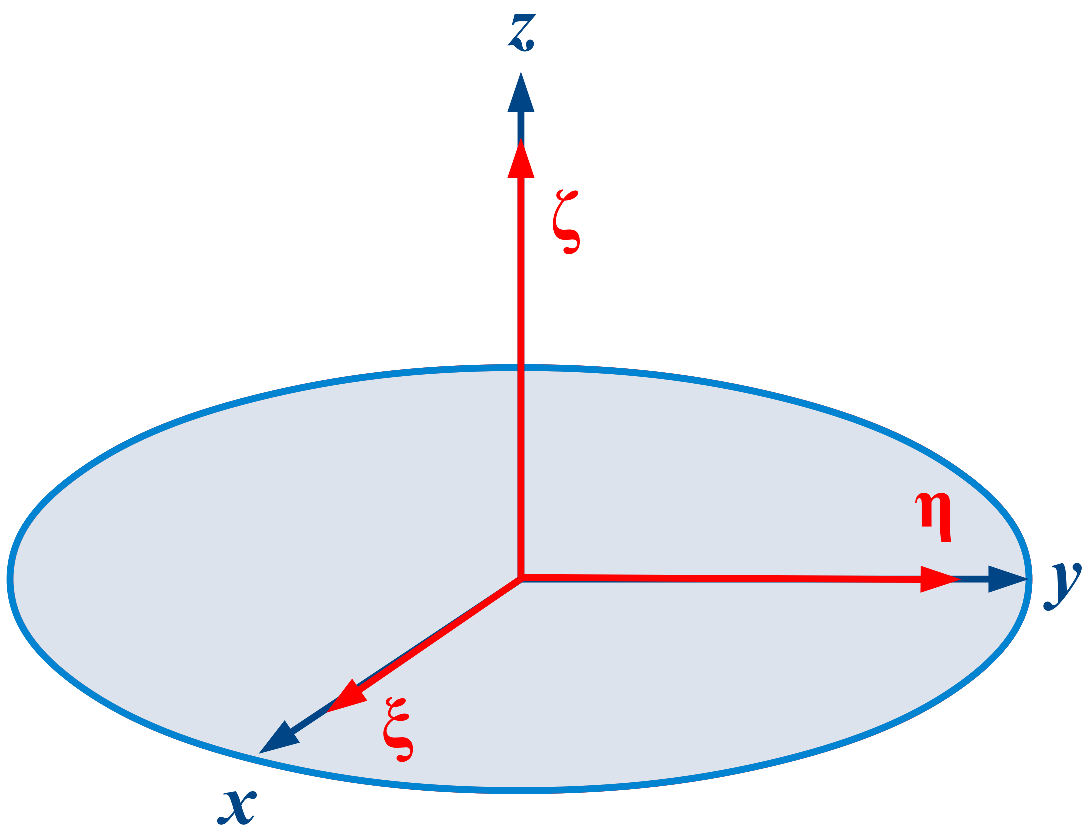
Linia węzłów (N) – linia przecięcia się płaszczyzn (x, y) oraz (ξ, η)

Kąt precesji: $\phi = \sphericalangle(x, N)$

Kąt nutacji: $\theta = \sphericalangle(z, \zeta)$

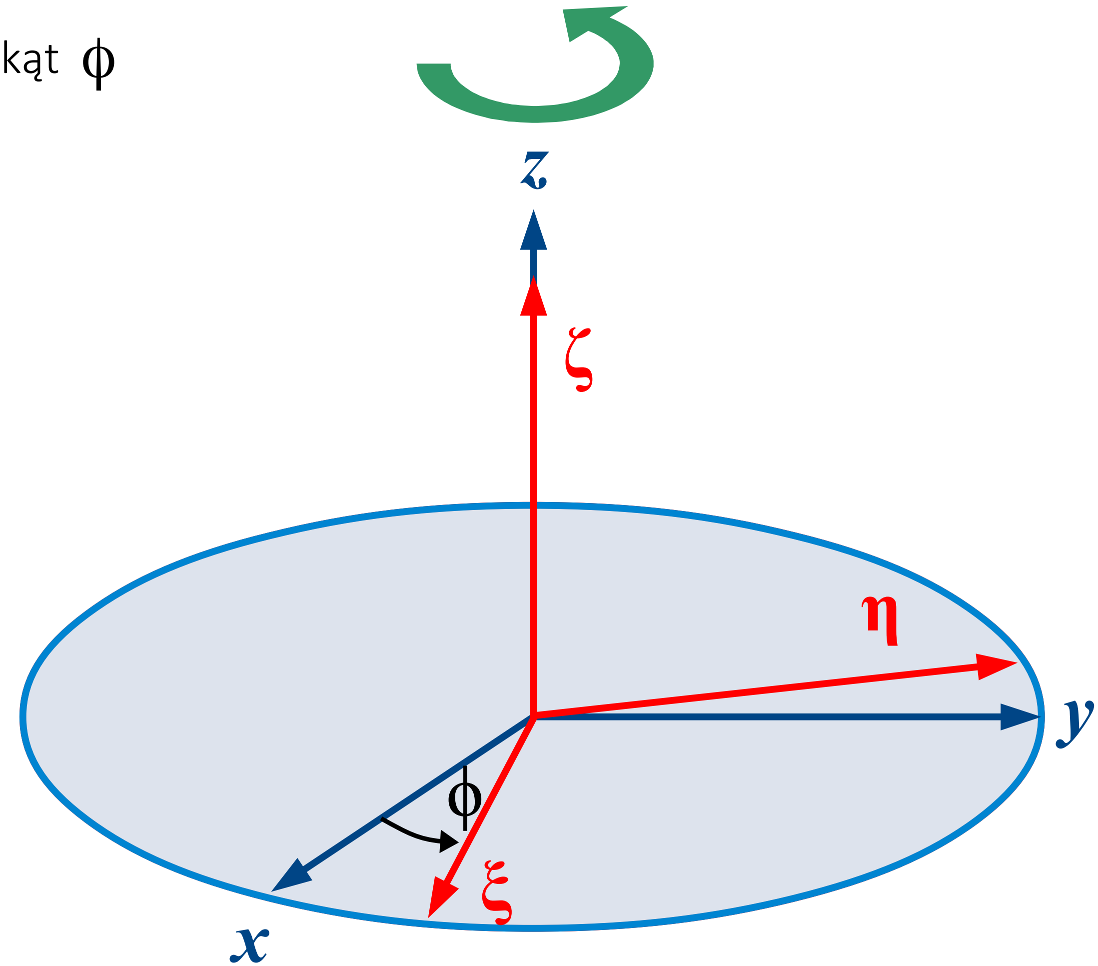
Kąt obrotu własnego: $\psi = \sphericalangle(N, \xi)$




z
ζ
η
y
ξ
x

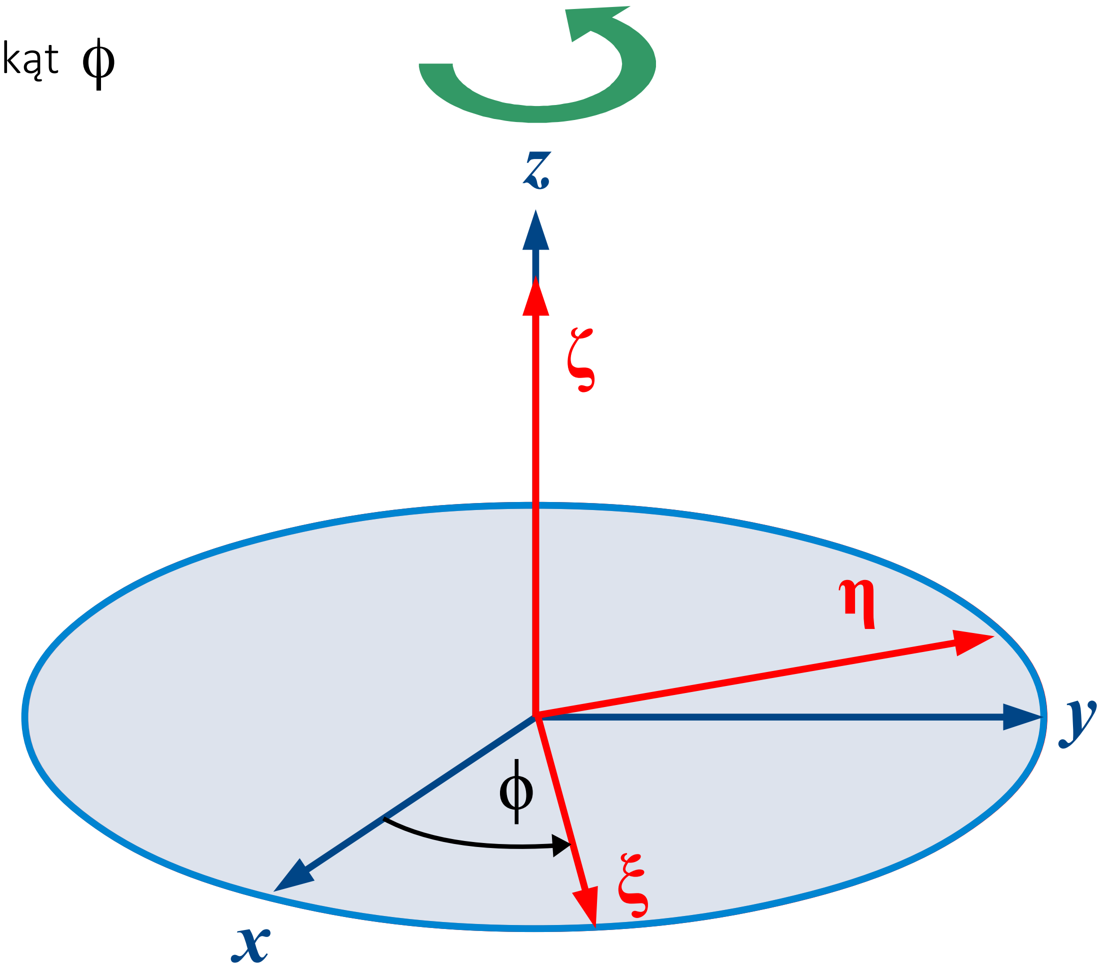
PRECESJA

Obrót wokół osi $z = \zeta$ o kąt ϕ



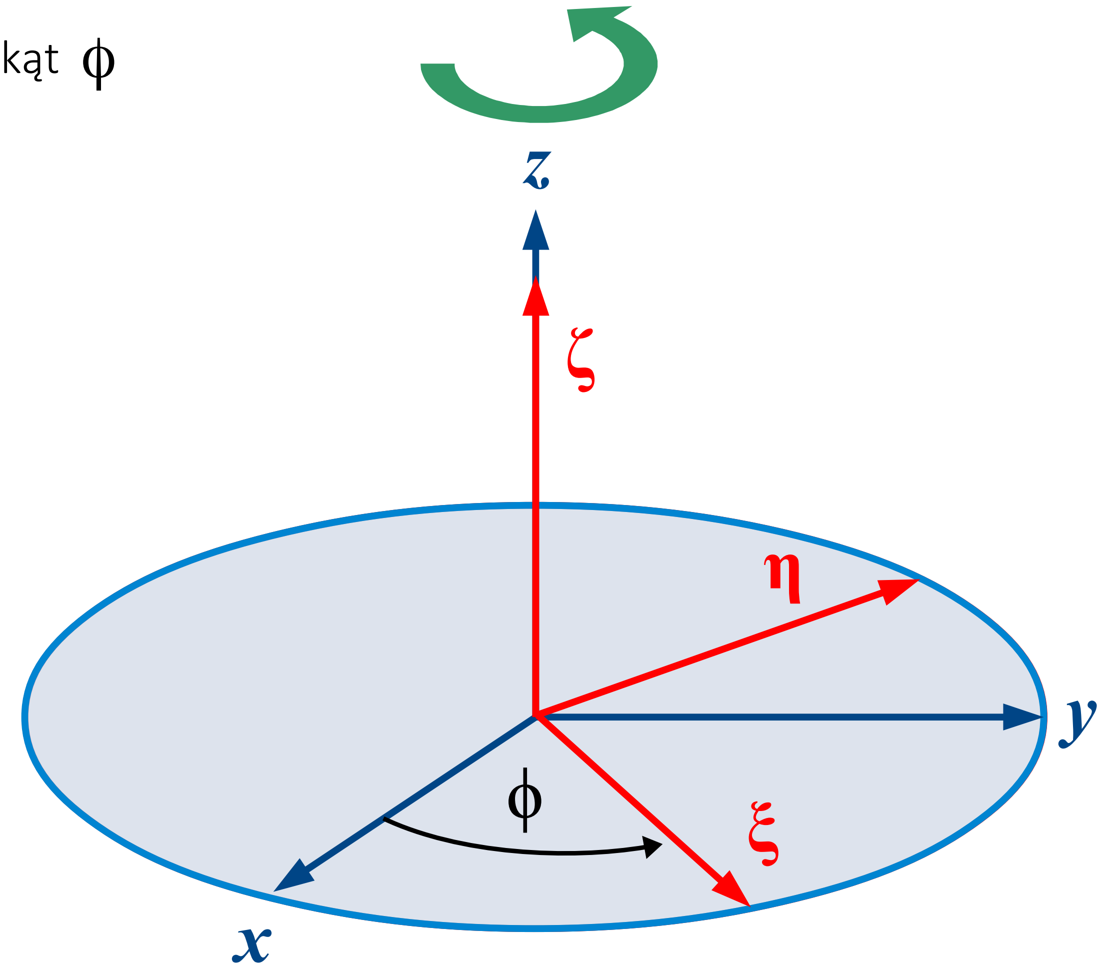
PRECESJA

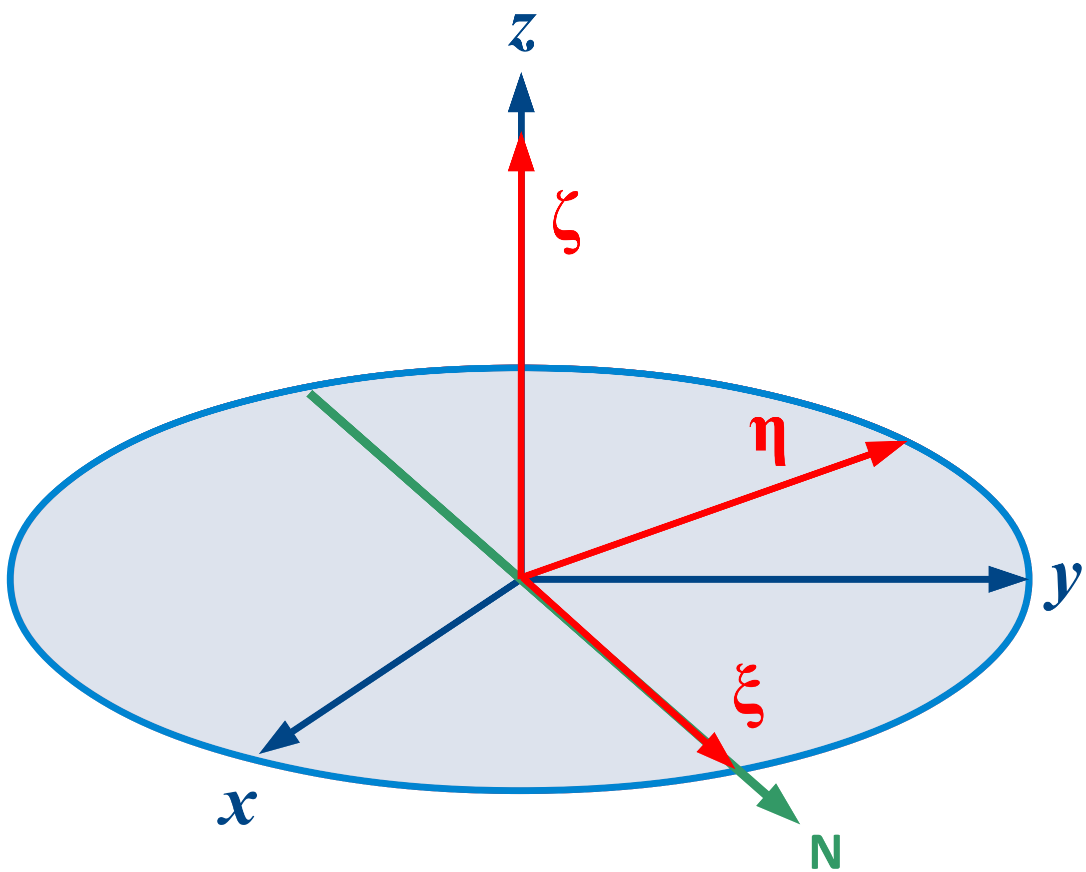
Obrót wokół osi $z = \zeta$ o kąt ϕ



PRECESJA

Obrót wokół osi $z = \zeta$ o kąt ϕ

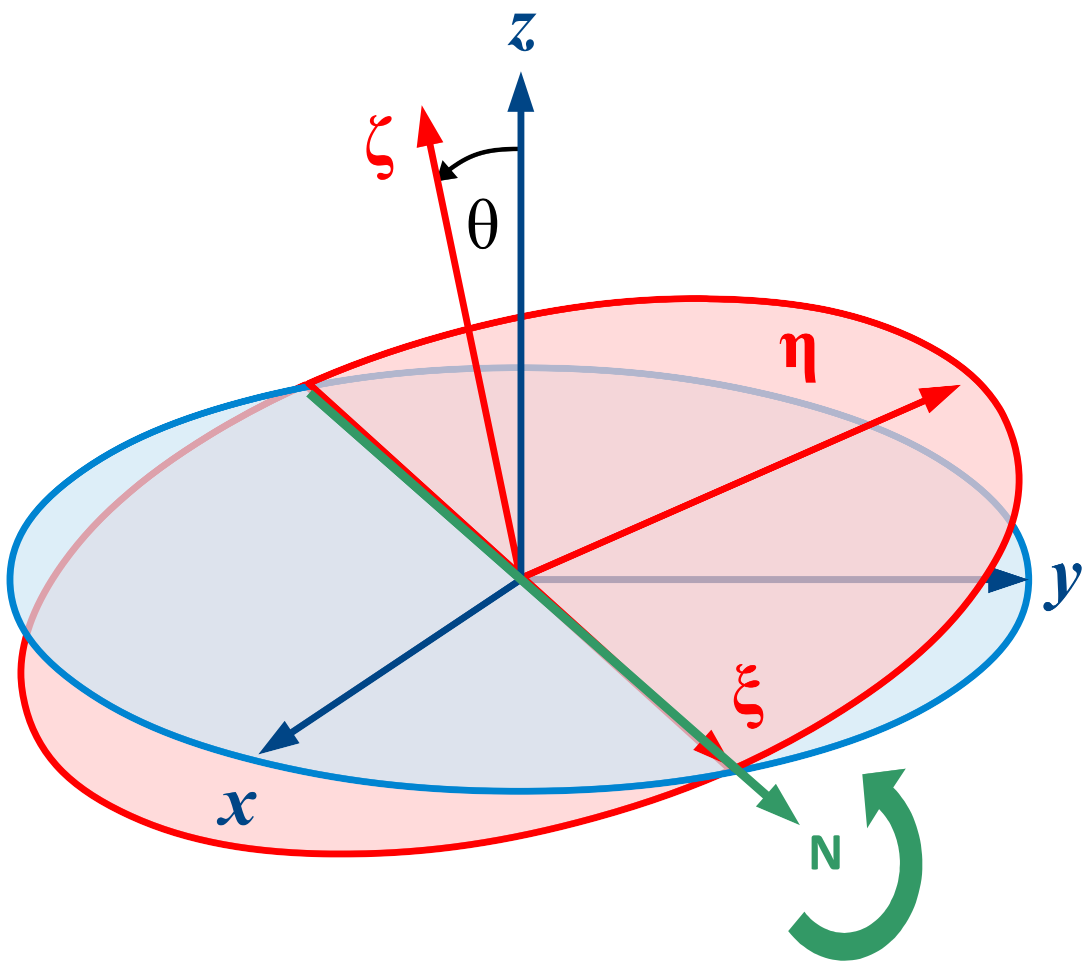



z
ζ
η
y
ξ
x
N

dr inż. Paweł Szeptyński

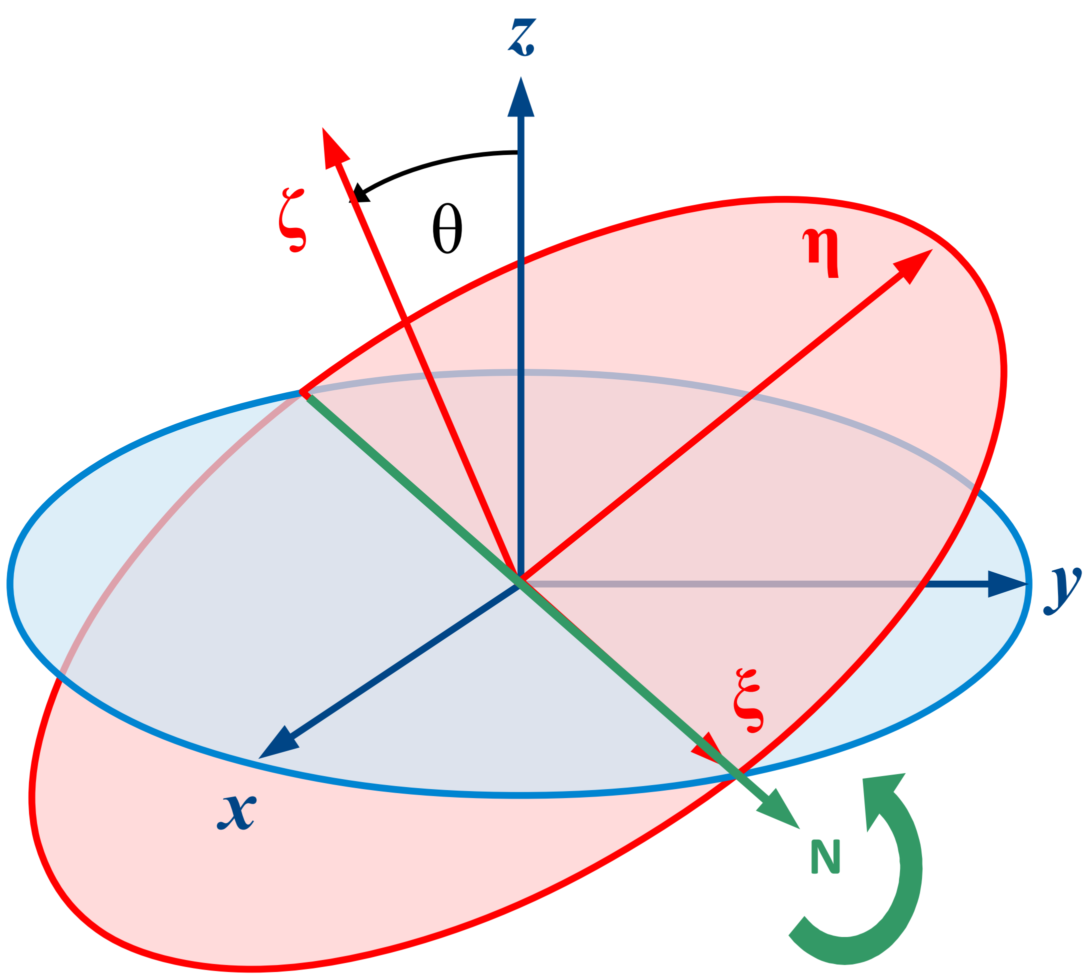
NUTACJA

Obrót wokół osi $\xi = N$ o kąt θ



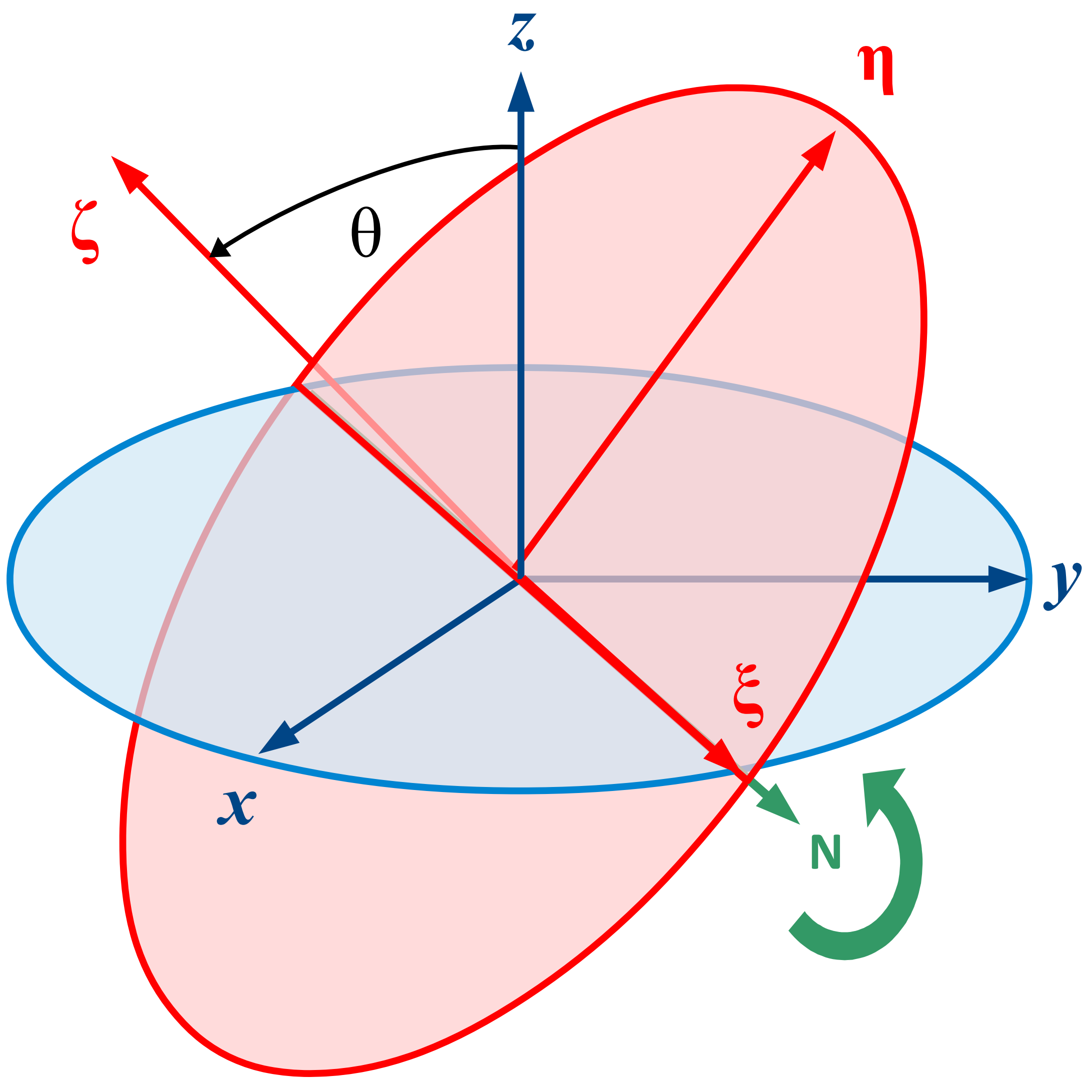
NUTACJA

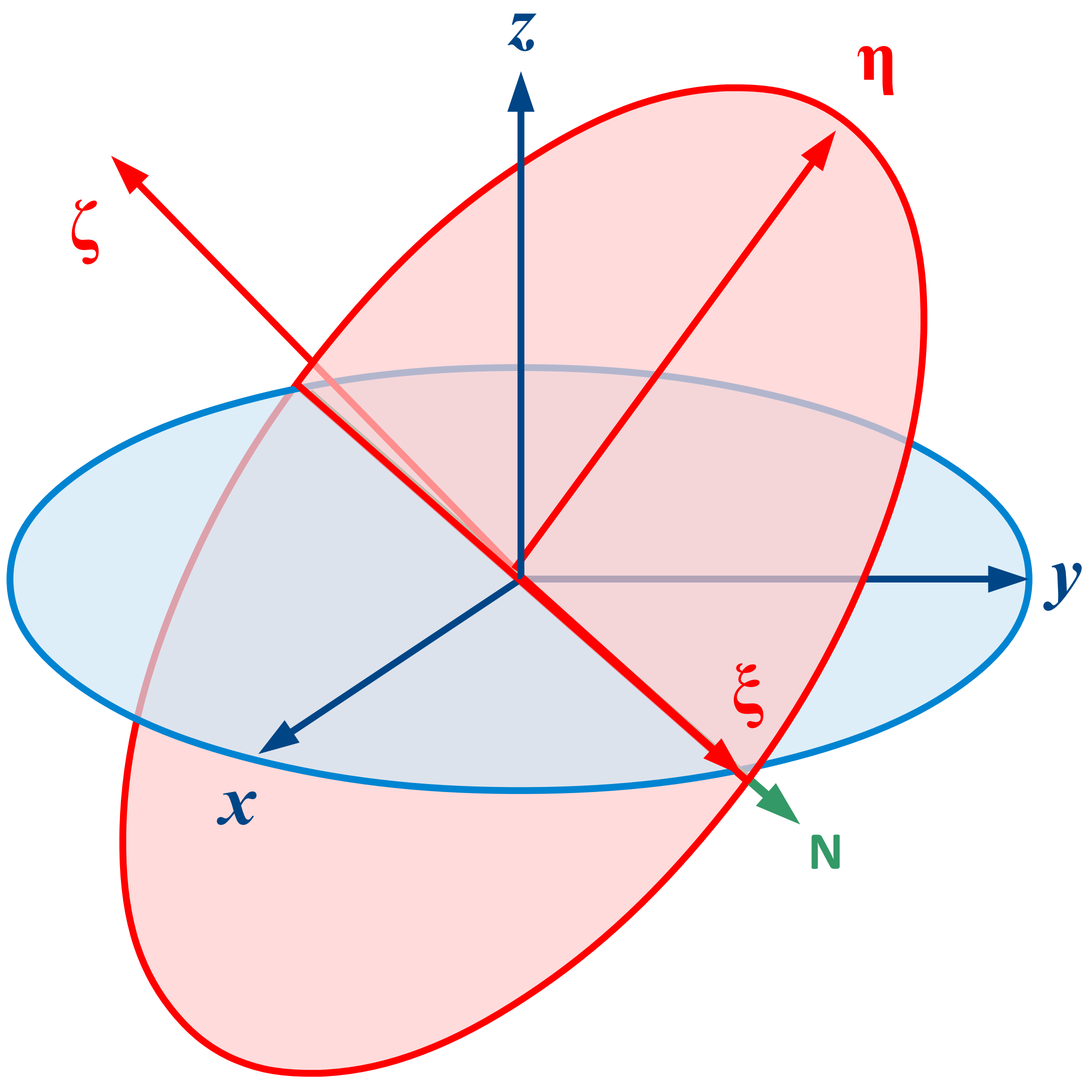
Obrót wokół osi $\xi = N$ o kąt θ



NUTACJA

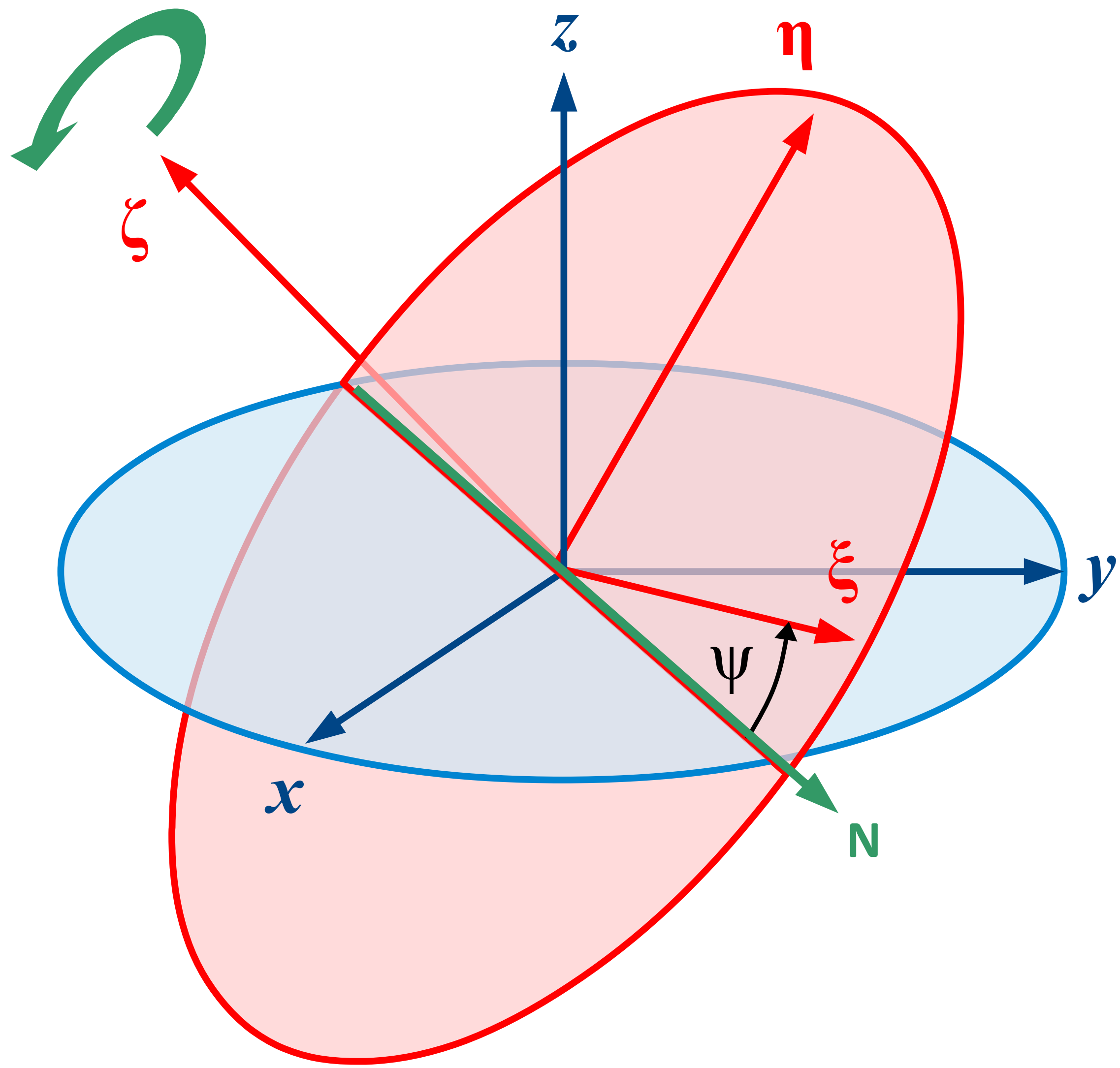
Obrót wokół osi $\xi = N$ o kąt θ




z
η
ζ
y
ξ
x
N

OBRÓT WŁASNY

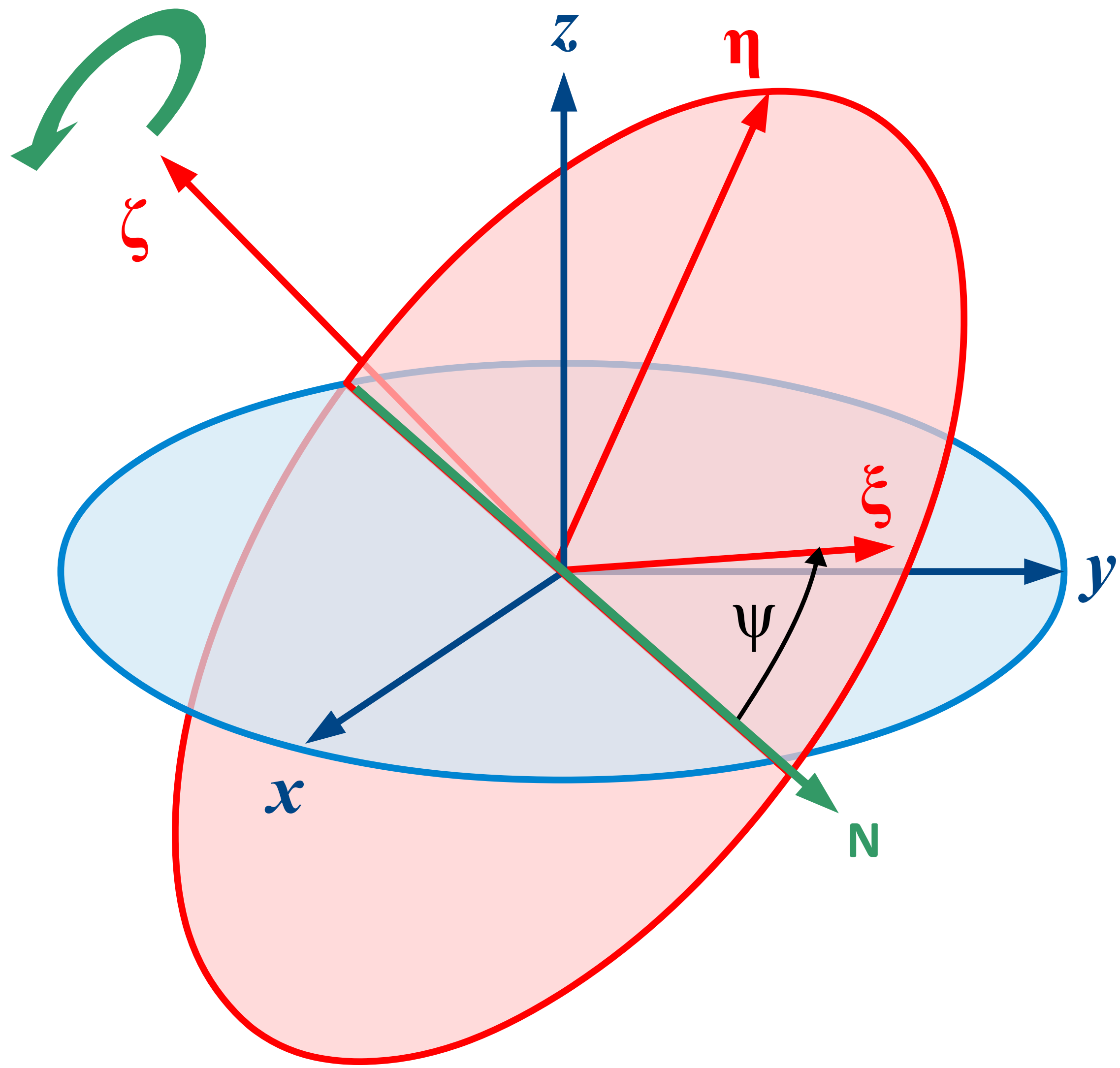
Obrót wokół osi ζ o kąt ψ



dr inż. Paweł Szeptyński

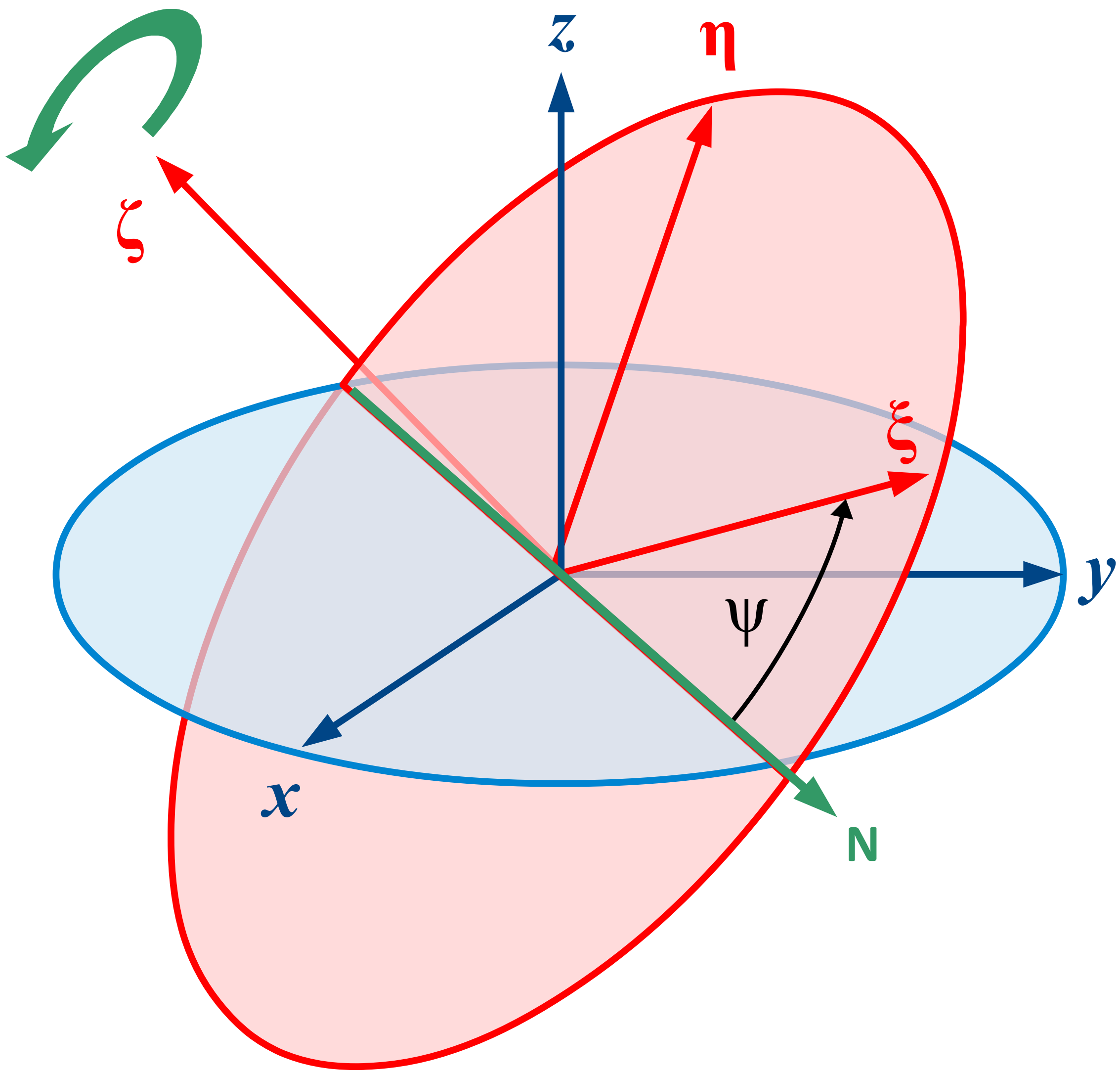
OBRÓT WŁASNY

Obrót wokół osi ζ o kąt ψ



OBRÓT WŁASNY

Obrót wokół osi ζ o kąt ψ



OPERATOR OBROTU O KĄT α WOKÓŁ OSI DANEJ WERSOREM $\mathbf{n}$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{\alpha} = \cos\alpha\,\mathbf{1} + (1-\cos\alpha)(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) + \sin\alpha[\mathbf{n}]_{\times} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha + n_x^2(1-\cos\alpha) & n_x n_y(1-\cos\alpha) - n_z\sin\alpha & n_x n_z(1-\cos\alpha) + n_y\sin\alpha \\ n_x n_y(1-\cos\alpha) + n_z\sin\alpha & \cos\alpha + n_y^2(1-\cos\alpha) & n_y n_z(1-\cos\alpha) - n_z\sin\alpha \\ n_x n_z(1-\cos\alpha) - n_y\sin\alpha & n_y n_z(1-\cos\alpha) + n_z\sin\alpha & \cos\alpha + n_z^2(1-\cos\alpha) \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{n}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} : \ \underset{\mathbf{v}}{\forall} \quad \mathbf{n}\times\mathbf{v} = [\mathbf{n}]_{\times}\mathbf{v}$$

Przykładowo:

Obrót wokół osi x:

$$\mathbf{R}_x^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Obrót wokół osi y:

$$\mathbf{R}_y^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Obrót wokół osi z:

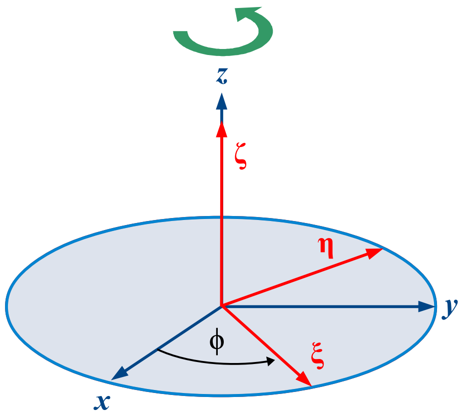
$$\mathbf{R}_z^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MACIERZ PRZEJŚCIA WYRAŻONA PRZEZ KĄTY EULERA

PRECESJA: Obrót wokół osi $z = \zeta$ o kąt ϕ

NUTACJA: Obrót wokół osi $\xi = N$ o kąt θ

OBRÓT WŁASNY: Obrót wokół osi ζ o kąt ψ



Wersor **osi precesji**: $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Kąt obrotu: ϕ

Operator obrotu:

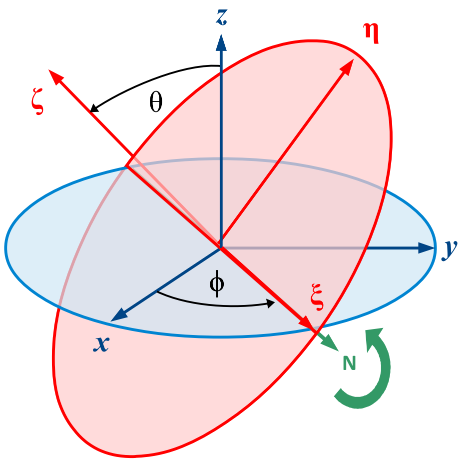
$$\mathbf{R}_z^{\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MACIERZ PRZEJŚCIA WYRAŻONA PRZEZ KĄTY EULERA

PRECESJA: Obrót wokół osi $z=\zeta$ o kąt ϕ

NUTACJA: Obrót wokół osi $\xi=N$ o kąt θ

OBRÓT WŁASNY: Obrót wokół osi ζ o kąt ψ



Wersor **osi nutacji**: $\mathbf{n}=\mathbf{R}_z^\phi\cdot\mathbf{e}_x=\begin{bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{bmatrix}$ Kąt obrotu: θ

Operator obrotu:

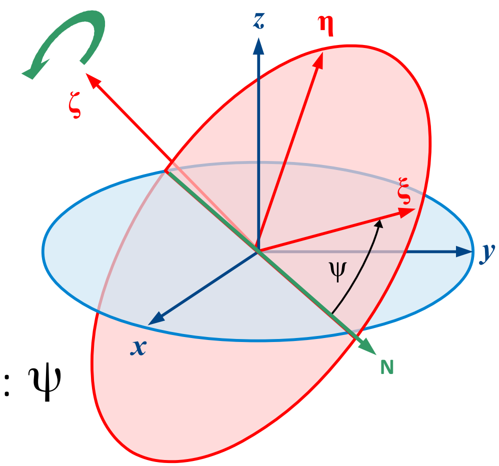
$$\mathbf{R}_\xi^\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta+\cos^2\phi(1-\cos\theta) & \frac{1}{2}\sin 2\phi(1-\cos\theta) & \sin\phi\sin\theta\\ \frac{1}{2}\sin 2\phi(1-\cos\theta) & \cos\theta+\sin^2\phi(1-\cos\theta) & -\cos\phi\sin\theta\\ -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

MACIERZ PRZEJŚCIA WYRAŻONA PRZEZ KĄTY EULERA

PRECESJA: Obrót wokół osi $z = \zeta$ o kąt ϕ

NUTACJA: Obrót wokół osi $\xi = N$ o kąt θ

OBRÓT WŁASNY: Obrót wokół osi ζ o kąt ψ



Wersor **osi obrotu własnego**: $\mathbf{n} = \mathbf{R}_{\xi}^{\theta} \cdot \mathbf{R}_{z}^{\phi} \cdot \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ Kąt obrotu: ψ

Operator obrotu:

$$\mathbf{R}_{\xi}^{\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi + \sin^2\phi\sin^2\theta(1-\cos\psi) & \begin{matrix} -\cos\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta(1-\cos\psi) \end{matrix} & \begin{matrix} -\cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ +\sin\phi\cos\theta\sin\theta(1-\cos\psi) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cos\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta(1-\cos\psi) \end{matrix} & \cos\psi + \cos^2\phi\sin^2\theta(1-\cos\psi) & \begin{matrix} -\sin\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\theta\cos\theta(1-\cos\psi) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ +\sin\phi\cos\theta\sin\theta(1-\cos\psi) \end{matrix} & \begin{matrix} \sin\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\theta\cos\theta(1-\cos\psi) \end{matrix} & \cos\psi + \cos^2\theta(1-\cos\psi) \end{bmatrix}$$

MACIERZ PRZEJŚCIA WYRAŻONA PRZEZ KĄTY EULERA

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\zeta}^{\psi} \cdot \mathbf{R}_{\xi}^{\theta} \cdot \mathbf{R}_{z}^{\phi}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

MACIERZ PRZEJŚCIA WYRAŻONA PRZEZ KĄTY EULERA

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\zeta}^{\psi} \cdot \mathbf{R}_{\xi}^{\theta} \cdot \mathbf{R}_{z}^{\phi}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

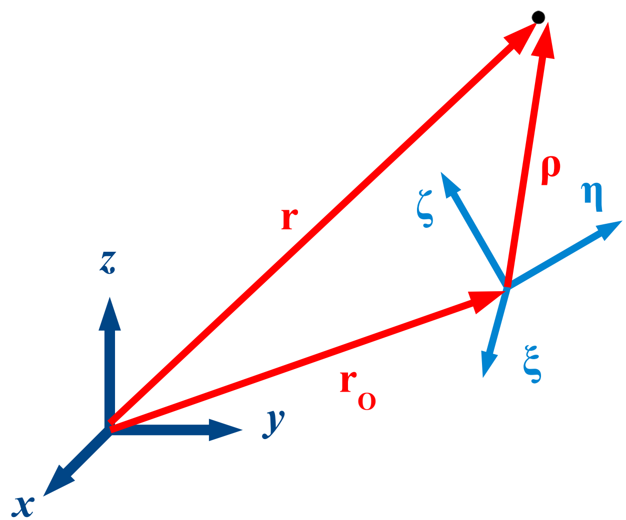
$$\mathbf{e}_x = [1,0,0] \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_\xi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_x = [\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi, \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi, \sin\theta\sin\psi]$$

$$\mathbf{e}_y = [0,1,0] \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_\eta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_y = [-\cos\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi, -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi, \sin\theta\cos\psi]$$

$$\mathbf{e}_z = [0,0,1] \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_\zeta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_z = [\sin\phi\sin\theta, -\cos\phi\sin\theta, \cos\theta]$$

MACIERZ PRZEJŚCIA WYRAŻONA PRZEZ KĄTY EULERA

Elementy **macierzy przejścia** są równe składowym **transpozycji operatora obrotu**.



$$[\mathrm{r}^{x}] = [\mathrm{r}_O{}^{x}] + [\mathrm{A}_x^{\xi}]^{\mathrm{T}} \cdot [\rho^{\xi}]$$

$$[A_x^{\xi}] = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

PRĘDKOŚĆ KĄTOWA WYRAŻONA PRZEZ KĄTY EULERA

Wersor **osi precesji**: $\mathbf{n}_\phi = [0\,,0\,,1]$

Wektor **prędkości kątowej precesji**: $\dot{\boldsymbol{\phi}} = \dot{\phi}\,\mathbf{n}_\phi = [0\,,0\,,\dot{\phi}]$

Wersor **osi nutacji**: $\mathbf{n}_\theta = [\cos\phi\,,\sin\phi\,,0]$

Wektor **prędkości kątowej nutacji**: $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta}\,\mathbf{n}_\theta = [\dot{\theta}\cos\phi\,,\dot{\theta}\sin\phi\,,0]$

Wersor **osi obrotu własnego**: $\mathbf{n}_\psi = [\sin\phi\sin\theta\,,-\cos\phi\sin\theta\,,\cos\theta]$

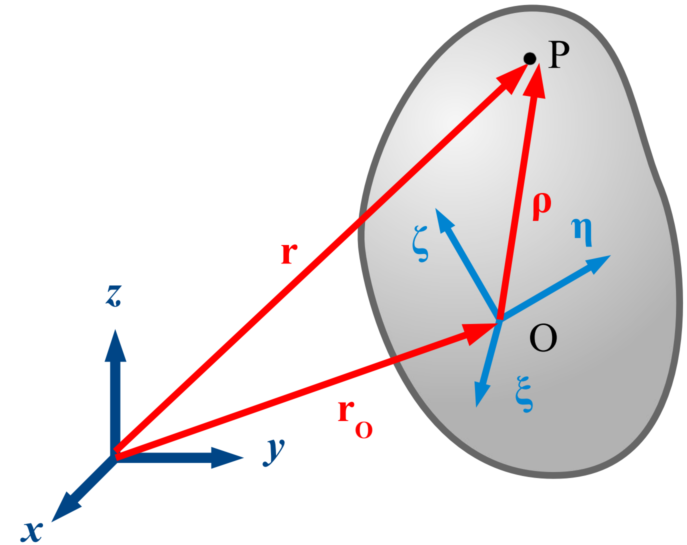
Wektor **prędkości kątowej obrotu własnego**: $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\psi}\,\mathbf{n}_\psi = [\dot{\psi}\sin\phi\sin\theta\,,-\dot{\psi}\cos\phi\sin\theta\,,\dot{\psi}\cos\theta]$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}}$$

OPIS RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ ZA POMOCĄ KĄTÓW EULERA

- Punkt O przyjmujemy jako początek ruchomego układu współrzędnych związanego z bryłą sztywną.
- Ustalamy dowolny punkt P w bryle. Jego położenie w układzie ruchomym jest stałe: $\dot{\boldsymbol{\rho}}_w = \mathbf{0}\,,\quad \ddot{\boldsymbol{\rho}}_w = \mathbf{0}$
- Prędkość i przyspieszenie kątowe bryły wyrażamy przez kąty Eulera: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\phi, \theta, \psi)$
- Macierz przejścia wyrażamy przez kąty Eulera: $[\mathrm{A}_x^\xi] = [\mathrm{A}_x^\xi](\phi, \theta, \psi)$

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_w \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_w + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_w \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathrm{r}^x] = [\mathrm{r}_O{}^x] + [\mathrm{A}_x^\xi]^{\mathrm{T}} \cdot [\rho^\xi] \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \end{cases}}$$

OPIS RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ ZA POMOCĄ KĄTÓW EULERA

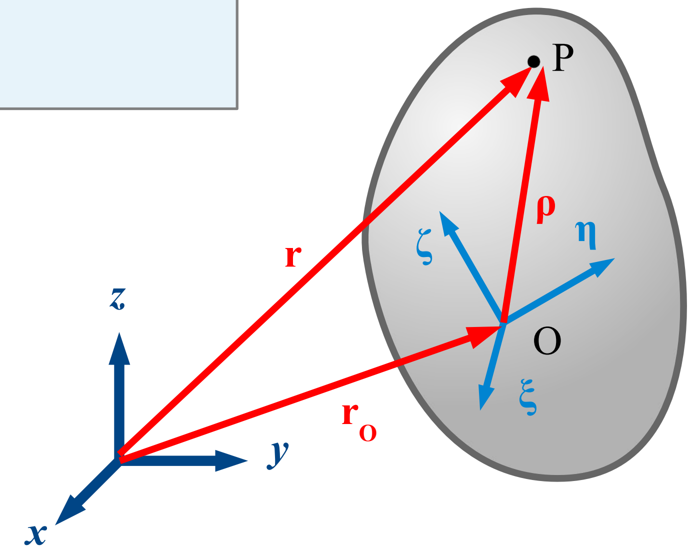
$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathrm{r}^x] = [\mathrm{r}_O{}^x] + [\mathrm{A}_x^\xi]^\mathrm{T} \cdot [\rho^\xi] \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \end{cases}$$

Jeśli znamy x_O, y_O, z_O (**3 parametry**), to możemy wyznaczyć:

$$\mathbf{r}_O = [x_O, y_O, z_O] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_O = [\dot{x}_O, \dot{y}_O, \dot{z}_O] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_O = [\ddot{x}_O, \ddot{y}_O, \ddot{z}_O]$$

Jeśli znamy ϕ, θ, ψ (**3 parametry**), to możemy wyznaczyć:

$$\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}$$



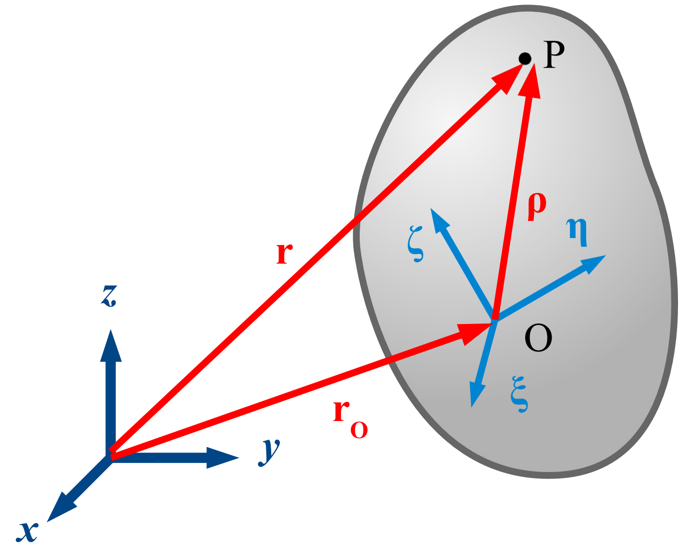
Aby jednoznacznie opisać ruch dowolnego punktu bryły sztywnej wystarczy znać położenie wybranego punktu tej bryły oraz kąty Eulera obrotu układu ruchomego związanego z tym punktem (6 parametrów).

$$LSS = 6$$

OPIS RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ

Ruch bryły sztywnej można interpretować jako złożenie:

- **Przesunięcia równoległego** ustalonego punktu O
- **Obrotu bryły** wokół punktu O



OPIS RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ

W układzie **nieruchomym**:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_O \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\rho} = \left[x - x_O \; ; \; y - y_O \; ; \; z - z_O\right]$$

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\omega_x \; ; \; \omega_y \; ; \; \omega_z\right]$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_O + \omega_y (z - z_O) - \omega_z (y - y_O) \\ \dot{y} = \dot{y}_O + \omega_z (x - x_O) - \omega_x (z - z_O) \\ \dot{z} = \dot{z}_O + \omega_x (y - y_O) - \omega_y (x - x_O) \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{x}_O + \dot{\omega}_y (z - z_O) - \dot{\omega}_z (y - y_O) + \omega_x \left[\omega_y (y - y_O) + \omega_z (z - z_O)\right] - (\omega_y^2 + \omega_z^2)(x - x_O) \\ \ddot{y} = \ddot{y}_O + \dot{\omega}_z (x - x_O) - \dot{\omega}_x (z - z_O) + \omega_y \left[\omega_z (z - z_O) + \omega_x (x - x_O)\right] - (\omega_z^2 + \omega_x^2)(y - y_O) \\ \ddot{z} = \ddot{z}_O + \dot{\omega}_x (y - y_O) - \dot{\omega}_y (x - x_O) + \omega_z \left[\omega_x (x - x_O) + \omega_y (y - y_O)\right] - (\omega_x^2 + \omega_y^2)(z - z_O) \end{cases}$$

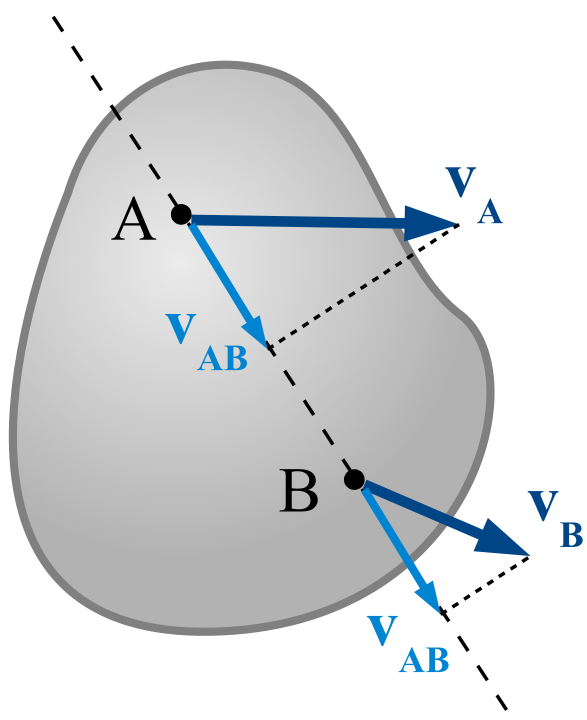
TWIERDZENIA O ROZKŁADZIE PRĘDKOŚCI W BRYLE SZTYWNEJ

TWIERDZENIA O ROZKŁADZIE PRĘDKOŚCI W BRYLE SZTYWNEJ

TWIERDZENIE 1

Rzuty wektorów prędkości dwóch dowolnych punktów w bryle sztywnej **na prostą łączącą te dwa punkty są sobie równe**.

$$\frac{\mathbf{v}_A \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|^2}\vec{AB} = \frac{\mathbf{v}_B \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|^2}\vec{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_A \cdot \vec{AB} = \mathbf{v}_B \cdot \vec{AB}$$



TWIERDZENIA O ROZKŁADZIE PRĘDKOŚCI W BRYLE SZTYWNEJ

DOWÓD:

W bryle sztywnej $d_{AB} = const. \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(d^2_{AB}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)\cdot(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)\right] = 0$

$$2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)\right]\cdot(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = 0$$

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)\cdot\vec{\mathrm{AB}} = 0$$

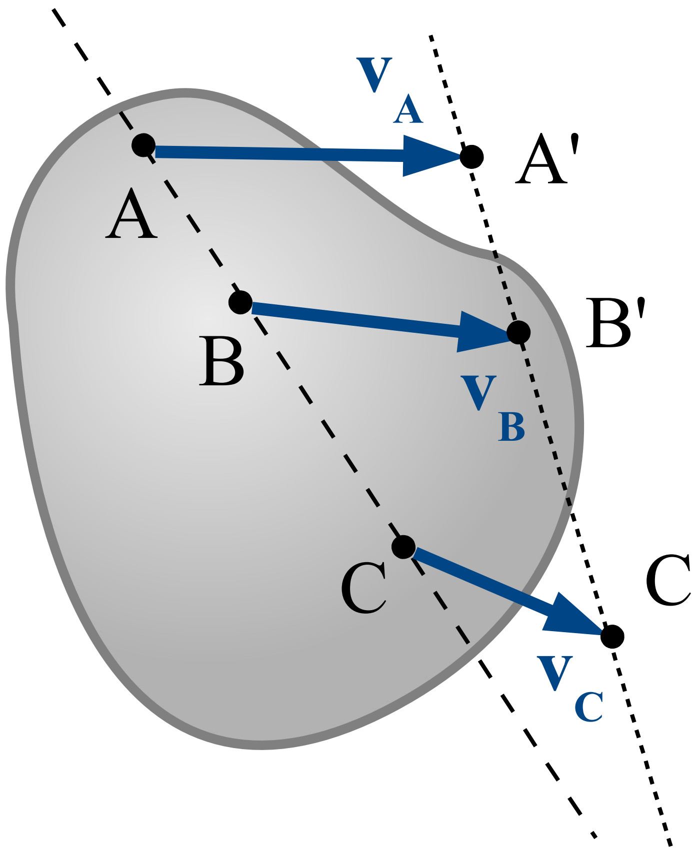
$$\mathbf{v}_A\cdot\vec{\mathrm{AB}} = \mathbf{v}_B\cdot\vec{\mathrm{AB}}$$

■QED

TWIERDZENIA O ROZKŁADZIE PRĘDKOŚCI W BRYLE SZTYWNEJ

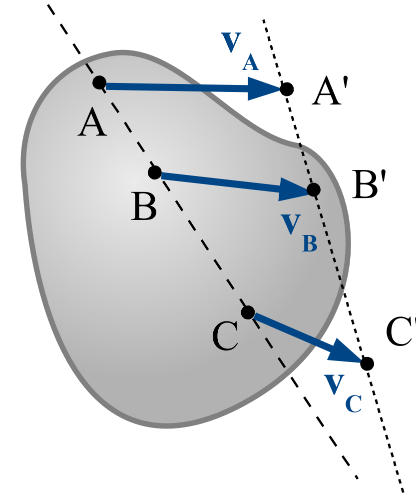
TWIERDZENIE 2

Końcówki wektorów prędkości punktów leżących na jednej prostej w bryle sztywnej **leżą na jednej prostej**.



TWIERDZENIA O ROZKŁADZIE PRĘDKOŚCI W BRYLE SZTYWNEJ

DOWÓD:



$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \lambda\,\vec{AB} = \mathbf{r}_A + \lambda(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \qquad / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \lambda(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

$$\mathbf{r}_{A'} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{r}_A + \mathbf{v}_A \Delta t \qquad \mathbf{r}_{B'} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{r}_B + \mathbf{v}_B \Delta t \qquad \mathbf{r}_{C'} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{r}_C + \mathbf{v}_C \Delta t$$

Δt jest współczynnikiem skalującym umożliwiającym **dodawanie wektorów o różnych wymiarach fizycznych**. Strzałki, którymi oznaczamy wektory prędkości, są tylko ilustracją graficzną wielkości wektorowej i nie można przypisać im długości o wymiarze metrycznym. Punkty A', B', C' można interpretować jako punkty w przestrzeni, które zajmą cząstki w punktach A, B, C po chwili jeśli rozkład prędkości nie ulegnie zmianie.

$$\mathbf{r}_{C'} = \mathbf{r}_A + \lambda(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) + [\mathbf{v}_A + \lambda(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)]\Delta t$$

$$\mathbf{r}_{C'} = \underbrace{(\mathbf{r}_A + \mathbf{v}_A \Delta t)}_{\mathbf{r}_{A'}} + \lambda[\underbrace{(\mathbf{r}_B + \mathbf{v}_B \Delta t)}_{\mathbf{r}_{B'}} - \underbrace{(\mathbf{r}_A + \mathbf{v}_A \Delta t)}_{\mathbf{r}_{A'}}]$$

$$\mathbf{r}_{C'} = \mathbf{r}_{A'} + \lambda(\mathbf{r}_{B'} - \mathbf{r}_{A'})$$

■QED

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ