MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

WYBRANE PRZYPADKI RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ

KINEMATYKA BRYŁY SZTYWNEJ

O – ustalony punkt w bryle sztywnej.
P – dowolny inny punkt w bryle sztywnej.

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_w = \mathbf{0}$$

Znamy:

- **Położenie punktu O** (**3 parametry**): $(x_O, y_O, z_O) \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_O, \mathbf{v}_O, \mathbf{a}_O$
- **Obrót układu (ξ,η,ζ)**, kąty Eulera (**3 parametry**) $(\phi, \theta, \psi) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}, [\mathrm{A}_x^\xi]$

Położenie punktu P:

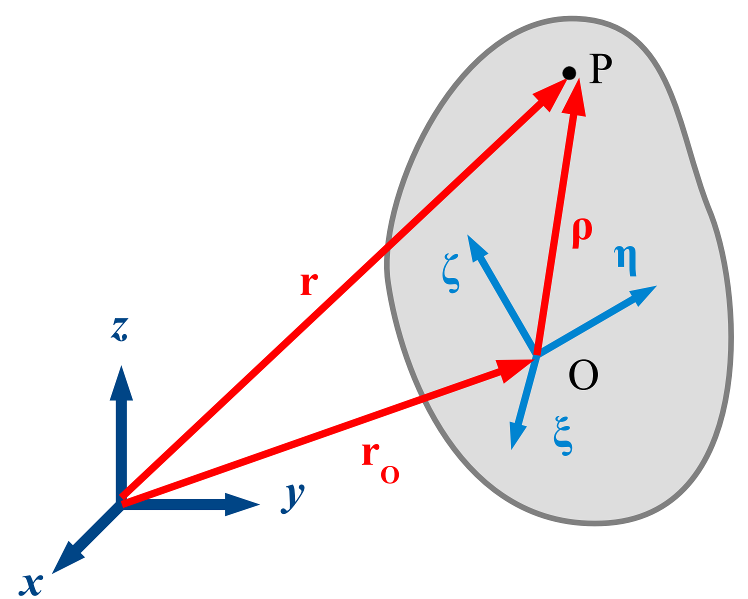
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathrm{r}^x] = [\mathrm{r}_O^x] + [\mathrm{A}_x^\xi]^{\mathrm{T}} [\rho^\xi]$$

Prędkość punktu P:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

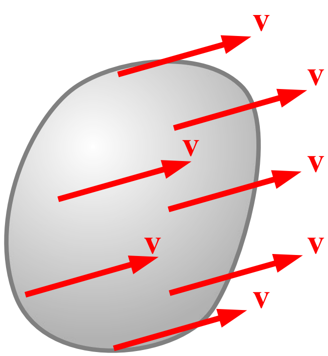
Przyspieszenie punktu P:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

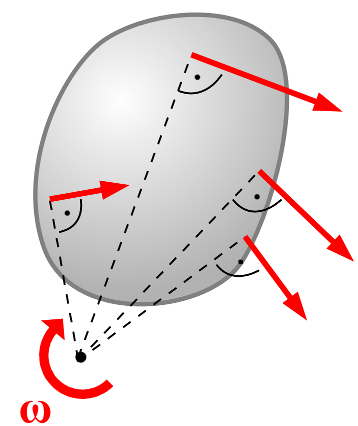


WYBRANE PRZYPADKI RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ

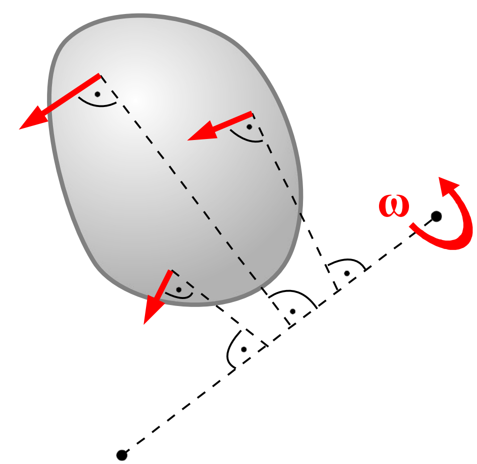
PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE (translacja)



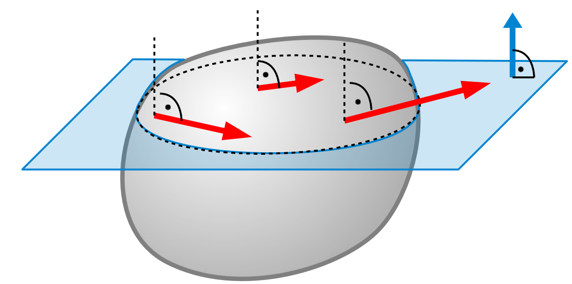
OBRÓT WOKÓŁ PUNKTU (ruch kulisty)



OBRÓT WOKÓŁ PROSTEJ (ruch obrotowy)

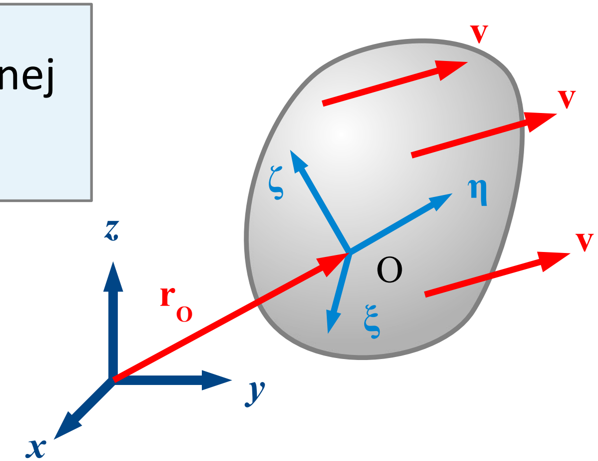


RUCH PŁASKI



PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE

Odcinek zawarty między dwoma dowolnymi punktami w bryle sztywnej zachowuje swój kierunek w czasie ruchu.



WNIOSKI:

- Wersory układu ruchomego nie zmieniają orientacji.
- Kąty Eulera są stałe w czasie, ich pochodna jest zerowa.
- Prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe są zerowe.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \longrightarrow$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \cancel{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}} \longrightarrow$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \cancel{\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}} + \cancel{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} \longrightarrow$$

Położenie punktu P:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}$$

Prędkość punktu P:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O$$

Przyspieszenie punktu P:

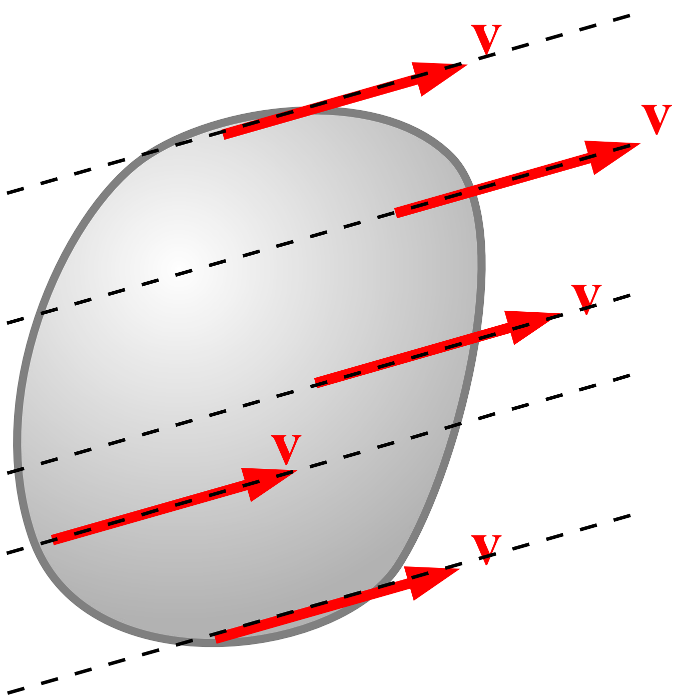
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O$$

- Wszystkie punkty poruszają się z taką samą prędkością.
- Kąty Eulera są ustalone. Jedynymi zmiennymi są (x_O, y_O, z_O). Bryła podlegająca translacji ma **LSS=3**.

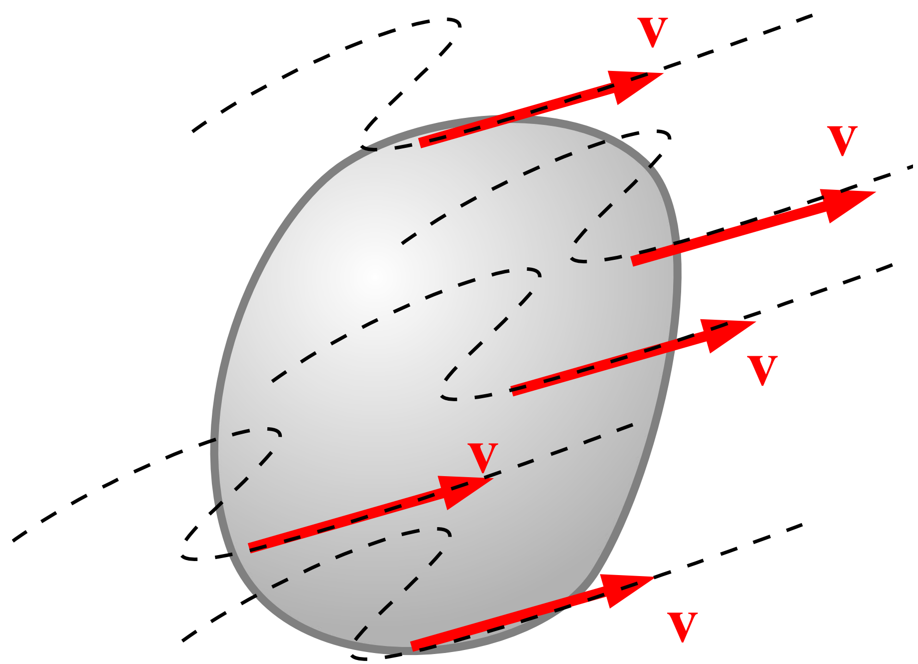
PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE

- Trajektorie wszystkich punktów są przystające i równoległe.

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE PROSTOLINIOWE

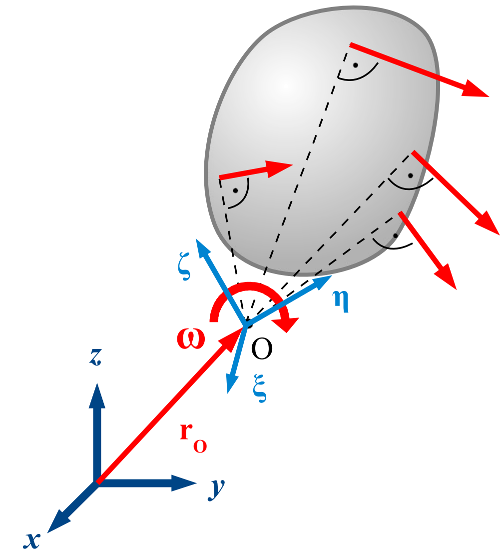


PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE KRZYWOLINIOWE



OBRÓT WOKÓŁ PUNKTU

> Odległość między dowolnym punktem w bryle sztywnej a pewnym ustalonym punktem w przestrzeni O jest stała w czasie ruchu.



WNIOSKI:

- Punkt O nazywamy **środkiem obrotu**.
- Środek obrotu O może należeć do ciała lub być położony poza nim.
- Jeśli ruchomy układ odniesienia zwiążemy z nieruchomym punktem O, wtedy:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \longrightarrow$$

$$\mathbf{v} = \cancel{\mathbf{v}_O} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \longrightarrow$$

$$\mathbf{a} = \cancel{\mathbf{a}_O} + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \longrightarrow$$

Prędkość punktu P:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}$$

Prędkość punktu P:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

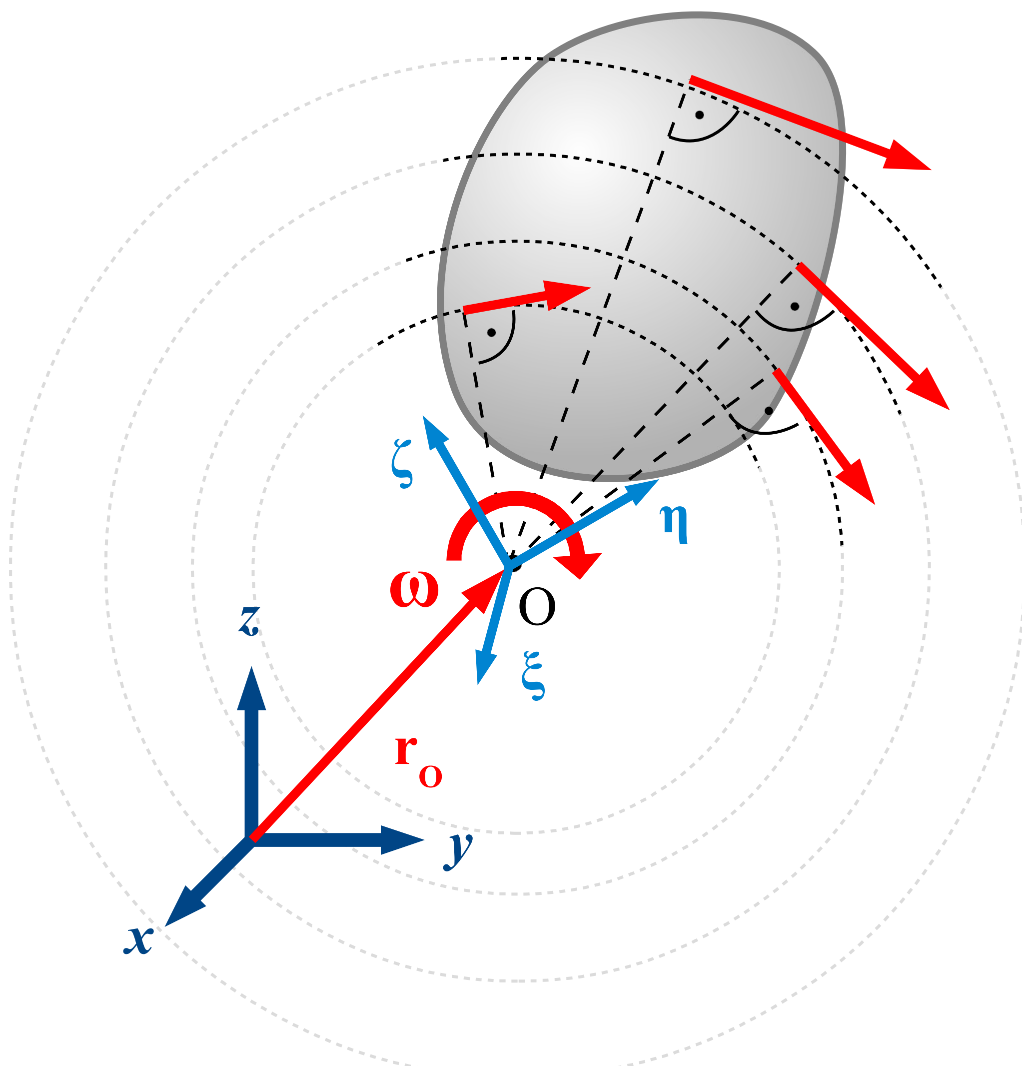
Przyspieszenie punktu P:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

- Położenie punktu O= (x_O, y_O, z_O) jest ustalone. Jedynymi zmiennymi są kąty Eulera.
- Bryła sztywna wykonująca obrót wokół punktu ma **LSS=3**.

OBRÓT WOKÓŁ PUNKTU

- Trajektorie wszystkich punktów leżą na sferach, których wspólnym środkiem jest punkt O.

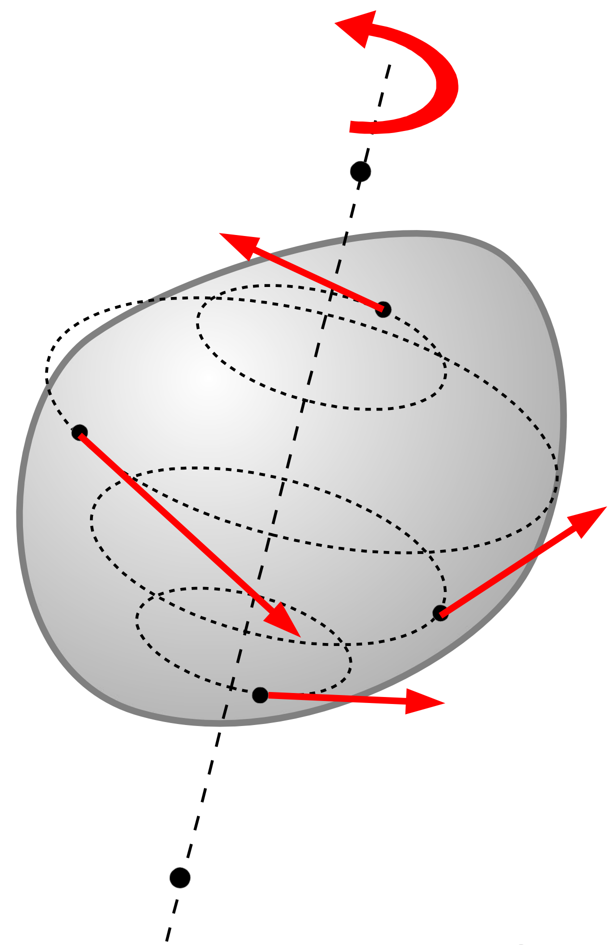


OBRÓT WOKÓŁ PROSTEJ

Odległości między dowolnym punktem w bryle sztywnej a dwoma ustalonymi punktami w przestrzeni jest stała w czasie ruchu

WNIOSKI:

- Prostą wyznaczoną przez dwa ustalone punkty nazywamy **osią obrotu**.
- Oś obrotu może przechodzić przez punkty bryły sztywnej lub nie.
- Trajektorie wszystkich punktów leżą na okręgach leżących w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, a ich środki należą do osi obrotu.
- Obrót wokół prostej jest **szczególnym przypadkiem obrotu wokół punktu**, takim że **wektor prędkości kątowej ma stały w czasie kierunek**.



OBRÓT WOKÓŁ PROSTEJ

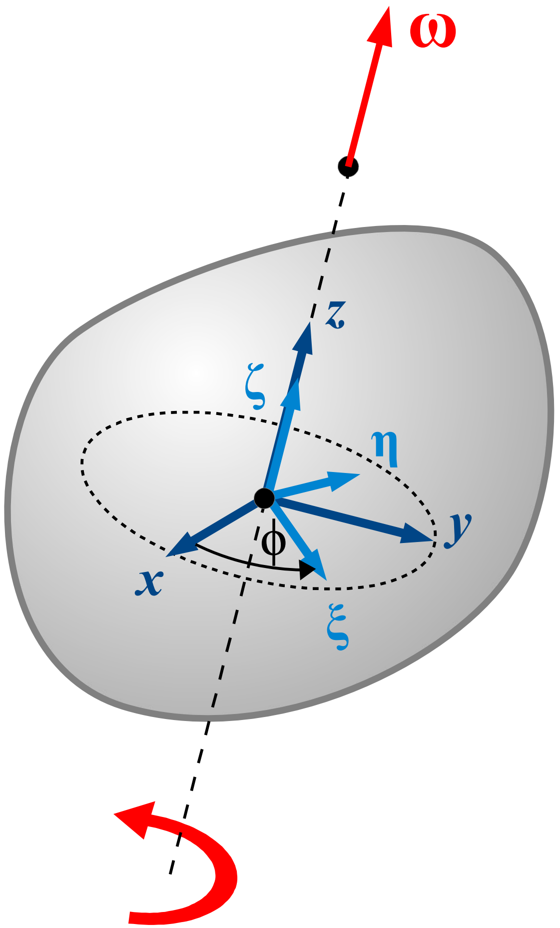
Przyjmijmy układy współrzędnych w taki sposób, że:

- obydwa układu mają swój początek w jednym z nieruchomych punktów,
- oś z oraz oś ζ pokrywają się z osią obrotu,

wtedy:

- Położenie punktu O=(x_O, y_O, z_O) jest ustalone.
- Płaszczyzna (ξ,η) pokrywa się z płaszczyzną (x,y).
- Kąt nutacji jest równy $\theta=0$.
- Linia węzłów i pozostałe kąty Eulera są nieokreślone.
- Orientacja układu ruchomego jest określona przez kąt $\phi=\sphericalangle(x,\xi)$
- Wektor prędkości kątowej jest równy: $\boldsymbol{\omega}=[0,0,\dot{\phi}]$
- Macierz przejścia ma postać:

$$[\mathrm{A}_x^\xi]=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



OBRÓT WOKÓŁ PROSTEJ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \longrightarrow$$

$$\mathbf{v} = \cancel{\mathbf{v}_O} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \longrightarrow$$

$$\mathbf{a} = \cancel{\mathbf{a}_O} + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \longrightarrow$$

Położenie punktu P:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}$$

Prędkość punktu P:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

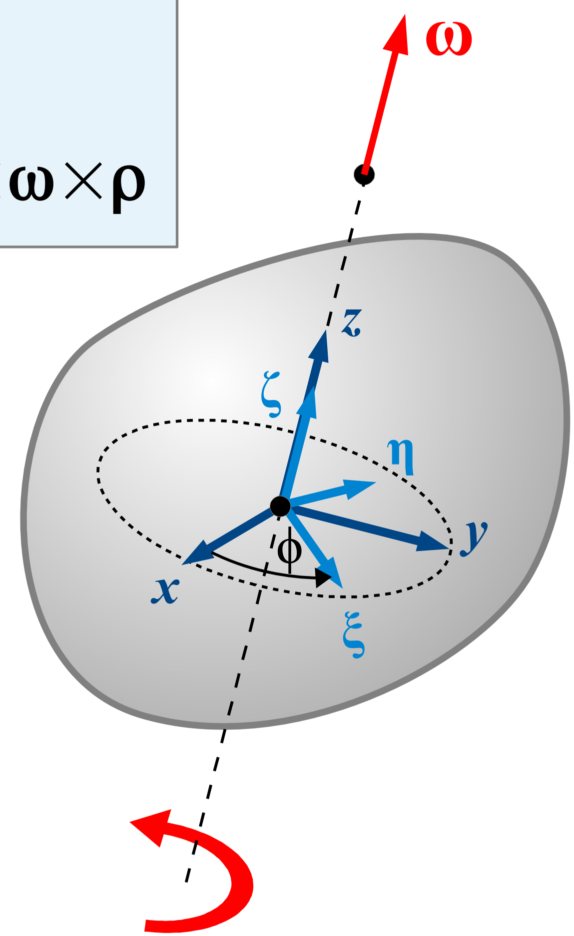
Przyspieszenie punktu P:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

przy czym: $\left[\mathrm{A}_x^{\xi}\right] = \left[\mathrm{A}_x^{\xi}(\phi)\right]$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\phi)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\phi)$$



- Położenie punktu O=(x_O, y_O, z_O) jest ustalone. Jedyną zmienną jest ϕ .
- Bryła sztywna wykonująca obrót wokół prostej ma **LSS=1**.

TWIERDZENIE EULERA

TWIERDZENIE EULERA O OBROCIE

Jeśli bryła sztywna w wyniku dowolnego obrotu wokół punktu doznaje pewnego przemieszczenia, to istnieje taka prosta przechodząca przez środek obrotu, że taka sama różnica położeń może być zrealizowana przez pojedynczy obrót wokół tej prostej.

DOWÓD:

Dowolny obrót wokół punktu może być opisany matematycznie jako odwzorowanie wektora wodzącego dowolnego punktu bryły sztywnej przed deformacją w wektor położenia po deformacji, taki że długość tego wektora nie ulega zmianie:

$$\mathbf{r} \;\rightarrow\; \mathbf{r}' = \mathbf{Q}\,\mathbf{r} : \quad |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'|$$

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'} = \sqrt{\mathbf{r}'^{\mathrm{T}}\mathbf{r}'} = \sqrt{(\mathbf{Q}\,\mathbf{r})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}\,\mathbf{r})} = \sqrt{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\,\mathbf{r}} = |\mathbf{r}| \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{1}$$

Operator $\mathbf{Q}$ musi być zatem **ortogonalny**, tj. $\det\mathbf{Q} = \pm 1$

Ujemny wyznacznik odpowiada obrotowi z odbiciem lustrzanym. Przyjmujemy zatem: $\det\mathbf{Q} = 1$

TWIERDZENIE EULERA

DOWÓD c.d.:

Dla dowolnych macierzy 3 x 3 mamy ponadto:

$\det \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{Q}$	$\det \mathbf{Q}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{Q}}$	$\det(-\mathbf{Q}) = (-1)^3 \det \mathbf{Q} = -\det \mathbf{Q}$	$\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

Jeśli obrót wokół punktu może być zrealizowany jako obrót wokół prostej, to dla operatora takiego musi istnieć taki wektor $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ (równoległy do tej prostej), który w wyniku działania tego operatora nie ulega zmianie:

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{n} = \mathbf{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{Q}-\mathbf{1})\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Wektor $\mathbf{n}$ jest zatem wektorem własnym $\mathbf{Q}$ odpowiadającym jednostkowej wartości własnej. Aby taki wektor istniał, spełniony musi być warunek:

$$\det(\mathbf{Q}-\mathbf{1}) = 0$$

Sprawdźmy:

$$\det(\mathbf{Q}-\mathbf{1}) = \det\left((\mathbf{Q}-\mathbf{1})^{\mathrm{T}}\right) = \det(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}-\mathbf{1}) = \det(\mathbf{Q}^{-1}-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}) =$$
$$= \det\left(\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{1}-\mathbf{Q})\right) = \underbrace{\det \mathbf{Q}^{-1}}_{1} \det(\mathbf{1}-\mathbf{Q}) = \det\left(-(\mathbf{Q}-\mathbf{q})\right) = -\det(\mathbf{Q}-\mathbf{1})$$

$$\det(\mathbf{Q}-\mathbf{1}) = -\det(\mathbf{Q}-\mathbf{1}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \det(\mathbf{Q}-\mathbf{1}) = 0$$

■ QED

RUCH PŁASKI

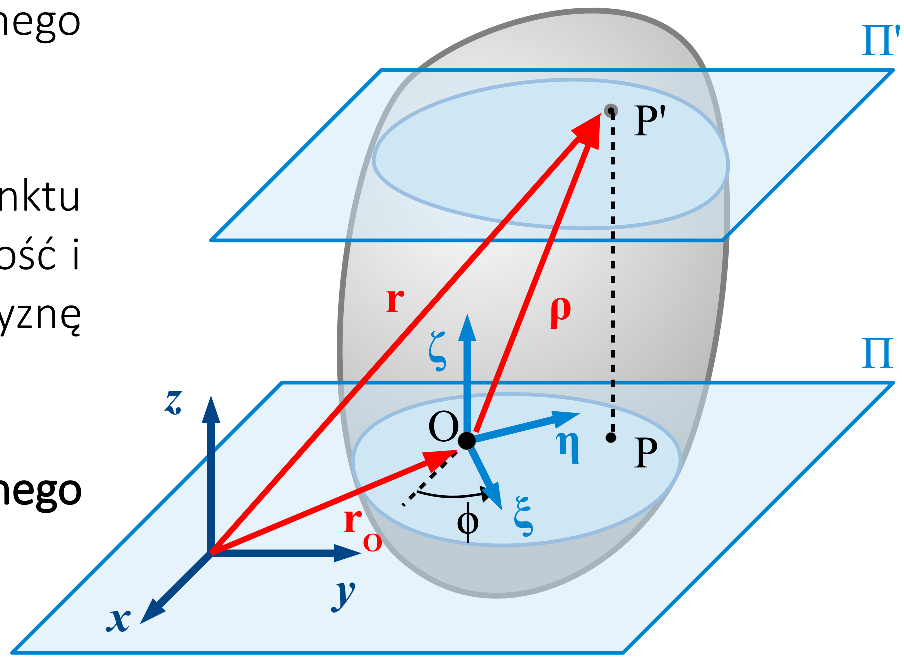
Trajektorie wszystkich punktów są krzywymi leżącymi w płaszczyznach równoległych

WNIOSKI:

- Płaszczyzny, w których leżą trajektorie punktów bryły nazywamy **płaszczyznami kierowniczymi** lub **płaszczyznami prowadzącymi**. Wśród nich wyróżnić możemy płaszczyznę zawierającą początek ruchomego układu odniesienia $\Pi \ni O$.

- Trajektoria, prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu P' bryły sztywnej są takie same, jak trajektoria, prędkość i przyspieszenie punktu będącego rzutem P' na płaszczyznę prowadzącą Π .

- Wystarczy zatem opisać **ruch przekroju poprzecznego bryły** jedną z płaszczyzn prowadzących.



RUCH PŁASKI

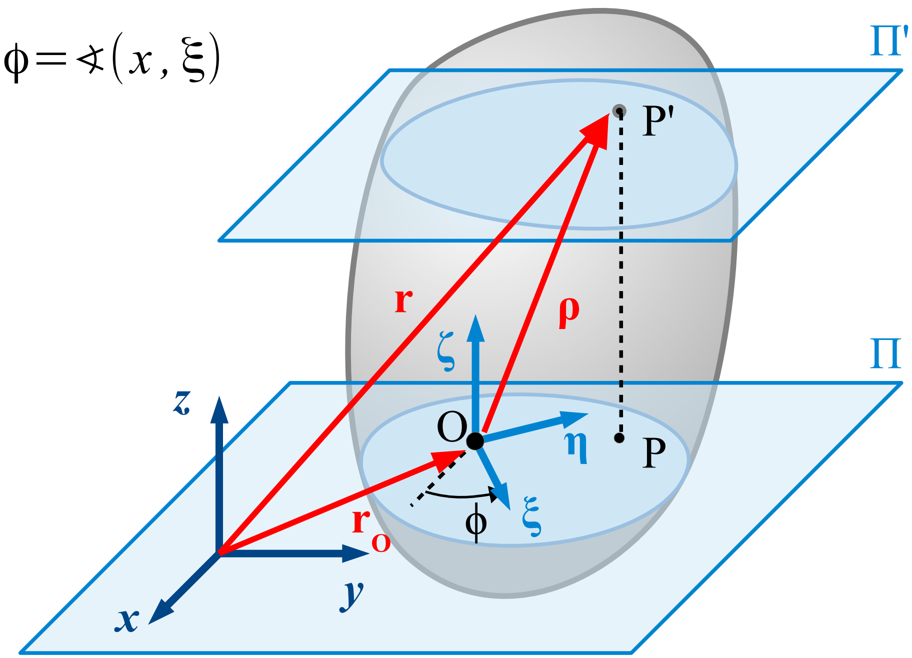
Przyjmijmy układy współrzędnych w taki sposób, że:

- Płaszczyzna (ξ,η) pokrywa się z płaszczyzną (x,y) i są one jedną z płaszczyzn prowadzących

wtedy:

- Współrzędna $z_O=0$ jest ustalona.
- Kąt nutacji jest równy $\theta=0$.
- Linia węzłów i pozostałe kąty Eulera są nieokreślone.
- Orientacja układu ruchomego jest określona przez kąt $\phi=\sphericalangle(x,\xi)$
- Wektor prędkości kątowej jest równy: $\boldsymbol{\omega}=[0,0,\dot{\phi}]$
- Macierz przejścia ma postać:

$$[\mathrm{A}_x^\xi]=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



RUCH PŁASKI

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathrm{r}^x] = [\mathrm{r}_O^x] + [\mathrm{A}_x^\xi]^{\mathrm{T}}[\rho^\xi]$$

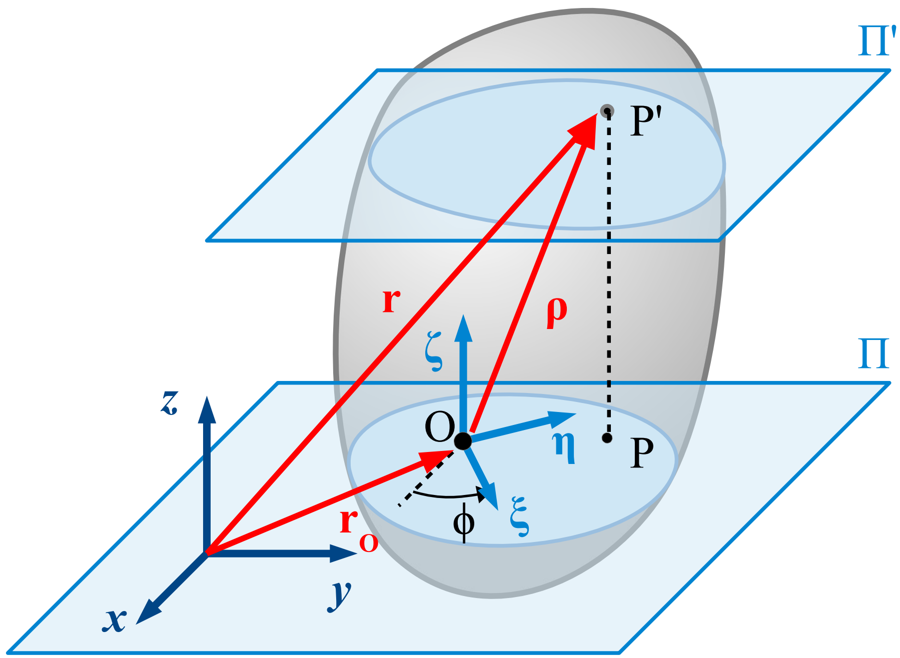
$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

$$z = \zeta, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

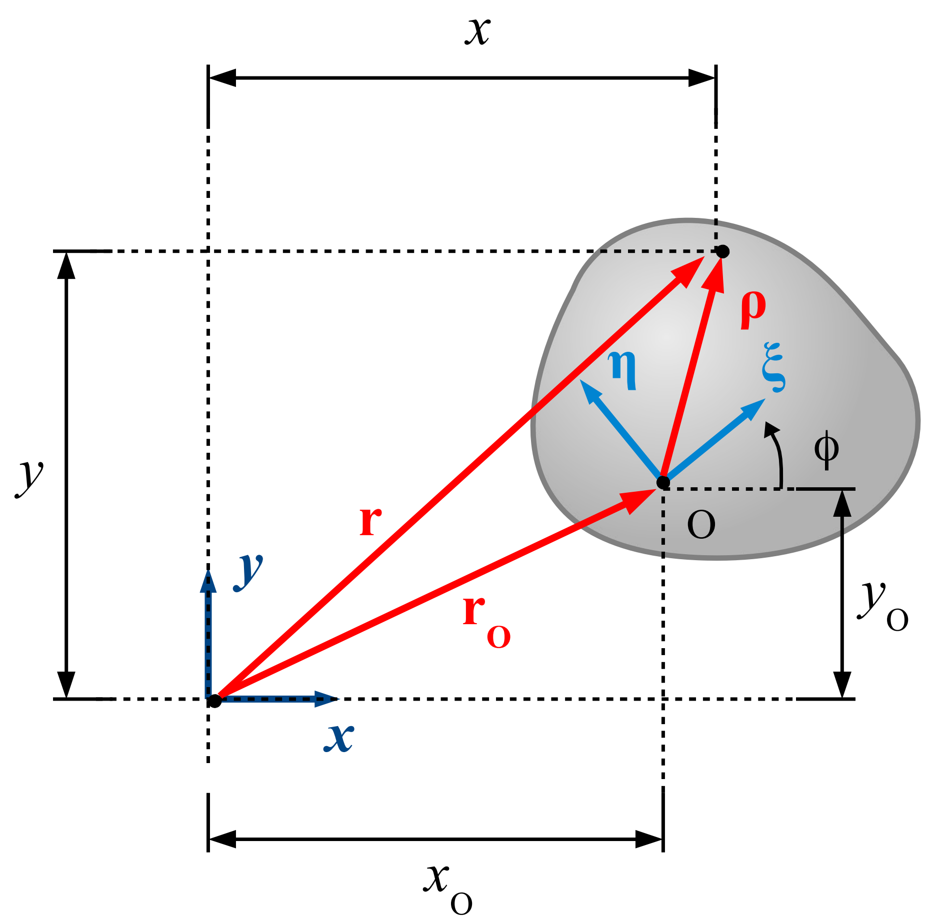


- Zmiennymi w ruchu są współrzędne x_O, y_O oraz kąt ϕ.
- Bryła sztywna wykonująca ruch płaski ma **LSS=3**.

RUCH PŁASKI

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\{x_O, y_O, \phi\} \quad \Rightarrow \quad LSS = 3}$$



Ruch płaski może być interpretowany jako złożenie:

- **Przesunięcia równoległego** $\mathbf{x_O} = [x_O, y_O]$ w płaszczyźnie prowadzącej.
- **Obrotu** o kąt ϕ wokół osi prostopadłej do płaszczyzny prowadzącej.

PRĘDKOŚĆ I PRZYSPIESZENIE W RUCHU PŁASKIM

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

W **układzie nieruchomym**:

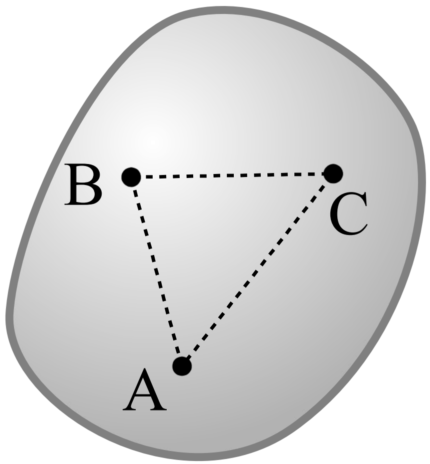
$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_O = \begin{bmatrix} x - x_O \\ y - y_O \\ z - z_O \end{bmatrix}_{\{x,y,z\}} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}_{\{\xi,\eta,\zeta\}} \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_O + \xi\cos\phi - \eta\sin\phi \\ y_O + \xi\sin\phi + \eta\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_O - \dot{\phi}(y - y_O) \\ \dot{y}_O + \dot{\phi}(x - x_O) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_O - \ddot{\phi}(y - y_O) - (\dot{\phi})^2(x - x_O) \\ \ddot{y}_O + \ddot{\phi}(x - x_O) - (\dot{\phi})^2(y - y_O) \end{bmatrix}$$

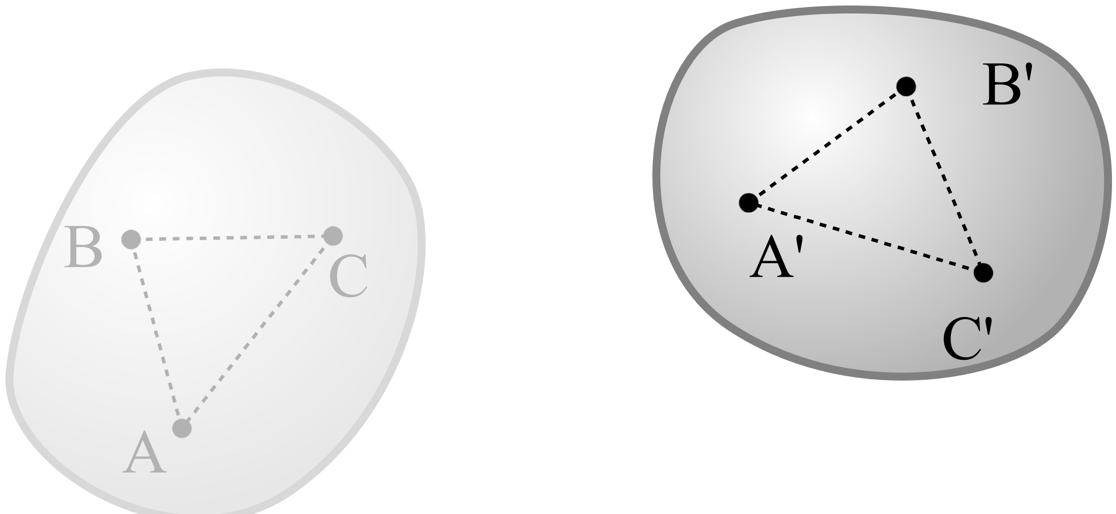
CHWILOWY ŚRODEK OBROTU



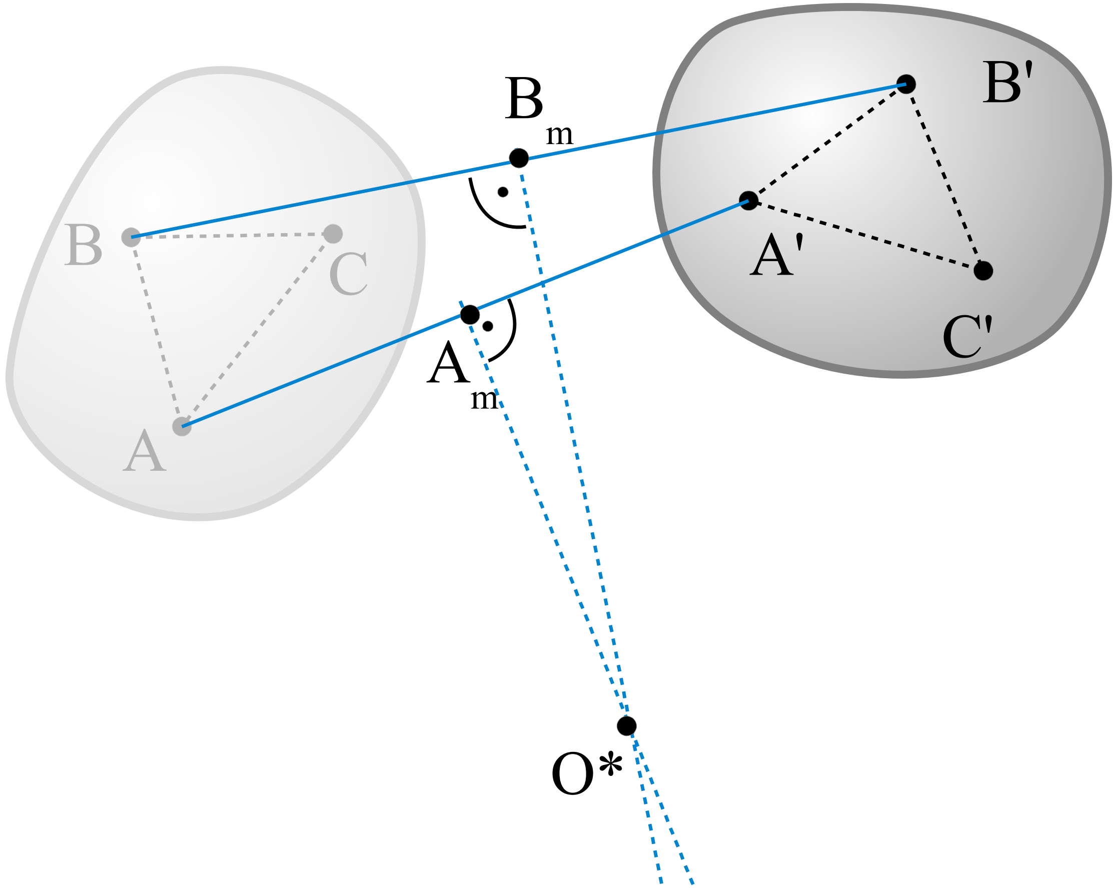
CHWILOWY ŚRODEK OBROTU

konfiguracja
początkowa

konfiguracja
aktualna

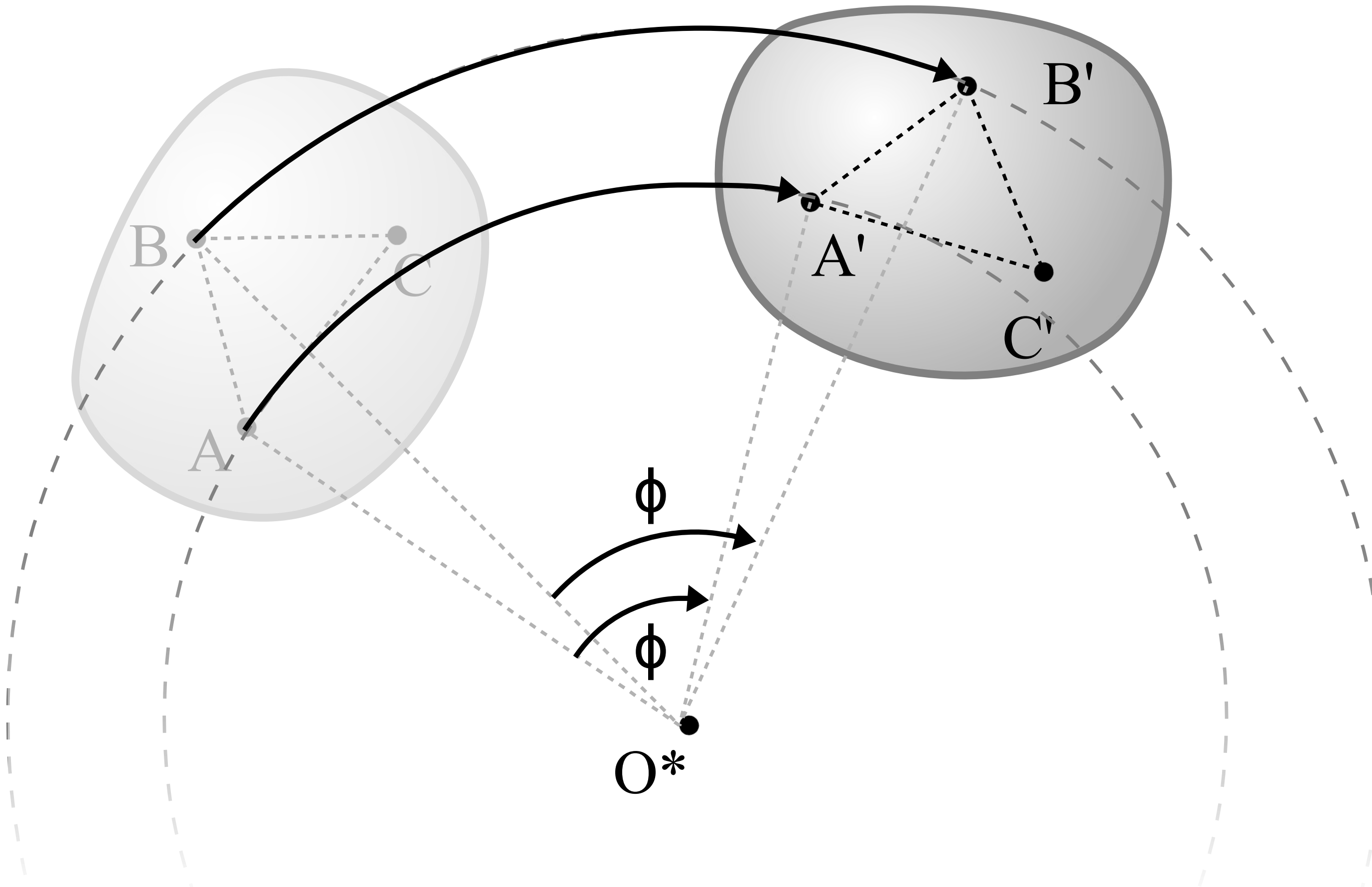


CHWILOWY ŚRODEK OBROTU



Konstruujemy symetralne odcinków $|A\,A'|$ i $|B\,B'|$ $\Rightarrow$ $|A\,A_m| = |A_m\,A'|$, $|B\,B_m| = |B_m\,B'|$ $\Rightarrow$ $\boxed{|O^*A| = |O^*A'| \quad |O^*B| = |O^*B'|}$

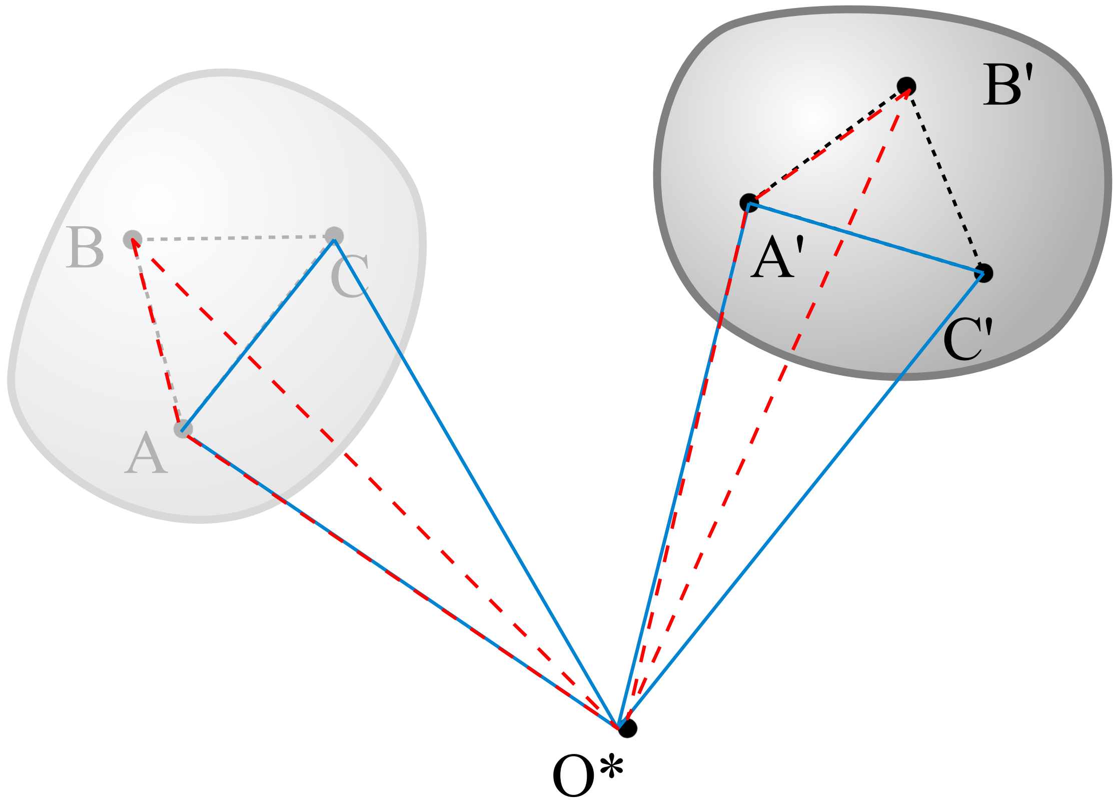
CHWILOWY ŚRODEK OBROTU



$$\Delta \mathrm{O^*AB} \sim \Delta \mathrm{O^*A'B'} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle(AO*A') = \sphericalangle(\mathrm{BO^*B'}) = \phi$$

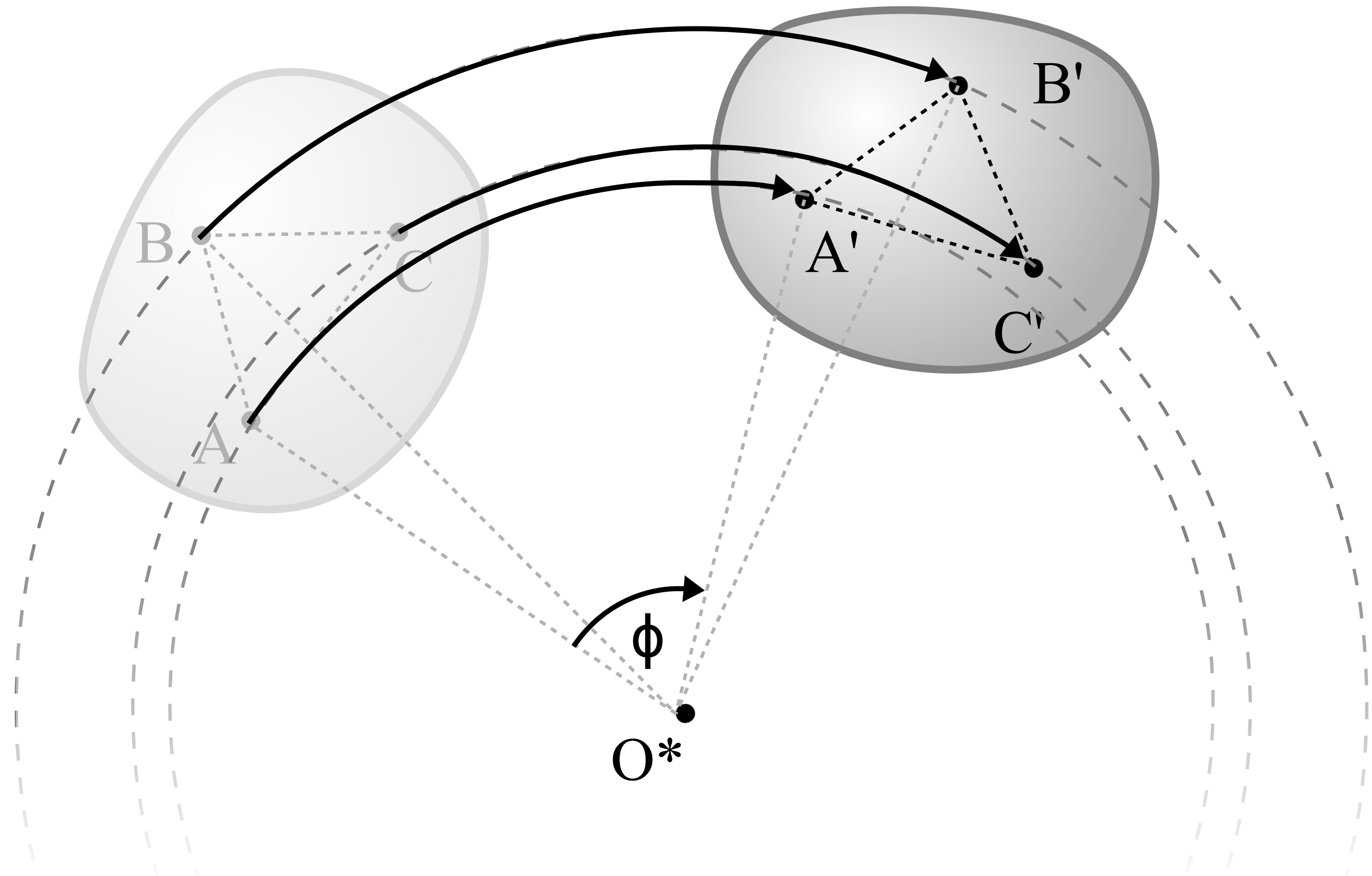
- Punkty A i B można przemieścić za pomocą pojedynczego obrotu w płaszczyźnie wokół punktu O*.
- Czy z tego wynika, że dowolny punkt C, można przemieścić za pomocą takiego samego obrotu?

CHWILOWY ŚRODEK OBROTU



$$\left.\begin{array}{r}\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \\ \Delta O^*AB \sim \Delta O^*A'B'\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta O^*AC \sim \Delta O^*A'C' \quad \Rightarrow \quad \boxed{|O^*C| = |O^*C'|}$$

CHWILOWY ŚRODEK OBROTU



- Punkt O^* nazywamy **chwilowym środkiem obrotu**.

CHWILOWY ŚRODEK OBROTU

- W przypadku, gdy $\Delta t \to 0$, w każdej chwili ruchu dowolne przemieszczenie może być interpretowane jako obrót wokół chwilowego środka obrotu.

- Wektory prędkości są styczne do trajektorii, która w każdym punkcie może być przybliżana okręgiem stycznym do wektora prędkości. Środek każdego z tych okręgów leży w chwilowym środku obrotu. Promień takiego okręgu obliczamy następująco:

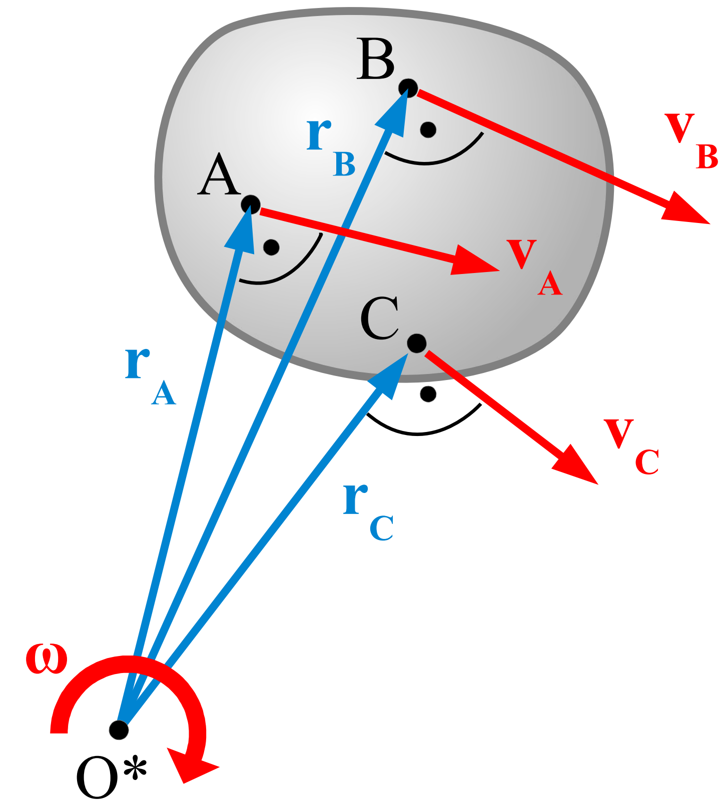
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega}|\,|\mathbf{R}|\sin 90^\circ \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v}{\omega}$$

- W ustalonej chwili ω jest identyczne dla wszystkich punktów bryły sztywnej.

$$v_A = \omega r_A$$

$$v_B = \omega r_B$$

$$v_C = \omega r_C$$



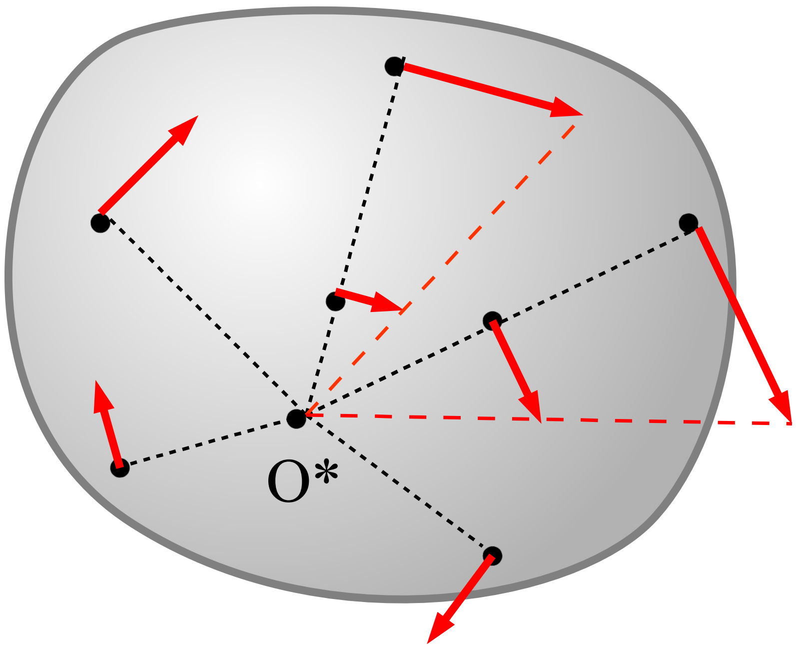
CHWILOWY ŚRODEK OBROTU

Pole prędkości w chwilowym środku obrotu jest zerowe.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$

Jeśli znaleźliśmy **punkt nieruchomy** (o zerowej prędkości), a bryła może się poruszać, to punkt ten **musi być chwilowym środkiem obrotu.**



WYZNACZANIE CHWILOWEGO ŚRODKA OBROTU

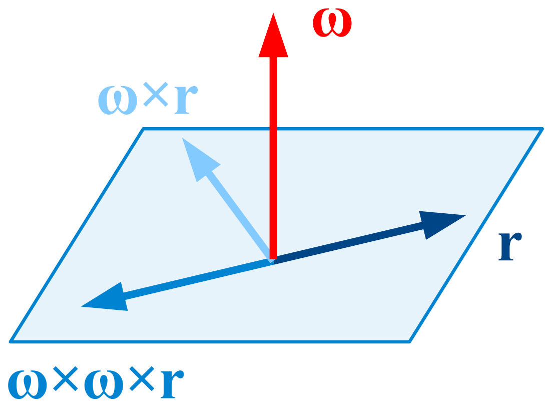
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

$$\mathbf{v}_{O*} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}_{O*} - \mathbf{r}_O\right) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{O*} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_O = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_O - \omega^2\mathbf{r}_{O*} + \omega^2\mathbf{r}_O = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\mathbf{r}_{O*} = \mathbf{r}_O + \frac{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_O}{\omega^2}}$$



$$|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}| = \omega|\mathbf{r}|$$

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}| = \omega^2|\mathbf{r}|$$

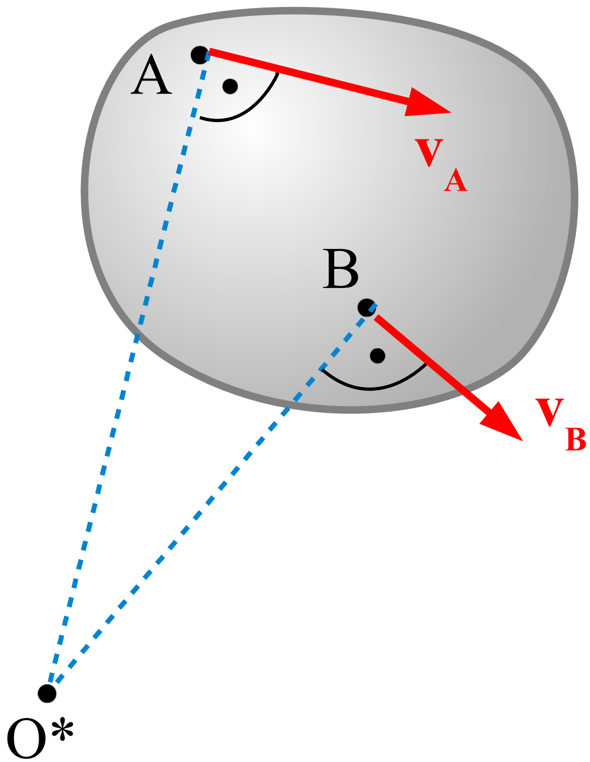
$$\mathbf{r}\perp\boldsymbol{\omega}\ ,\ \mathbf{r}\perp(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\perp\boldsymbol{\omega}\ ,\ (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\perp(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$\Downarrow$$

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = -\omega^2\mathbf{r}$$

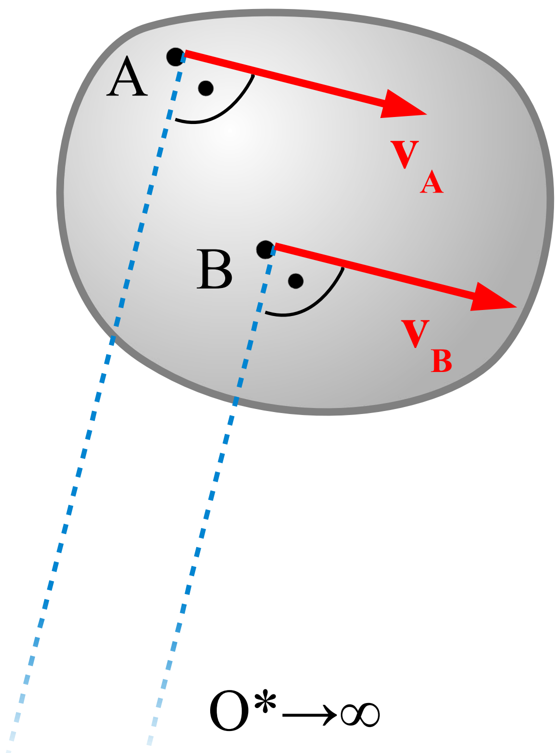
WYZNACZANIE CHWILOWEGO ŚRODKA OBROTU



Środek chwilowego obrotu leży **w punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do kierunków prędkości.**

- Chwilowy środek obrotu może znajdować się poza bryłą lub we wnętrzu bryły.

WYZNACZANIE CHWILOWEGO ŚRODKA OBROTU



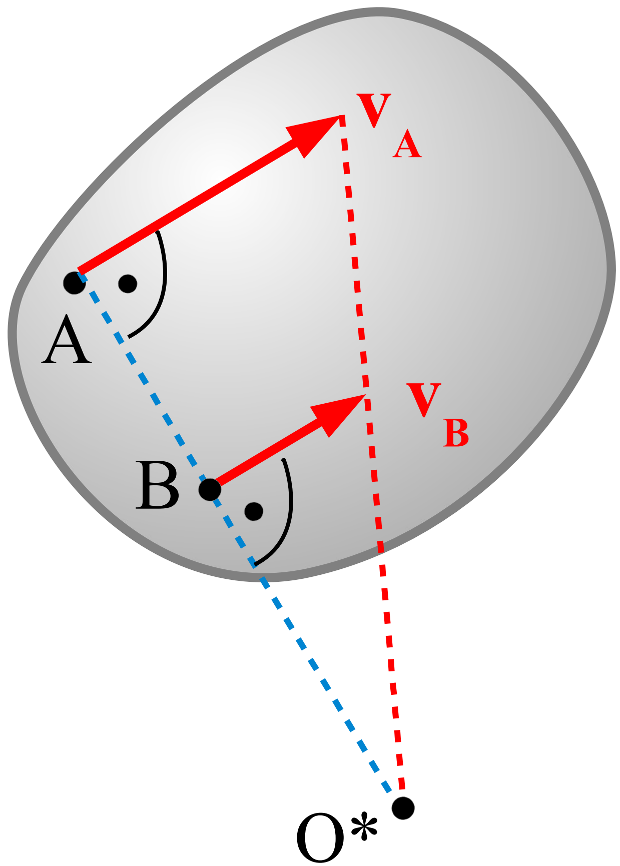
Środek chwilowego obrotu leży **w punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do kierunków prędkości.**

- Jeśli proste te są równoległe, mówimy o **niewłaściwym chwilowym środku obrotu w nieskończoności**.
- Z twierdzeń o rozkładzie prędkości w bryle sztywnej wynika, że rzuty wektorów prędkości na prostą łączącą te punkty muszą być równe. Jeśli punkty nie leżą na prostej prostopadłej do ich prędkości, to ponieważ te prędkości są równoległe, to **prędkości muszą być równe**.

$$\begin{array}{l} \mathbf{v}_A \cdot \vec{\mathrm{AB}} = \mathbf{v}_B \cdot \vec{\mathrm{AB}} \\ \measuredangle(\mathbf{v}_A, \vec{\mathrm{AB}}) = \measuredangle(\mathbf{v}_B, \vec{\mathrm{AB}}) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B}$$

- W takim przypadku bryła doznaje **translacji**.

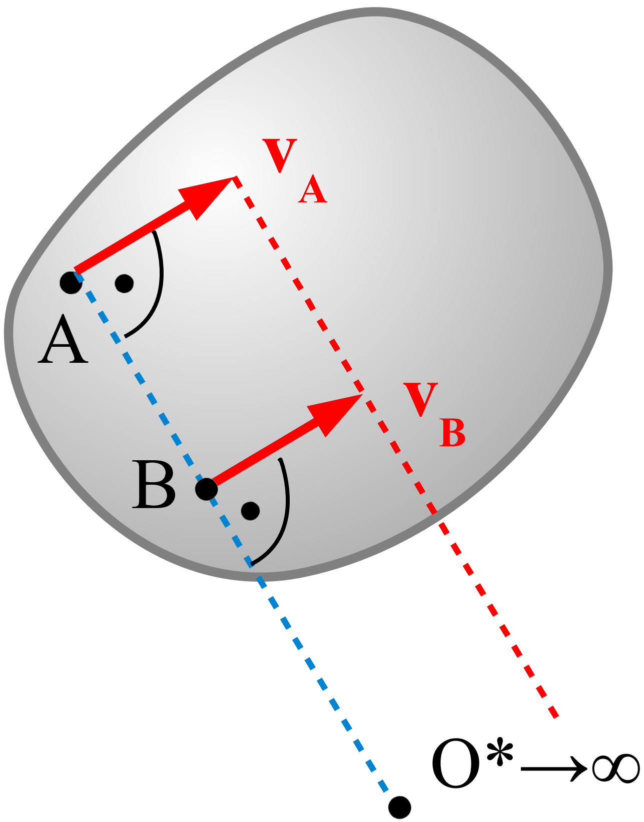
WYZNACZANIE CHWILOWEGO ŚRODKA OBROTU



- Z twierdzeń o rozkładzie prędkości w bryle sztywnej wynika, że końcówki wektorów prędkości punktów leżących na jednej prostej leżą na jednej prostej.
- Prędkość chwilowego środka obrotu jest zerowa.

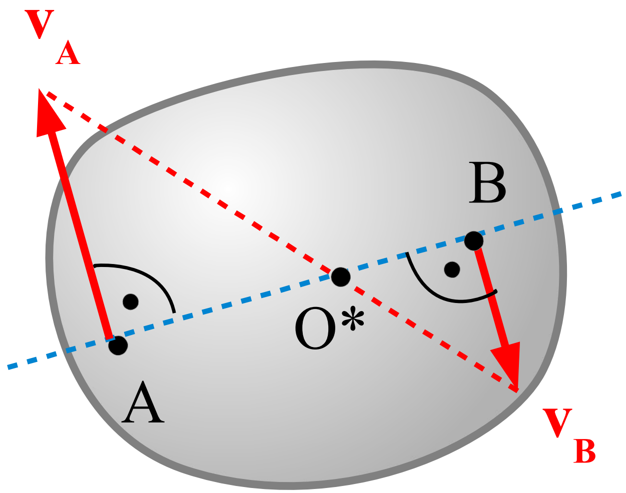
Środek chwilowego obrotu leży w punkcie **przecięcia się prostej, na której leżą punkty o znanych prędkości prostopadłych do tej prostej oraz prostej łączącej końcówki tych wektorów prędkości.**

WYZNACZANIE CHWILOWEGO ŚRODKA OBROTU



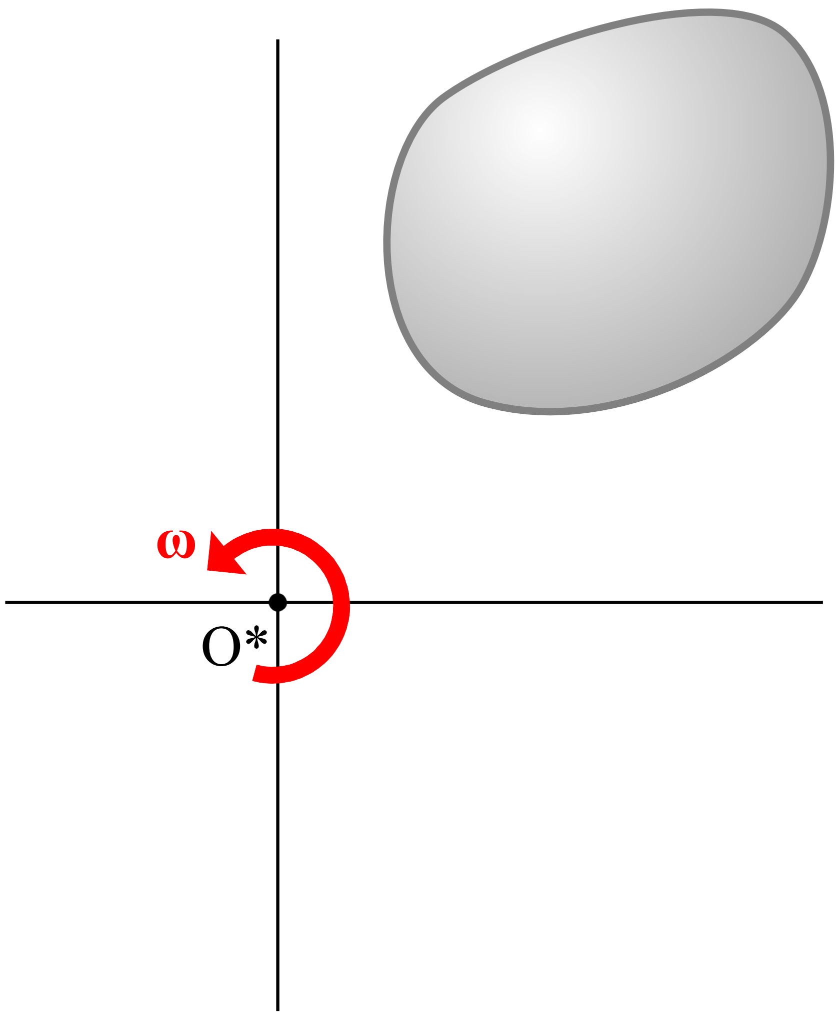
Środek chwilowego obrotu leży w punkcie **przecięcia się prostej, na której leżą punkty o znanych prędkości prostopadłych do tej prostej oraz prostej łączącej końcówki tych wektorów prędkości.**

WYZNACZANIE CHWILOWEGO ŚRODKA OBROTU



Środek chwilowego obrotu leży w punkcie **przecięcia się prostej, na której leżą punkty o znanych prędkości prostopadłych do tej prostej oraz prostej łączącej końcówki tych wektorów prędkości.**

ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM



Rozkład pola prędkości **zależy** od:

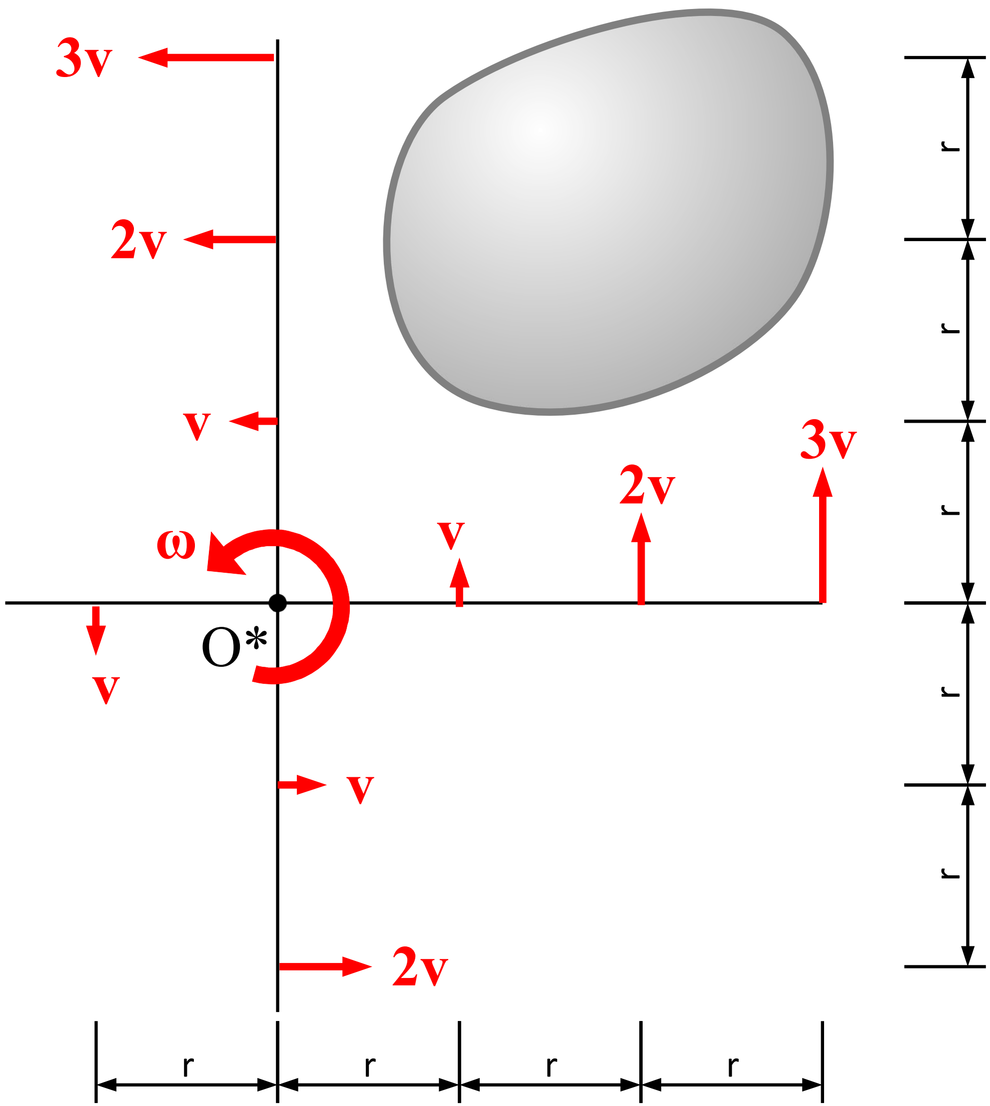
- położenia chwilowego środka obrotu
- prędkości kątowej

Rozkład pola prędkości **nie zależy** od:

- kształtu bryły sztywnej
- tego, czy chwilowy środek obrotu należy do bryły czy nie

Możemy analizować pole prędkości we wszystkich punktach płaszczyzny, również tych, które są poza konfiguracją bryły.

ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r} \in \Pi \\ \mathbf{r} \perp \boldsymbol{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} \in \Pi \\ \mathbf{v} \perp \mathbf{r} \end{cases}$$

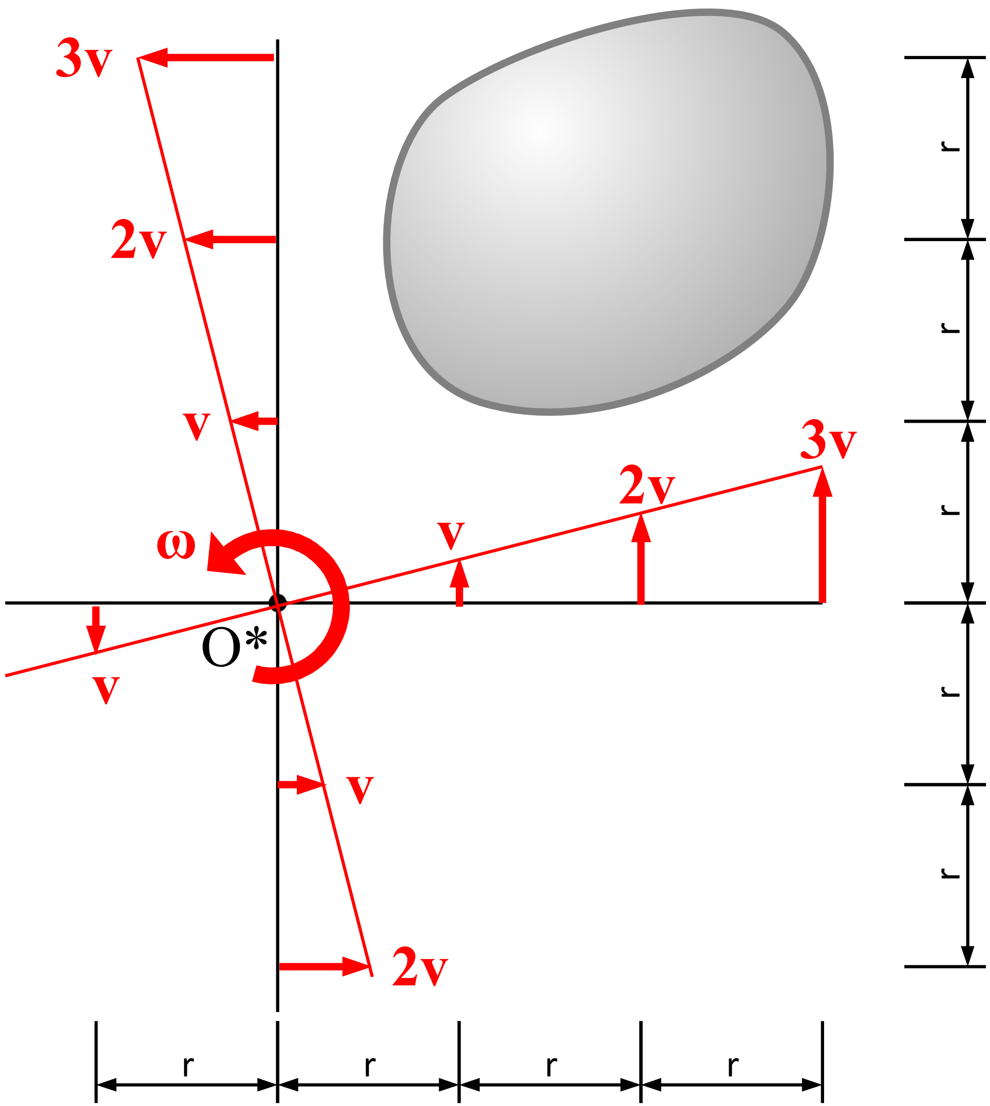
Punkty na **prostej poziomej** przechodzącej przez O* mają **prędkości pionowe**

Punkty na **prostej pionowej** przechodzącej przez O* mają **prędkości poziome**

Prędkość jest proporcjonalna do **prędkości kątowej** i do **odległości od O***.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad v = \omega r$$

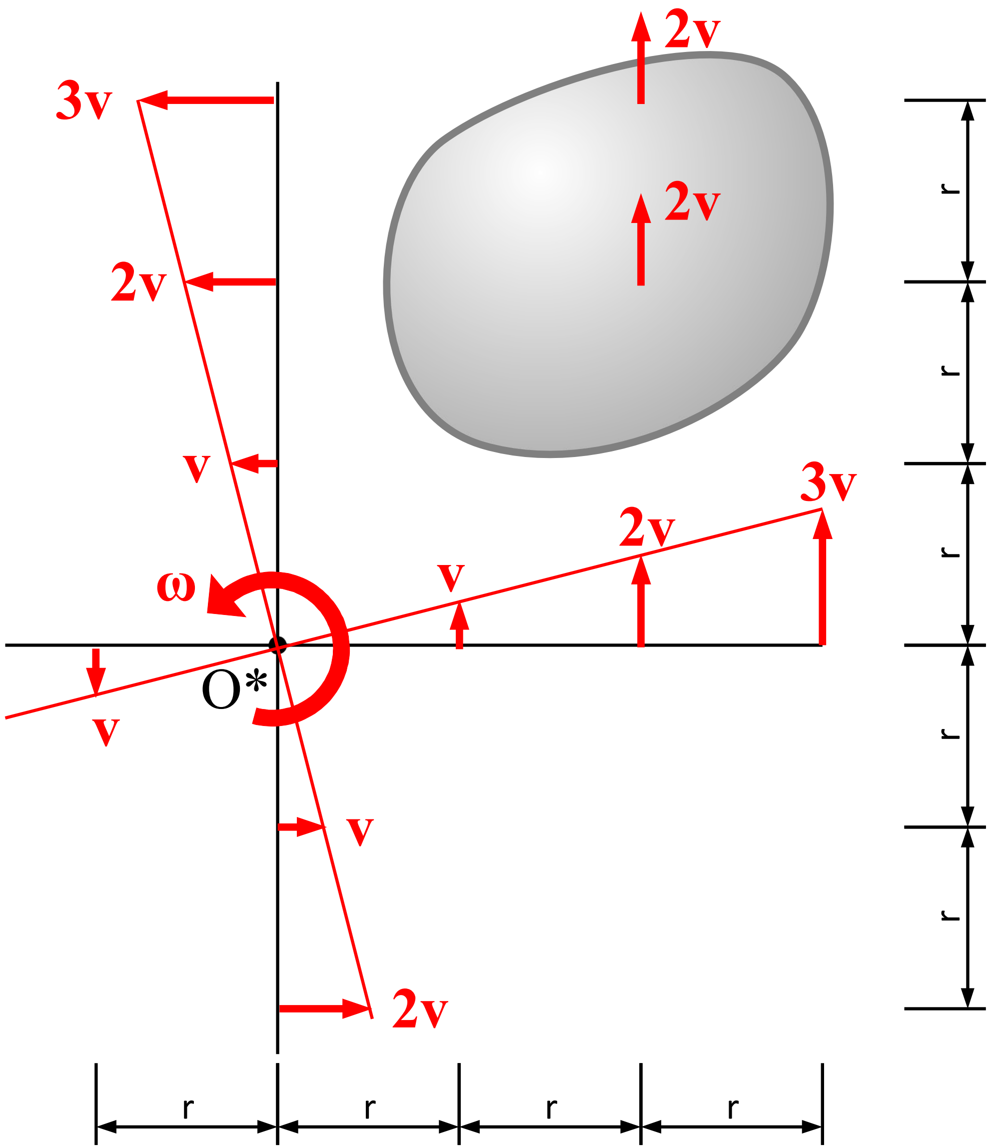
ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM



TWIERDZENIE

Końcówki wektorów prędkości punktów leżących na jednej prostej w bryle sztywnej leżą na jednej prostej.

ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM



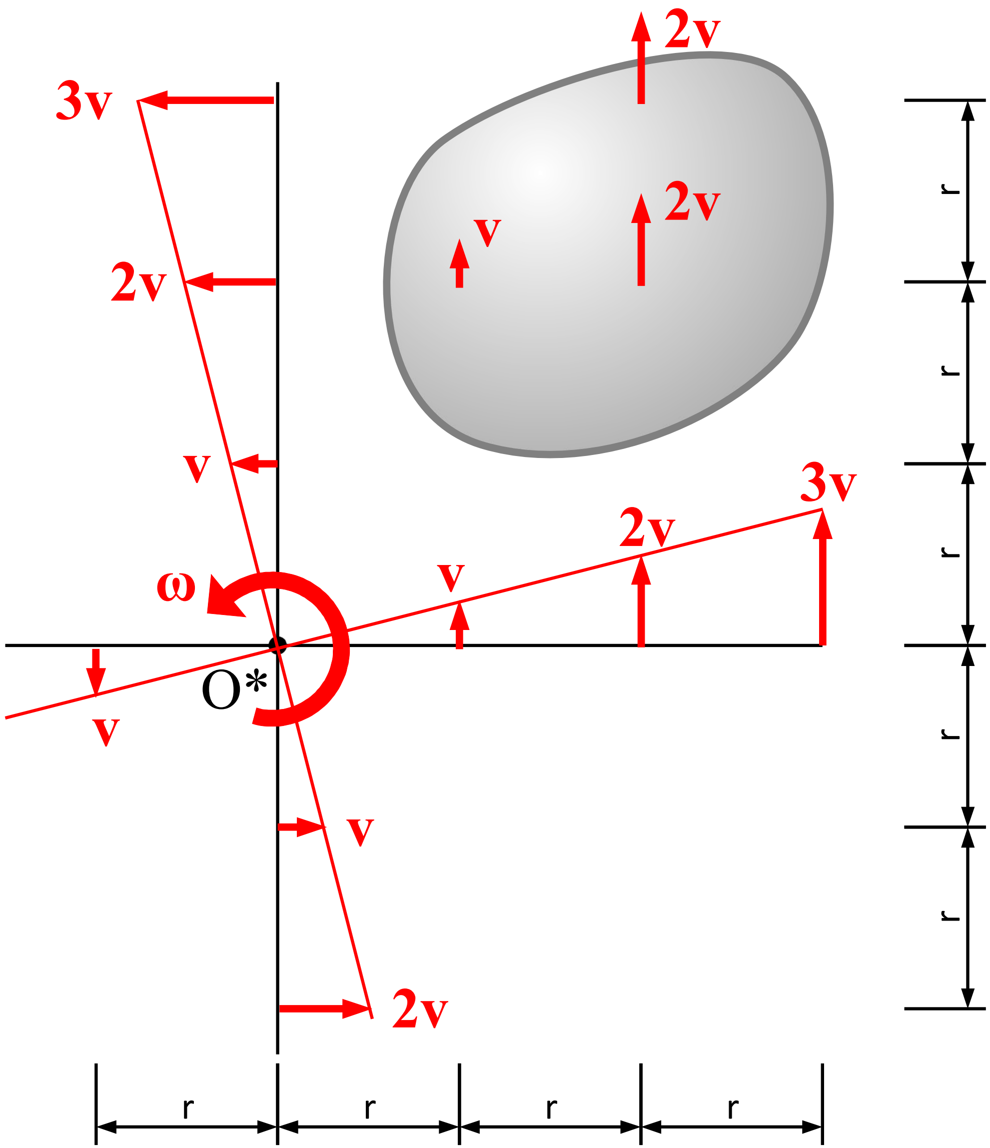
TWIERDZENIE

Rzuty wektorów prędkości na prostą łączącą dwa punkty bryły sztywnej są równe.

Prędkości **pionowe** punktów bryły sztywnej leżących na prostej **pionowej** są takie same.

*„Prędkości **pionowe** możemy przesuwać w **pionie**"*

ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM



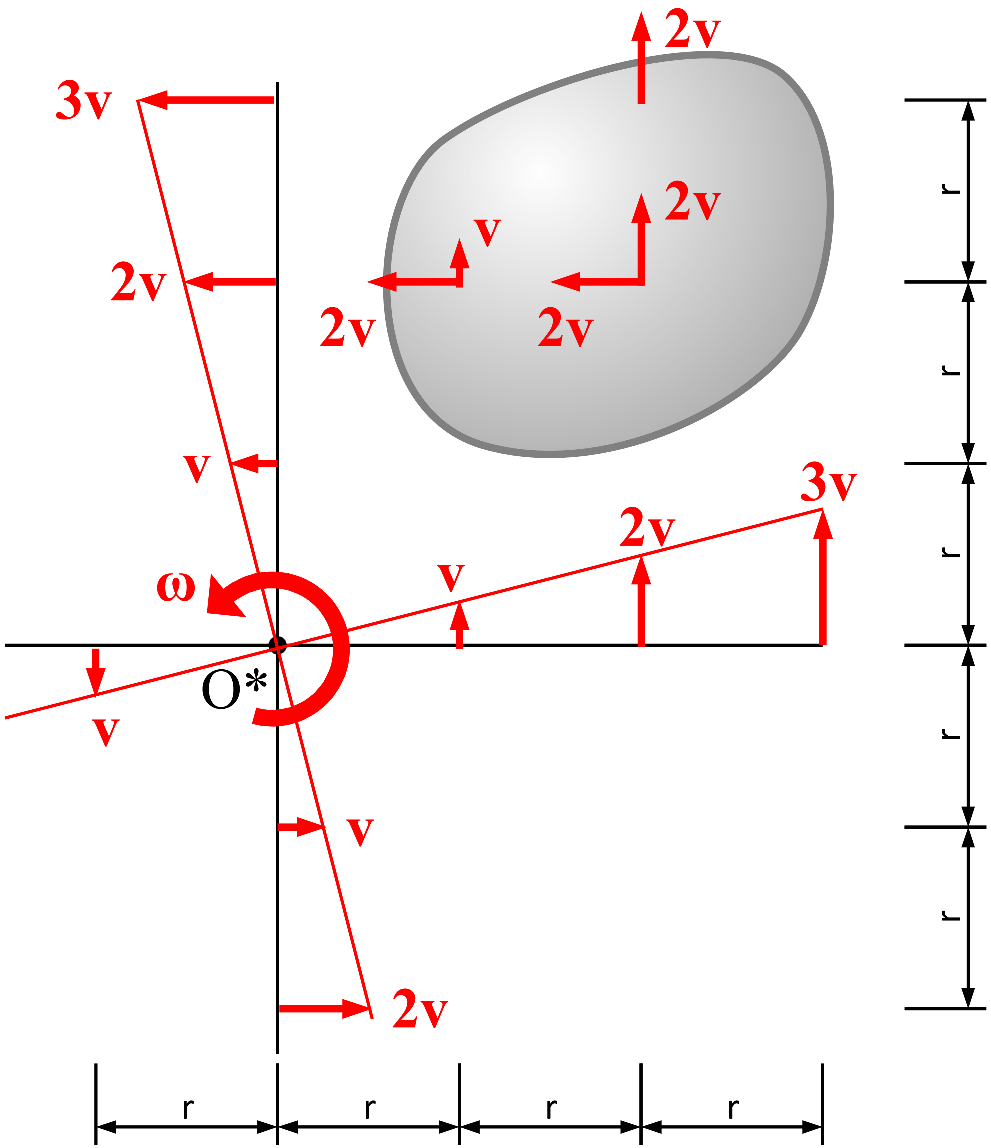
TWIERDZENIE

Rzuty wektorów prędkości na prostą łączącą dwa punkty bryły sztywnej są równe.

Prędkości **pionowe** punktów bryły sztywnej leżących na prostej **pionowej** są takie same.

*„Prędkości **pionowe** możemy przesuwać w **pionie**"*

ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM



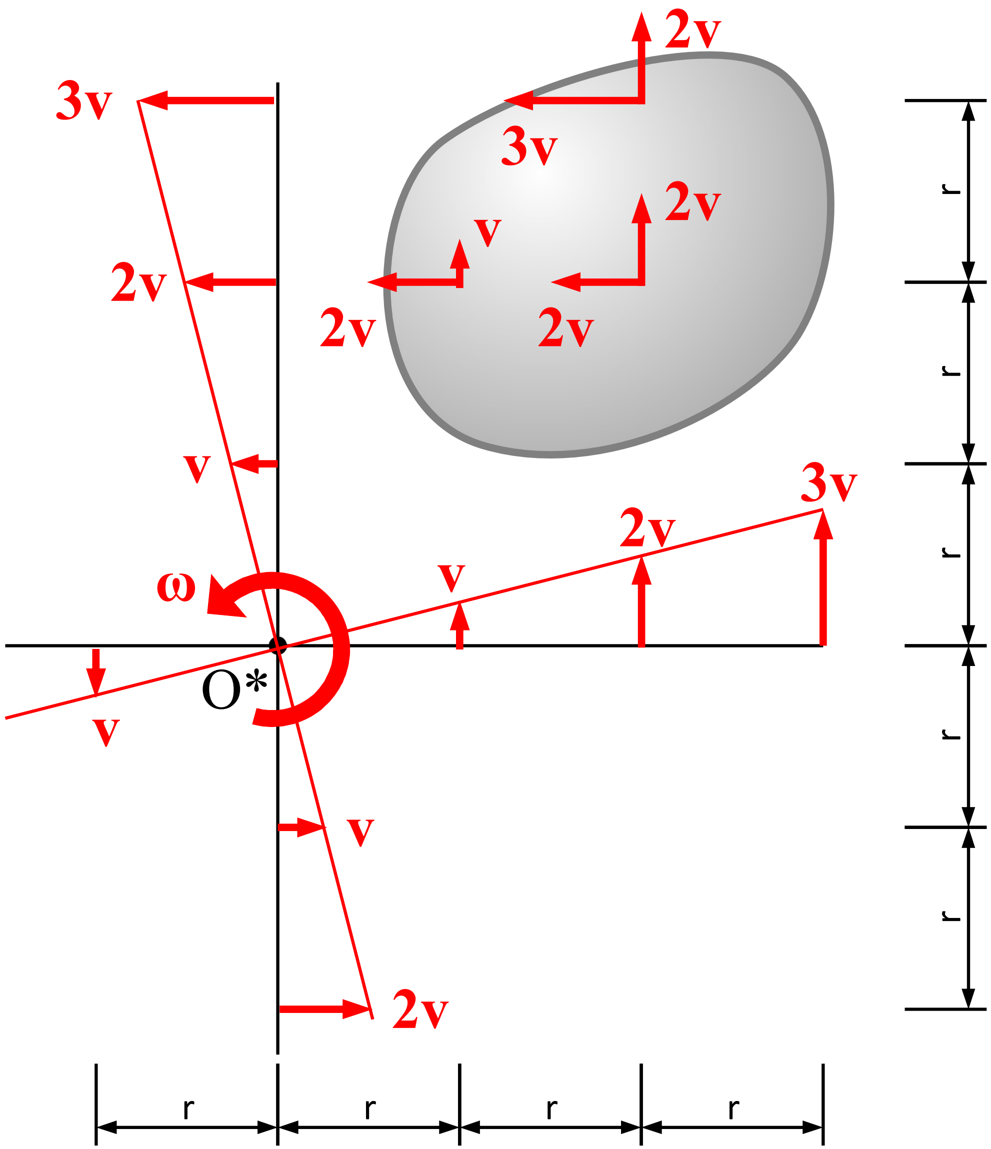
TWIERDZENIE

Rzuty wektorów prędkości na prostą łączącą dwa punkty bryły sztywnej są równe.

Prędkości **poziome** punktów bryły sztywnej leżących na prostej **poziomej** są takie same.

*„Prędkości **poziome** możemy przesuwać w **poziomie**”*

ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM



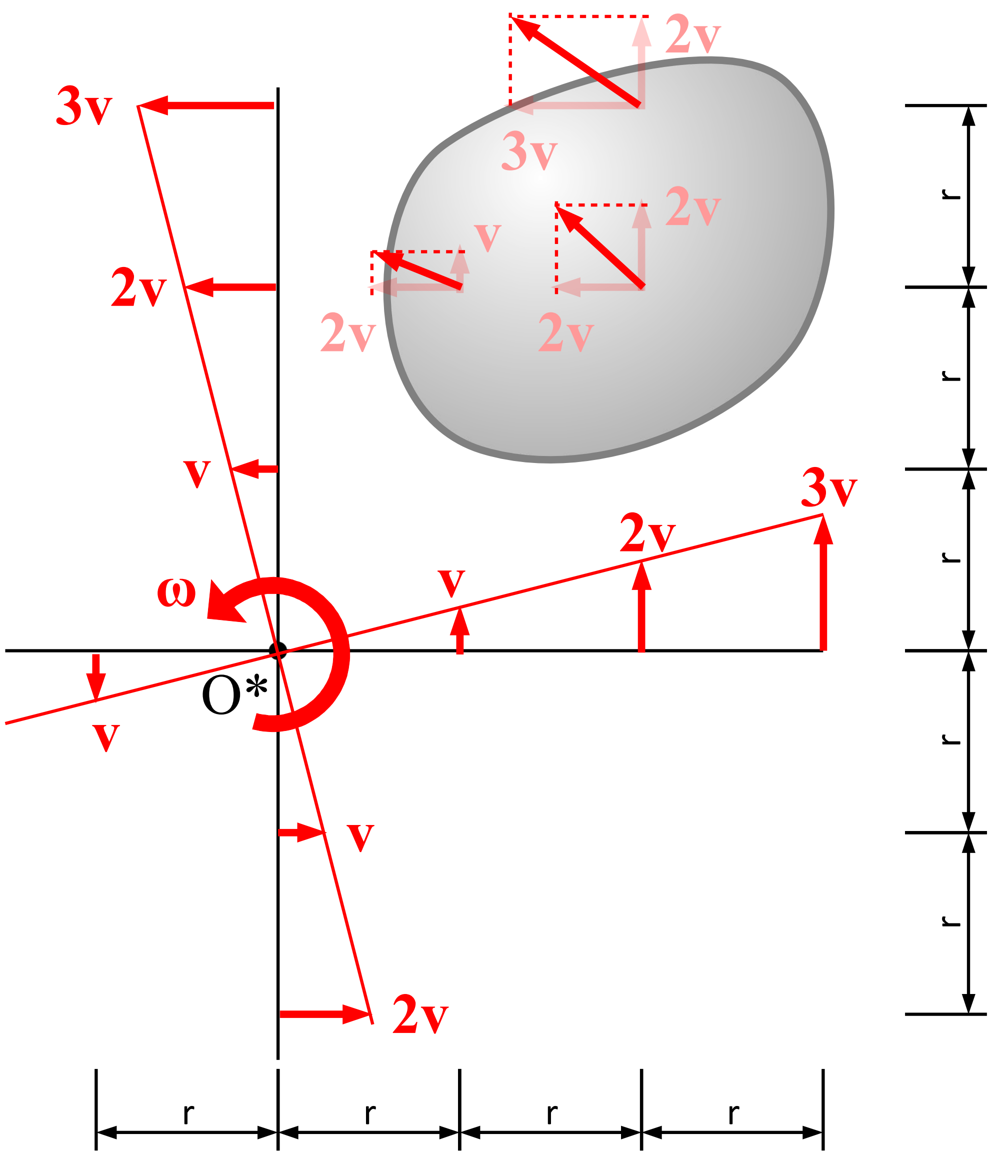
TWIERDZENIE

Rzuty wektorów prędkości na prostą łączącą dwa punkty bryły sztywnej są równe.

Prędkości **poziome** punktów bryły sztywnej leżących na prostej **poziomej** są takie same.

*„Prędkości **poziome** możemy przesuwać w **poziomie**”*

ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM

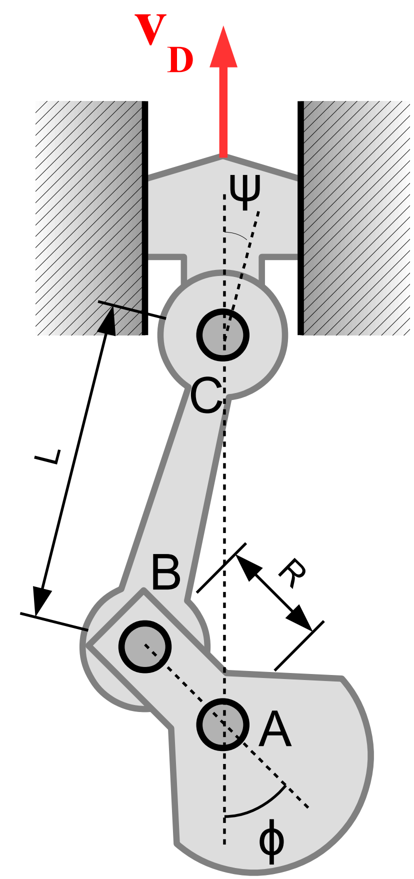


ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM

PRZYKŁAD:

Wiedząc, że punkt A jest nieruchomy, prędkość tłoka w danej chwili jest równa v_D, zaś geometria układu dana jest parametrami R, L, ϕ, wyznaczyć:

- chwilowe środki obrotu dla każdej z brył tworzących mechanizm
- prędkości kątowe dla każdej z brył
- prędkości w przegubach B i C

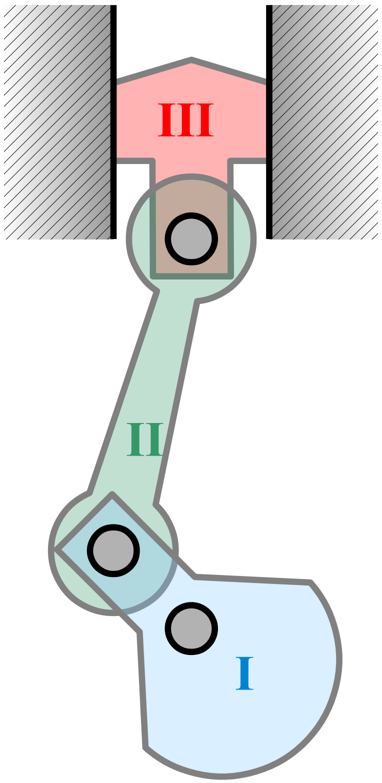


$$\psi = \arcsin\left(\frac{R}{L}\sin\phi\right)$$

ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM

PRZYKŁAD:

- Układ składa się z 3 brył sztywnych połączonych 2 przegubami.
- Każda z brył sztywnych ma swój chwilowy środek obrotu, w ogólności różny od chwilowych środków obrotu pozostałych brył.
- Każda z brył sztywnych ma swoją prędkość kątową

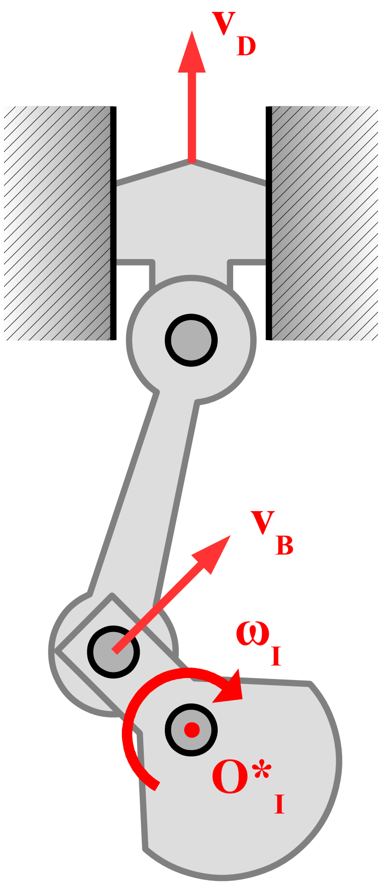


ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM

PRZYKŁAD:

- Środek chwilowego obrotu bryły I znajdujemy od razu – jest to punkt nieruchomy bryły I.
- Prędkość kątowa bryły I jest póki co nieznana. Zakładamy pewną wartość ω_I
- Prędkość w przegubie B wyznaczamy z warunku:

$$v_B = \omega_I R$$



ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM

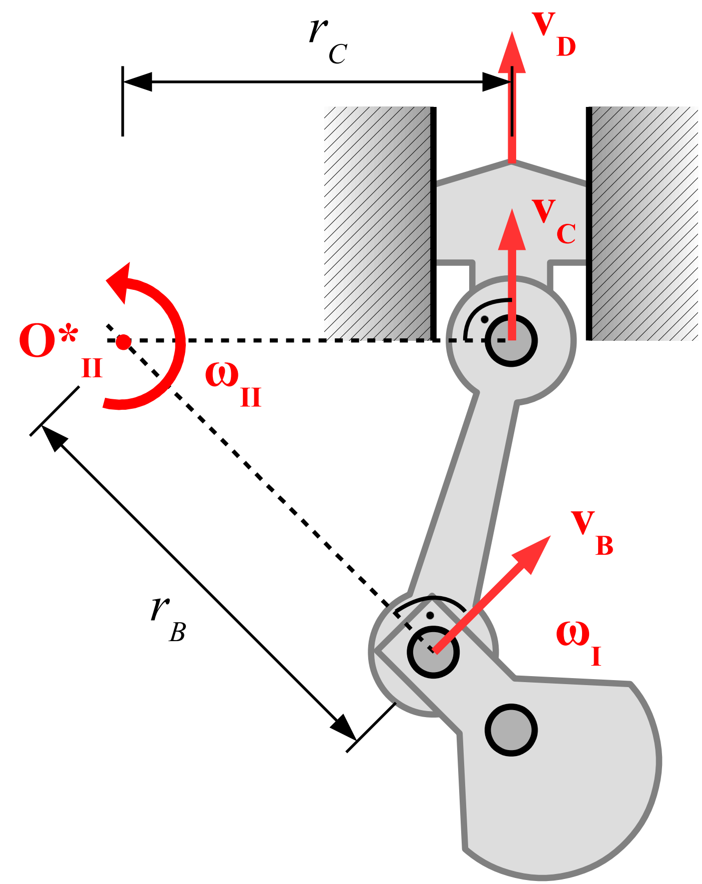
PRZYKŁAD:

- Środek chwilowego obrotu bryły II znajdujemy w **punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do prędkości**.
- Kierunek prędkości punktu B jest znany.
- Kierunek prędkości punktu C również jest znany ponieważ jest to punktu wspólny z tłokiem, który może poruszać się tylko pionowo.
- Zwrot i wielkość prędkości kątowej bryły II wyznaczamy na podstawie prędkości punktu B

$$v_B = \omega_I R = \omega_{II} r_B \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{II} = \frac{v_B}{r_B} = \frac{\omega_I R}{L \dfrac{\cos\psi}{\cos\phi}}$$

- Prędkość w przegubie C wyznaczamy z warunku:

$$v_C = \omega_{II} r_C = \omega_{II} L \left(\sin\psi + \cos\psi \,\mathrm{tg}\,\phi\right)$$



ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RUCHU PŁASKIM

PRZYKŁAD:

- Środek chwilowego obrotu bryły III znajdujemy w **punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do prędkości**.

- Są to proste równoległe. Chwilowy środek obrotu jest punktem niewłaściwym w nieskończoności.

- Bryła III doznaje **translacji**. **Wszystkie jej punkty mają takie same prędkości**. W szczególności

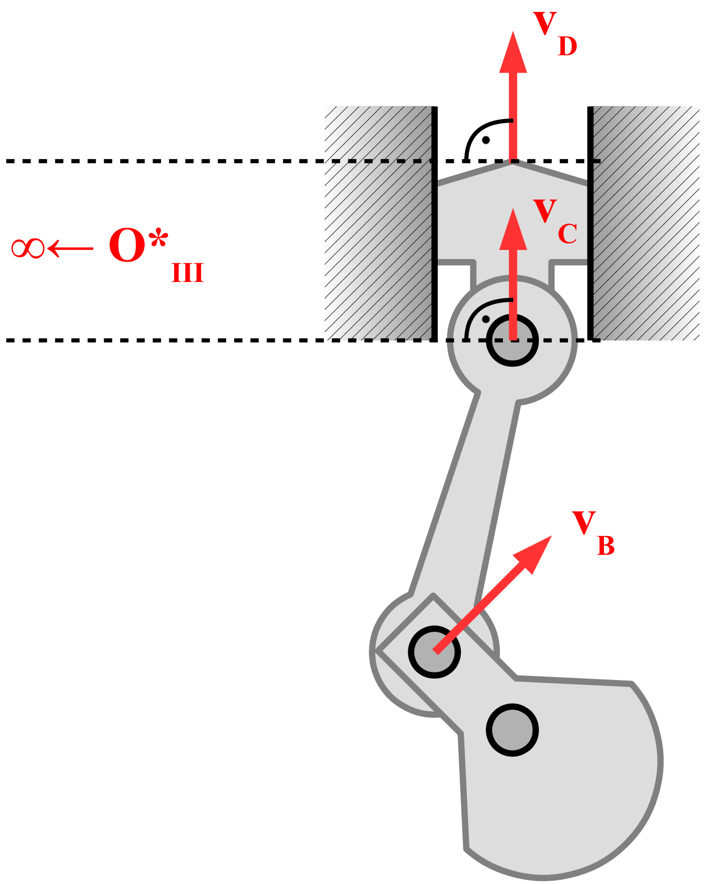
$$v_D = v_C$$

- Stąd:

$$\omega_I = \frac{v_D}{R} \frac{\cos\psi}{\cos\phi(\sin\psi + \cos\psi \operatorname{tg}\phi)}$$

$$\omega_{II} = \frac{v_D}{L} \frac{1}{(\sin\psi + \cos\psi \operatorname{tg}\phi)}$$

$$v_B = v_D \frac{\cos\psi}{\cos\phi(\sin\psi + \cos\psi \operatorname{tg}\phi)}$$



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ