MECHANIKA TEORETYCZNA

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

WIĘZY I REAKCJE W UKŁADACH MECHANICZNYCH

STATYKA

STATYKA UKŁADÓW SIŁ:

- dział mechaniki zajmujący się określaniem definicji i warunków równoważności układów sił.
  - Definicja układu zerowego i warunki równoważności z układem zerowym
  - O układach statycznie równoważnych układowi zerowemu mówimy, że są w równowadze.

STATYKA UKŁADÓW MECHANICZNYCH:

- dział mechaniki zajmujący się określaniem **warunków które muszą być spełnione, aby dany** układ ciał (w szczególności mas punktowych) **przy zadanych** więzach **nałożonych na ich ruch** był w spoczynku względem przyjętego układu odniesienia.

Równowaga układu sił działających na układ ciał jest **warunkiem koniecznym** na to, aby **układ był w spoczynku**, ale **nie jest warunkiem wystarczającym**. Układ obciążony siłami w równowadze w dalszym ciągu może poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

REAKCJE

Wiemy, że miarą wymuszenia ruchu są siły i momenty sił. **Więzy** stanowią swego rodzaju **wymuszenie określonej postaci ruchu**.

Postulujemy zatem **istnienie biernych sił reakcji**, które pojawiają się jedynie jako **odpowiedź (reakcja) otoczenia** (w szczególności: innych ciał, podpór narzucających więzy), **na siły czynne** obciążające układ.

Reakcje to takie siły, które **gwarantują spełnienie warunków więzów**.

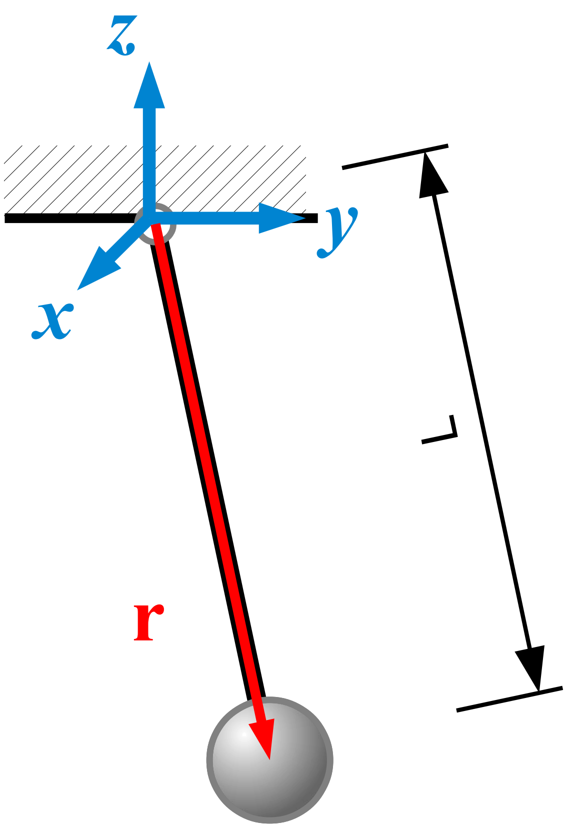
Postulujemy, że:

Ruch układu nieswobodnego pod działaniem sił czynnych
jest taki sam jak
ruch układu swobodnego pod sumarycznym działaniem sił czynnych i sił reakcji.

WIĘZY

WIĘZY – wszelkie ograniczenia nałożone na ruch układu ciał.

Przykładowo:



WAHADŁO

- ustalona odległość od wybranego punktu

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = const.$$

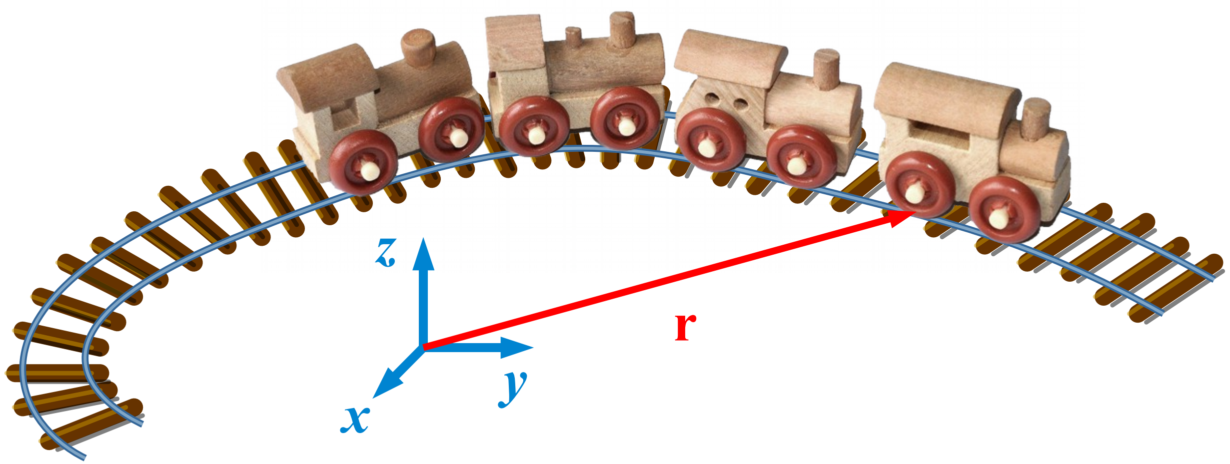
WIĘZY

WIĘZY – wszelkie ograniczenia nałożone na ruch układu ciał.

Przykładowo:

KOLEJ
- ustalony tor

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases}$$



WIĘZY

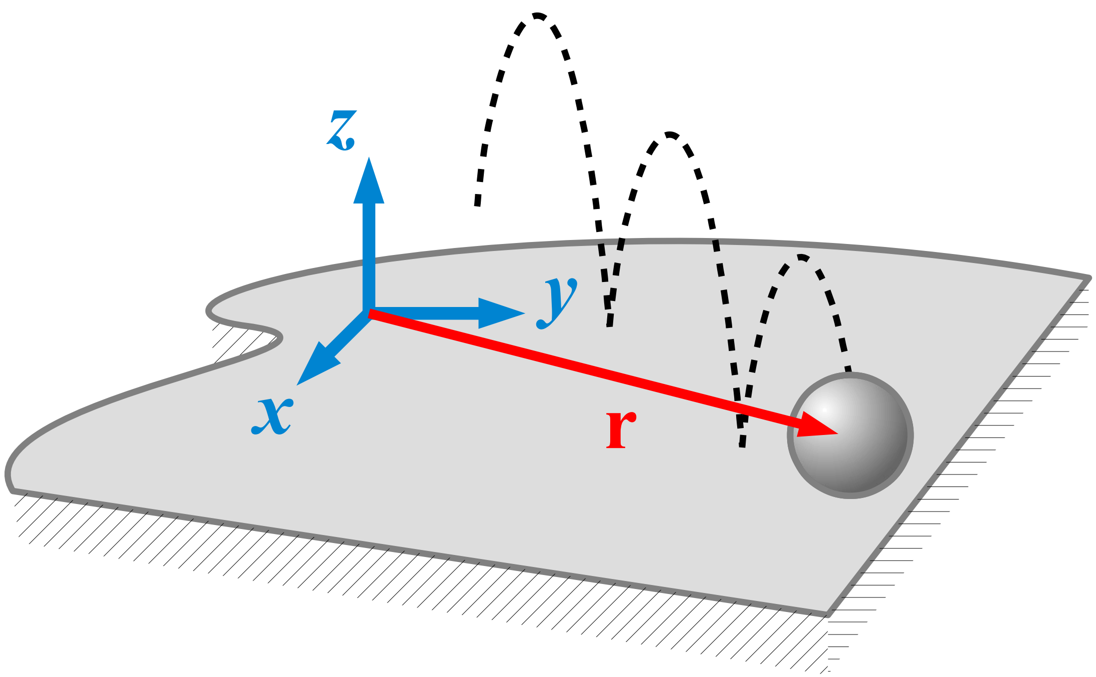
WIĘZY – wszelkie ograniczenia nałożone na ruch układu ciał.

Przykładowo:

RUCH W PÓŁPRZESTRZENI

- ograniczenie na wartości współrzędnych

$$z > 0$$



WIĘZY

WIĘZY – wszelkie ograniczenia nałożone na ruch układu ciał.

Przykładowo:

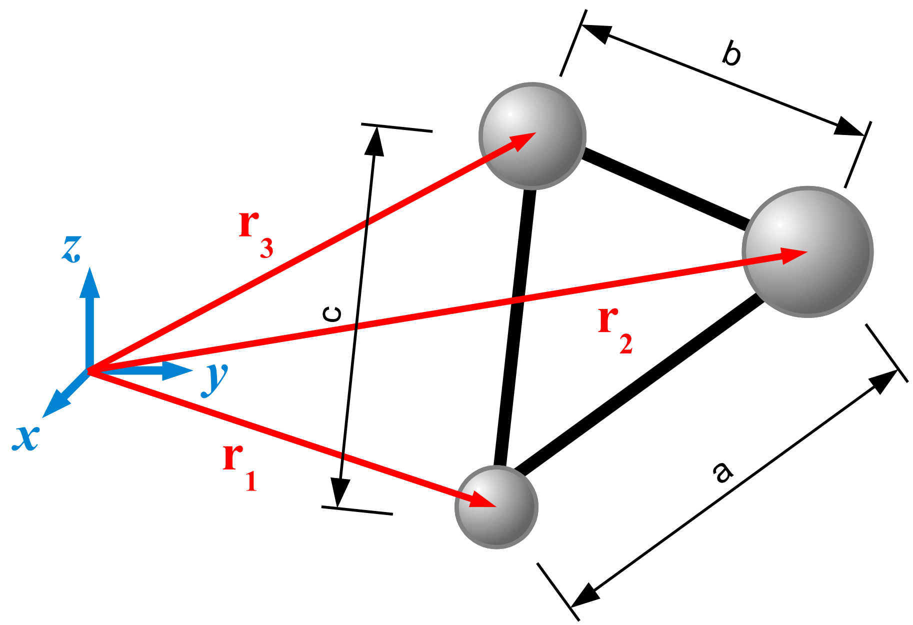
RUCH KILKU CIAŁ POŁĄCZONYCH WIĘZAMI

- ustalona odległość między ciałami

$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = const.$$

$$b = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2} = const.$$

$$c = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} = const.$$



WIĘZY

Obecność wiązania wymusza **spełnienie pewnej zależności matematycznej** między współrzędnymi identyfikującymi położenie ciał układu mechanicznego.

$$f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, t) \geqslant 0 \;, \qquad k = 1,2, \dots, c$$

Więzów może być wiele.

W ogólności związki te:

- mogą być **stałe w czasie** lub **zmieniać się w czasie,**
- mogą **zależeć jedynie od położeń** ciał lub **również od ich pochodnych** względem czasu,
- mogą być **równością** lub **nierównością,**
- mogą **nie zmieniać wartości całkowitej energii mechanicznej** układu lub **zmieniać** ją.

KLASYFIKACJA WIĘZÓW

Klasyfikacja więzów z uwagi na **zależność od czasu**

$$f_k\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots, t\right) \geqslant 0$$

WIĘZY REONOMICZNE

- Związek **zależy w sposób jawny od czasu**.
- gr. *ῥέω* - przepływ, strumień
  gr. *νόμος* - prawo
- np. długość wahadła lub kształt toru zmieniają się w ustalony sposób w czasie.

$$f_k\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots\right) \geqslant 0$$

WIĘZY SKLERONOMICZNE

- Związek **nie zależy w sposób jawny od czasu**.
- gr. *σκλήρωσ* – twardy
  gr. *νόμος* - prawo
- np. długość wahadła lub kształt toru są stałe w czasie.
- Związek w dalszym ciągu zależy od czasu w sposób niejawny, ponieważ współrzędne punktów i ich pochodne zmieniają się w czasie, ale sam związek między nimi jest stały.

KLASYFIKACJA WIĘZÓW

Klasyfikacja więzów z uwagi na **zależność od prędkości i wyższych pochodnych położenia**

$$f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) \geqslant 0$$

WIĘZY HOLONOMICZNE

- Związek **zależy jedynie od położeń**. Równanie więzi jest zatem równaniem algebraicznym **z uwagi na położenia.**
- gr. *ὅλος* – całkowity, kompletny
  gr. *νόμος* - prawo
- Położenie ciał jest wystarczające do udzielenia odpowiedzi, czy warunek jest spełniony czy nie. W tym sensie samo tylko położenie punktów wyznacza „stan całego układu”.

$$f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, t) \geqslant 0$$

WIĘZY NIEHOLONOMICZNE

- Związek **zależy od położeń i ich pochodnych**. Równanie więzi jest zatem równaniem różniczkowym.

KLASYFIKACJA WIĘZÓW

Podział więzów na **równania i nierówności**

$$f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots, t) = 0$$

WIĘZY DWUSTRONNE

- Związek ma postać **równania**.
- np. jednoznacznie określona trajektoria lub powierzchnia, do której należy trajektoria punktu.

$$f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots, t) \geqslant 0$$

WIĘZY JEDNOSTRONNE

- Związek ma postać **nierówności**.
- np. bariera uniemożliwiająca ruch po jednej jej stronie i dopuszczająca ruch po stronie przeciwnej

KLASYFIKACJA WIĘZÓW

Klasyfikacja więzów z uwagi na **zachowanie energii**

$$\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(t) = const.$$

WIĘZY GŁADKIE (IDEALNE)

- **Reakcje są prostopadłe do kierunków prędkości dopuszczalnych** przez te więzy, a zatem do nieskończenie małych przyrostów przemieszczeń (przemieszczeń wirtualnych).
- **Praca reakcji na przemieszczeniach wirtualnych jest zerowa**.
- W konsekwencji więzy nie wpływają na wielkość całkowitej energii mechanicznej układu (**energia jest zachowana**).
- Jest to **założenie o więzach**, które dla szerokiej klasy więzi bez tarcia jest **potwierdzone doświadczalnie**.

$$E(t)$$

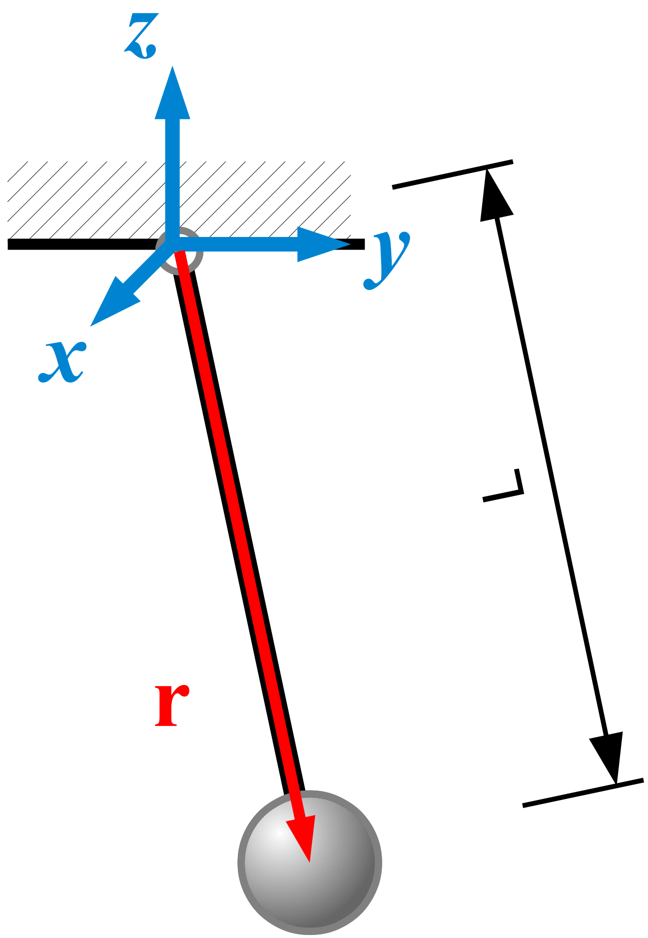
WIĘZY SZORSTKIE (NIEIDEALNE)

- Więzy wpływają na wielkość całkowitej energii mechanicznej układu. Mówimy, że **energia nie jest zachowana**.
- np. tarcie lub opór płynu lepkiego skutkuje utratą (dyssypacją, rozpraszaniem) energii mechanicznej (spowolnieniem ruchu). Energia przekształcana jest najczęściej w ciepło (nagrzewanie się hamulców).

WIĘZY

PRZYKŁAD:

Wahadło.



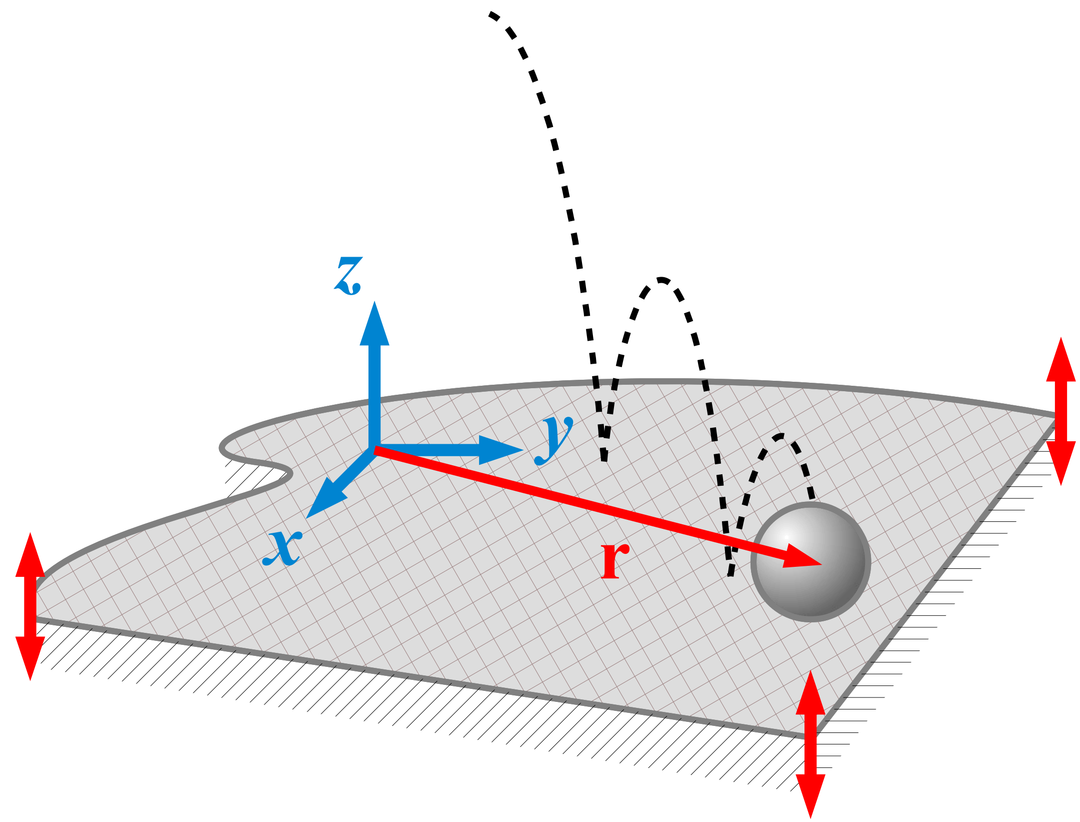
Wiązanie:

- **skleronomiczne** – stała długość wahadła
- **holonomiczne** – niezależne od prędkości
- **dwustronne** – wahadło nie może się ani wydłużyć ani skrócić
- **gładkie** – energia jest zachowana

WIĘZY

PRZYKŁAD:

Szorstka płaszczyzna blokująca ruch pionowy i wykonująca drgania pionowe.



Wiązanie:

- **reonomiczne** – położenie
- **holonomiczne** – niezależne od prędkości
- **jednostronne** – ruch powyżej płaszczyzny jest swobodny, poniżej jest zablokowany
- **szorstkie** – energia jest rozpraszana wskutek niesprężystych zderzeń z płaszczyzną

WIĘZY

Zajmować się będziemy więzami:

- **skleronomicznymi**
- **holonomicznymi**
- **dwustronnymi**
- **gładkimi**

$$f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0 \ , \qquad k = 1,2, \dots, c$$

LICZBA STOPNI SWOBODY UKŁADU NIESWOBODNEGO

Więzy ograniczają swobodę ruchu ciała. Każde wiązanie dostarcza nam równania, na podstawie którego możemy wyznaczyć jedną ze składowych wektora położenia analizowanych punktów:

$$\boxed{f_k\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N\right) = 0}$$

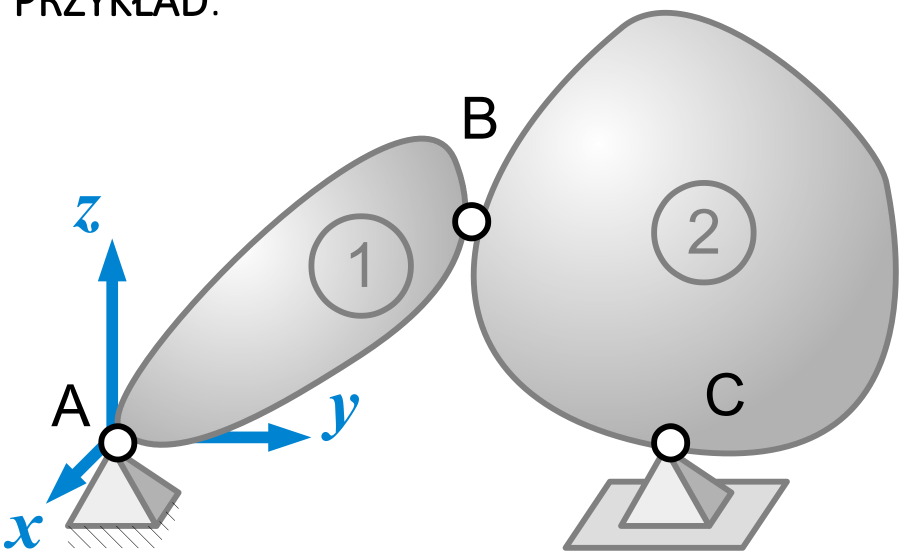
Zatem na każde zadane wiązanie potrzebujemy o jedną mniej wielkość konieczną do jednoznacznego określenia położenia punktów układu, tzn. **każde wiązanie redukuje liczbę stopni swobody układu o jeden**.

LICZBA STOPNI SWOBODY UKŁADU NIESWOBODNEGO

- N punktów materialnych w przestrzeni z c wiązaniami: $\boxed{LSS = 3N - c}$
- N punktów materialnych na płaszczyźnie z c wiązaniami: $\boxed{LSS = 2N - c}$
- N brył sztywnych w przestrzeni z c wiązaniami: $\boxed{LSS = 6N - c}$
- N brył sztywnych na płaszczyźnie z c wiązaniami: $\boxed{LSS = 3N - c}$

LICZBA STOPNI SWOBODY UKŁADU NIESWOBODNEGO

PRZYKŁAD:



Liczba brył sztywnych: $N = 2$

Więzy:

- Punkt A ciała 1 jest nieruchomy:

$$x_A^I = 0 \ , \quad y_A^I = 0 \ , \quad z_A^I = 0$$ (**3 wiązania**)

- Przegub B jest punktem wspólnym ciał 1 i 2:

$$x_B^I = x_B^{II} \ , \quad y_B^I = y_B^{II} \ , \quad z_B^I = z_B^{II}$$ (**3 wiązania**)

- Punkt C ciała 2 należy do płaszczyzny (x,y):

$$z_C^{II} = 0$$ (**1 wiązanie**)

Liczba wiązań: $c = 7$

Liczba stopni swobody: $LSS = 6\,N - c = 12 - 7 = 5$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ