# POTENCJALNE POLE SIŁ

## POLE SKALARNE

**Polem skalarnym** *V*(**r**) nazywamy funkcję przypisującą każdemu punktowi w przestrzeni liczbę rzeczywistą (skalar):

$$V(\mathbf{r}):\ \ \mathbf{r}=(x,y,z)\ \rightarrow\ V(\mathbf{r})$$

## POLE WEKTOROWE SIŁ

**Polem wektorowym sił F**(**r**) nazywamy funkcję przypisującą każdemu punktowi przestrzeni wektor działającej w nim siły związanej z tym polem:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}):\ \ \mathbf{r}=(x,y,z)\ \rightarrow\ \mathbf{F}=[F_x,F_y,F_z]$$

## POTENCJALNE POLE SIŁ

Pole sił **F**(**r**) nazywamy **potencjalnym polem sił**, jeśli istnieje takie pole skalarne V(**r**), nazywane **potencjałem**, dla którego to **pole sił jest gradientem**, tj.:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathrm{grad}\,V(\mathbf{r})\qquad\Leftrightarrow\qquad [F_x,F_y,F_z]=\left[\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right]$$

Gradient pola skalarnego *V* oznaczamy często przez $\nabla V$, gdzie operator $\nabla$, nazywany **nablą**, zdefiniowany jest następująco:

$$\nabla=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

Możemy w łatwy sposób określić warunek konieczny istnienia potencjału dla danego pola sił. Jeśli bowiem potencjał istnieje i zróżniczkujemy dowolną składową pola sił na kierunku różnym od tej składowej, np.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}$$

wtedy, ponieważ pochodne mieszane muszą być sobie równe, niezależnie od kolejności różniczkowania, odpowiednie pochodne składowych siły muszą być sobie równe. Jeśli powtórzymy to rozumowanie dla każdej pary składowych otrzymamy **warunek konieczny istnienia potencjału**:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=\dfrac{\partial F_y}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial F_y}{\partial z}=\dfrac{\partial F_z}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial F_z}{\partial x}=\dfrac{\partial F_x}{\partial z}\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r})\overset{\mathrm{df.}}{=}\left[\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right]=[0;0;0]$$

Poza tym wymagamy oczywiście, aby pole to było przynajmniej jednokrotnie różniczkowalne. Pole wektorowe $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$, zdefiniowane jak wyżej, nazywamy **rotacją pola** wektorowego $\mathbf{F}$ i oznaczamy je niekiedy jako $\nabla\times\mathbf{F}$ - rzeczywiście, mnożąc wektorowo operator nabla z danym polem wektorowym otrzymamy jego rotację. Pole $\mathbf{F}$, którego rotacja jest równa zero, nazywamy **polem bezwirowym**. Zatem, jeśli pole sił jest polem potencjalnym, to jest również polem bezwirowym. Można udowodnić, że warunek ten jest również **warunkiem wystarczającym**, tj.

*„Pole sił jest potencjalne (istnieje jego potencjał) wtedy i tylko wtedy, gdy jest polem bezwirowym (jego rotacja jest zerowa)”*

## WŁASNOŚCI POTENCJALNEGO POLA SIŁ

1. **Praca** wykonana przez potencjalne pole sił **nie zależy od drogi**, na której wykonywana jest praca, **ale jedynie od początkowego i końcowego położenia** punktu

$$L_{AB} = \int_C F_x \,\mathrm{d}x + F_y \,\mathrm{d}y + F_z \,\mathrm{d}z = \int_C \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z =$$
$$= \int_C \mathrm{d}V = V(B) - V(A)$$

2. W szczególności, **praca wykonana w potencjalnym polu sił na krzywej zamkniętej** (punkt końcowy drogi pokrywa się z punktem początkowym) **jest zerowa.**

3. Stąd wynika, że praca wykonana na drodze łączącej dwa punkty, w których wartość potencjału jest taka sama $V = const.$ , taka praca jest równa 0. Zbiór wszystkich punktów, dla których potencjał przyjmuje pewną ustaloną wartość tworzą pewną ciągłą powierzchnię – założyliśmy bowiem, że pole sił jest co najmniej jednokrotnie różniczkowalne, zatem potencjał jest nie tylko ciągły, ale i dwukrotnie różniczkowalny. Powierzchnie w przestrzeni o stałej wartości potencjału nazywamy **powierzchniami ekwipotencjalnymi**.

$$\pi|_{V=const} = \{(x, y, z):\; V(x, y, z) = const.\}$$

Różnym ustalonym wartościom potencjału odpowiadają różne powierzchnie ekwipotencjalne. Jeśli punkt początkowy i końcowy krzywej, na której wykonywano pracę leży na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej, to praca wykonana na tej krzywej jest równa 0.

4. Z definicji gradientu wynika, że jest to wektor prostopadły do powierzchni opisanej różniczkowaną funkcją, zatem **linie pola sił są zawsze prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych.**

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, V \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F} \perp \pi|_{V=const.}$$

5. Z potencjalnym polem sił związana jest pewna forma energii, nazywana **energią potencjalną** – ciało znajdujące się danym punkcie pola siła posiada związaną z nim energię, która może być potencjalnie wykorzystana (przekształcona) na energię kinetyczną jego ruchu. Wartość tej energii jest przeciwna do wartości potencjału:

$$E_p = -V$$

6. W potencjalnym polu sił obowiązuje **zasada zachowania energii mechanicznej**, mianowicie:

*wartość całkowitej energii mechanicznej układu, tj. suma energii kinetycznej i energii potencjalnej jest stała w czasie*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[E_k(t) + E_p(t)\right] = 0$$

## WYZNACZANIE POTENCJAŁU DLA DANEGO POLA SIŁ

Ponieważ pole sił jest gradientem potencjału, zatem **dwa potencjały różniące się o stałą dają jako swój gradient to samo pole sił**. **Potencjał jest zatem dany niejednoznacznie** – aby wyznaczyć potencjał jednoznacznie, **musimy znać jego wartość przynajmniej w jednym punkcie**. Jeśli dane jest pole sił, to potencjał możemy wyznaczyć na dwa sposoby:

1. **Bezpośrednim całkowaniem pola sił** – całkujemy każdą ze składowych względem odpowiedniej zmiennej, dodając następnie „stałą całkowanie" zależną od zmiennych, względem których do tej pory nie całkowaliśmy:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \Rightarrow \quad V = \int F_x \mathrm{d}x + C_1(y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\int F_x \mathrm{d}x + \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = F_y \quad \Rightarrow \quad C_1 = \int\left[F_y - \frac{\partial}{\partial y}\int F_x \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y + C_2(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = F_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}\int F_x \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial z}\left[\int\left(F_y - \frac{\partial}{\partial y}\int F_x \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right] + \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = F_z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \int\left[F_z - \frac{\partial}{\partial z}\int F_x \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial z}\left[\int\left(F_y - \frac{\partial}{\partial y}\int F_x \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right]\right]\mathrm{d}z + C_3$$

   Ostatnią stałą całkowania wyznaczamy z wartości potencjału w ustalonym punkcie.

2. **Obliczając pracę przy przesunięciu o dowolny wektor** – wiemy, że praca wykonana w potencjalnym polu sił zależy jedynie położenia początkowego i końcowego. Jeśli zatem znamy wartość potencjału w jednym punkcie, to obliczając pracę przy przesunięciu do dowolnego punktu $(x,y,z)$ i dodając tę wartość uzyskamy wzór na potencjał:

$$A=(x_0,y_0,z_0) \qquad B=(x,y,z)$$

$$L_{AB} = V(B) - V(A) \qquad \Rightarrow \qquad V(x,y,z) = L_{AB} + V(x_0,y_0,z_0)$$

$$L_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_A^B F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B}\left[F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} + F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right]\mathrm{d}\lambda$$

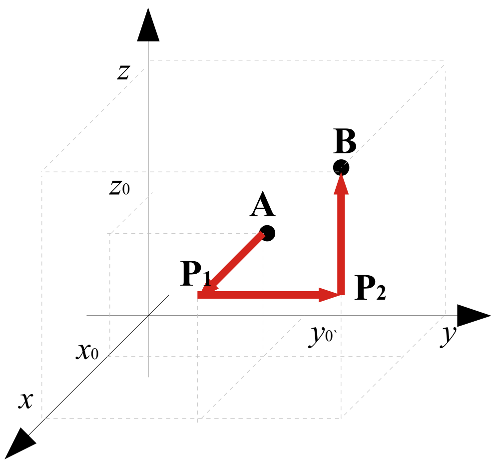
   Ponieważ praca nie zależy od drogi, zatem możemy wybrać ją dowolnie – najprościej będzie poruszać się trzema odcinkami prostymi, równoległymi do osi przyjętego układu współrzędnych:

$$L_{AB} = L_{AP_1} + L_{P_1P_2} + L_{P_2B}$$

$$AP_1:\begin{cases} x=\lambda \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases} \qquad \lambda\in(x_0;x) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=1,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=0$$

$$P_1P_2:\begin{cases} x=x \\ y=\lambda \\ z=z_0 \end{cases} \qquad \lambda\in(y_0;y) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=0\ \ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=1\ \ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=0$$

$$P_2B:\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in(z_0;z) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=0\ \ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=1$$

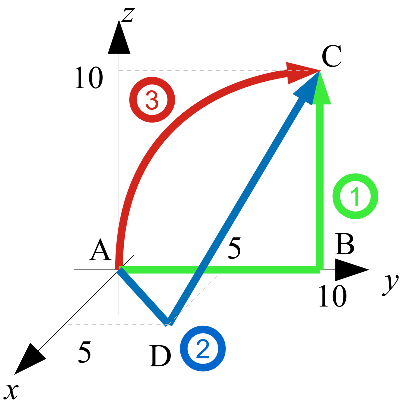



   Ostatecznie otrzymujemy:

$$\boxed{V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_x(\lambda,y_0,z_0)\mathrm{d}\lambda + \int_{y_0}^{y} F_y(x,\lambda,z_0)\mathrm{d}\lambda + \int_{z_0}^{x} F_z(x,y,\lambda)\mathrm{d}\lambda + V(x_0,y_0,z_0)}$$

## ZADANIE 1

Wykaż bezpośrednimi rachunkami niezależność wielkości pracy jaką należy wykonać w polu sił grawitacyjnych $\mathbf{F}=[0,0,-mg]$ przy przesunięciu masy $m$ z punktu $A=(0,0,0)$ do punktu $C=(0,10,10)$ dla każdej z trzech podanych dróg.




______________

ROZWIĄZANIE:

Praca dana jest całką skierowaną: $L = \int \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$

Krzywą, na której wykonywana jest praca można sparametryzować, tj. wyrazić każdą ze współrzędnych przez równanie zależne od jednego parametru określającego położenie punktu na krzywej: $x=x(\lambda)$, $y=y(\lambda)$, $z=z(\lambda)$ .

Wtedy całka skierowana wyraża się wzorem $$L = \int \left[ F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} + F_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} \right] \mathrm{d}\lambda$$

Musimy **obliczyć pochodne każdej ze współrzędnych względem parametru** i na końcu **wyrazić wszystkie współrzędne** pojawiające się w całce **przez ten parametr**.

Dwie z rozważanych dróg składają się z prostych odcinków. Każdą prostą w przestrzeni możemy sparametryzować w następujący sposób:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \lambda\, \mathbf{a} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_x \\ y = y_0 + \lambda a_y \\ z = z_0 + \lambda a_z \end{cases}$$

- $\mathbf{r}$ – wektor wodzący dowolnego punktu prostej
- $\mathbf{r_0}$ – wektor wodzący ustalonego punktu prostej
- $\mathbf{r}$ – wektor równoległy do prostej

## DROGA 1

Droga nr 1 składa się z dwóch odcinków prostych, oznaczmy je AB i BC. Praca wykonana na tej drodze jest sumą prac wykonanych na odcinkach (całka sumy jest sumą całek). Obliczmy pracę na pierwszym odcinku. W tym przypadku

**ODCINEK AB:** $\mathbf{r} = [x, y, z]$ $\quad \mathbf{r_0} = [0,0,0]$ $\quad \mathbf{a} = [0,1,0]$

Punkt początkowy A odpowiada wartości parametru $\lambda=0$

Punkt końcowy B odpowiada wartości parametru $\lambda=10$

Parametryzacja odcinka: $$AB:\begin{cases} x=0+\lambda\cdot 0 \\ y=0+\lambda\cdot 10 \\ z=0+\lambda\cdot 0 \end{cases} \quad \text{gdzie:} \quad \lambda\in(0,10)$$

Pochodne: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=1,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}=0,$

Praca: $$L_{AB} = \int_0^{10} [(0)\cdot(0) + (0)\cdot(1) + (-mg)\cdot(0)]\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

**ODCINEK BC:** $\mathbf{r}=[x,y,z]$ $\mathbf{r_0}=[0,10,0]$ $\mathbf{a}=[0,0,1]$
Punkt początkowy B odpowiada wartości parametru $\lambda=0$
Punkt końcowy C odpowiada wartości parametru $\lambda=10$

Parametryzacja odcinka: $BC:\begin{cases} x=0+\lambda\cdot 0 \\ y=10+\lambda\cdot 0 \\ z=0+\lambda\cdot 1 \end{cases}$ gdzie: $\lambda\in(0,10)$

Pochodne: $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\lambda}=0,\ \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\lambda}=0,\ \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\lambda}=1,$

Praca: $L_{BC}=\int_0^{10}[(0)\cdot(0)+(0)\cdot(1)+(-mg)\cdot(1)]\,\mathrm{d}\lambda=-mg\int_0^{10}\mathrm{d}\,\lambda=-10\,mg$

Całkowita praca $L=L_{AB}+L_{BC}=0-10\,mg=-10\,mg$

## DROGA 2

Podobnie jak w przypadku pierwszej drogi również i ta składa się z odcinków prostych. Pracę policzymy dla obydwu odcinków niezależnie.

**ODCINEK AD:** $\mathbf{r_0}=[0,0,0]$ $\mathbf{a}=[1,1,0]$
Punkt początkowy A odpowiada wartości parametru $\lambda=0$
Punkt końcowy D odpowiada wartości parametru $\lambda=5$

Parametryzacja odcinka: $BC:\begin{cases} x=0+\lambda\cdot 1 \\ y=0+\lambda\cdot 1 \\ z=0+\lambda\cdot 0 \end{cases}$ gdzie: $\lambda\in(0,5)$

Pochodne: $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\lambda}=1,\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,\lambda}=1,\ \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\lambda}=0$

Praca: $L_{AD}=\int_0^{5}[(0)\cdot(1)+(0)\cdot(1)+(-mg)\cdot(0)]\,\mathrm{d}\,\lambda=0$

**ODCINEK DC:** $\mathbf{r_0}=[2,2,0]$ $\mathbf{a}=[-5,5,10]$
Punkt początkowy A odpowiada wartości parametru $\lambda=0$
Punkt końcowy D odpowiada wartości parametru $\lambda=1$

Parametryzacja odcinka: $BC:\begin{cases} x=2+\lambda\cdot(-5) \\ y=2+\lambda\cdot 5 \\ z=0+\lambda\cdot 10 \end{cases}$ gdzie: $\lambda\in(0,2)$

Pochodne: $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\lambda}=-5,\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,\lambda}=5,\ \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\lambda}=10$

Praca: $L_{DC}=\int_0^{1}[(0)\cdot(-5)+(0)\cdot(5)+(-mg)\cdot(10)]\,\mathrm{d}\,\lambda=-10\,mg\int_0^{1}\mathrm{d}\,\lambda=-10\,mg$

Całkowita praca $L=L_{AD}+L_{DC}=0-10\,mg=-10\,mg$

**DROGA 3**

Droga nr 3 to fragment okręgu w płaszczyźnie yz, o środku w punkcie (0,10,0) i promieniu 10. Okrąg taki opisują równania:

Parametryzacja odcinka: $$BC:\begin{cases} x=0 \\ y=10-10\cos\lambda \\ z=0+10\sin\lambda \end{cases} \quad \text{gdzie:} \quad \lambda\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

W tym przypadku parametrem krzywej jest miara łukowa kąta zawartego między osią OY a prostą łączącą dany punkt na krzywej ze środkiem okręgu.

Pochodne: $$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\lambda}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,\lambda}=10\sin\lambda\,,\quad \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\lambda}=10\cos\lambda$$

Praca: $$L_{AC} = \int_0^{\pi/2} \left[(0)\cdot(-5) + (0)\cdot(10\sin\lambda) + (-mg)\cdot(10\cos\lambda)\right]\mathrm{d}\,\lambda =$$

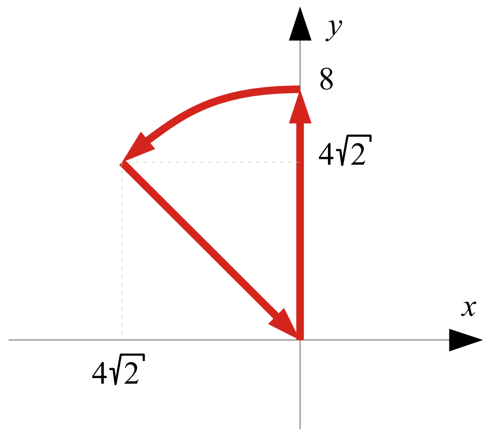
$$= -10\,mg\int_0^{\pi/2}\cos\lambda\,\mathrm{d}\,\lambda = -10\,mg\left[\sin\lambda\right]_0^{\pi/2} = -10\,mg$$

Ujemny wynik należy interpretować w ten sposób, że aby ciało mogło poruszać się po krzywej opisanej w zadaniu konieczne jest doprowadzenie dodatkowej energii do układu ponad tę, którą zapewnia nam potencjalne pole sił. W ogólności ciało pod wpływem działania sił tego pola będzie poruszać się jakimś innym torem – utrzymanie go na ustalonej drodze wymaga działania dodatkowych sił, które oczywiście również wykonują pracę na tej drodze. Ujemna wartość pracy sił pola informuje nas o tym, że ruch po tak ustalonej drodze możliwy jest jedynie w sytuacji, gdy dodatkowymi siłami (poza polem sił) utrzymującymi na tej wymuszonej trajektorii wykonamy pracę – w tym przypadku równą -10mg (w dżulach).

**ZADANIE 3**

Sprawdzić czy poniższe pole sił jest polem potencjalnym a następnie obliczyć pracę pola sił wykonanej na drodze zamkniętej jak na rysunku.

$$\mathbf{F} = [x+y\,,\, y-x]$$




___________

ROZWIĄZANIE:

Wyznaczamy rotację pola **F**:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = -2$$

Rotacja pola sił nie jest wektorem zerowym, a zatem pole to nie jest polem potencjalnym. Praca po krzywej zamkniętej będzie w ogólności różna od 0.

**ODCINEK AB**

$\mathbf{r_0} = [0,0] \qquad \mathbf{a} = [0,1]$

Punkt początkowy A odpowiada wartości parametru $\lambda = 0$

Punkt końcowy B odpowiada wartości parametru $\lambda = 8$

Parametryzacja odcinka: $AB: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$ gdzie $\lambda \in (0,8)$

Pochodne: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = 3, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = 1$

Praca: $L_{AB} = \int_0^8 [(x+y)\cdot(0) + (y-x)\cdot(1)]\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^8 [(\lambda-0)\cdot(1)]\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^8 \lambda\,\mathrm{d}\lambda = \left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^8 = 32$

**ODCINEK BC**

Parametryzacja odcinka: $AB: \begin{cases} x = 8\cos\lambda \\ y = 8\sin\lambda \end{cases}$ gdzie $\lambda \in \left(\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right)$

Pochodne: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = -8\sin\lambda, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = 8\cos\lambda$

Praca: $L_{BC} = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} [(x+y)\cdot(-8\sin\lambda) + (y-x)\cdot(8\cos\lambda)]\,\mathrm{d}\lambda =$

$$= 64\int_{\pi/2}^{3\pi/4} [(\cos\lambda + \sin\lambda)\cdot(-\sin\lambda) + (\sin\lambda - \cos\lambda)\cdot(\cos\lambda)]\,\mathrm{d}\lambda = -64\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^2\lambda + \cos^2\lambda\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$-64\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \mathrm{d}\lambda = -64[\lambda]_{\pi/2}^{3\pi/4} = -16\pi$$

**ODCINEK CA**

$\mathbf{r_0} = [-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}] \qquad \mathbf{a} = [1, -1]$

Punkt początkowy A odpowiada wartości parametru $\lambda = 0$

Punkt końcowy B odpowiada wartości parametru $\lambda = 4\sqrt{2}$

Parametryzacja odcinka: $CA: \begin{cases} x = -4\sqrt{2} + \lambda \\ y = 4\sqrt{2} - \lambda \end{cases}$ gdzie $\lambda \in (0,4)$

Pochodne: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = -1$

Praca: $L_{CA} = \int\limits_0^{4\sqrt{2}} [(x+y)\cdot(1) + (y-x)\cdot(-1)]\,\mathrm{d}\lambda =$

$$= \int\limits_0^{4\sqrt{2}} [((-4\sqrt{2}+\lambda)+(4\sqrt{2}-\lambda))\cdot(1) + ((4\sqrt{2}-\lambda)-(-4\sqrt{2}+\lambda))\cdot(-1)]\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int\limits_0^{4\sqrt{2}} [(0)\cdot(1) + (8\sqrt{2}-2\lambda)\cdot(-1)]\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_0^{4\sqrt{2}} [2\lambda - 8\sqrt{2}]\,\mathrm{d}\lambda = [\lambda^2 - 8\sqrt{2}\lambda]_0^{4\sqrt{2}} = -32$$

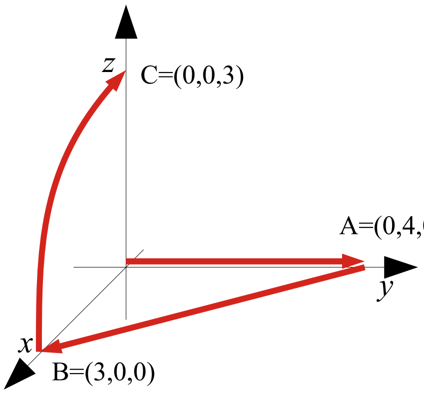
Praca całkowita: $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 32 - 16\pi - 32 \approx -50{,}265$

## ZADANIE 2

Oblicz pracę wykonaną przez pole sił

$$\mathbf{F} = [2xy\ ,\ -4y\ ;\ z^2]$$

na drodze zaznaczonej na rysunku.




___________

ROWIĄZANIE:

Obliczymy pracę na każdym odcinku drogi osobno, parametryzując każdy z odcinków niezależnie:

$$L = L_{OA} + L_{AB} + L_{BC}$$

### 1. ODCINEK OA – prosta równoległa do osi y

$\mathbf{r} = [x, y, z] \qquad \mathbf{r_0} = [0,0,0] \qquad \mathbf{a} = [0,1,0]$

Punkt początkowy O odpowiada wartości parametru $\lambda = 0$

Punkt końcowy A odpowiada wartości parametru $\lambda = 4$

Parametryzacja odcinka: $OA: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ gdzie: $\lambda \in (0,4)$

Pochodne: $\frac{dx}{d\lambda} = 0,\ \frac{dy}{d\lambda} = 1,\ \frac{dz}{d\lambda} = 0,$

Praca:

$$L_{OA} = \int_0^4 [(2xy)\cdot(0) + (-4y)\cdot(1) + (z^2)\cdot(0)]\,d\lambda = \int_0^4 [-4y]\,d\lambda = \int_0^4 [-4\lambda]\,d\lambda = [-2\lambda^2]_0^4 = -32$$

### 2. ODCINEK AB – prosta łącząca punkty $(0,4,0)$ i $(3,0,0)$

$\mathbf{r} = [x, y, z] \qquad \mathbf{r_0} = [0,4,0] \qquad \mathbf{a} = [3,-4,0]$

Punkt początkowy A odpowiada wartości parametru $\lambda = 0$

Punkt końcowy B odpowiada wartości parametru $\lambda = 1$

Parametryzacja odcinka: $AB: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ gdzie $\lambda \in (0,1)$

Pochodne: $\frac{dx}{d\lambda} = 3,\ \frac{dy}{d\lambda} = -4,\ \frac{dz}{d\lambda} = 0,$

Praca:

$$L_{AB} = \int_0^1 [(2xy)\cdot(3) + (-4y)\cdot(-4) + (z^2)\cdot(0)]\,d\lambda = \int_0^1 [6\cdot(0+3\lambda)\cdot(4-4\lambda) + 16(4-4\lambda)]\,d\lambda =$$

$$= \int_0^1 [-72\lambda^2 + 8\lambda + 64]\,d\lambda = [-24\lambda^3 + 4\lambda^2 + 64\lambda]_0^1 = 44$$

### 3) ODCINEK BC – łuk kołowy w płaszczyźnie xz o środku w punkcie O i promieniu 3

Parametryzacja odcinka: $BC:\begin{cases} x=3\cos(\lambda) \\ y=0 \\ z=3\sin(\lambda) \end{cases}$ gdzie $\lambda\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Pochodne: $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\lambda}=-3\sin(\lambda)$ $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\lambda}=0$ $\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\lambda}=3\cos(\lambda)$,

Praca: $L_{BC}=\int\limits_0^{\pi/2}\left[(2\,x\,y)\cdot(-3\sin\lambda)+(-4\,y)\cdot(0)+(z^2)\cdot(3\cos\lambda)\right]\mathrm{d}\,\lambda=$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left[2\cdot(3\cos\lambda)\cdot 0\cdot(-3\sin\lambda)+(3\sin\lambda)^2\cdot(3\cos\lambda)\right]\mathrm{d}\,\lambda=27\int\limits_0^{\pi/2}\left[\sin^2\lambda\cos\lambda\right]\mathrm{d}\,\lambda=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=\sin\lambda \\ \mathrm{d}\,t=\cos\lambda\,\mathrm{d}\,\lambda \end{matrix}\right|=27\int\limits_{t_1}^{t_2}t^2\,\mathrm{d}\,t=27\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t_1}^{t_2}=9\left[\sin^3\lambda\right]_0^{\pi/2}=9$$

Praca całkowita:

$$L=L_{OA}+L_{AB}+L_{BC}=-32+44+9=21$$

**ZADANIE 3**

Sprawdź czy dane pole sił jest potencjalne.

$$\mathbf{F} = \left[8xy^2z+1\ ;\ 8x^2yz+2y\ ;\ \sin(z)+4x^2y^2\right]$$

Jeśli tak, to wyznacz potencjał przy założeniu, że jego wartość w punkcie $(0,0,0)$ jest równa 0.

______________

ROZWIĄZANIE:

Sprawdzamy, czy rotacja pola sił jest równa 0:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = 8x^2y \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 8x^2y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = 8xy^2 \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 8xy^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = 16xyz \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 16xyz \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

Pole sił jest bezwirowe, zatem jest polem potencjalnym. Potencjał wyznaczymy stosując obydwie przedstawione wcześniej metody:

**1) Bezpośrednie całkowanie**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \Rightarrow \quad V = \int F_x \mathrm{d}x + C_1(y,z) = 4x^2y^2z + x + C_1(y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4x^2y^2z + x + C_1(y,z)\right] = 8x^2yz + \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = \underbrace{8x^2yz + 2y}_{F_y}$$

$$C_1 = \int 2y\,\mathrm{d}y + C_2(z) = y^2 + C_2(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = F_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[4x^2y^2z + x + y^2 + C_2(z)\right] = 8x^2y^2 + \frac{\partial C_2(z)}{\partial y} = \underbrace{\sin(z) + 4x^2y^2}_{F_z}$$

$$C_2 = \int \sin(z)\,\mathrm{d}y + C_3 = -\cos(z) + C_3$$

Ostatecznie: $\quad V = 4x^2y^2z + x + y^2 - \cos(z) + C$

Stałą całkowania wyznaczamy z warunku: $V(0,0,0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 1$

**2) Na podstawie wykonanej pracy**

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_x(\lambda, y_0, z_0)\mathrm{d}\lambda + \int_{y_0}^{y} F_y(x,\lambda,z_0)\mathrm{d}\lambda + \int_{z_0}^{x} F_z(x,y,\lambda)\mathrm{d}\lambda + V(x_0,y_0,z_0) =$$

$$= \int_0^x F_x(\lambda,0,0)\mathrm{d}\lambda + \int_0^y F_y(x,\lambda,0)\mathrm{d}\lambda + \int_0^x F_z(x,y,\lambda)\mathrm{d}\lambda + 0 =$$

$$= \int_0^x \left[8\lambda\cdot 0^2\cdot 0 + 1\right]\mathrm{d}\lambda + \int_0^y \left[8x^2\lambda\cdot 0 + 2\lambda\right]\mathrm{d}\lambda + \int_0^z \left[\sin(\lambda) + 4x^2y^2\right]\mathrm{d}\lambda =$$

$$= [\lambda]_0^x + \left[\lambda^2\right]_0^y + \left[-\cos(\lambda) + 4x^2y^2\lambda\right]_0^z = x + y^2 - \cos(z) + 4x^2y^2z + 1$$

**ZADANIE 4**

Sprawdź czy dane pole sił jest polem potencjalnym.

$$\mathbf{F} = [2x - yz\ ;\ 2y - zx\ ;\ 2z - xy]$$

Jeśli tak, to wyznacz jego potencjał przyjmując, że w punkcie $\mathrm{P} = (3,4,5)$ potencjał ma wartość 1.

---

ROZWIĄZANIE:

Sprawdzamy, czy rotacja pola sił jest równa 0:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = -x \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = -y \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = -y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -z \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = -z \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

Pole sił jest bezwirowe, zatem jest polem potencjalnym. Potencjał jest równy

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_x(\lambda, y_{0,} z_0)\,\mathrm{d}\lambda + \int_{y_0}^{y} F_y(x,\lambda,z_0)\,\mathrm{d}\lambda + \int_{z_0}^{x} F_z(x,y,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + V(x_0,y_0,z_0) =$$

$$= \int_{3}^{x} F_x(\lambda,4,5)\,\mathrm{d}\lambda + \int_{4}^{y} F_y(x,\lambda,5)\,\mathrm{d}\lambda + \int_{5}^{x} F_z(x,y,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + 1 =$$

$$= \int_{3}^{x} [2\lambda - 4\cdot 5]\,\mathrm{d}\lambda + \int_{4}^{y} [2\lambda - 5x]\,\mathrm{d}\lambda + \int_{5}^{z} [2\lambda - xy]\,\mathrm{d}\lambda + 1 =$$

$$= [\lambda^2 - 20\lambda]_3^x + [\lambda^2 - 5\lambda x]_4^y + [\lambda^2 - xy\lambda]_5^z + 1 =$$

$$= [(x^2 - 20x) - (-51)] + [(y^2 - 5xy) - (16 - 20x)] + [(z^2 - xyz) - (25 - 5xy)] + 1 =$$

$$= x^2 + y^2 + x^2 - xyz + 11$$