

## REAKCJE PODPOROWE W UKŁADACH PŁASKICH

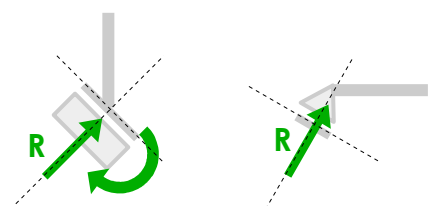
Ciało sztywne na płaszczyźnie ma **3 stopnie swobody**:

- **przesuw w poziomie**
- **przesuw w pionie**
- **obrót**

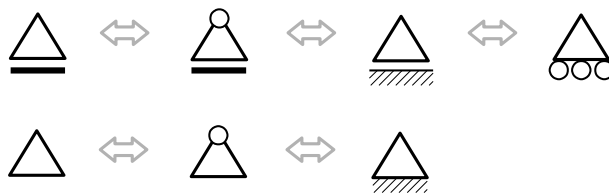
Dowolne przemieszczenie takiego ciała jest złożeniem tych trzech elementarnych przemieszczeń. Aby unieruchomić dane ciało, należy odebrać mu możliwość tych trzech przemieszczeń. Dokonujemy tego przykładając do niego odpowiednie **więzy – podpory** – ograniczające swobodę przemieszczeń. Z każdą podporą wiąże się **siła reakcji**. Jest to **siła bierna**, tj. nie istnieje sama z siebie, lecz powstaje właśnie jako odpowiedź („reakcja”) na przyłożenie obciążenia zewnętrznego. **Działa ona zgodnie z kierunkiem przemieszczenia, które ma blokować** – jej obecność gwarantuje, że ciało nie przemieści się w tym kierunku. Wyróżniamy następujące **podpory**:

NAZWA	SYMBOL	REAKCJE	DOPUSZCZALNE PRZEMIESZCZENIA		
			U <sub>x</sub>	U <sub>y</sub>	φ
Podpora przegubowa przesuwna			✓	✗	✓
			✗	✓	✓
Podpora przegubowa nieprzesuwna			✗	✗	✓
Pełne utwierdzenie			✗	✗	✗
Utwierdzenie z przesuwem pionowym			✗	✓	✗
Utwierdzenie z przesuwem poziomym			✓	✗	✗
Klin			✓	✓	✗

Podpora przegubowa oraz utwierdzenie z przesuwem może dopuszczać przesuw w dowolnie wybranym kierunku. Zawsze jednak odpowiednia reakcja będzie równoległa do kierunku zablokowanego, (prostopadła do kierunku dopuszczonego).

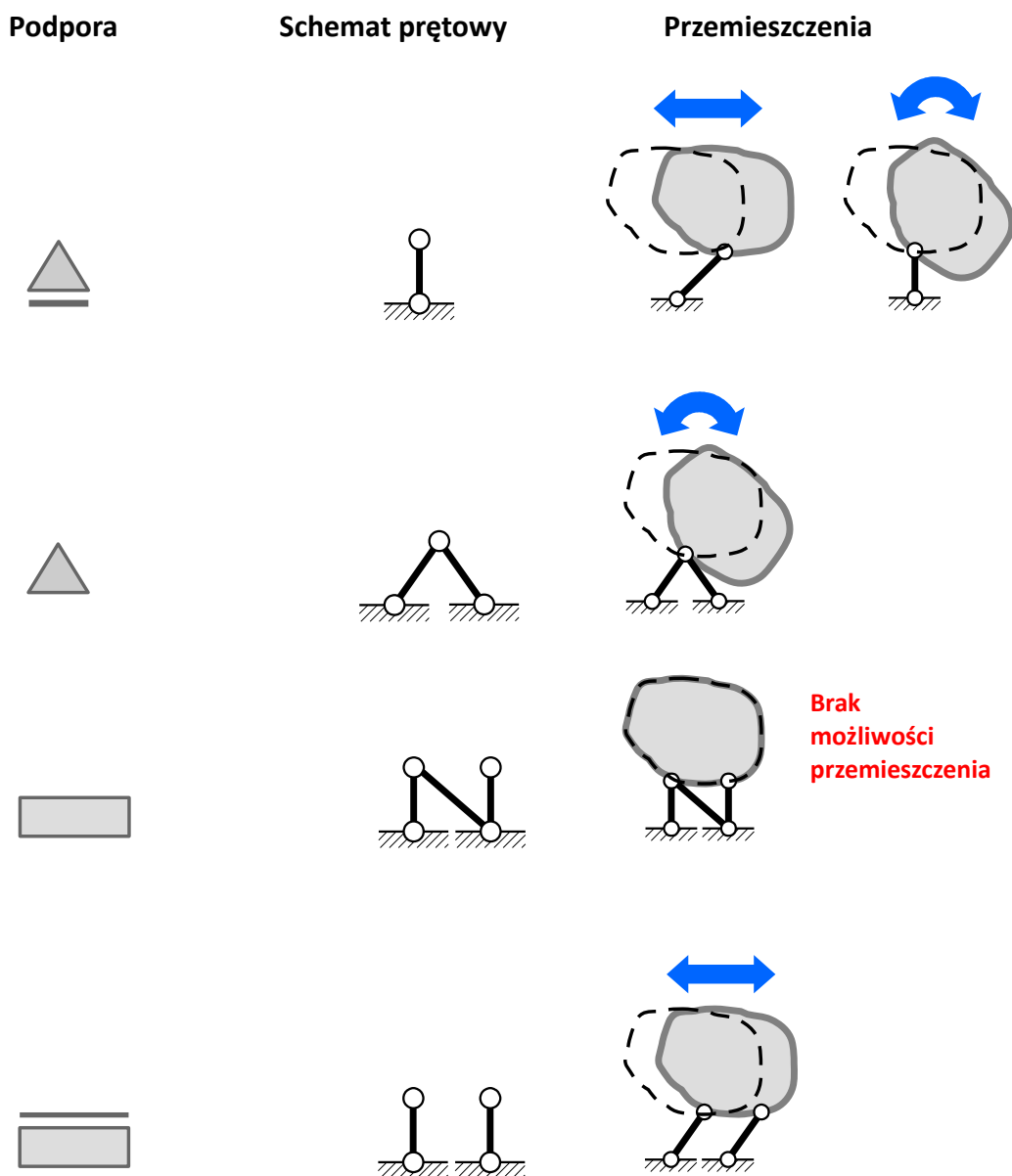


Symbole stosowane w różnych opracowaniach na oznaczanie podpór różnią się nieznacznie między sobą, szczególnie w przypadku podpór przegubowych. Kilka alternatywnych symboli zaprezentowano poniżej:



## SCHEMATY PRĘTOWE PODPÓR

Podpory w układach płaskich oznacza się niekiedy za pomocą symboli, które przedstawiają przegubowy układ prętowy, który blokuje odpowiednie przemieszczenia.



## PODPORY W UKŁADACH PRZESTRZENNYCH

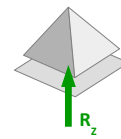
Dla konstrukcji trójwymiarowych możemy zdefiniować podpory analogicznie, jak w przypadku płaskim. Różnica sprowadza się jedynie do liczby stopni swobody. W przestrzeni, bryła sztywna może wykonywać **6 niezależnych przemieszczeń**:

- trzy przesunięcia wzdłuż trzech prostopadłych osi
- trzy obroty wokół trzech prostopadłych osi

Z zablokowaniem któregoś z tych przemieszczeń przez daną podporę wiąże się reakcja (siła lub moment) na odpowiadającym mu kierunku. W sumie, można by zdefiniować 63 różne podpory dla przypadku przestrzennego, odpowiadające 63 różnym kombinacjom zablokowanych przemieszczeń. Spośród nich warto wymienić kilka:

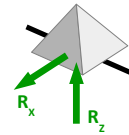
- **Podpora przegubowa z przesuwem w płaszczyźnie XY**

$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
✓	✓	✗	✓	✓	✓



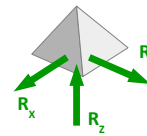
- **Podpora przegubowa z przesuwem wzdłuż prostej X**

$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
✓	✗	✗	✓	✓	✓



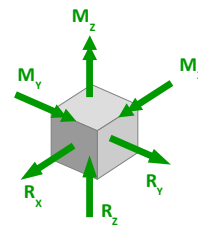
- **Podpora przegubowa nieprzesuwna**

$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
✗	✗	✗	✓	✓	✓



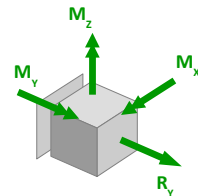
- **Pełne utwierdzenie**

$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
✗	✗	✗	✗	✗	✗



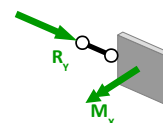
- **Utwardzenie z przesuwem w płaszczyźnie XZ**

$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
✓	✗	✓	✗	✗	✗



- **Blokada obrotu wokół osi X i przemieszczenia wzdłuż Y**

$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
✓	✗	✓	✗	✓	✓



Pozostałe typy podpór definiuje się analogicznie, przy czym nie istnieje jeden, stosowany powszechnie układ symboli odpowiadający kolejnym podporom.

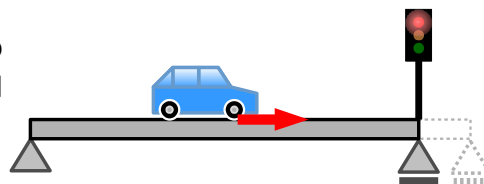
## TECHNICZNE SPOSOBY REALIZACJI WIĘZÓW

### Podpora przegubowa przesuwna

Podpora ta niemal wyłącznie stosowana jest w sytuacji, gdy konieczne jest dopuszczenie przesuwu poziomego przy jednoczesnym zablokowaniu przemieszczenia pionowego. Inne kierunki przesuwu dopuszczalnego nie są spotykane w typowych zagadnieniach inżynierskich.

Dopuszczenie przesuwu w konstrukcji podyktowane jest najczęściej koniecznością pozostawienia swobody w odkształcaniu się konstrukcji w pewnym kierunku. Przykładami mogą być:

- Przesunięcie przęsła mostowego wzdłuż jego osi, pod wpływem działania sił podłużnych od hamowania pojazdów.



- Odkształcanie się elementów konstrukcyjnych w wyniku zjawiska rozszerzalności cieplnej, w sytuacji, gdy element poddany jest działaniu temperatury niższej lub wyższej od temperatury, jaka panowała w czasie jego montażu.



- Odkształcanie się elementów żelbetowych w wyniku skurczu betonu podczas jego schnięcia.

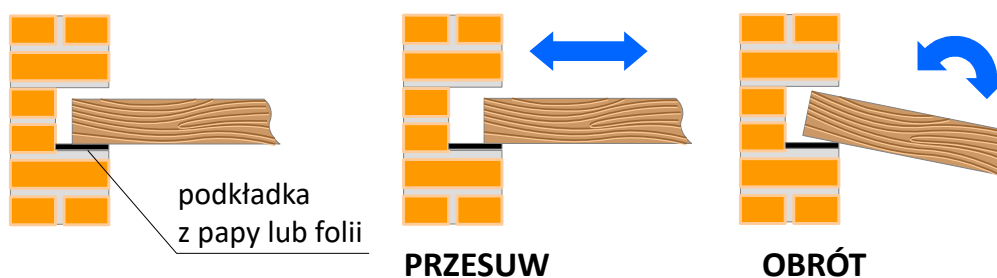


Chodzi o to, że rozkład sił wewnętrznych w materiale różni się w zależności od schematu statycznego konstrukcji. Element, który może odkształcać się całkiem swobodnie, nie będzie poddany żadnym siłom. Jeśli jednak przesuw ten zostanie zablokowany, wtedy pojawią się odpowiednie siły reakcji. W przypadkach skrajnych, siły te mogą być tak duże, że mogą doprowadzić do nadmiernej deformacji lub nawet do zniszczenia elementu. Ponieważ w niektórych sytuacjach takie tzw. „odkształcenie wymuszone” jest nie do uniknięcia (np. elementy konstrukcyjne znajdujące się nieustannie pod wpływem słońca), a ewentualne reakcje ograniczające ten przesuw mogą być niebezpiecznie duże, konieczne jest zagwarantowanie swobody przesuwu w odpowiednim kierunku.

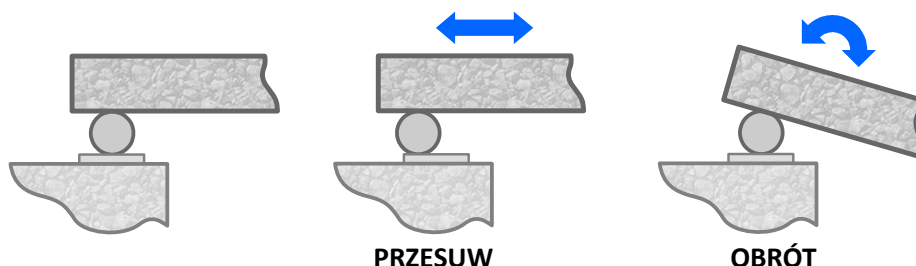
Najprostszym sposobem zrealizowania podparcia przegubowego z przesuwem jest zwykłe oparcie danego elementu konstrukcyjnego na nieruchomym elemencie podpierającym, w taki sposób, aby umożliwić przesuw i obrót.

- Możliwość przesuwu można zapewnić minimalizując tarcie między elementem podpierającym a podporą. Można to uczynić stosując np. podkładki z materiałów o niskim współczynniku tarcia: folię aluminiową, papę asfaltową, gładkie płytki stalowe itp.
- Obrót możliwy jest jedynie wtedy, gdy oparcie nie jest zbyt „głębokie”, tj. gdy szerokość podpory jest na tyle mała, że obrót elementu podpieranego jest możliwy przy minimalnym odkształceniu samej podpory.

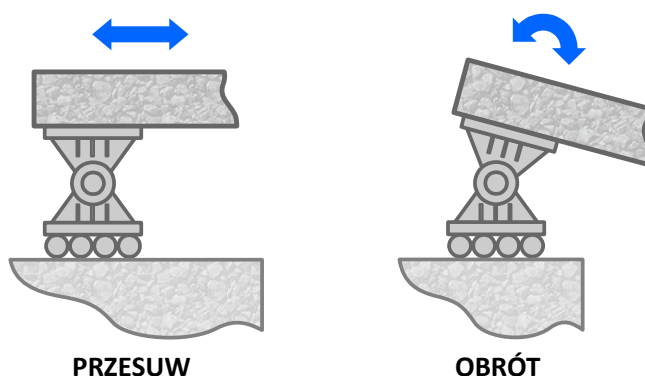
Przykładem może być **podparcie proste** drewnianej belki stropowej w gnieździe muru:



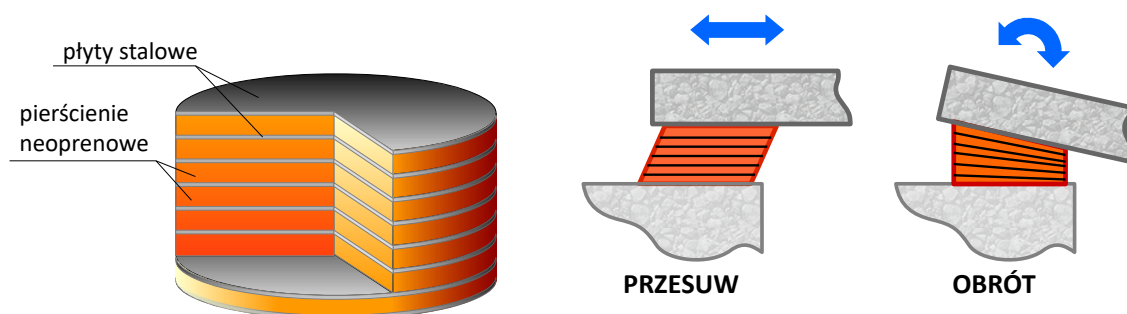
Obecność podkładki z papy lub folii PCV wynika raczej z potrzeby izolacji drewna od wpływu wilgoci, jednak pośrednim skutkiem jej obecności jest dopuszczenie przesuwu belki w gnieździe. Jest jednak jasne, że powyższe rozwiązanie jest bardzo niedoskonałym sposobem realizacji podpory przegubowej przesuwnej. W rzeczywistości bowiem tarcie przy przesuwaniu się belki po podkładce będzie na tyle duże, że w podparciu pojawi się jakaś reakcja (siła tarcia) pozioma. Również i obrót w gnieździe nie jest całkiem swobodny. W odpowiedzialnych konstrukcjach inżynierskich konieczne są bardziej specjalistyczne rozwiązania, zapewniające poprawny charakter pracy podpory. Jednym z takich sposobów realizacji technicznej podpory przegubowej przesuwnej jest **łożysko wałkowe**. Gładki stalowy wałek, umieszczony w odpowiednio wykonanym łożysku umożliwia zarówno bardzo swobodne przemieszczanie się konstrukcji w poziomie (przez toczenie się wałka) jak i obrót:



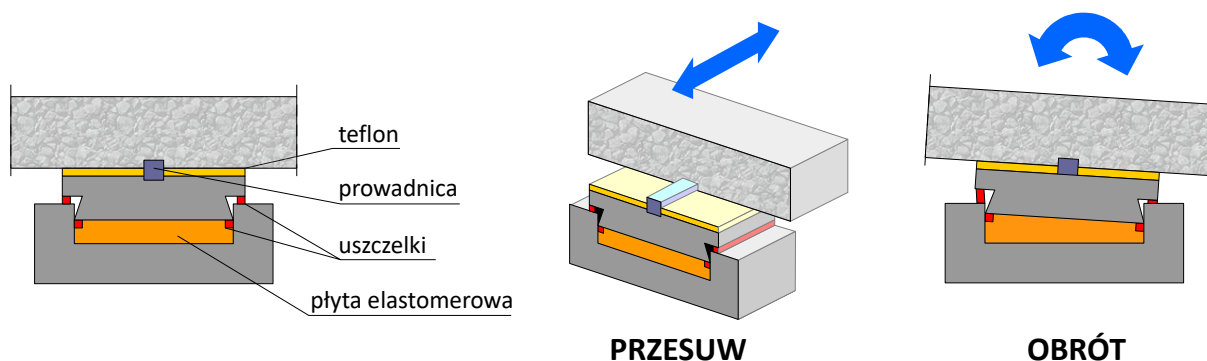
Innym sposobem realizacji tej podpory jest zbudowanie odpowiedniego **mechanizmu przegubowego** umieszczonego na układzie wałków (rolek) zapewniających przesuw całego mechanizmu:



Stosunkowo nowym rozwiązaniem (mniej więcej od połowy XX wieku) są podpory w formie „stalowo-gumowego hamburgera” - jest to układ ułożonych naprzemiennie pierścieni z łatwo odkształcalnego gumopodobnego tworzywa (np. neopren) oraz usztywniających „talerzy” stalowych:



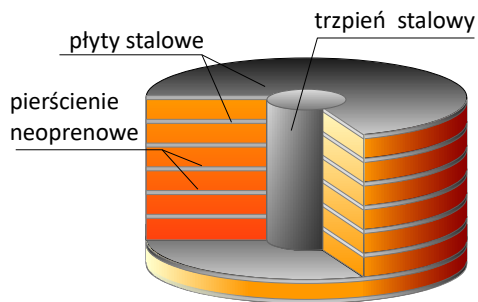
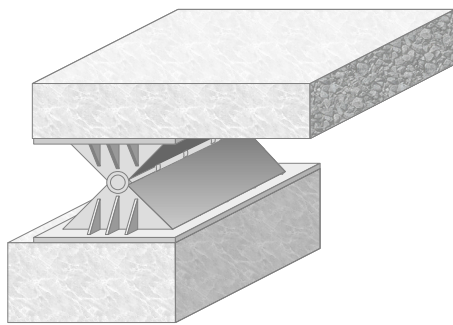
Podobny charakter mają tzw. **łożyska garnkowe**. Umieszczony w nieodkształcalnym „garnku” blok elastomerowy umożliwia obrót podpartego elementu. Jednocześnie na wierzchnim elemencie łożyska umieszczona jest prowadnica dopuszczająca przesuw w zadanym kierunku po powierzchni pokrytej teflonem, który minimalizuje tarcie.



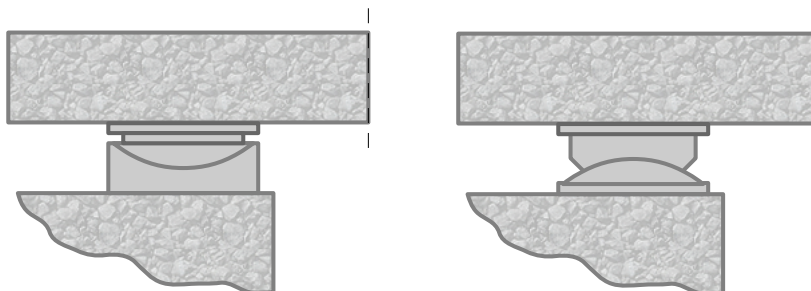
### Podpora przegubowa przesuwna

Podpory przegubowe nieprzesuwne konstruuje się w podobny sposób, jak podpory przesuwne, blokując w nich możliwość przemieszczenia poziomego. I tak:

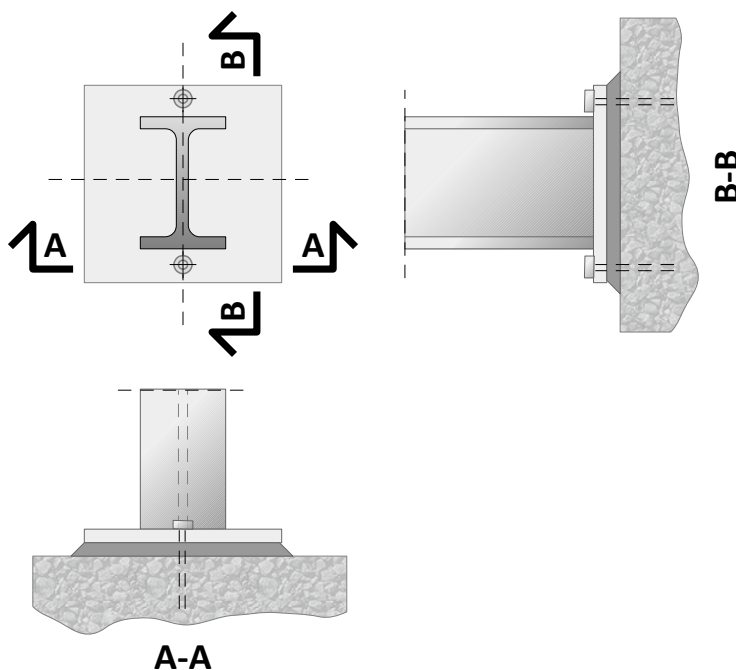
- dla mechanizmu przegubowego rezygnuje się z obecności wałków. Obie części mechanizmu mocowane są odpowiednio do pomostu i przyczółka za pomocą odpowiednich kotew.
- w przypadku łożyska neoprenowego uzupełnia się je sztywnym stalowym trzpieniem umieszczonym w jego osi, uniemożliwiającym przemieszczenie poziome
- w przypadku łożyska garnkowego rezygnuje się z prowadnicy i warstwy poślizgowej teflonu, które umożliwiają przesuw.



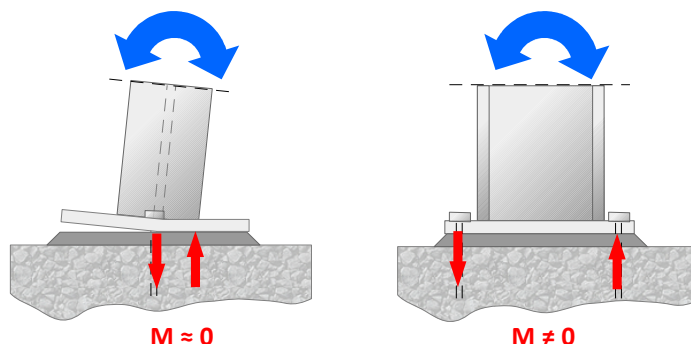
Częstym rozwiązaniem są również **łożyska soczewkowe**. Warunkiem poprawnej ich pracy jest minimalizacja tarcia między elementami łożyska – tarcie redukuje się poprzez stosowanie odpowiednich warstw poślizgowych wykonanych np. z teflonu.



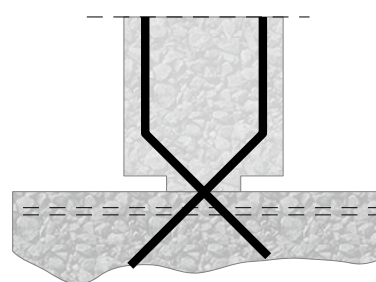
Stosuje się również i inne rozwiązania, jednak warunkiem ich poprawnej pracy jest to, aby uniemożliwiały jakiegolwiek przemieszczenie przy zachowaniu względnej swobody obrotu. „Względna swoboda” oznacza tutaj, że obrót konstrukcji wywołuje na podporze pomijalnie małe reakcje redukujące się do pary sił. To, co uznamy za wartość „pomijalnie małą” zależy od wybranych przez nas kryteriów (np. jakiś procent maksymalnego dopuszczalnego momentu zginającego dany profil). Przykładami takich przybliżonych rozwiązań może być kotwienie profilu stalowego do fundamentu żelbetowego w taki sposób, aby kotwy działały w osi zginania profilu.



Oczywiście, w wyniku zginania blacha, do której dospawany jest profil i przez którą kotwiony jest on w fundamencie zapiera się o podławkę lub betonowe podłoże – występujące tam naprężenia kontaktowe wraz z siłami w kotwach daje nam parę sił, która stanowi pewien moment utwierdzenia. Z uwagi na stosunkowo niską sztywność cienkiej blachy, moment ten nie jest jednak duży. Gdyby jednak zginanie odbywało się w płaszczyźnie prostopadłej, wtedy obrotowi przeciwstawiłyby się siły wyrywające i wciskające kotwy – ponieważ są one oddalone od siebie, stąd ramię działania takiej pary sił może dać znaczną wartość momentu. Opór może być tutaj na tyle duży, że rozwiązanie to bliższe będzie pełnemu utwierdzeniu niż podporze przegubowej.

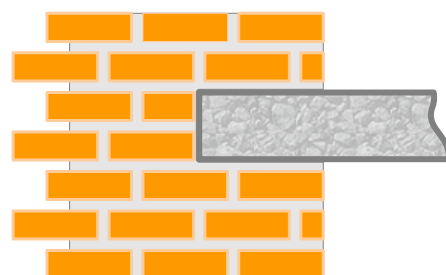


W podobny sposób można skonstruować połączenie przegubowe elementów żelbetonowych. W takim przypadku stosuje się odgięte pręty zbrojeniowe, które w połączeniu tych elementów znajdują się bardzo blisko siebie, tak aby ramię działania sił w zbrojeniu było bardzo małe, najlepiej bliskie zeru. Także i w tym przypadku mogą pojawić się ściskające naprężenia kontaktowe między elementami, które wraz z siłą w prętach zbrojeniowych dadzą nam niewielki moment utwierdzenia. Udział tych naprężeń można zminimalizować kształtując w odpowiedni sposób zakończenie elementów.

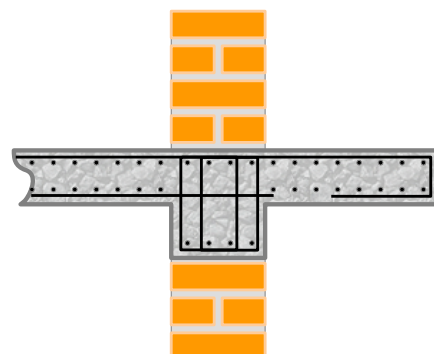


## Pełne utwierdzenie

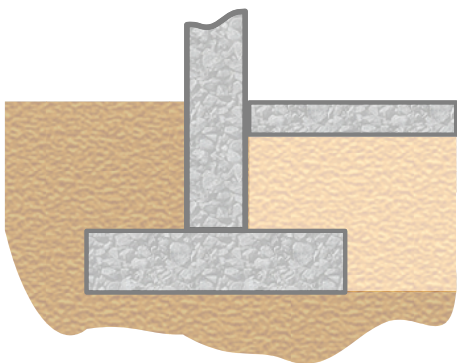
Pełne utwierdzenie to każde zamocowanie elementu, które ogranicza jakiegokolwiek jego przemieszczenie – przesuw i obrót. Typowym przykładem pełnego zamocowania są wszelkiego rodzaju wsporniki. Ciężar i sztywność ściany, w którym wspornik taki jest zamocowany, uniemożliwiają jego obrót lub przesunięcie.



Szczególnym przypadkiem są tutaj płyty balkonowe. Ściana, w której wieniec jest wbudowany balkon nie jest z reguły tak gruba, aby zapewnić całkowitą blokadę obrotu. Jednakże płyta balkonu jest zazwyczaj kontynuacją płyty stropowej – w tym przypadku to ciężar własny stropu i jego obciążenie sprawiają, że obrót płyty balkonowej względem ściany jest minimalny.

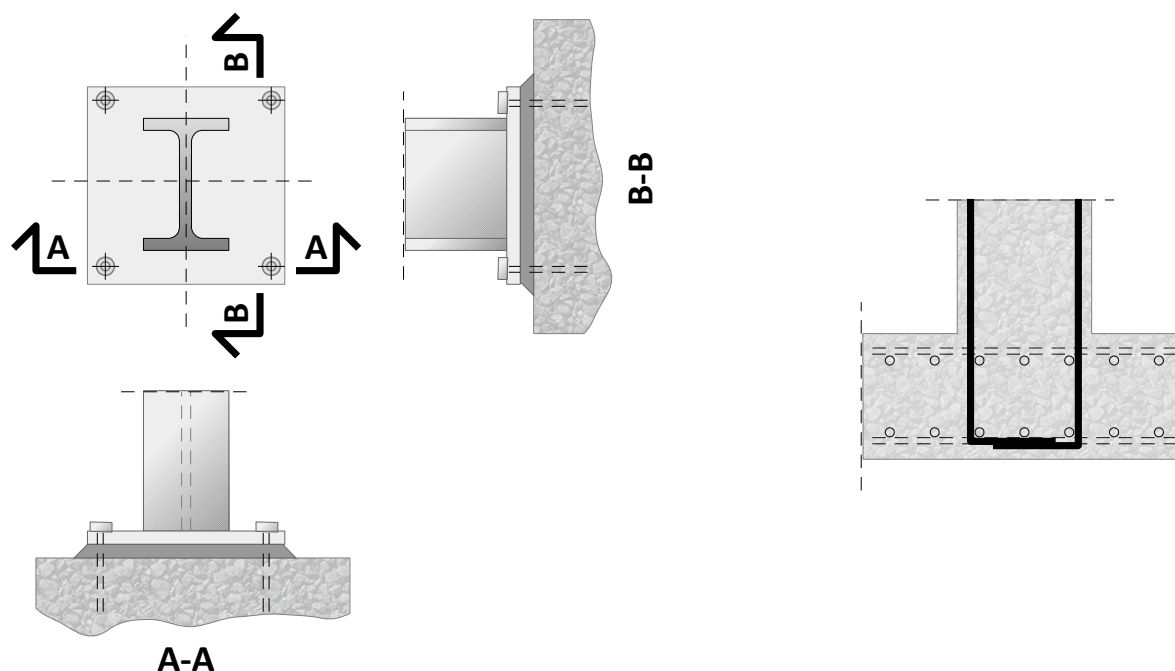






Pełne utwierdzenie jest również najczęściej stosowaną podporą, jeśli chodzi o modelowanie fundamentów. W przypadku ściany lub słupa zamocowanego w ławie lub stopie fundamentowej, ośrodkiem blokującym obrót jest tutaj otaczający je grunt. Z tego względu elementy konstrukcyjne oparte na płytko położonych fundamentach niekoniecznie mogą być zamodelowane jako elementy w pełni utwierdzone.

W przypadku, gdy łączymy ze sobą dwa elementy konstrukcji, z których jeden ma stanowić dla drugiego podporę ograniczającą przesuw i obrót, konieczne jest zapewnienie możliwości przenoszenia sił i momentów sił. Już przy omawianiu podpór przegubowych nieprzesuwnych widzieliśmy, że układ szeroko rozstawionych kotew umożliwia blokadę obrotu. Analogicznie, w przypadku połączenia elementów żelbetowych, wystarczy odpowiednio silnie zakotwić zbrojenie jednego elementu w drugim.



Jak widać na powyższych przykładach, stosowane w praktyce rozwiązania nie są rozwiązaniami „czystymi” w tym sensie, że dopuszczalne przemieszczenia nie odbywają się całkiem bez oporów, np. w przypadku podpory przegubowej przesuwnej przy przesuwie w oparciu prostym występuje w rzeczywistości tarcie będące reakcją poziomą, która w takiej podporze nie powinna występować. Podobnie, tarcie dające poziomą składową reakcji występuje w łożysku przegubu. Jasne jest również, sama sztywność materiału łożysk gumowych stawia opór skutkujący obecnością zarówno poziomej składowej reakcji oraz momentu utwierdzenia. Z drugiej strony, żadne z powyższych rozwiązań nie daje nam również „doskonale sztywnego” podparcia na wymaganym kierunku. Same podpory lub ich elementy odkształcają się pod wpływem działających sił, toteż np. przemieszczenie pionowe na podporze przegubowej nigdy nie jest równe dokładnie zero. Jeszcze wyraźniej obserwujemy to zjawisko w przypadku wszelkiego rodzaju utwierdzeń – pewien minimalny obrót występuje zawsze. Wszystkie sposoby realizacji utwierdzenia opierają się właśnie

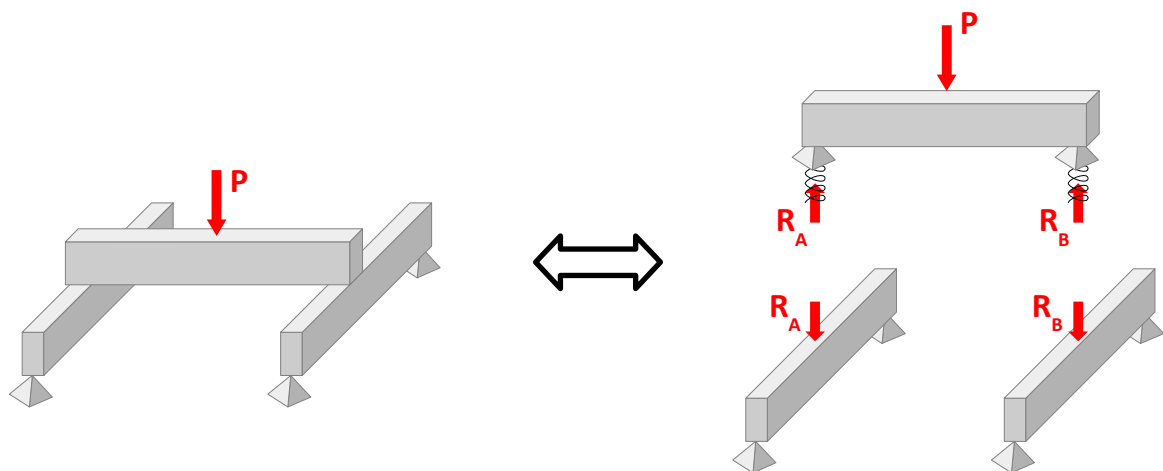
na zasadzie blokowania obrotu albo przez sztywność otaczającego materiału (mur dookoła płyty balkonu, grunt dookoła ściany fundamentowej), albo przez użycie odpowiednich kotew. W każdym przypadku jednak moment utwierdzenia powstaje jako para reakcji pojawiających się jako odpowiedź na pewien mały, ale istniejący już obrót.

## Podpory podatne

Powyższe przykłady pokazują nam, że w praktyce niemożliwe jest zrealizowanie wykorzystywanego przez nas w obliczeniach podparcia w sposób idealny – podpora idealna uniemożliwiłaby jakiegokolwiek przemieszczenie, tymczasem w każdej rzeczywistej podporze, reakcja podporowa jest odpowiedzią na jakąś zaistniałą (choć bardzo małą) deformację.

Z reguły jednak deformacja ta jest tak niewielka, że nie wpływa w żaden sposób na statykę układu – rozkład reakcji podporowych i rozkład sił przekrojowych. Są jednak sytuacje, kiedy odkształcenie podpory jest na tyle duże, że istotnie wpływa ono na rozkład sił w układzie. Dotyczy to przede wszystkim sytuacji, gdy podpora jest wykonana z materiału o małej sztywności (podatnego na deformację), takiego jak niezagęszczony grunt, podkładki styropianowe lub elastomerowe oraz sytuacji, gdy podpora została celowo wykonana jako podatna, np. z wykorzystaniem sprężyn. Te ostatnie bywają używane (wraz z odpowiednimi elementami tłumiącymi drgania), jako podpory pod urządzenia generujące drgania, np. turbozespoły lub różnego rodzaju silniki w sprężarkach, transformatorach, jednostkach klimatyzacyjnych i w innych urządzeniach instalacji wentylacyjnych, sanitarnych lub elektrycznych, które zawsze znajdują się w budynku. Drganiom podlegać może również sama konstrukcja nośna, szczególnie gdy jest ona wiotka – ażurowa i wykonana z elementów o małych wymiarach przekroju poprzecznego i o małej sztywności – np. dźwigary lekkich pomostów.

Specyficznym przypadkiem, w którym uwzględnienie deformacji podpory może mieć znaczenie jest sytuacja, w której analizujemy konstrukcję jako zbiór elementów oddziałujących na siebie za pomocą sił, nie zaś jako jeden układ złożony. Przykładem może być belka oparta w środku przęseł dwóch innych, prostopadłych belek. Możliwa jest oczywiście analiza takiego trójwymiarowego rusztu, ale niejednokrotnie wygodniej jest analizować je odrębnie. Jasne jest dla nas, że w przypadku wiotkich belek spodnich ich ugięcie pod wpływem obciążenia będzie na tyle duże, że belka wierzchnia powinna zostać zamodelowana jako belka na podporach podatnych – sztywność takiej podatnej podpory wynika ze sztywności belek spodnich.



W **podporach podatnych** reakcje na podporze jest tym większa im silniejszej deformacji podpora ta ulegnie. Zależność ta najczęściej przyjmowana jest jako liniowa, tj. że reakcja podporowa jest wprost proporcjonalna do przemieszczenia podpory. Współczynnik proporcjonalności  $k$  o wymiarze N/m nazywamy **sztwnością podpory**, zaś jego odwrotność – jej **podatnością**. Podpory podatne z reguły oznacza się analogicznie jak podpory sztywne, dodając do nich symbol sprężynki dla podpór blokujących przemieszczenie lub dwóch równoległych sprężynek albo sprężynki spiralnej dla podpór blokujących obrót.

