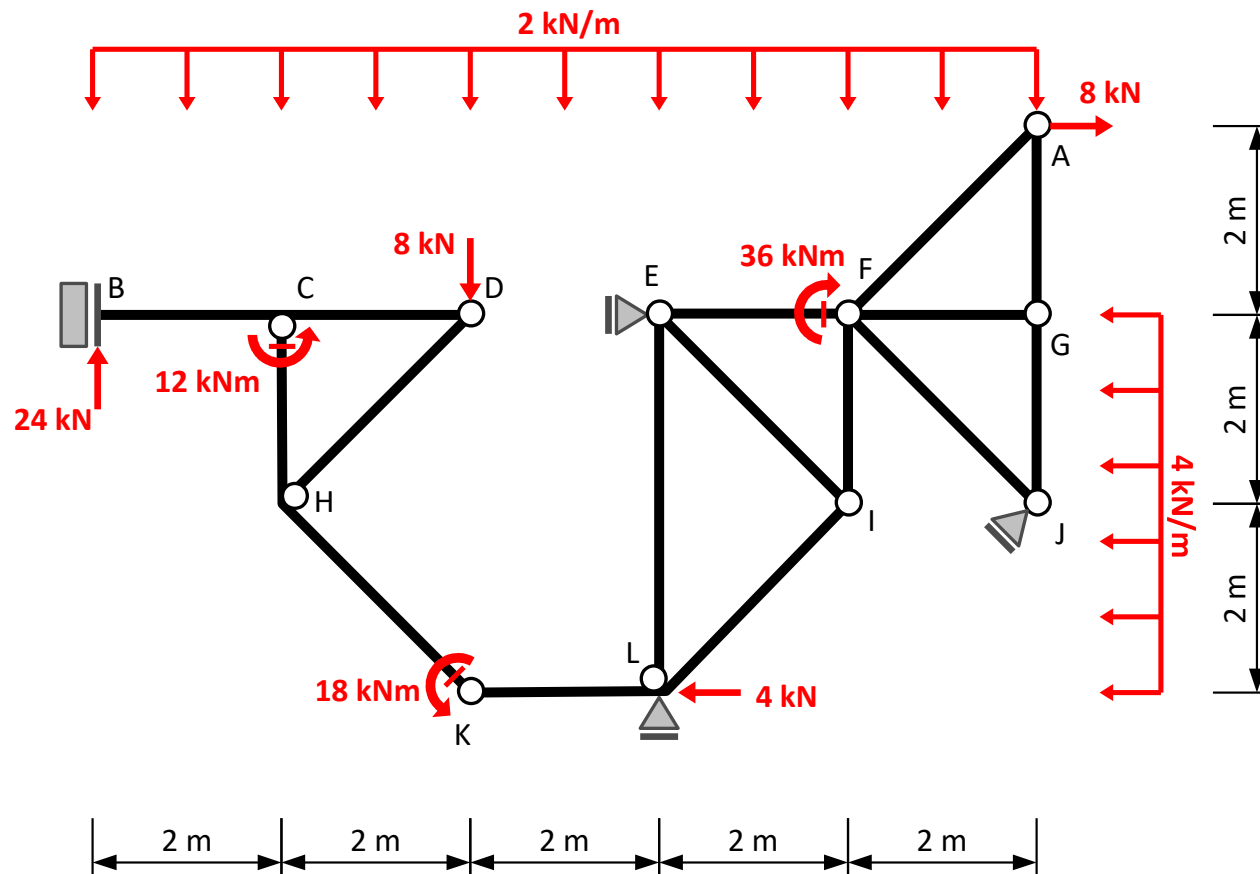
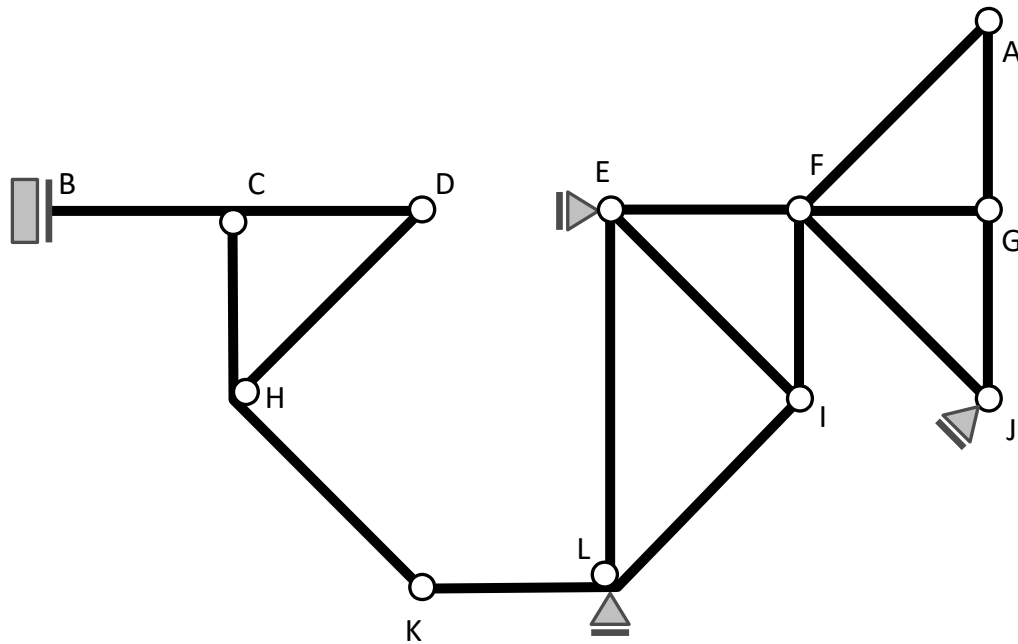
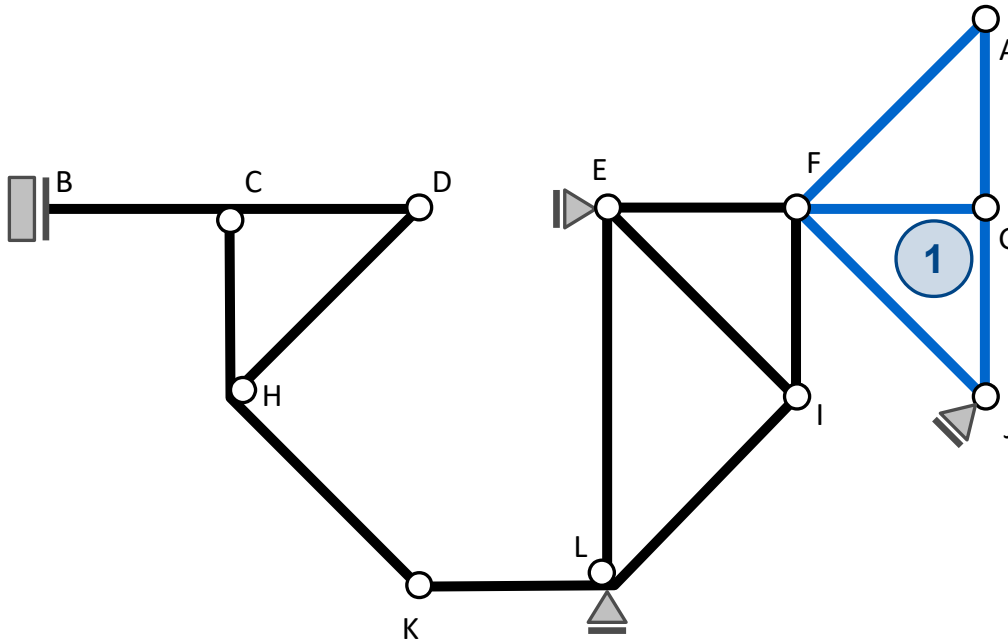


Wyznaczyć reakcje podporowe w poniższym układzie, korzystając z równań równowagi.





Na początku określamy liczbę brył sztywnych oraz identyfikujemy przeguby, które rzeczywiście dopuszczają obrót między sąsiadującymi bryłami sztywnymi.



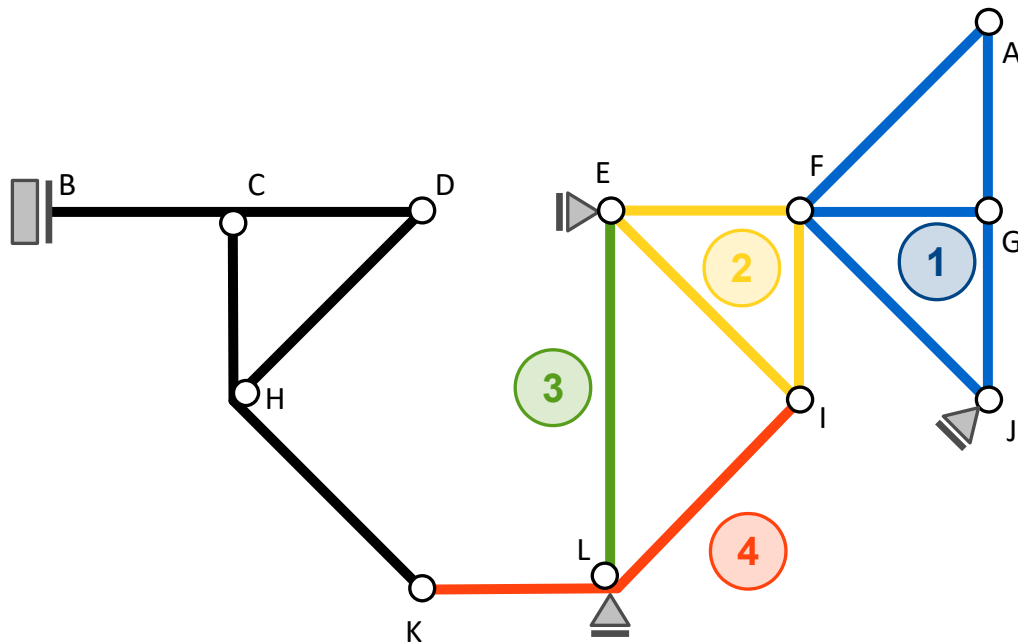
Po prawej stronie widzimy kratownicę złożoną z pól trójkątnych. **Taka kratownica stanowi jedną bryłę sztywną.**

Przeguby A, G, J nie umożliwiają żadnych obrotów, ponieważ łączą elementy wchodzące w skład jednej bryły sztywnej.

Przegub F:

- Nie umożliwia wzajemnych obrotów prętów kratownicy FA, FG oraz FJ
- Umożliwia obrót całej kratownicy traktowanej jako jedna bryła sztywna wokół punktu F

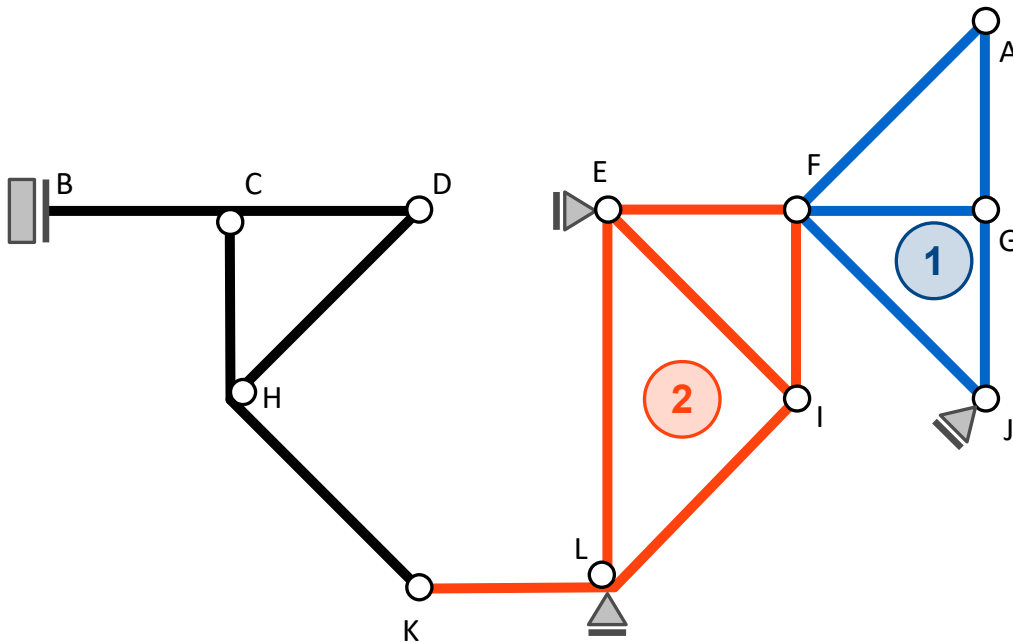
Pręty schodzące się w F z kratownicą z pewnością nie będą tworzyć z nią jednej bryły sztywnej, ponieważ jest to jedyny przegub, przez który łączy się ona z innymi bryłami, a do utworzenia nowej bryły sztywnej potrzebne są dwa przeguby.



Kratownica EFI stanowi bryłę sztywną.

Pręt EL stanowi bryłę sztywną.

Rama KLI stanowi bryłę sztywną.



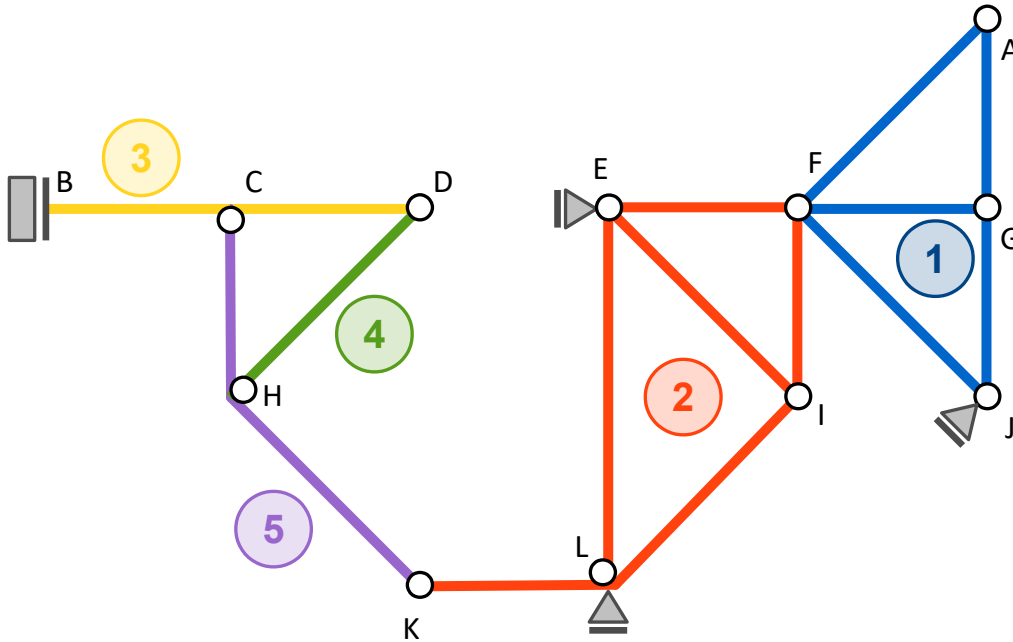
Kratownica EFI, pręt EL oraz rama KLI to 3 bryły sztywne połączone trzema niewspółliniowymi przegubami: E, I, L.

Możemy traktować je jako **jedną bryłę sztywną**.

Przeguby E, I, L nie umożliwiają wzajemnego obrotu elementów składowych tej bryły.

Przegub F łączy 2 bryły sztywne (bryłę 1 i bryłę 2) – jest **przegubem pojedynczym**.

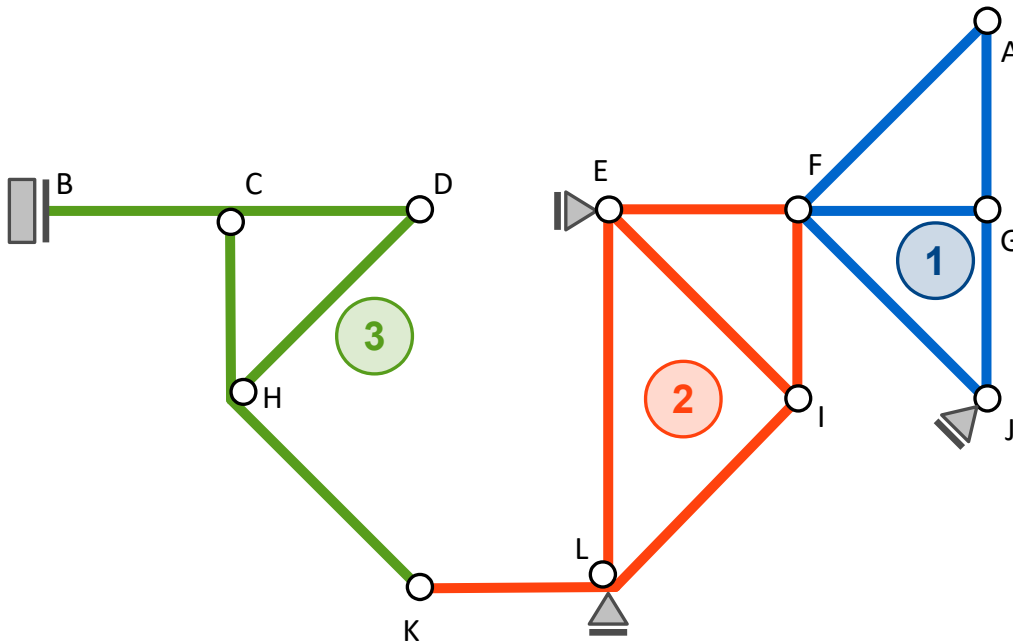
Przegub K łączy 2 bryły sztywne (bryłę 2 oraz ramę CHK) – jest **przegubem pojedynczym**.



Pręt BD stanowi bryłę sztywną.

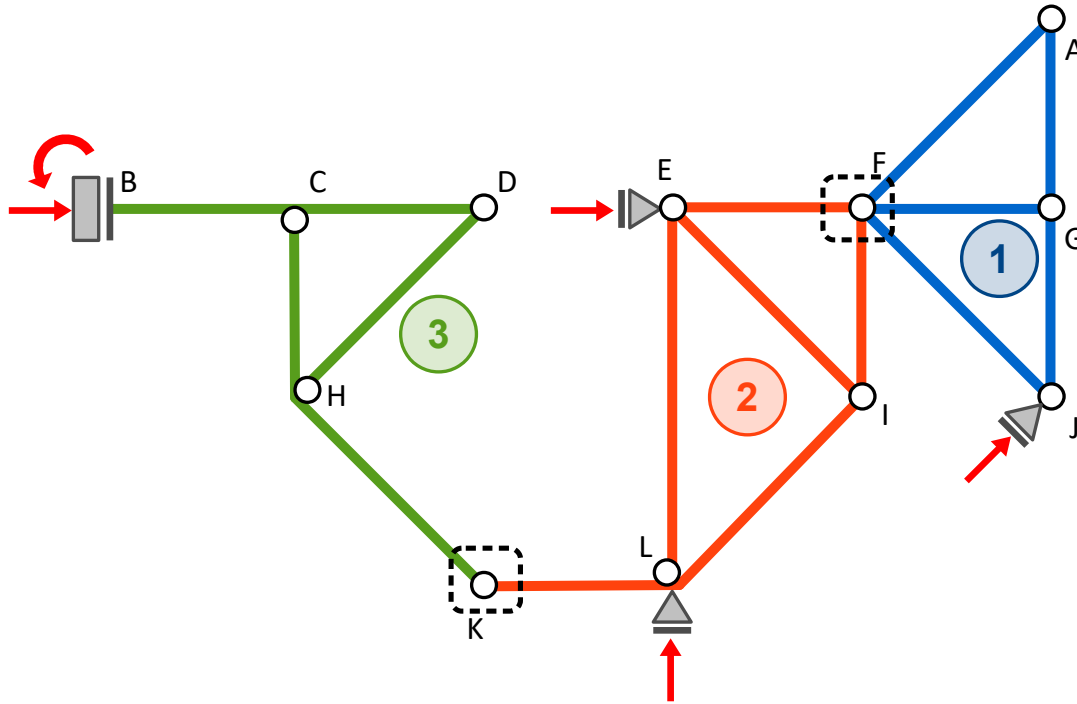
Pręt HD stanowi bryłę sztywną.

Rama CHK stanowi bryłę sztywną.



Pręt BD, pręt HD oraz rama CHK to 3 bryły sztywne połączone trzema niewspółliniowymi przegubami – możemy traktować je jak **jedną bryłę sztywną**.

Przeguby C, D, H nie umożliwiają wzajemnego obrotu elementów składowych tej bryły.



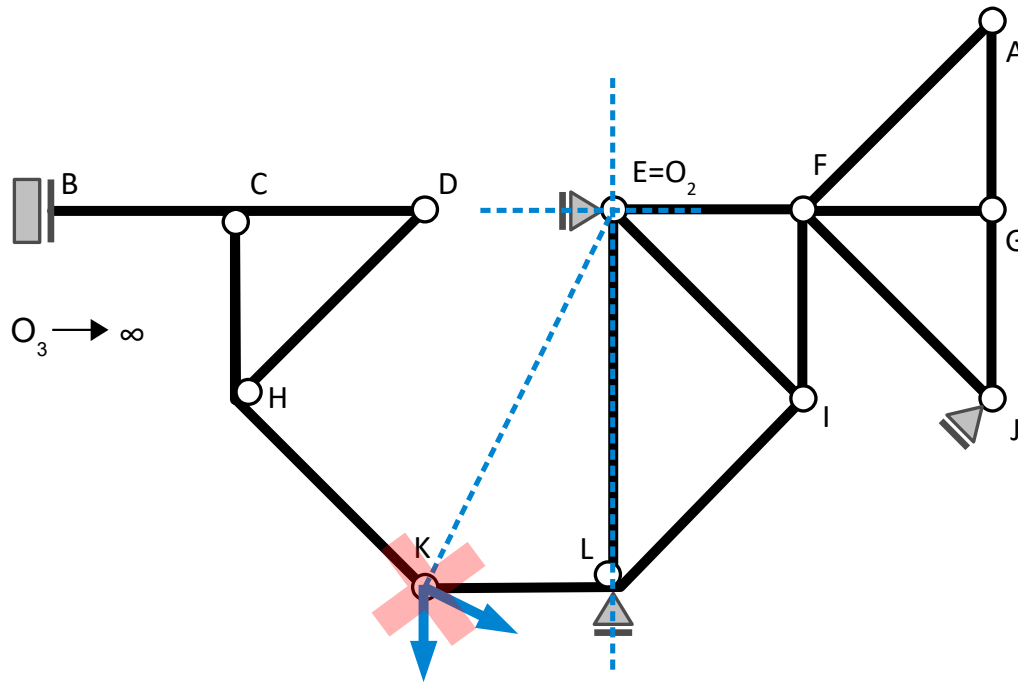
Układ składa się z 3 brył sztywnych.

Układ ma 2 przeguby pojedyncze.

Do układu przyłożonych jest 5 więzi.

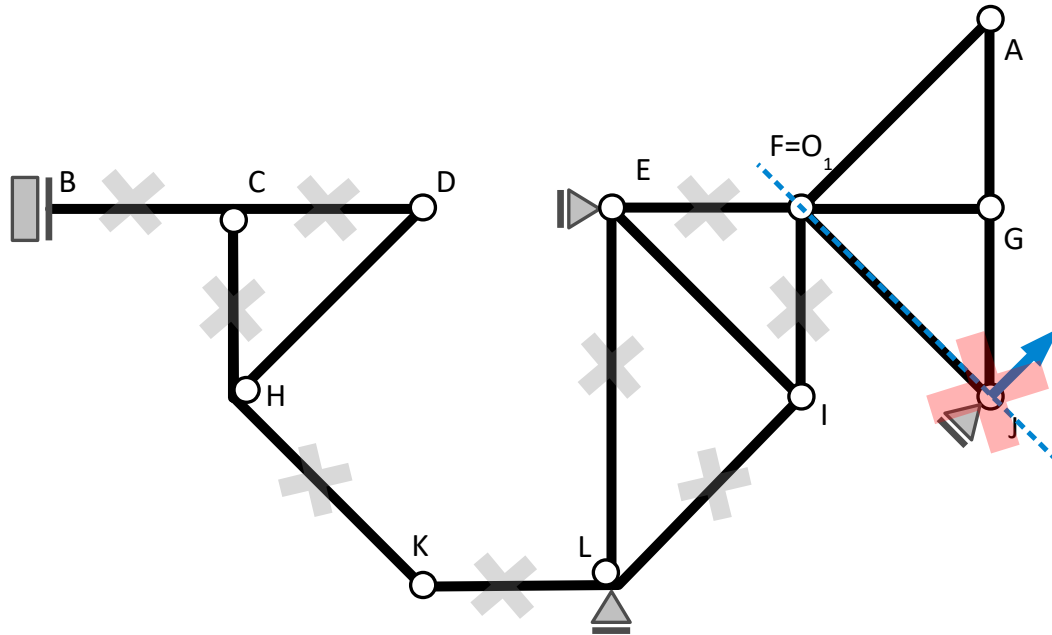
$$S - R = 3B - 2P - R$$

$$S - R = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$$



ANALIZA KINEMATYCZNA

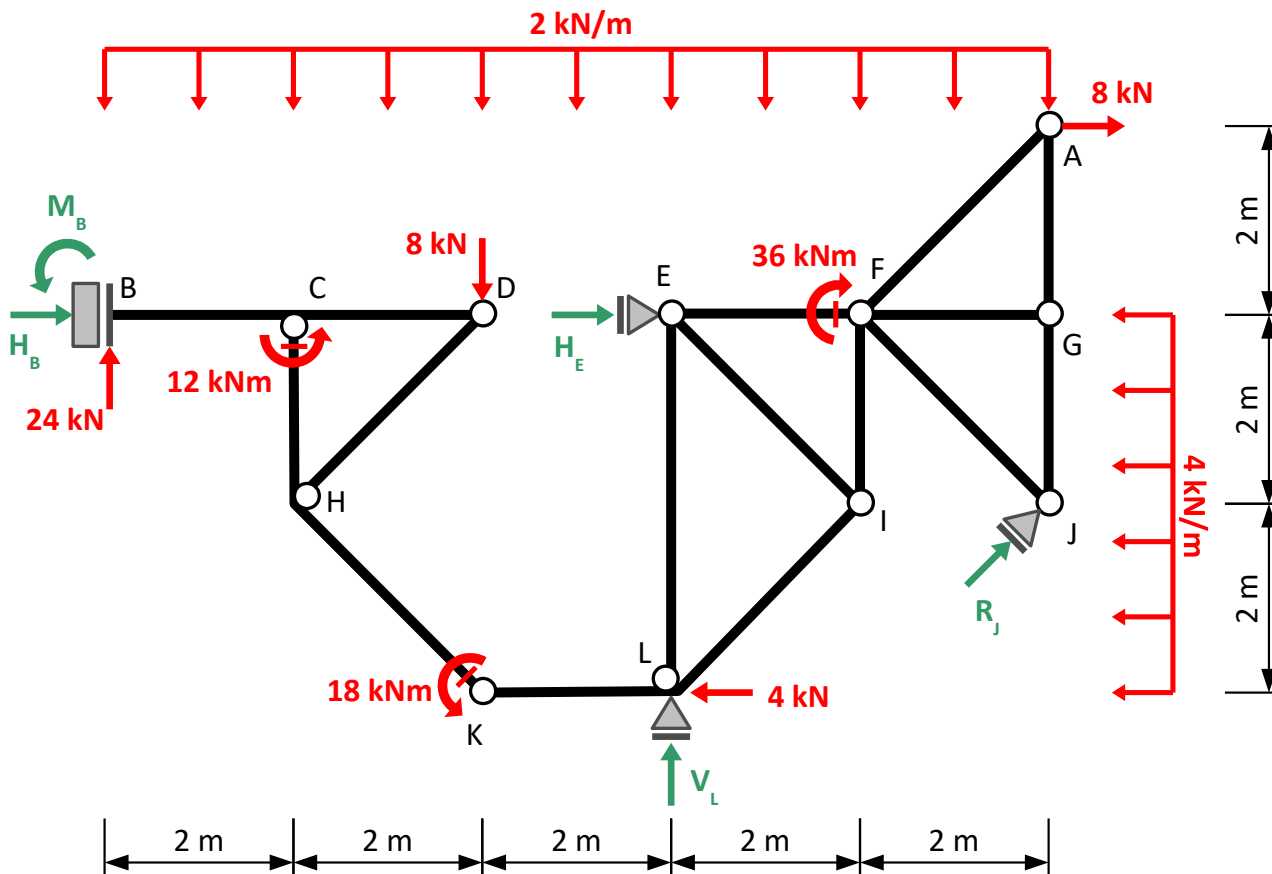
- Bryła 3 może wykonywać jedynie translację pionową.
- Chwilowy środek obrotu bryły 2 znajdujemy w punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do kierunku dopuszczalnych na podporach E i L – jest on w punkcie E.
- Kierunek prędkości punktu K wynikający z translacji bryły 3 nie jest zgodny z kierunkiem prędkości K wynikający z obrotu bryły 2 wokół punkt E. Ruch taki jest niemożliwy.
- Bryły 2 i 3 są nieruchome.



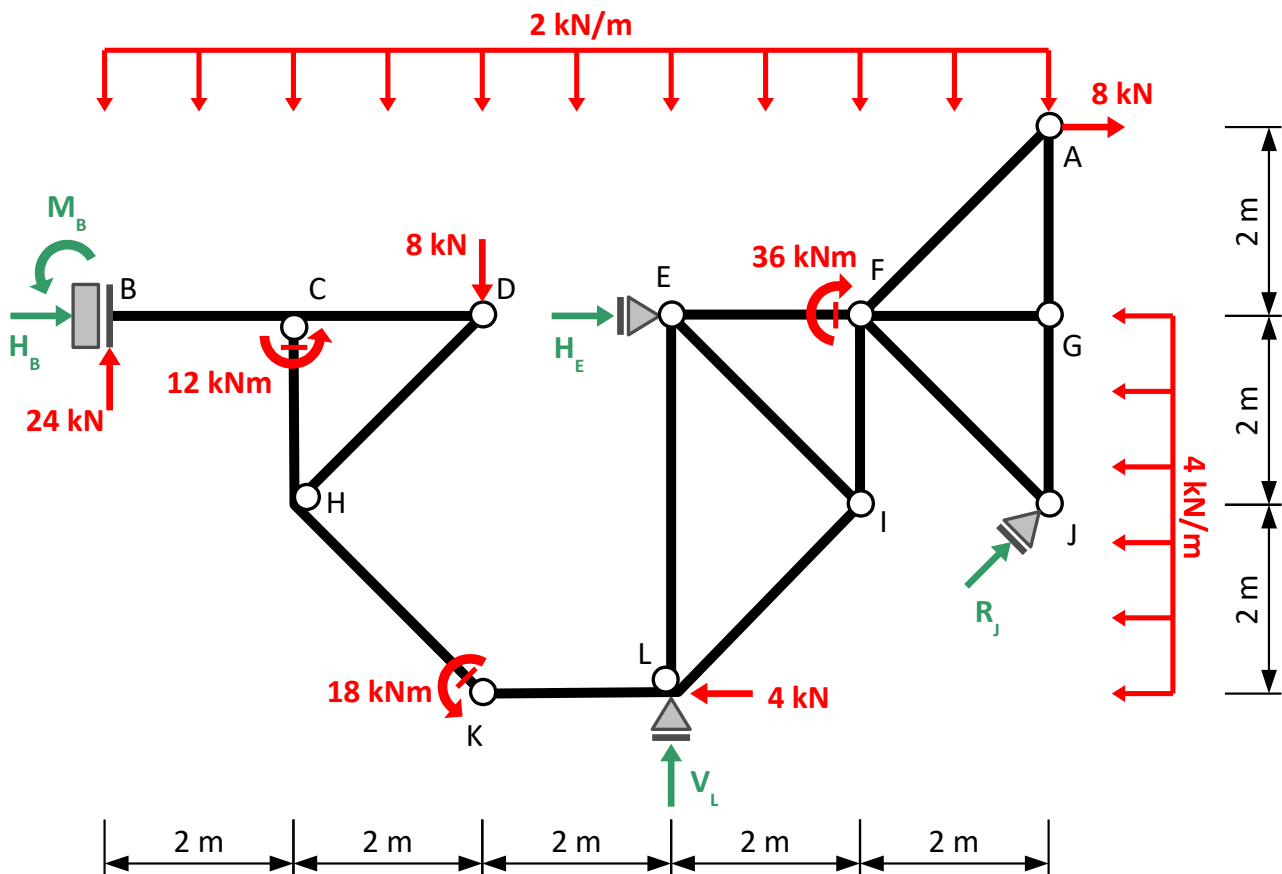
ANALIZA KINEMATYCZNA

- Bryła 2 jest nieruchoma. W szczególności nieruchomy jest punkt F. Musi być on zatem chwilowym środkiem obrotu bryły 1.
- Kierunek prędkości punktu J wynikający z obrotu bryły 1 wokół F jest niezgodny z kierunkiem dopuszczalnym przez podporę w punkcie J.
- Bryła 1 jest nieruchoma.
- Układ jest **geometrycznie niezmienny**.
- Ponieważ $S-R=0$, zatem układ jest **statycznie wyznaczalny**.

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



- Przypisujemy odpowiednie reakcje do podpór.
- Zwrot reakcji wybieramy dowolnie. Jeśli rzeczywisty zwrot jest przeciwny, to otrzymamy ujemną wartość reakcji.

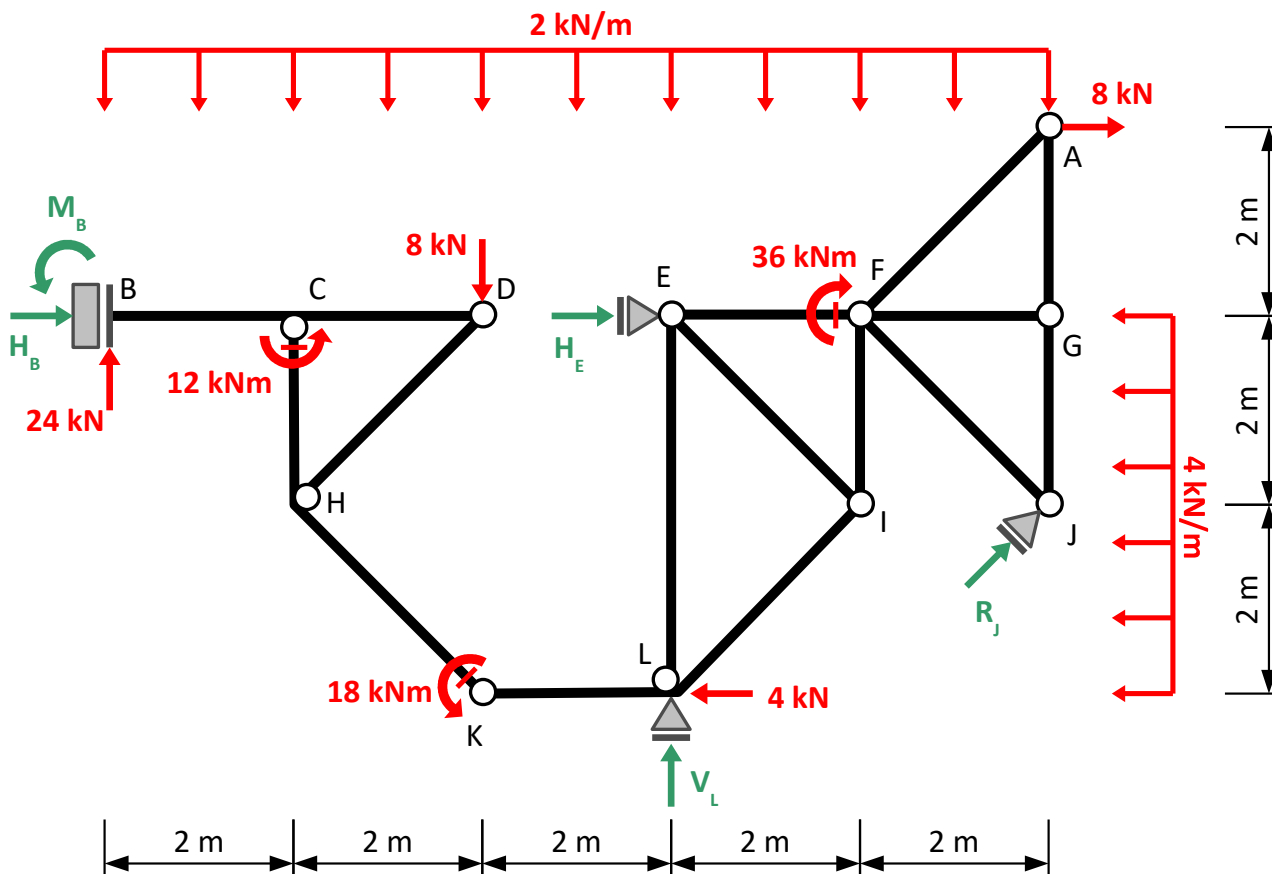


PLAN ROZWIĄZANIA

- Mamy do dyspozycji 7 równań, spośród których tylko 5 jest niezależnych:

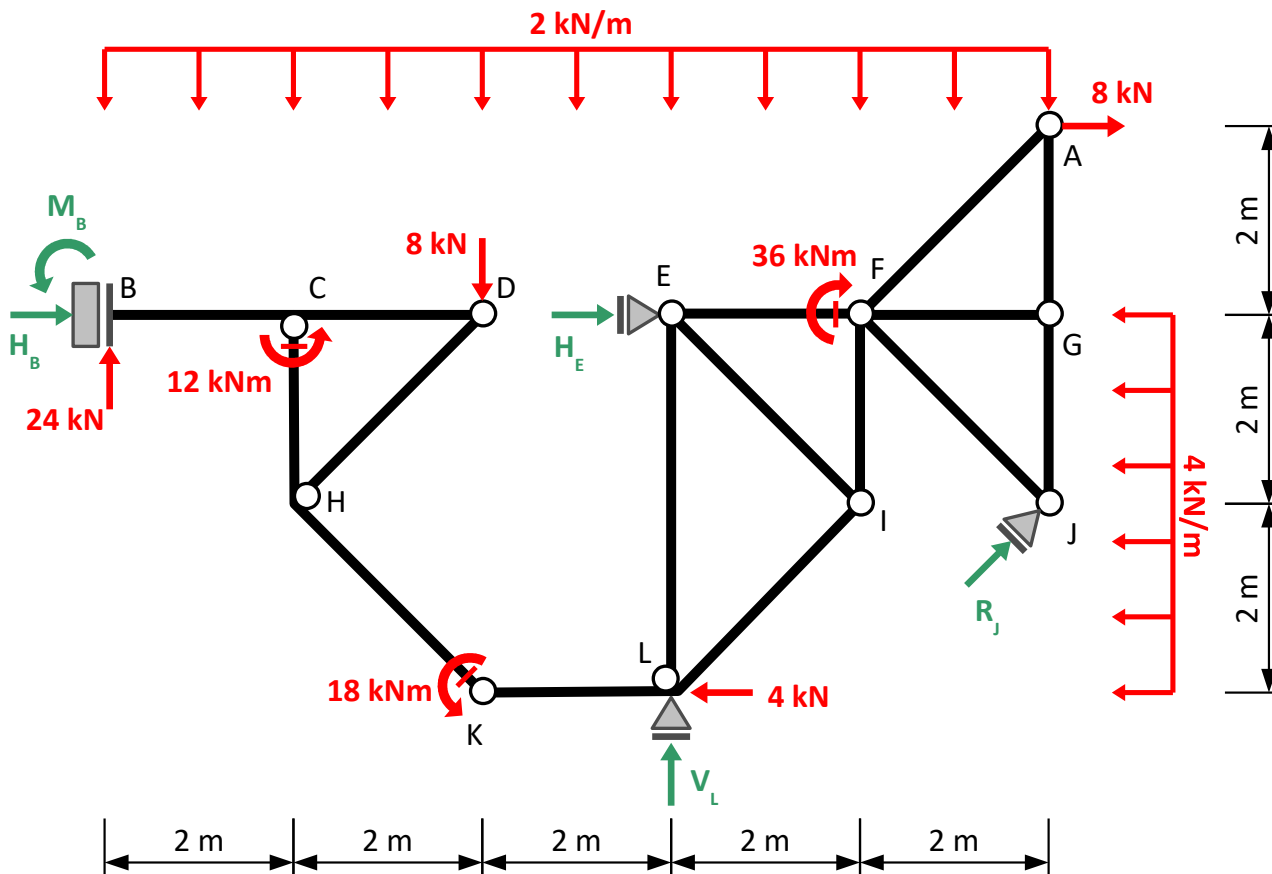
$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M_P &= 0 \quad (P \text{ dowolny}) \\ \sum M_K^{\leftarrow} &= 0 \\ \sum M_K^{\rightarrow} &= 0 \\ \sum M_F^{\leftarrow} &= 0 \\ \sum M_F^{\rightarrow} &= 0 \end{aligned}$$

- Poszukujemy takich równań, które umożliwią wyznaczenie którejś reakcji bez konieczności rozwiązywania układu równań.



PLAN ROZWIĄZANIA

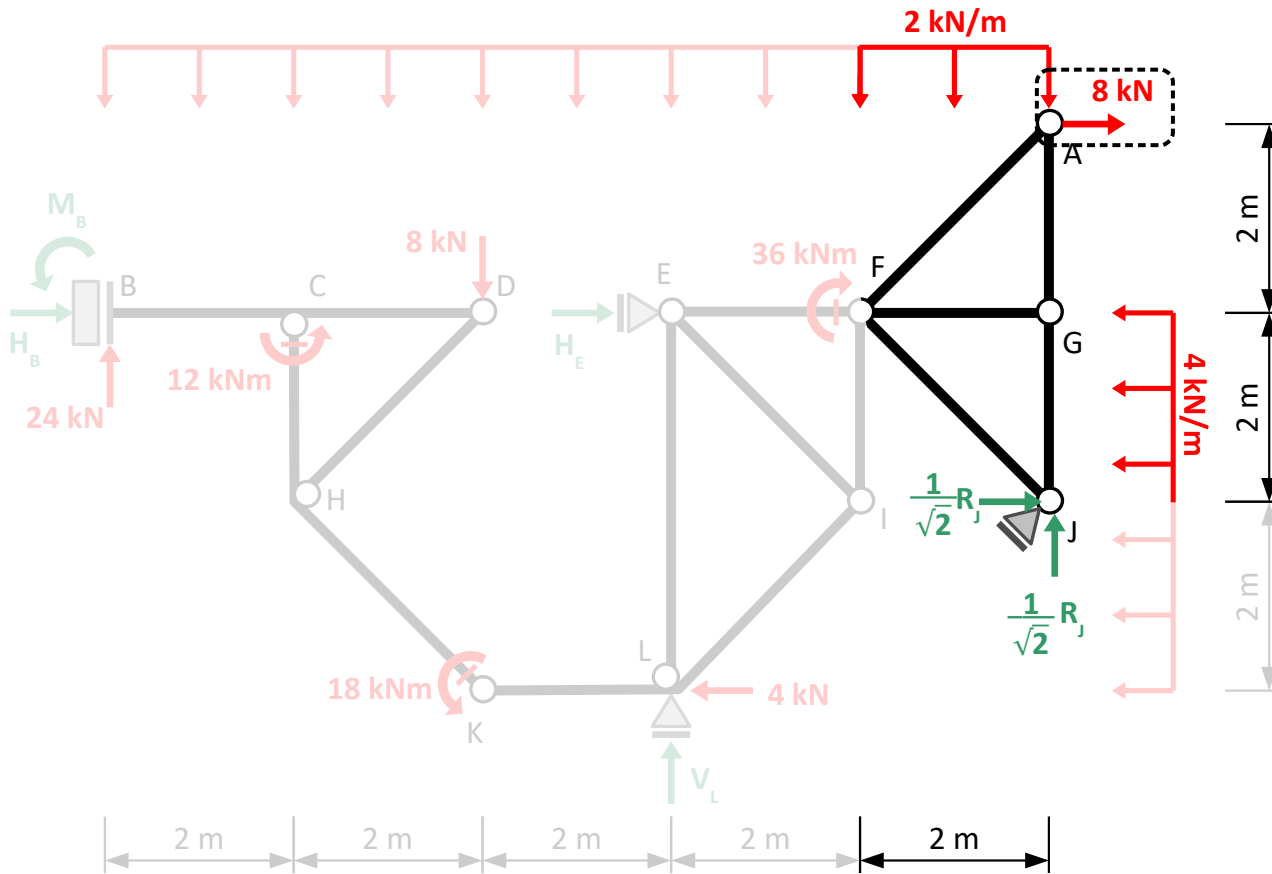
- Mamy więcej niż jedną reakcję na każdym kierunku, więc suma na kierunku X lub Y nie pozwoli nam wyznaczyć reakcji bez zapisania dodatkowego równania.
- Proste działania reakcje nie przecinają się w jednym punkcie, a ponadto mamy reakcję momentową, zatem i moment całego układu względem jakiegokolwiek punktu będzie zawierał więcej niż jedną niewiadomą.
- Musimy zacząć od momentów jednostronnych wzgl. któregoś z przegubów. Moment z prawej strony F pozwala nam wyznaczyć reakcję w J.



PLAN ROZWIĄZANIA

- 1) $\sum M_F^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow R_J$
- 2) $\sum Y = 0 \Rightarrow V_L$
- 3) $\sum M_K^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow H_E$
- 4) $\sum X = 0 \Rightarrow H_B$
- 5) $\sum M_K^{\leftarrow} = 0 \Rightarrow M_B$

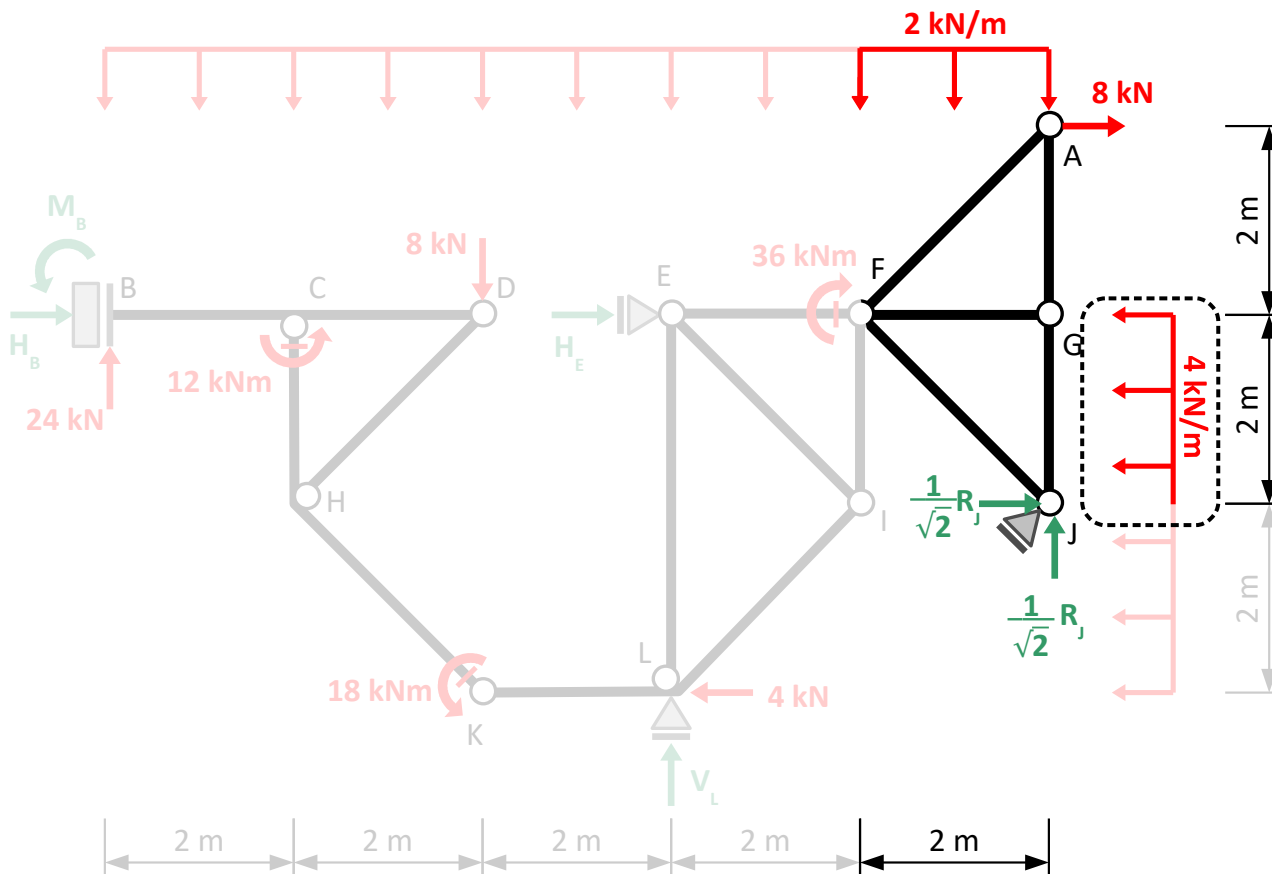
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma M_F^{\vec{}} =$$

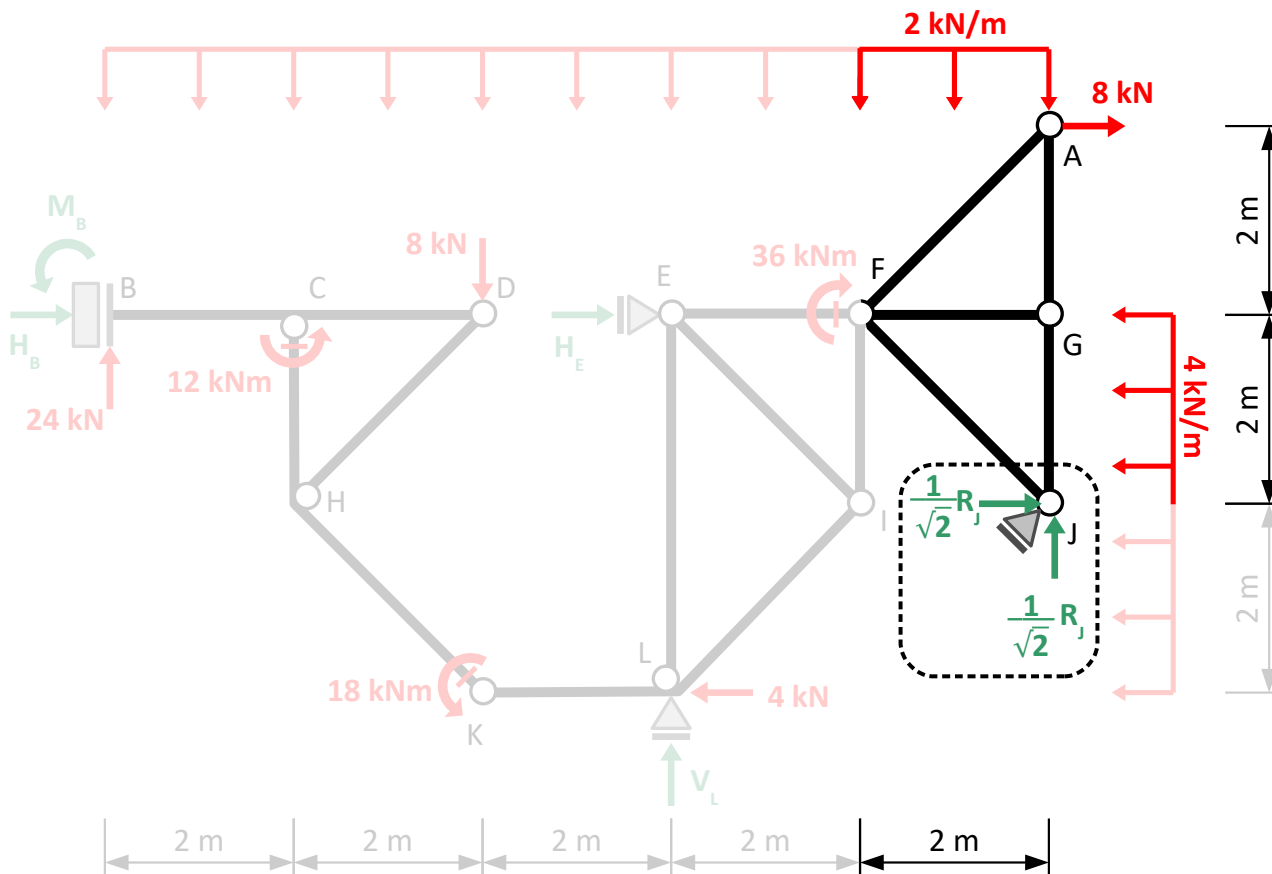
$$-2 \cdot 2 \cdot 1 - 8 \cdot 2$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma M_F^{\vec{}} = -2 \cdot 2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.

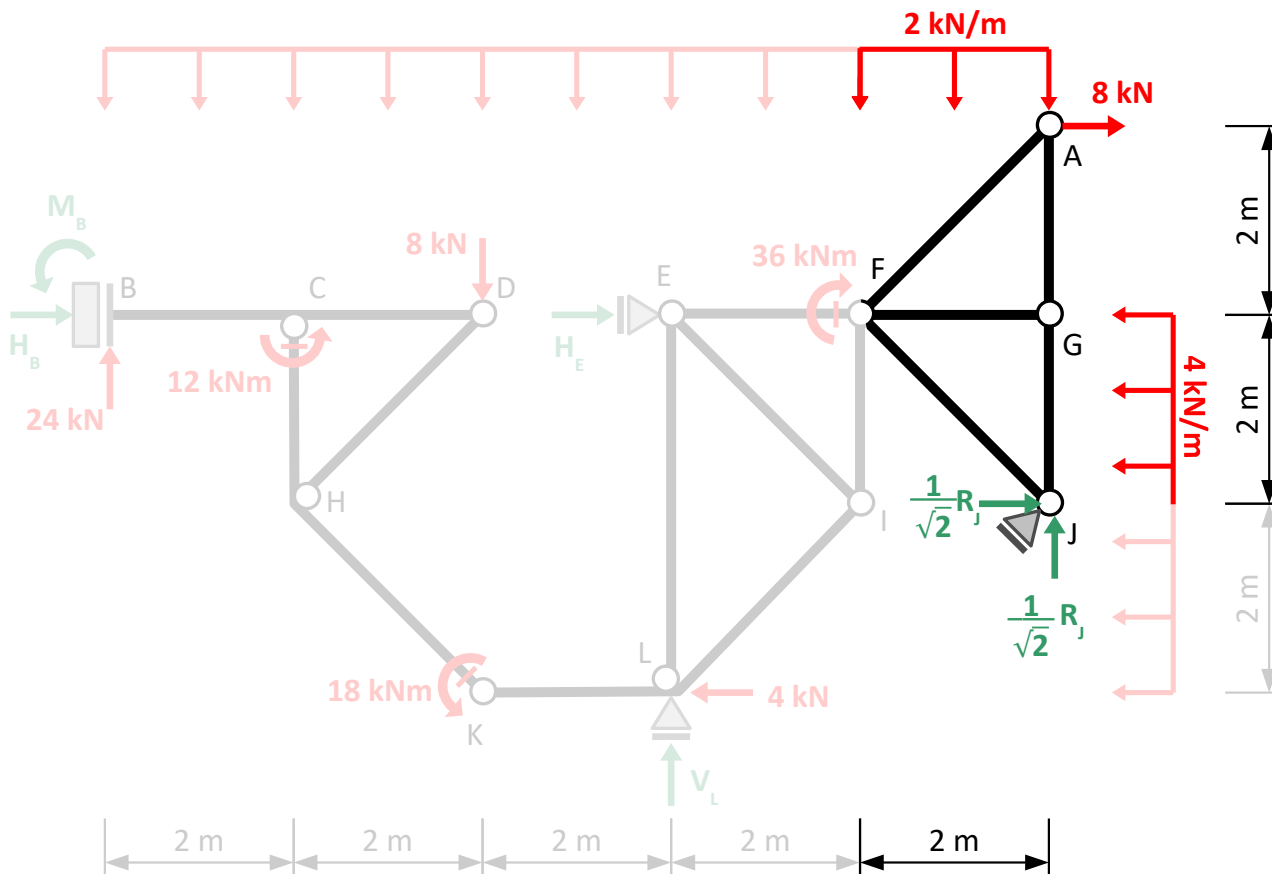


$$\Sigma M_F^{\vec{}} =$$

$$-2 \cdot 2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} R_J \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} R_J \cdot 2$$

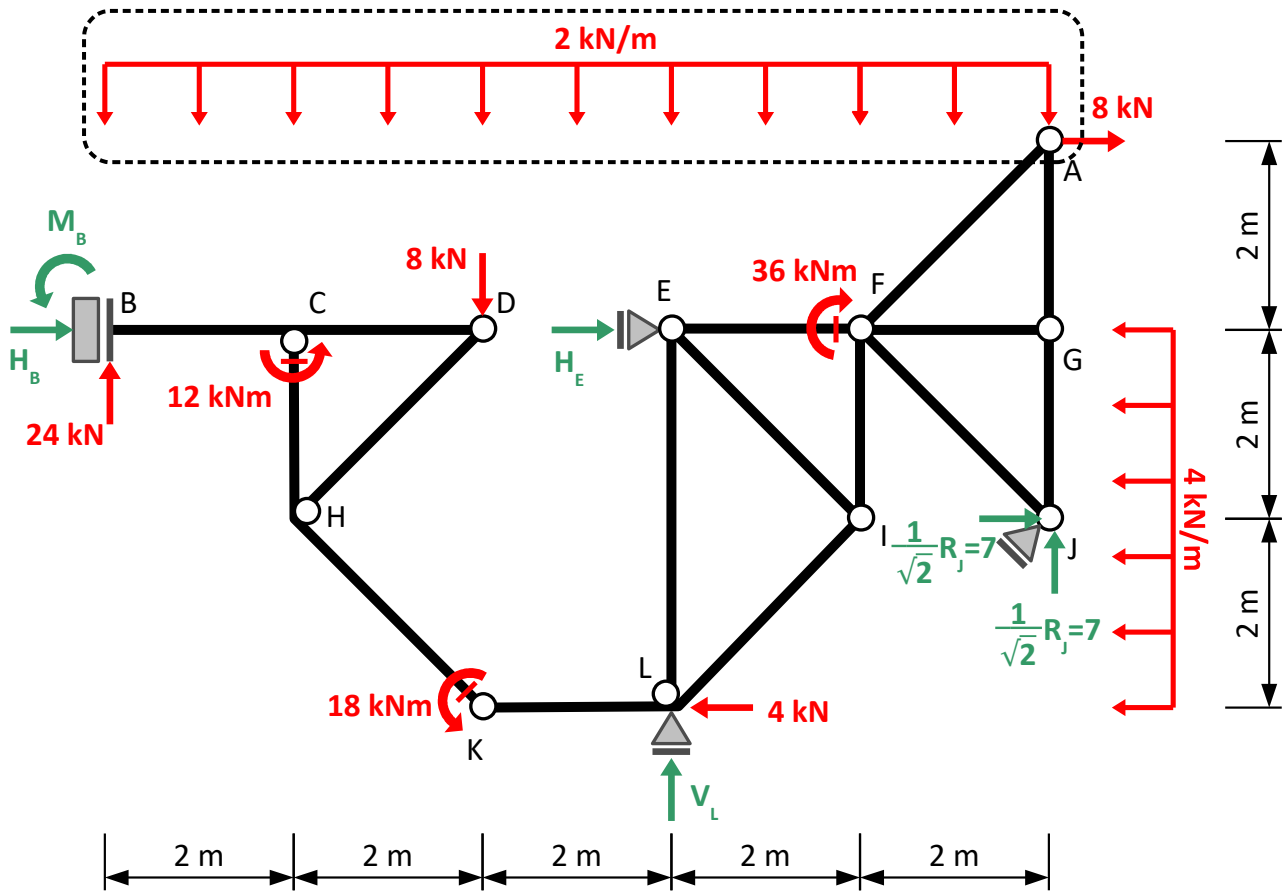
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\begin{aligned} \Sigma M_F^{\vec{}} = & \\ & -2 \cdot 2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} R_J \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} R_J \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

$$R_J = 7\sqrt{2} \text{ kN} \approx 9,90 \text{ kN}$$

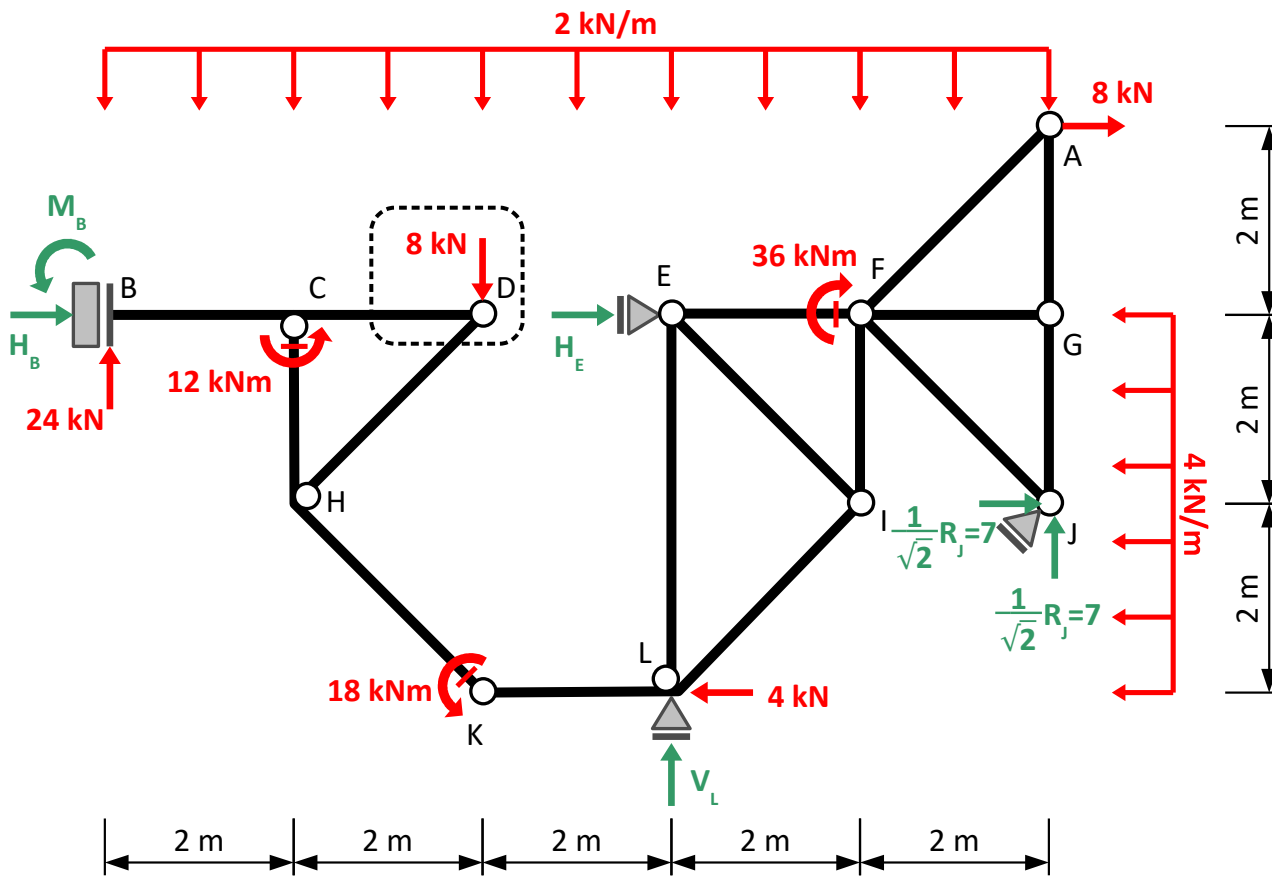
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma Y =$$

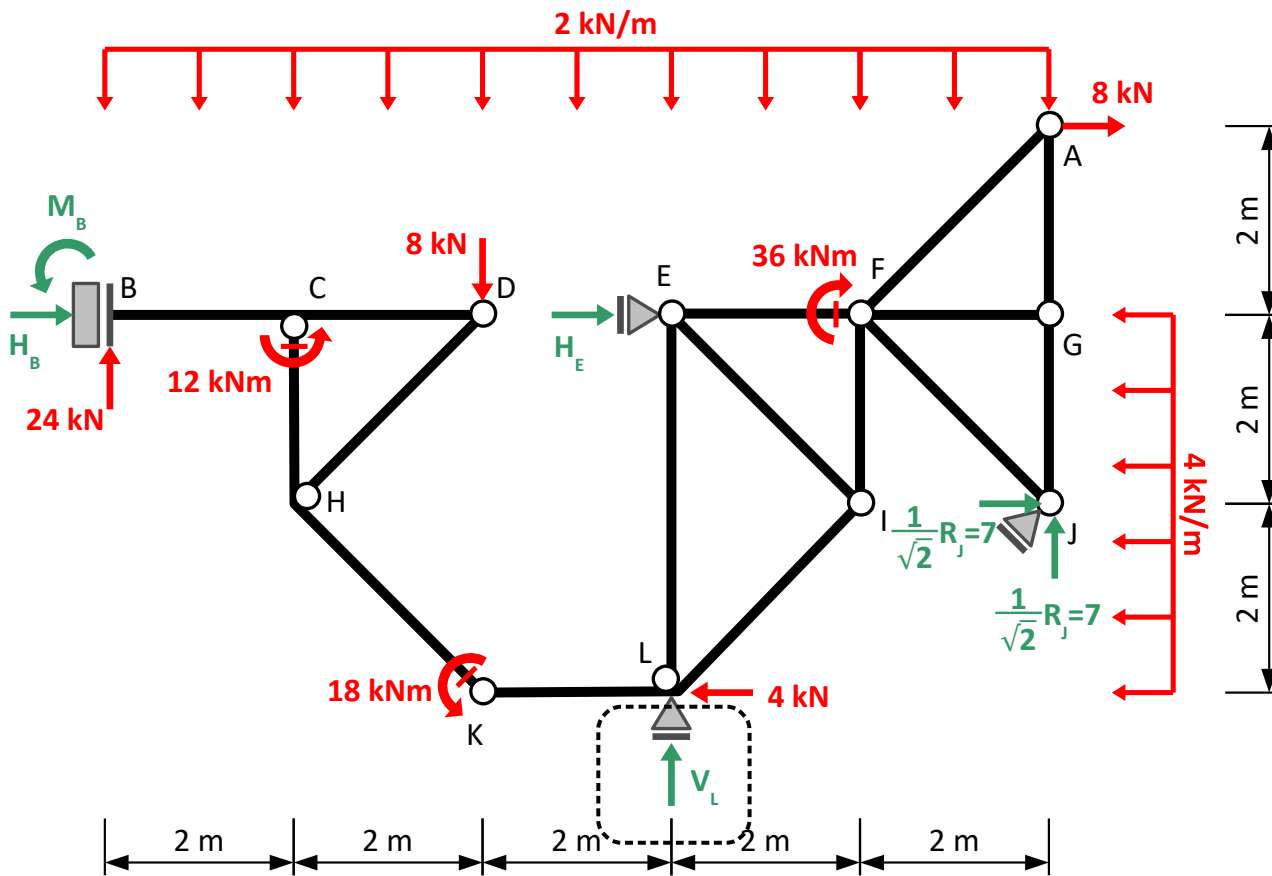
$$-2 \cdot 10$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma Y = -2 \cdot 10 + 24 - 8$$

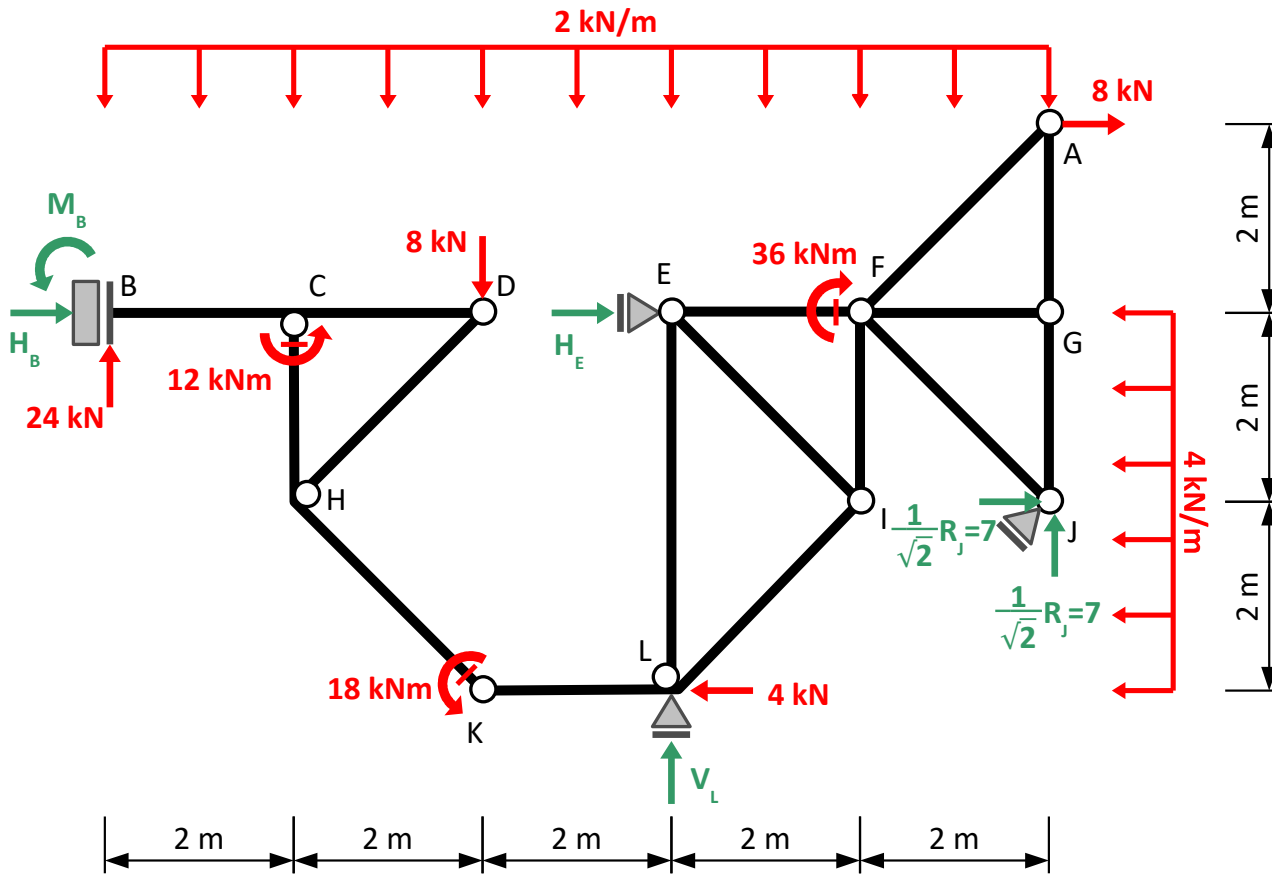
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma Y =$$

$$-2 \cdot 10 + 24 - 8 + V_L$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



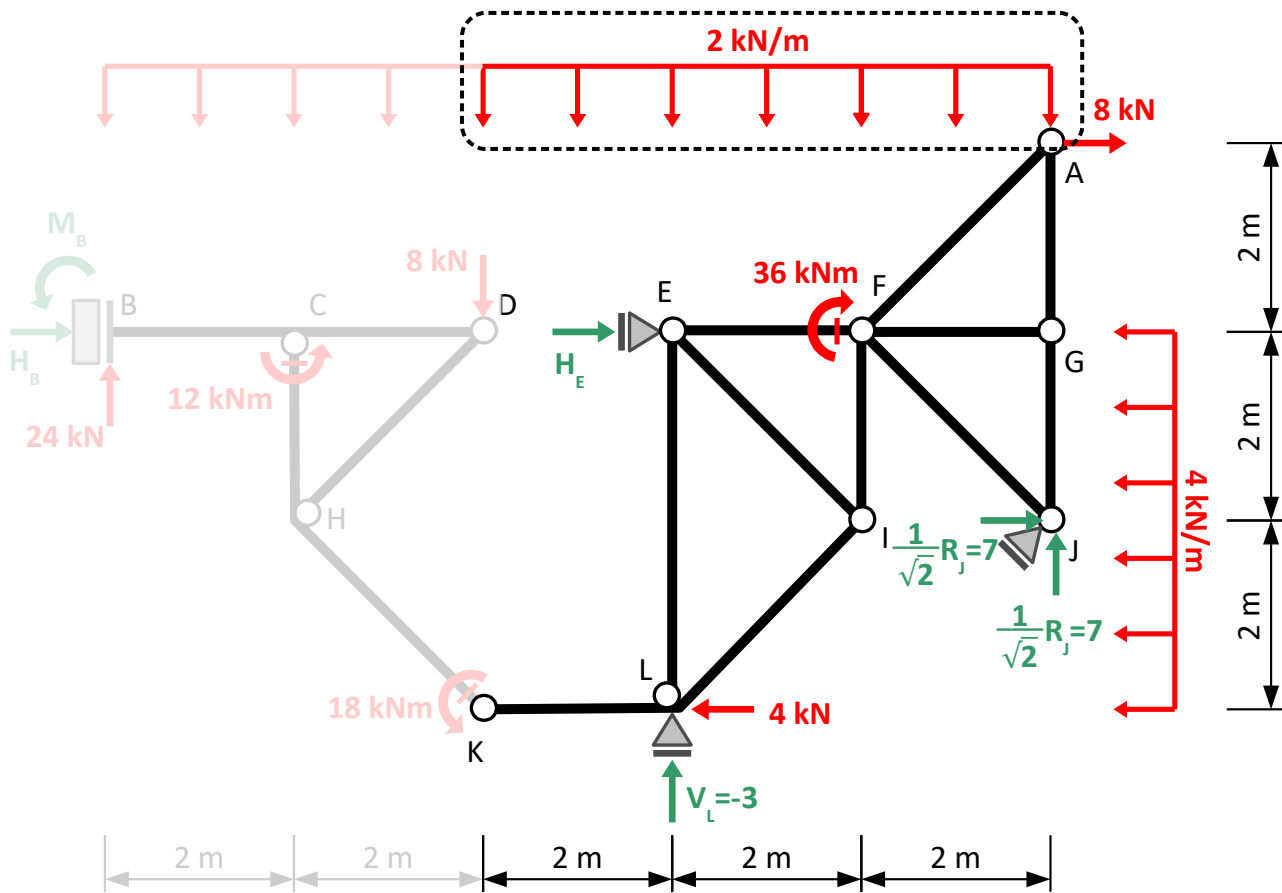
$$\Sigma Y =$$

$$-2 \cdot 10 + 24 - 8 + V_L + \frac{R_J}{\sqrt{2}} = 0$$

$$-2 \cdot 10 + 24 - 8 + V_L + \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

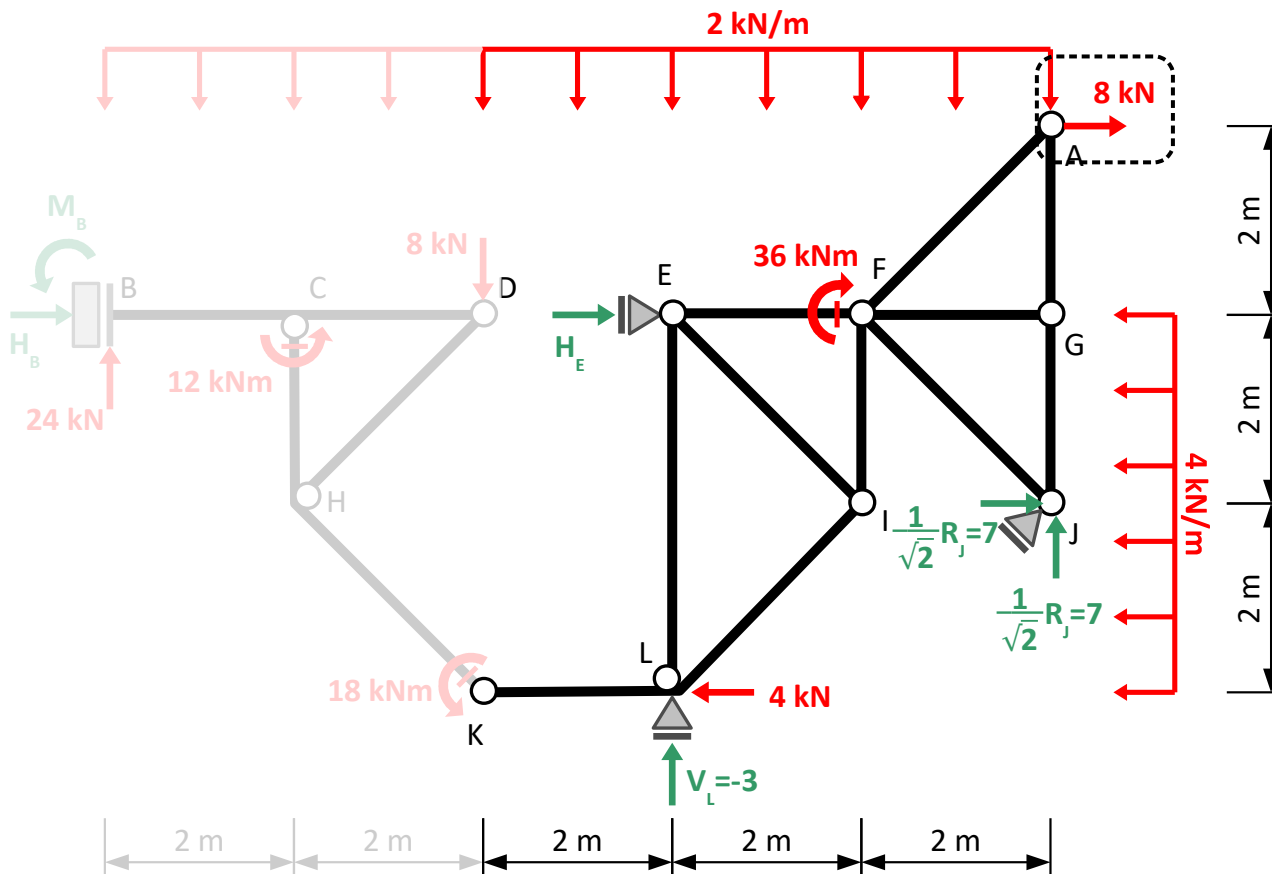
$$V_L = -3 \text{ kN}$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



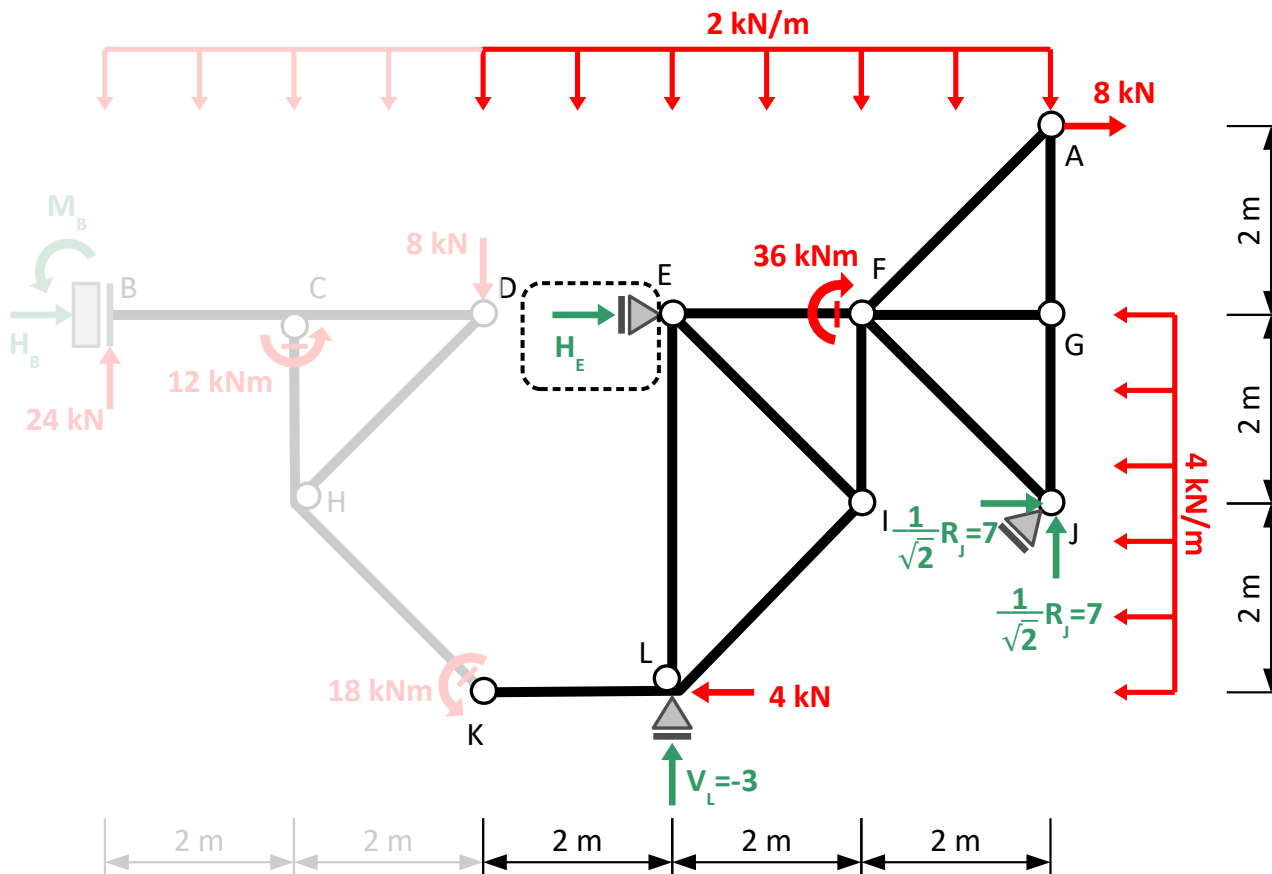
$$\Sigma M_K^{\vec{}} = -2 \cdot 6 \cdot 3$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



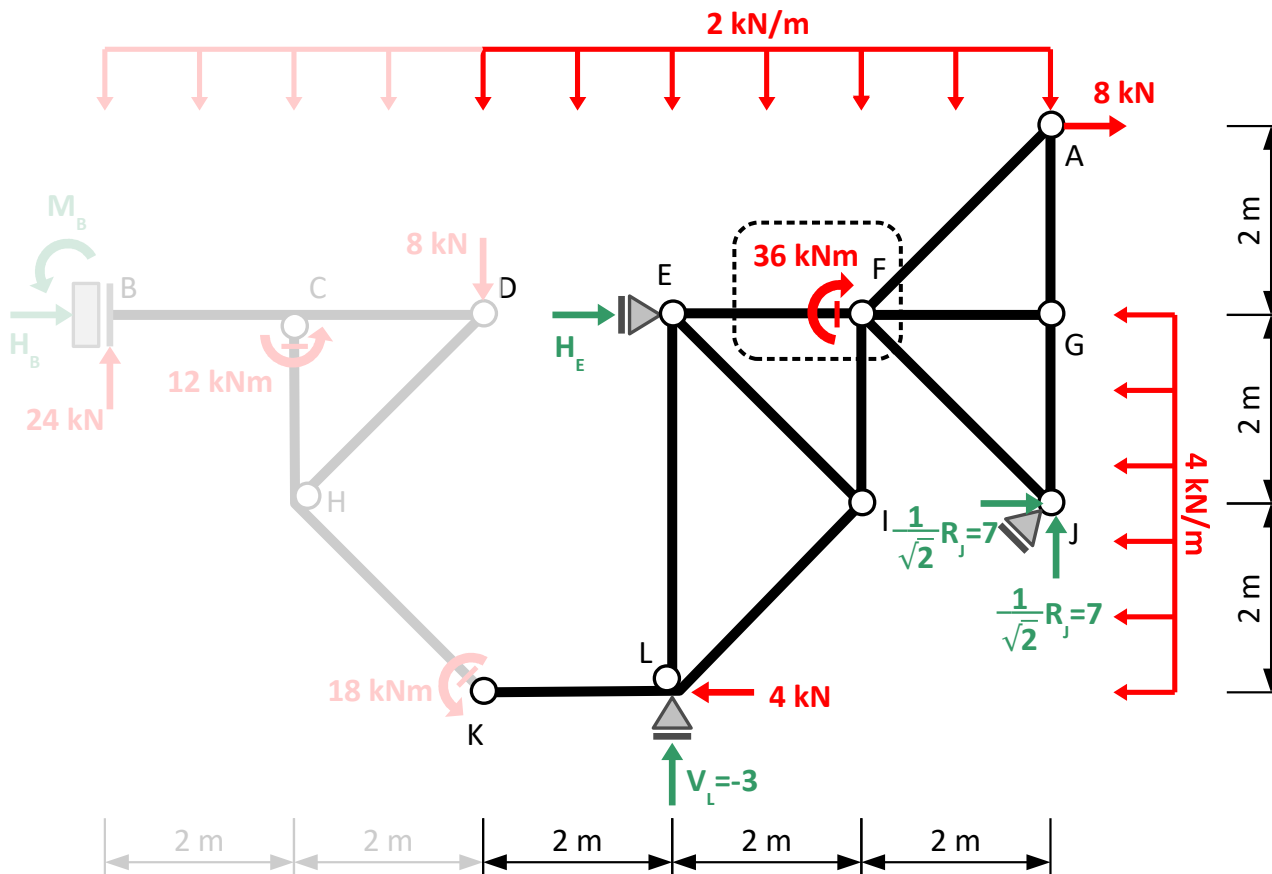
$$\Sigma M_K^{\vec{}} = -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



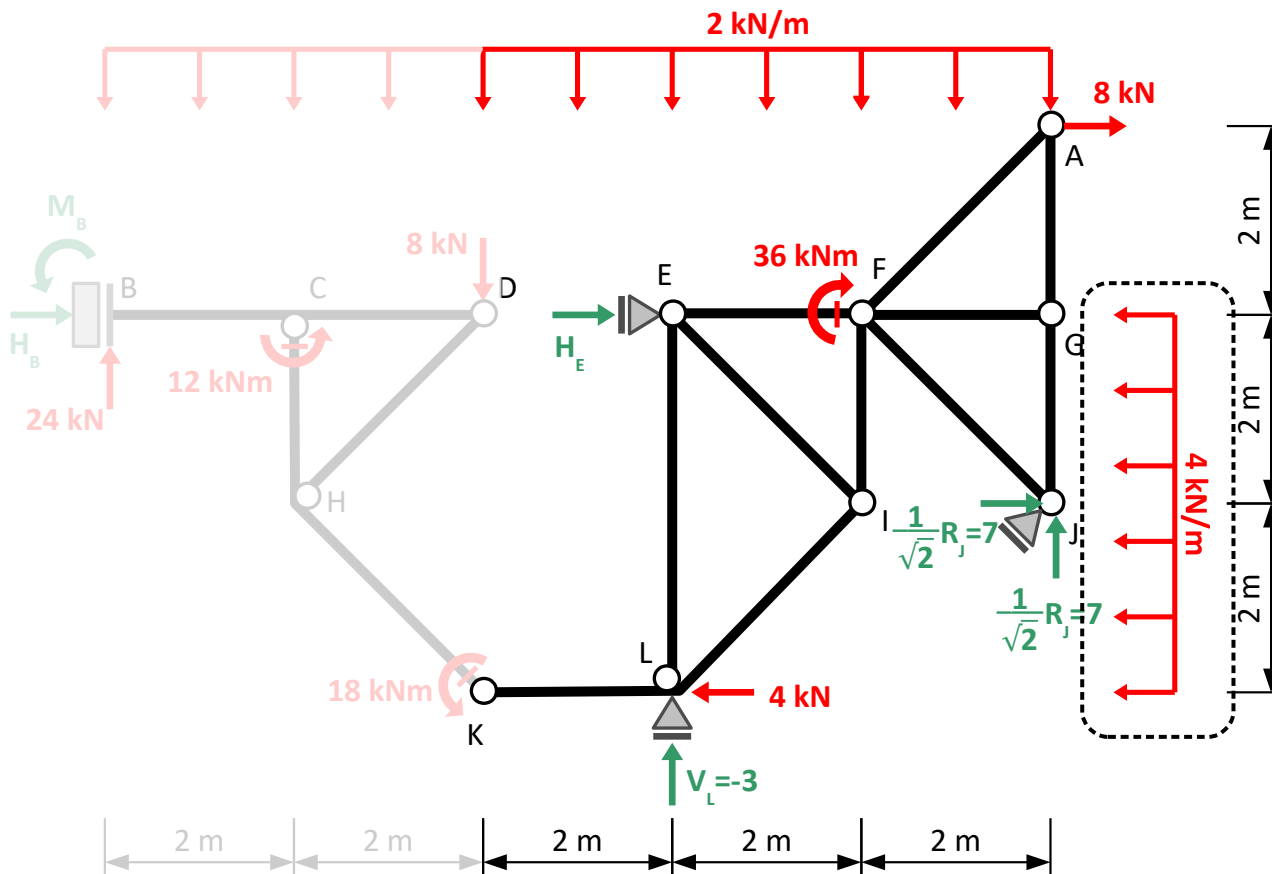
$$\Sigma M_K^{\vec{}} = -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 - H_E \cdot 4$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



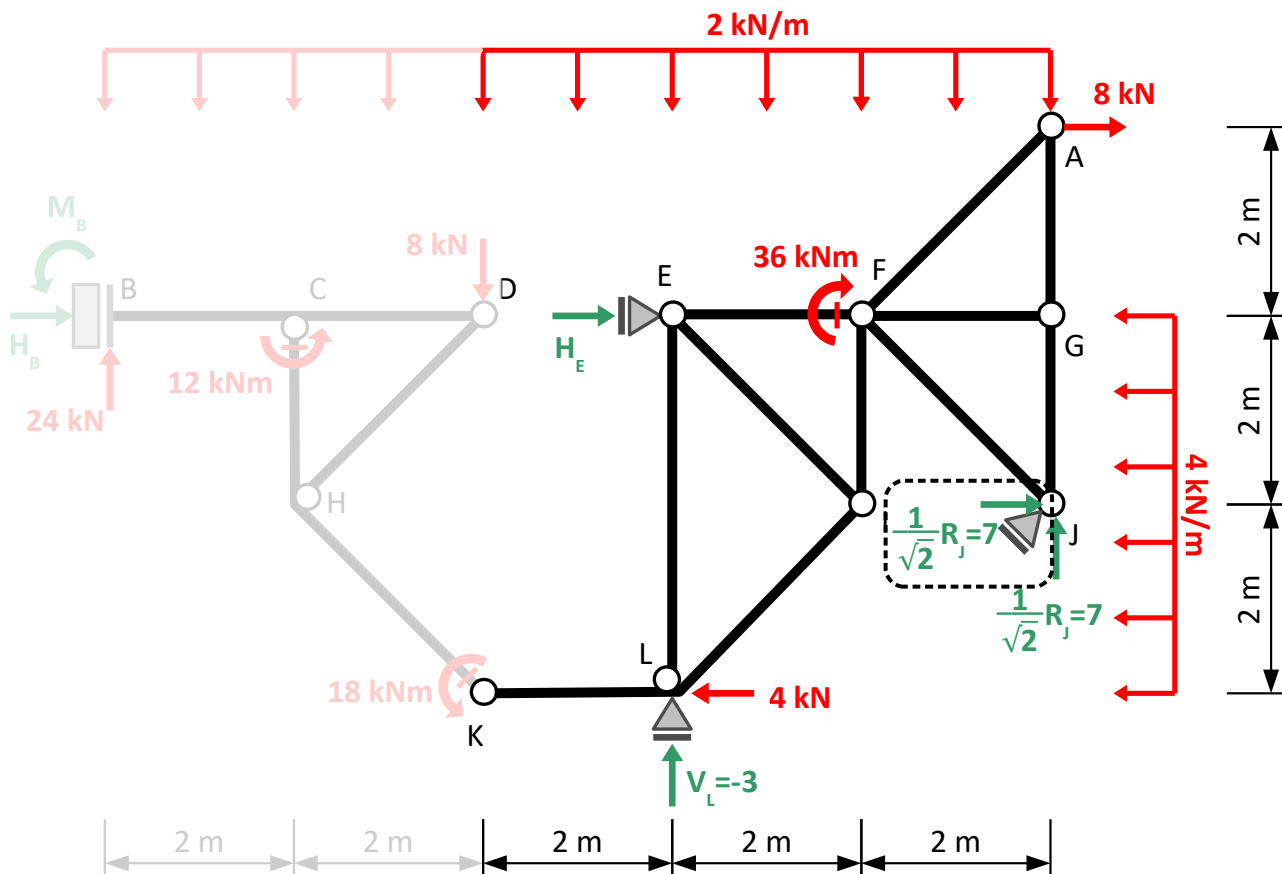
$$\Sigma M_K^{\vec{}} = -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 - H_E \cdot 4 - 36$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



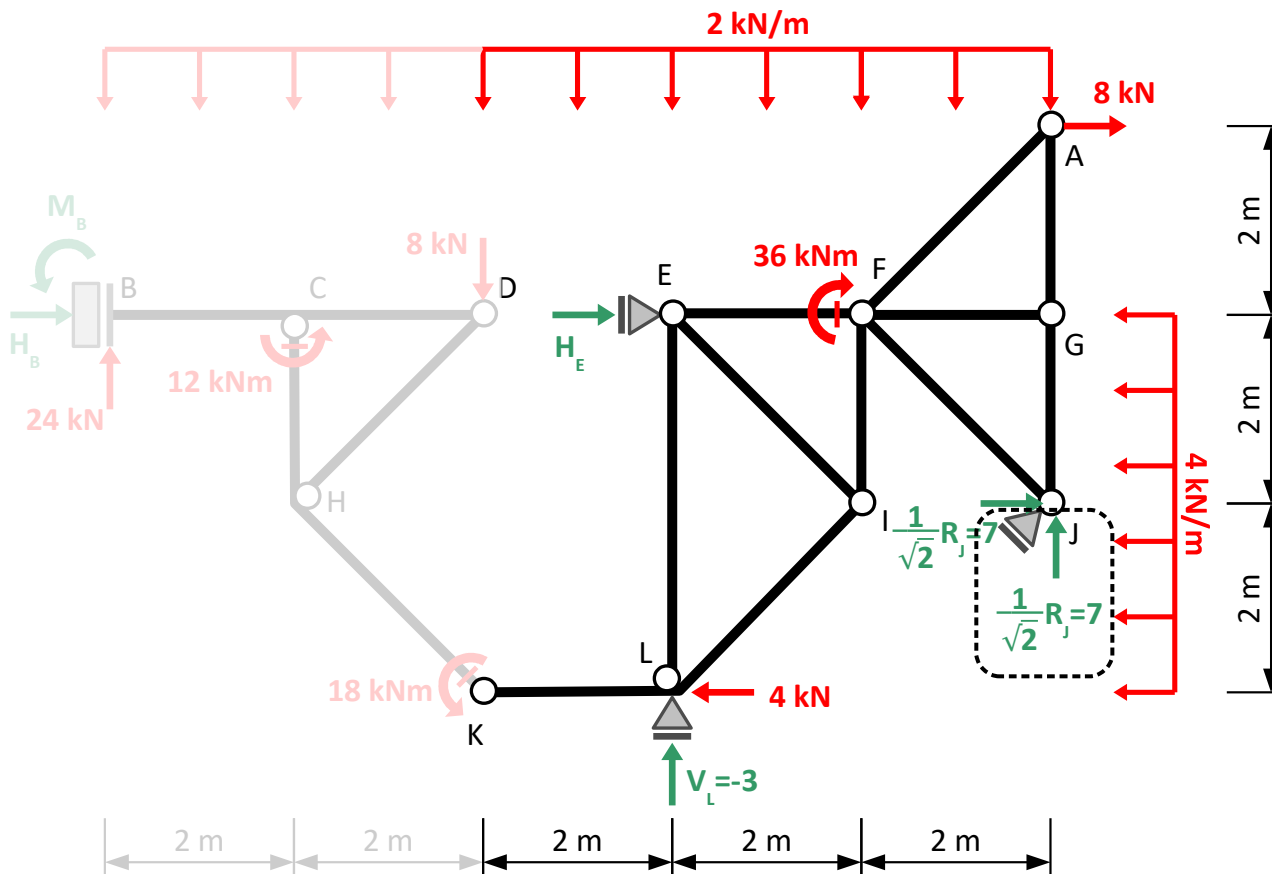
$$\begin{aligned} \Sigma M_K^{\vec{}} = & \\ & -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 - H_E \cdot 4 - 36 \\ & + 4 \cdot 4 \cdot 2 \end{aligned}$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



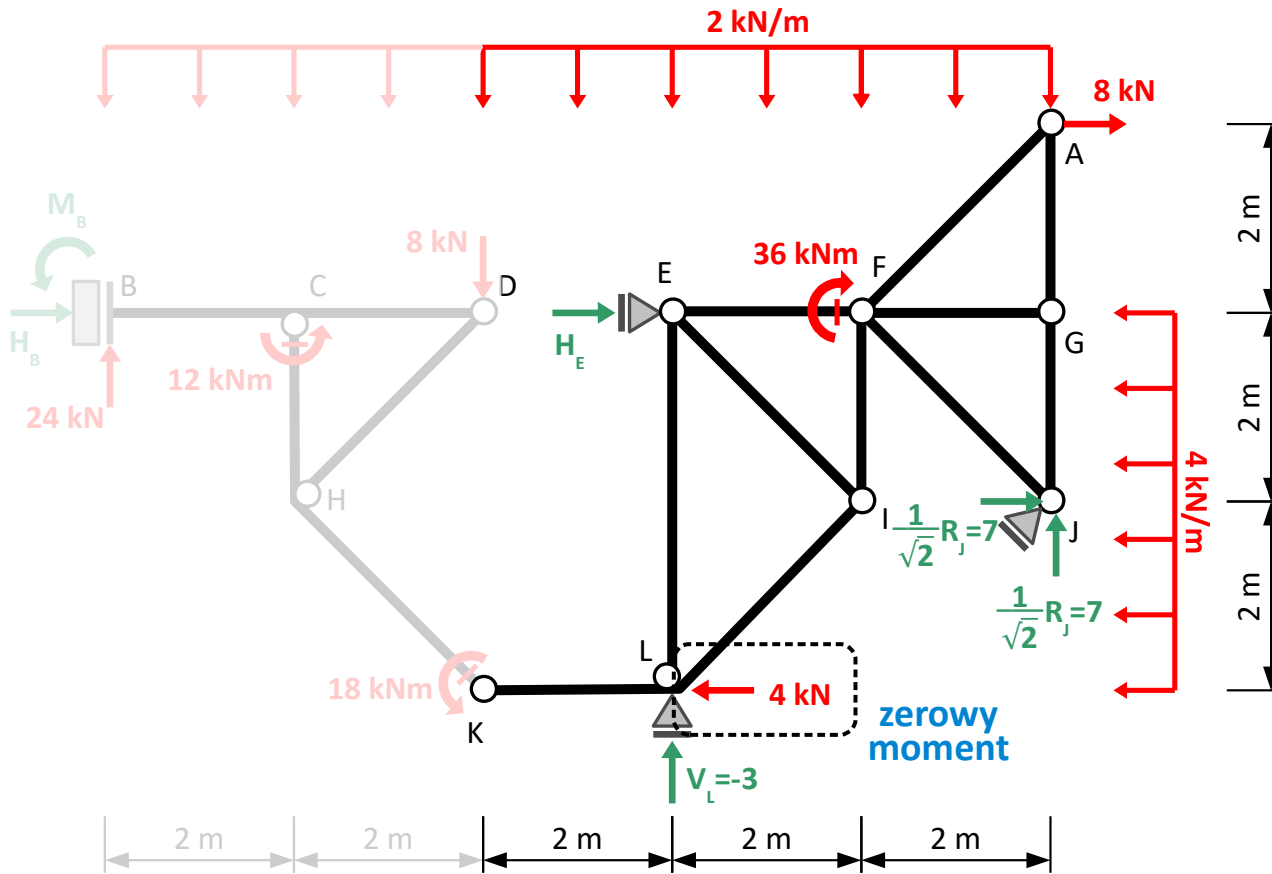
$$\begin{aligned} \Sigma M_K^{\vec{}} = & \\ & -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 - H_E \cdot 4 - 36 \\ & + 4 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{R_J}{\sqrt{2}} \cdot 2 \end{aligned}$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



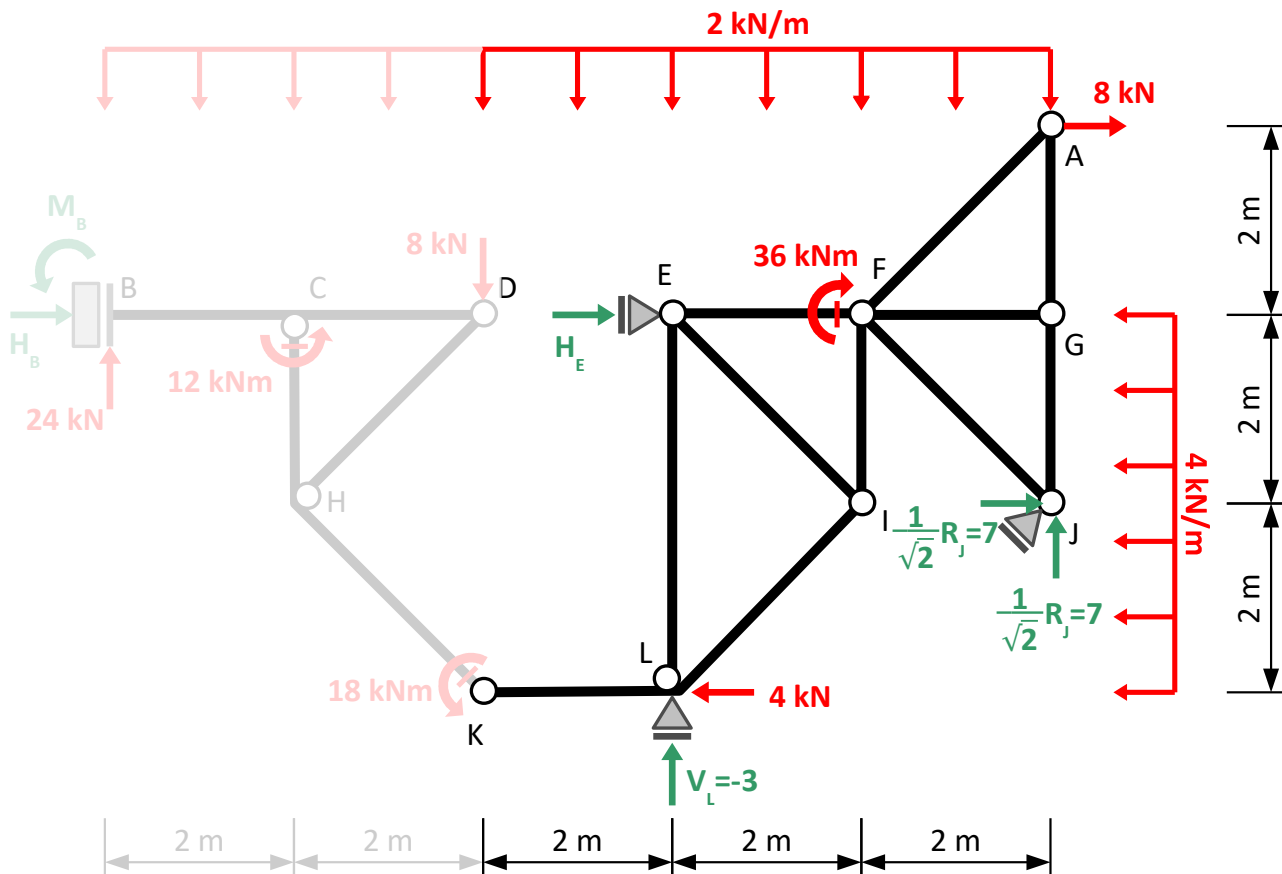
$$\begin{aligned} \Sigma M_K^{\vec{}} = & \\ & -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 - H_E \cdot 4 - 36 \\ & + 4 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{R_J}{\sqrt{2}} \cdot 2 + \frac{R_J}{\sqrt{2}} \cdot 6 \end{aligned}$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\begin{aligned} \Sigma M_K^{\vec{}} = & \\ & -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 - H_E \cdot 4 - 36 \\ & + 4 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{R_J}{\sqrt{2}} \cdot 2 + \frac{R_J}{\sqrt{2}} \cdot 6 + V_L \cdot 2 \end{aligned}$$

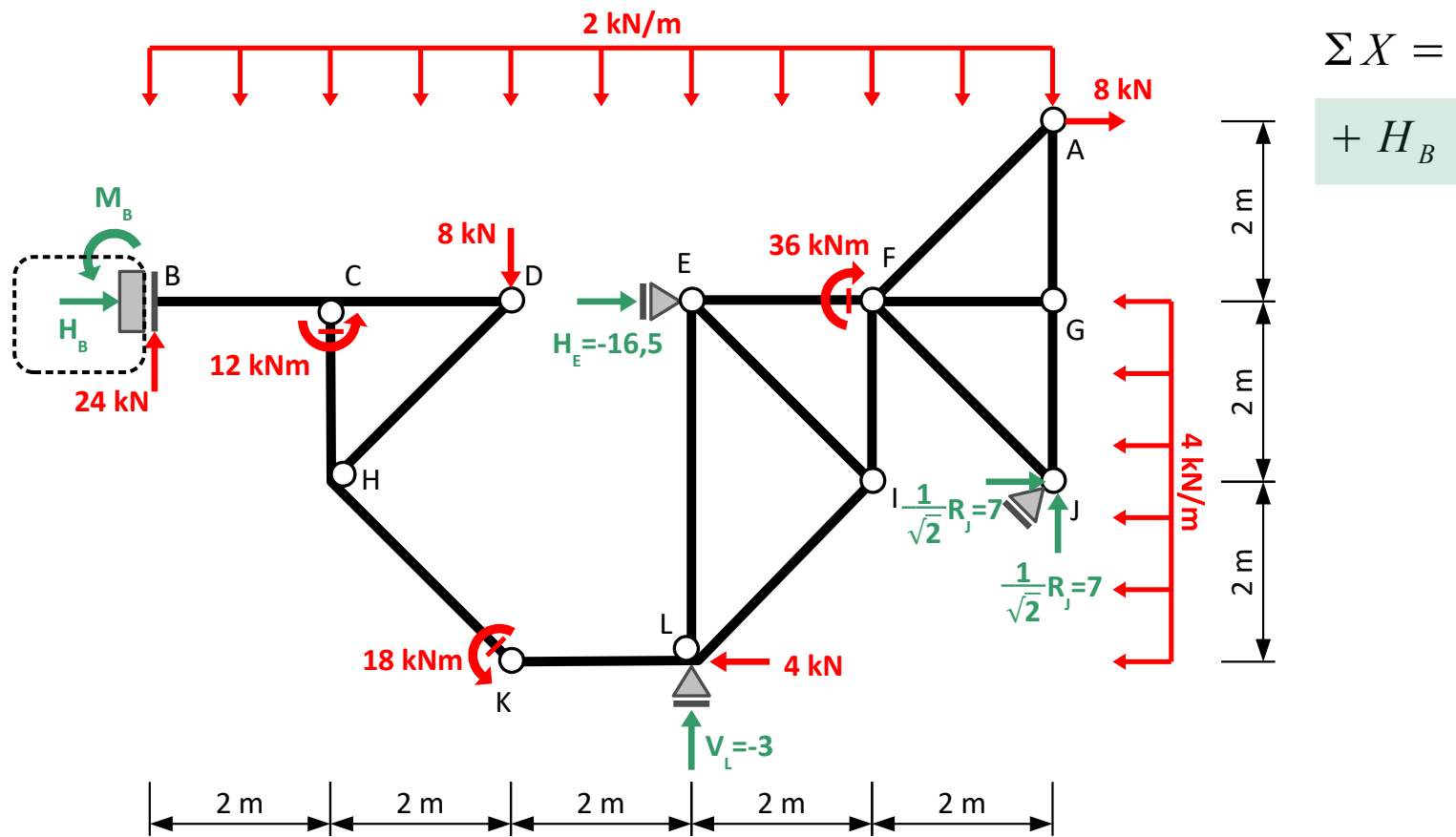
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



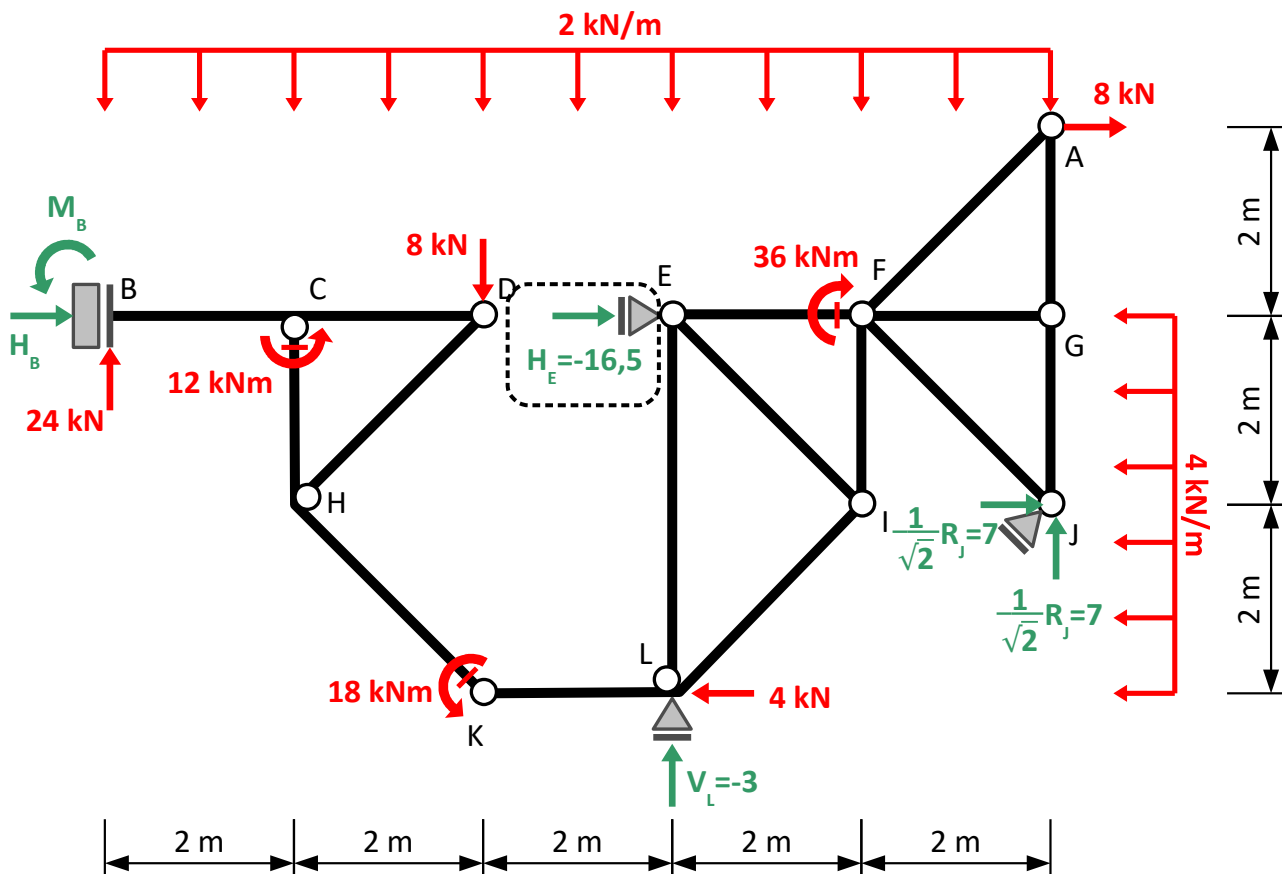
$$\begin{aligned} \Sigma M_K^{\vec{}} = & \\ & -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 - H_E \cdot 4 - 36 \\ & + 4 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{R_J}{\sqrt{2}} \cdot 2 + \frac{R_J}{\sqrt{2}} \cdot 6 + V_L \cdot 2 = 0 \\ & -2 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 - H_E \cdot 4 - 36 \\ & + 4 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2 + \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot 6 + (-3) \cdot 2 \end{aligned}$$

$$H_E = -16,5 \text{ kN}$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.

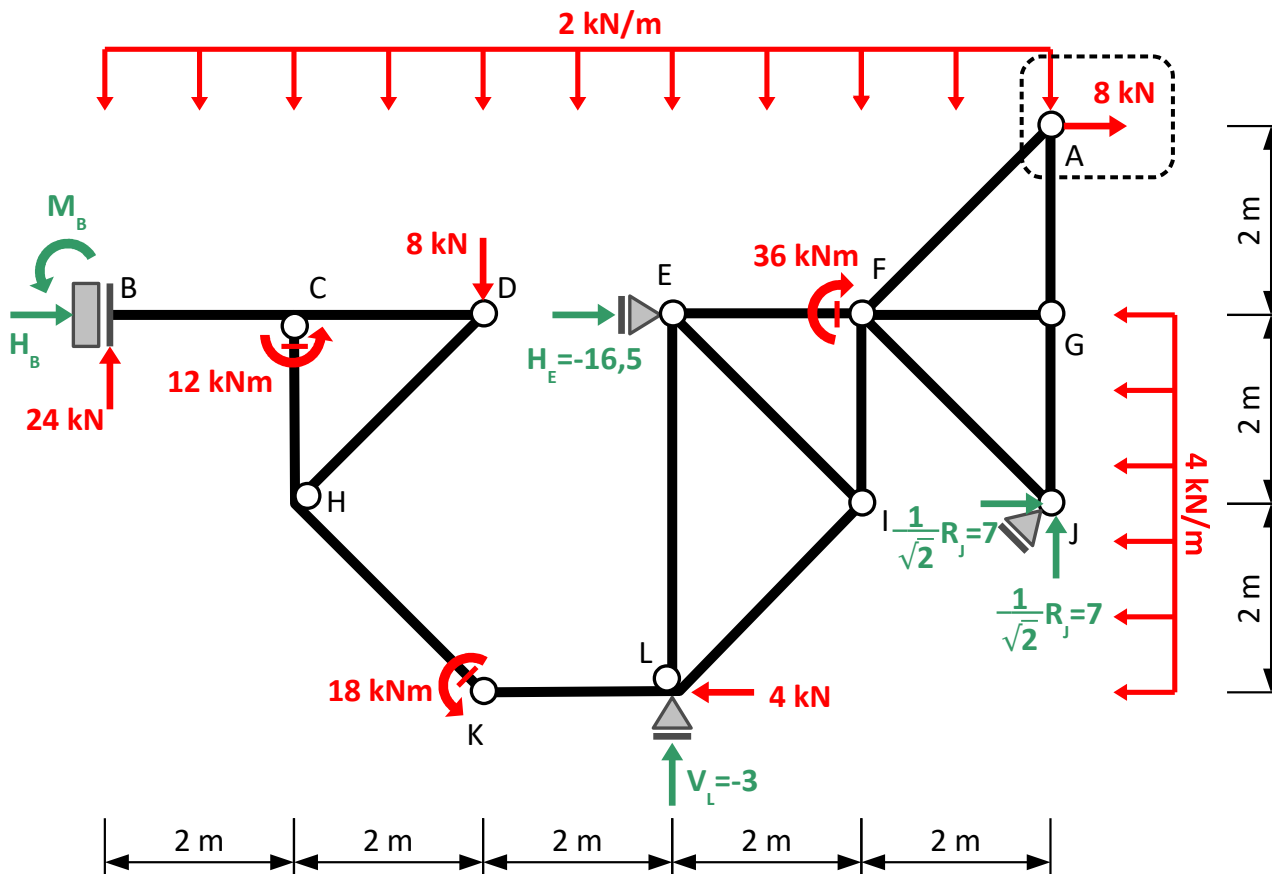


WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma X = + H_B + H_E$$

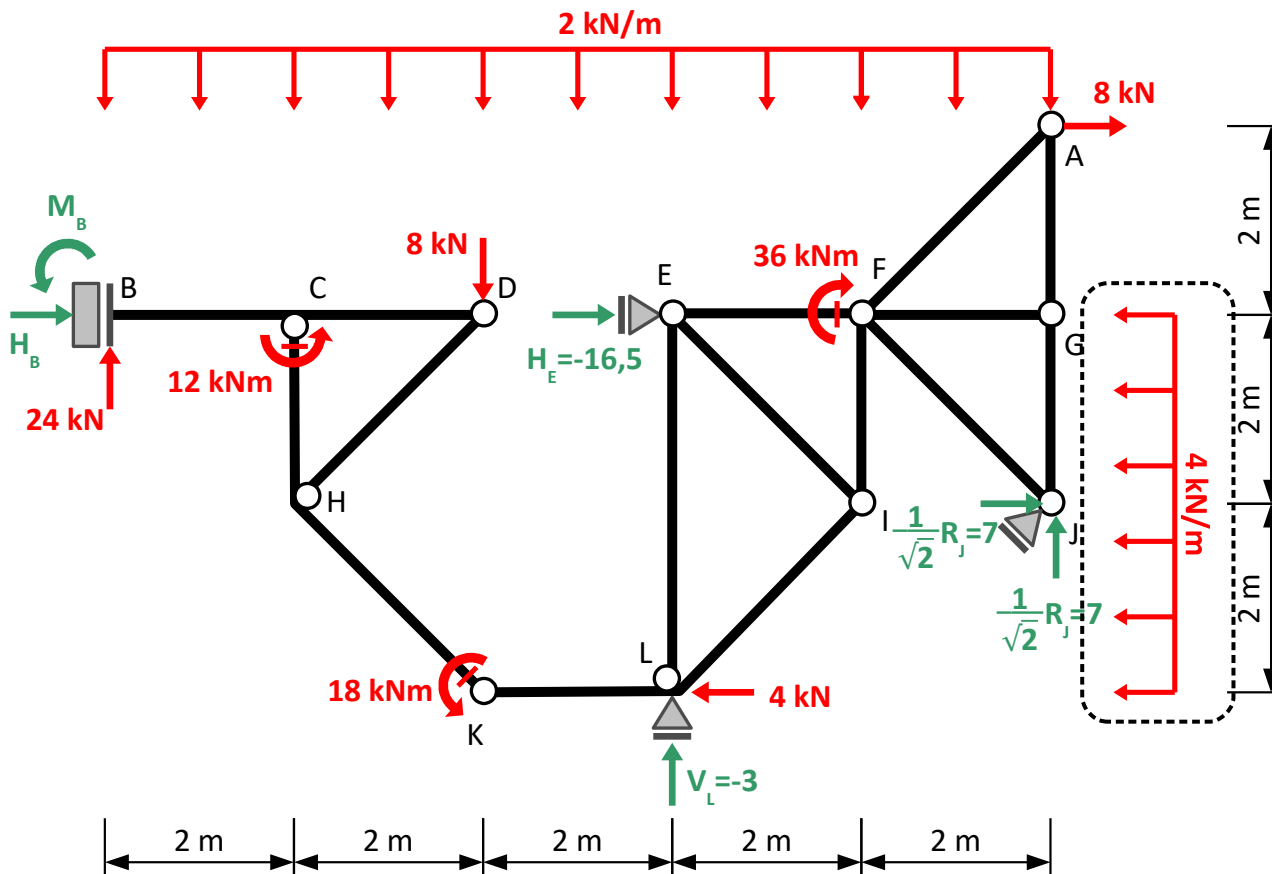
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma X =$$

$$+ H_B + H_E + 8$$

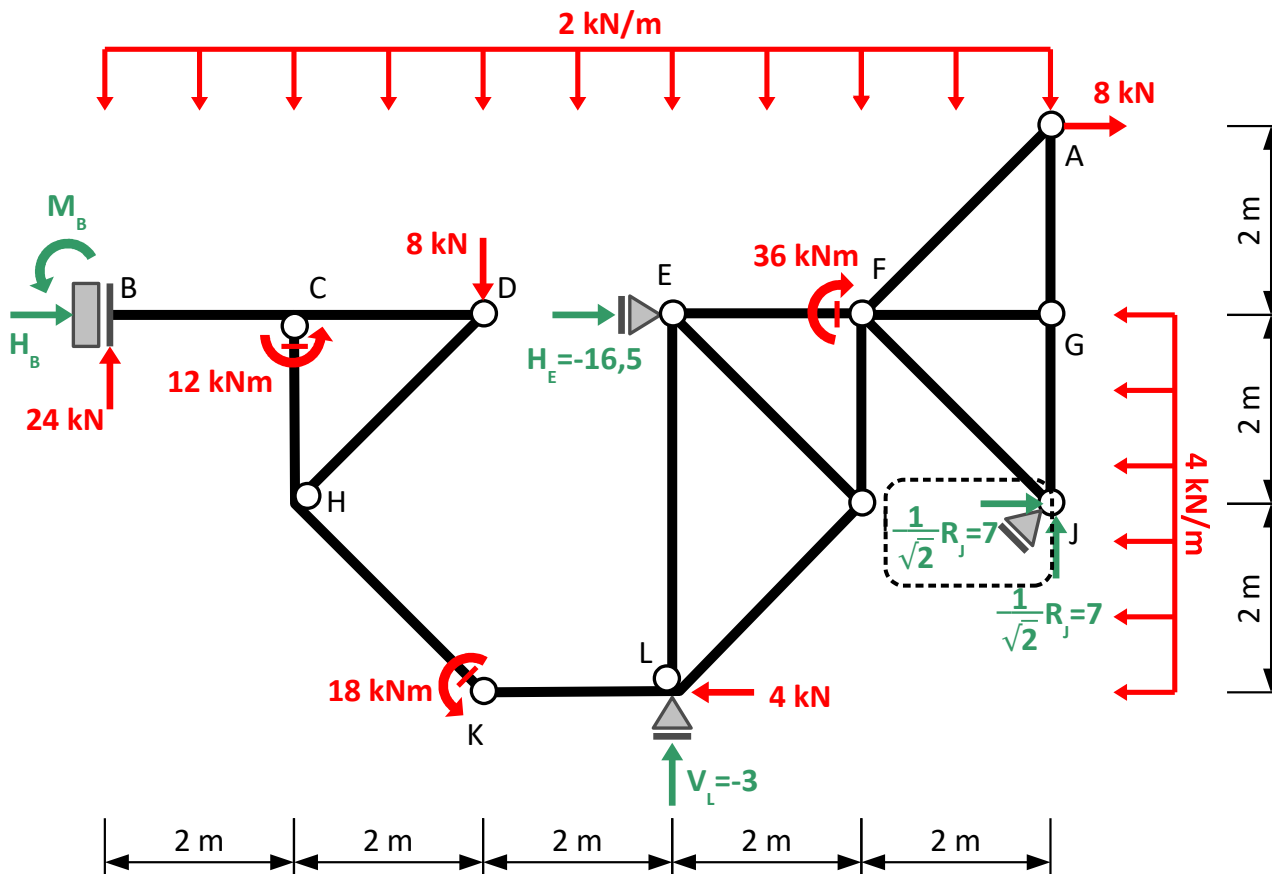
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma X =$$

$$+ H_B + H_E + 8 - 4 \cdot 4$$

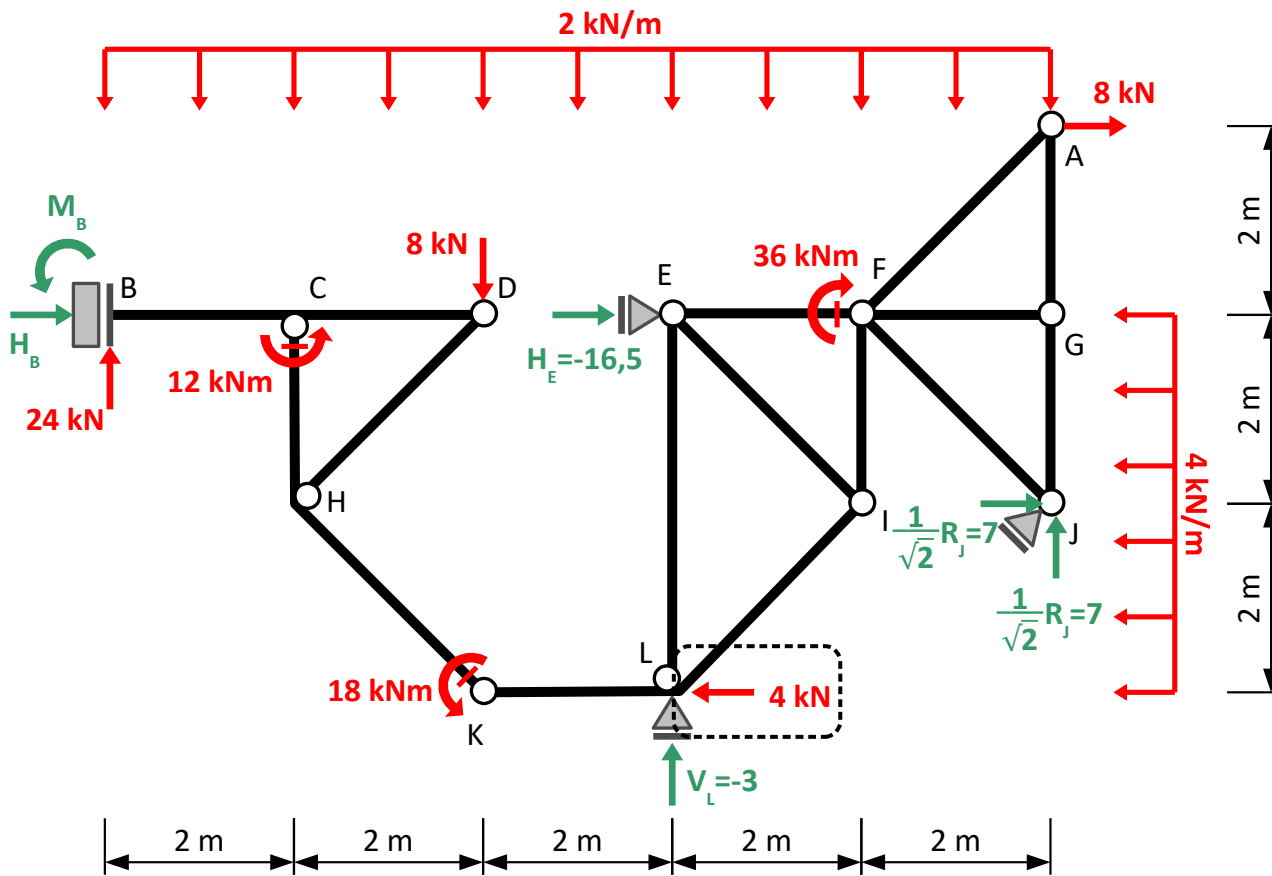
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma X =$$

$$+ H_B + H_E + 8 - 4 \cdot 4 + \frac{R_J}{\sqrt{2}}$$

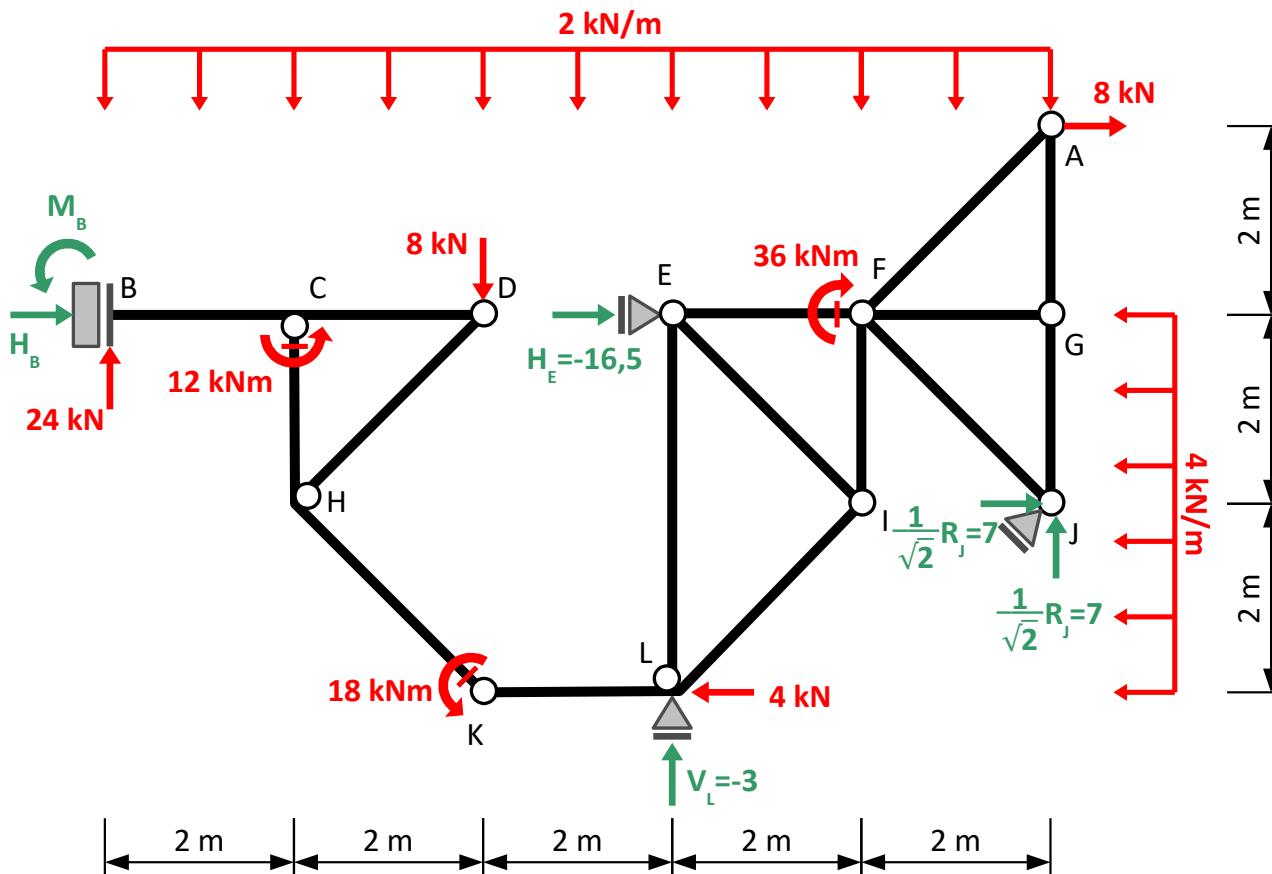
WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma X =$$

$$+ H_B + H_E + 8 - 4 \cdot 4 + \frac{R_J}{\sqrt{2}} - 4$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



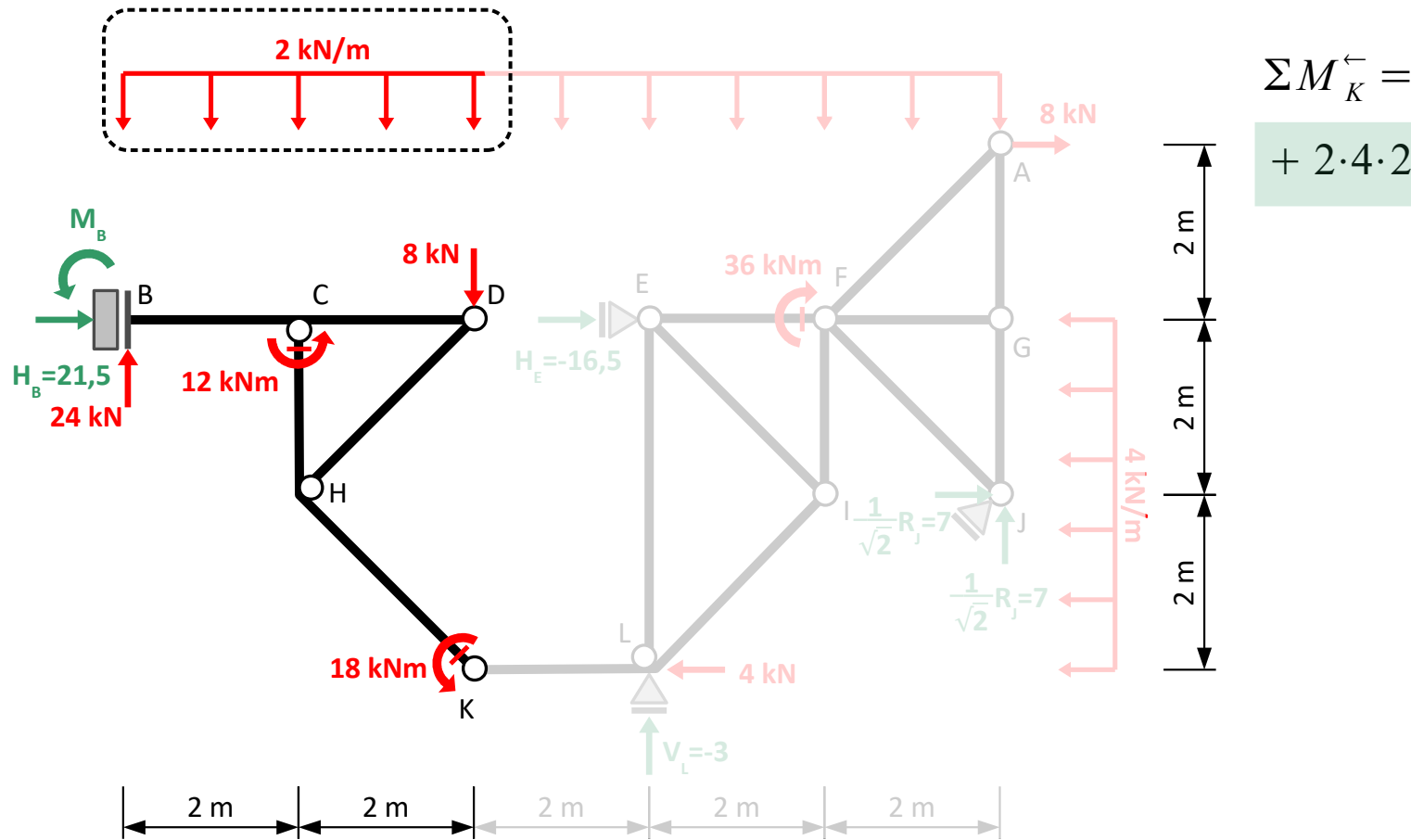
$$\Sigma X =$$

$$+ H_B + H_E + 8 - 4 \cdot 4 + \frac{R_J}{\sqrt{2}} - 4 = 0$$

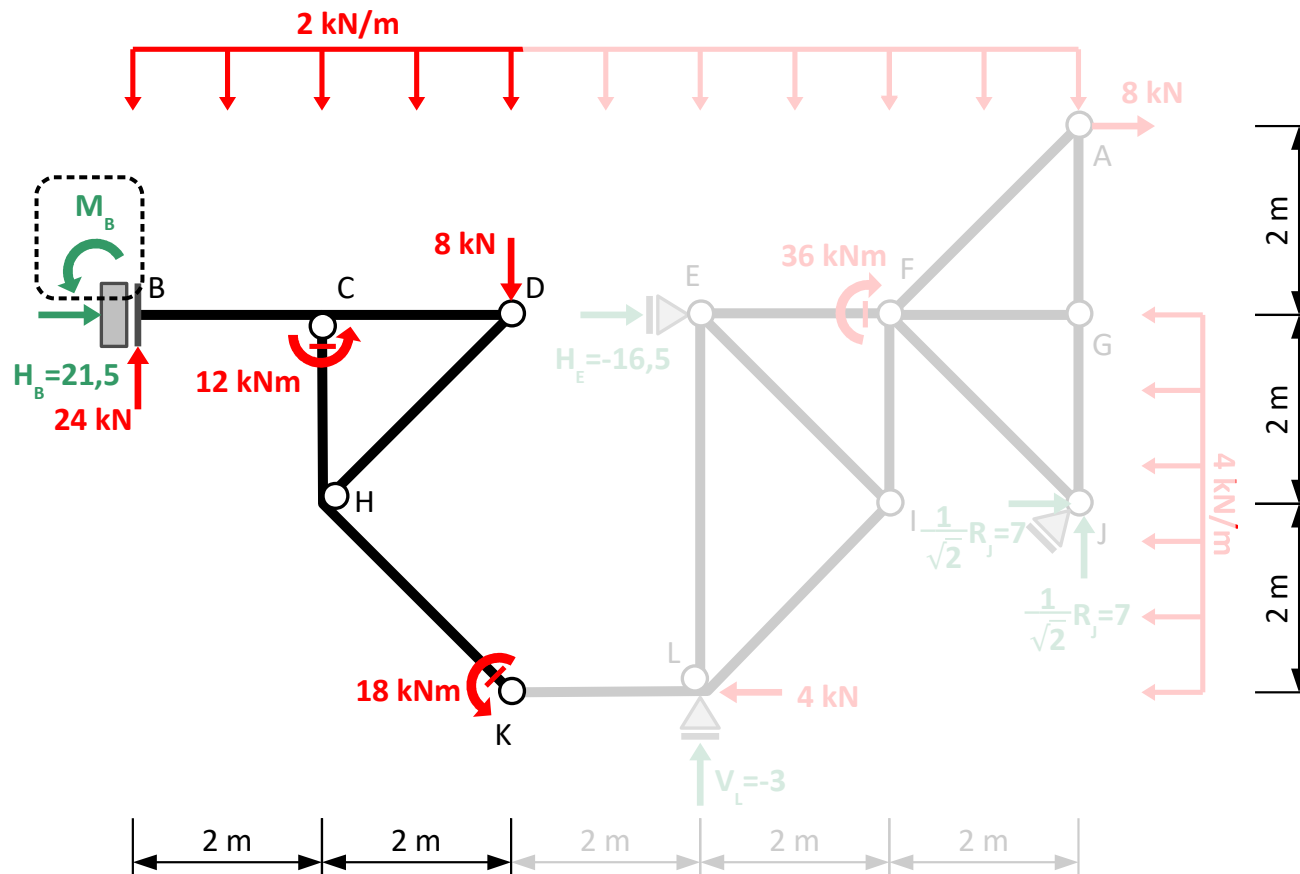
$$H_B - 16,5 + 8 - 4 \cdot 4 + \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 4 = 0$$

$$H_B = 21,5 \text{ kN}$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.

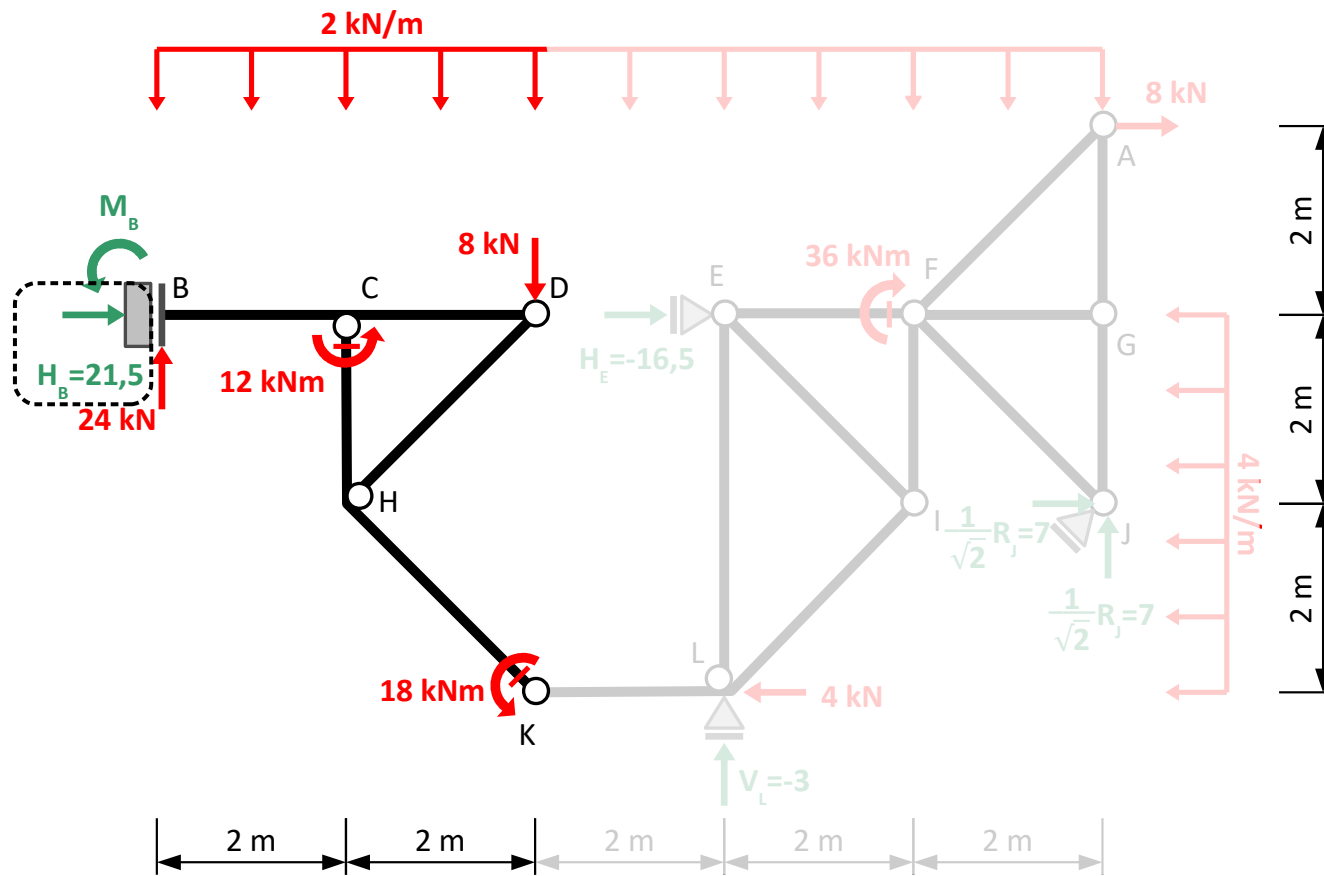


WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



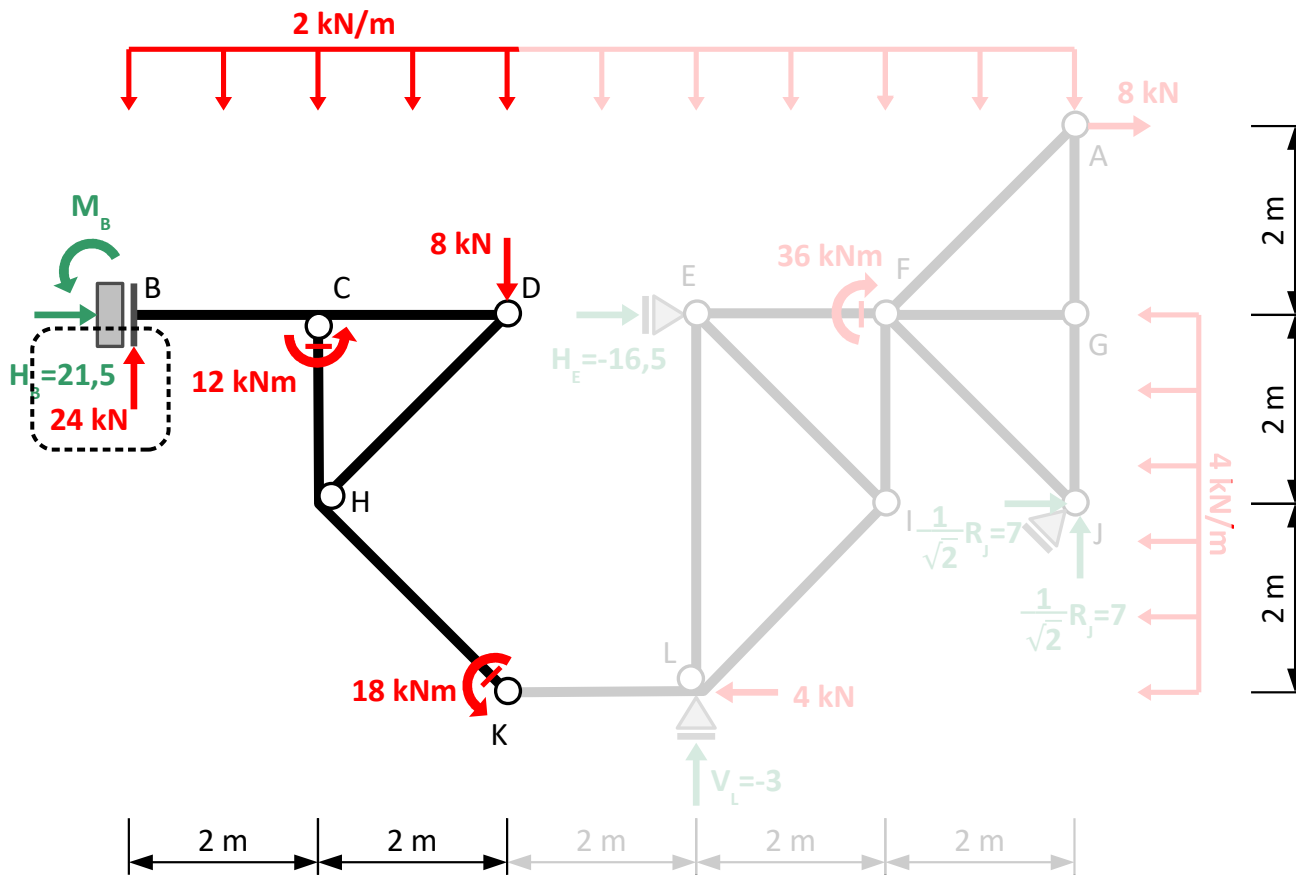
$$\Sigma M_K^{\leftarrow} = + 2 \cdot 4 \cdot 2 + M_B$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



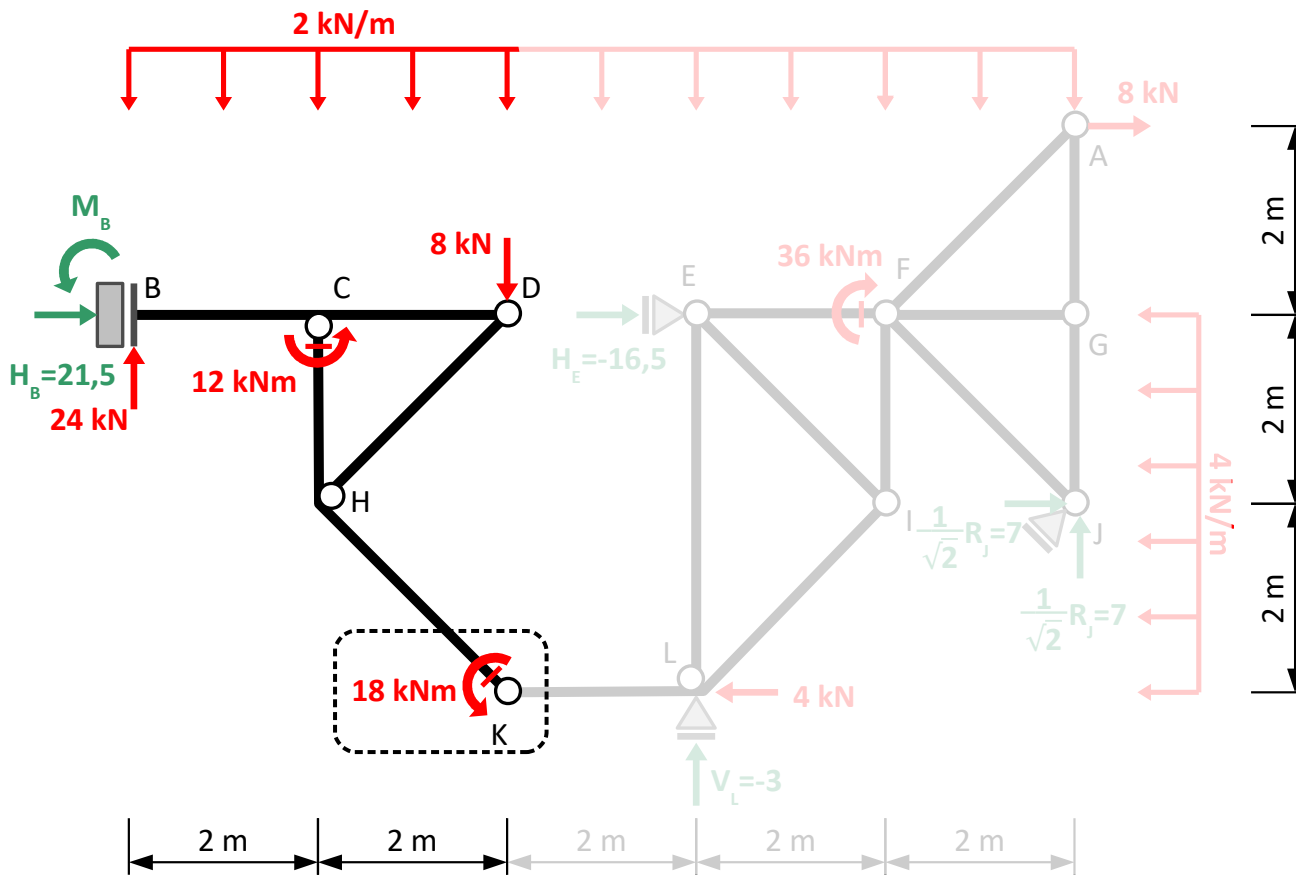
$$\Sigma M_K^{\leftarrow} = + 2 \cdot 4 \cdot 2 + M_B - H_B \cdot 4$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



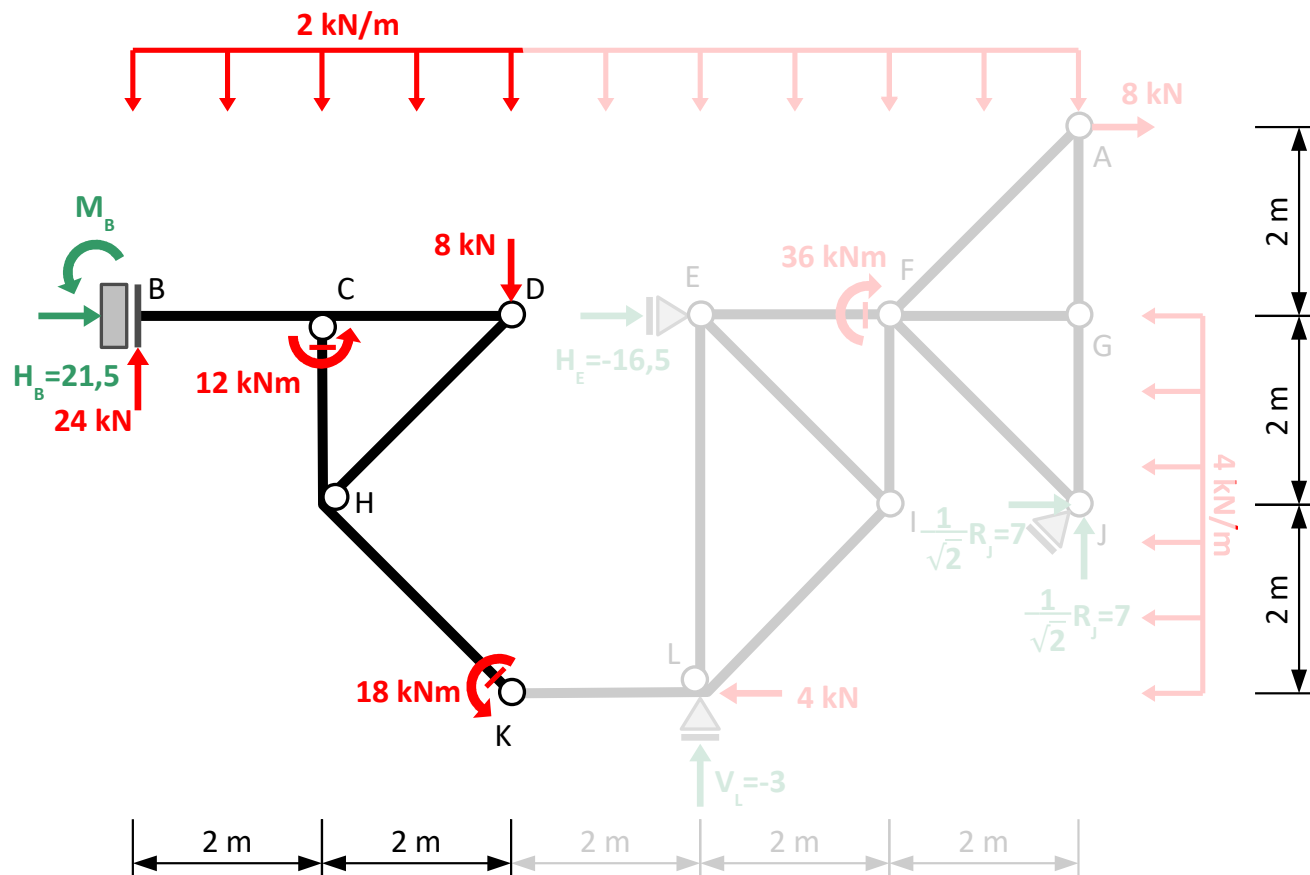
$$\Sigma M_K^{\leftarrow} = + 2 \cdot 4 \cdot 2 + M_B - H_B \cdot 4 - 24 \cdot 4$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\begin{aligned} \Sigma M_K^{\leftarrow} = & \\ & + 2 \cdot 4 \cdot 2 + M_B - H_B \cdot 4 - 24 \cdot 4 \\ & + 12 + 18 \end{aligned}$$

WYZNACZANIE REAKCJI PODPOROWYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ RÓWNOWAGI.



$$\Sigma M_K^{\leftarrow} =$$

$$+ 2 \cdot 4 \cdot 2 + M_B - H_B \cdot 4 - 24 \cdot 4$$

$$+ 12 + 18 = 0$$

$$+ 2 \cdot 4 \cdot 2 + M_B - 21,5 \cdot 4 - 24 \cdot 4$$

$$+ 12 + 18 = 0$$

$$M_B = 136 \text{ kNm}$$

