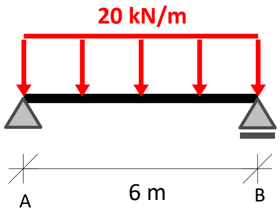
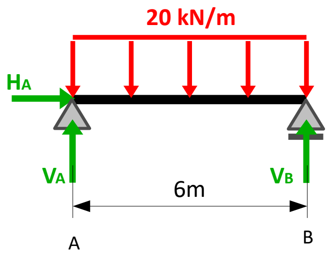
ZADANIE 1
Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe. Sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

Każde zadanie polegające na wyznaczeniu reakcji podporowych zaczynamy od przypisanie podporom odpowiednich reakcji:



Zwrot reakcji przyjmujemy dowolnie – nie ma on znaczenia dla ostatecznego rozwiązania. Jeśli by się zdarzyło, że przyjmiemy zwrot błędny (tj. reakcja działać będzie w rzeczywistości w kierunku przeciwnym niż oznaczyliśmy to strzałką), to po prostu otrzymamy ujemną wartość reakcji. Choć niekiedy jesteśmy w stanie przewidzieć, jaki będzie zwrot reakcji i możemy wtedy narysować strzałkę od razu zwróconą w dobrą stronę, to jednak nie zawsze jest to proste do przewidzenia i zwroty strzałek możemy przyjmować na początku zadania całkiem dowolnie.

Reakcje podporowe wyznaczymy korzystając z **równań równowagi**. Dla układu płaskiego mamy do dyspozycji trzy równania równowagi:

$$\begin{cases} \Sigma X = 0 & \text{Zerowanie się sumy sił poziomych} \\ \Sigma Y = 0 & \text{Zerowanie się sumy sił pionowych} \\ \Sigma M_P = 0 & \text{Zerowanie się sumy momentów względem dowolnego punktu P} \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} \Sigma M_A = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \\ \Sigma M_C = 0 \end{cases} \quad \text{przy czym punkty A, B i C nie leżą na jednej prostej.}$$

Najwygodniej korzystać z tych równań w taki sposób, aby uniknąć konieczności rozwiązywania układu równań, a jedynie **rozwiązywać niezależne równania z jedną tylko niewiadomą**. Równaniem takim może być warunek zerowania się sił poziomych:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 0\text{ kN}}$$

Widzimy, że suma sił pionowych zawiera dwie niewiadome - reakcje V_A i V_B, nie pozwoli nam zatem wyznaczyć żadnej z nich bez wykorzystania jakiegoś innego równania. Jedynym równaniem, jakie nam pozostało, jest równanie zerowania się sumy momentów, przy czym **biegun momentu możemy wybrać dowolnie**. Najlepiej wybrać taki punkt, względem którego tylko jedna niewiadoma daje moment niezerowy – musi więc on na prostych działania tych niewiadomych reakcji, które chcemy pominąć w równaniu. Uzyskany w ten sposób wynik będzie niezależny od wartości tych nieuwzględnionych reakcji również w tym sensie, że jeśli pomyliliśmy się w ich wyznaczaniu, błąd ten nie będzie rzutował na kolejny wynik. W naszym przypadku moglibyśmy obliczyć sumę momentów względem A (wyzeruje nam się wpływ reakcji V_A) lub względem B (wtedy to V_B nie wystąpi w równaniu). Wybór zależy od nas – niech będzie to punkt A:

$$\Sigma M_A = 0: \quad +V_B \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = 60 \text{ kN}}$$

Pozostaje nam już tylko wyznaczyć ostatnią niewiadomą reakcję – w tym celu posłużyć się możemy równaniem na sumę sił pionowych:

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A + V_B - 20 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 60 \text{ kN}}$$

Równie dobrze moglibyśmy wykorzystać inne równanie – np. sumę momentów względem B. Wynik musi być oczywiście taki sam:

$$\Sigma M_B = 0: \quad -V_A \cdot 6 + 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 60 \text{ kN}$$

Sprawdzenie poprawności uzyskanego rozwiązania polega na zapisaniu jakiegokolwiek równania równowagi – jeśli wszystkie reakcje zostały wyznaczone poprawnie, to równanie to będzie spełnione tożsamościowo. Przy wyborze równania na sprawdzenie możemy kierować się następującymi kryteriami:

- **Wybieramy równanie, którego do tej pory nie użyliśmy** – jeśli rozwiązaliśmy je poprawnie, a pomyliliśmy się w innym, to takie sprawdzenie nas o tym nie poinformuje. Jeśli wykorzystaliśmy w rozwiązaniu oba równania na sumę sił, to sprawdzenie będzie zawsze równaniem sumy momentów.

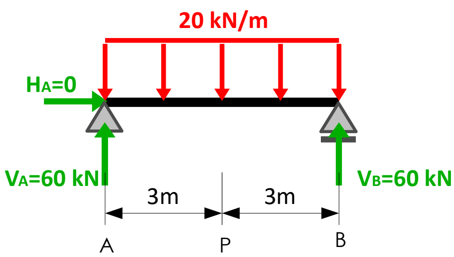
- **Biegun dla równania sumy momentów wybieramy tak, aby jak najwięcej wyznaczonych przez nas reakcji dawało w nim moment niezerowy** (tj. punkt ten musi leżeć poza ich prostymi działania) – jeśli jakaś reakcja działa względem tego punktu na zerowym ramieniu, a pomyliliśmy się w tej reakcji, to sprawdzenie takie nas o tym nie poinformuje.

- **Biegun dla równania sumy momentów możemy wybrać tak, aby jak najwięcej obciążeń czynnych dawało w nim zerowy moment** – takie równanie łatwiej zapisać i tym samym sprawdzenie takie jest tym pewniejsze.

W naszym przypadku dobrym punktem dla sprawdzenia może być środek rozpiętości belki. Oznaczmy go przez P. Wtedy:

$$\Sigma M_P = -V_A \cdot 3 + V_B \cdot 3 = -60 \cdot 3 + 60 \cdot 3 = -180 + 180 = 0$$

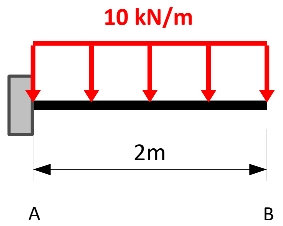
Zerowanie się sumy momentów potwierdza poprawność wykonanych obliczeń.



Ponieważ punkt P leży na prostej działania H_A , równanie powyższe będzie spełnione zawsze, nawet gdyby reakcja ta była wyznaczone niepoprawnie. Z drugiej strony reakcję tę wyznaczyliśmy przy wykorzystaniu bardzo prostego równania, którego rozwiązania jesteśmy pewni.

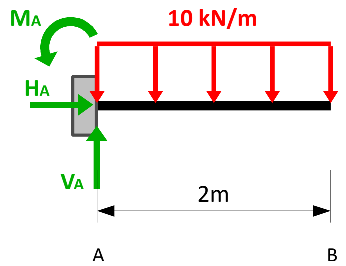
ZADANIE 2

Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe. Sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

Zaznaczamy reakcje podporowe:



Wykorzystujemy równania równowagi:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 0 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 10 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 20 \text{ kN}}$$

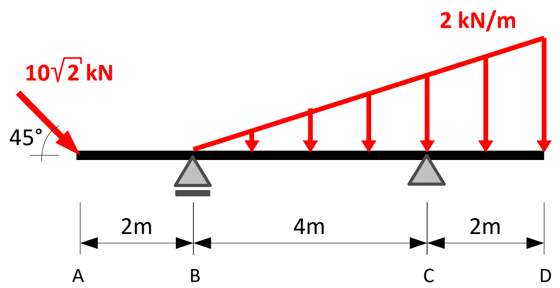
$$\Sigma M_A = 0: \quad +M_A - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 20 \text{ kNm}}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma M_B = 0: \quad +M_A + 10 \cdot 2 \cdot 1 - V_A \cdot 2 = 20 - 20 + 20 \cdot 2 \; = 0$$

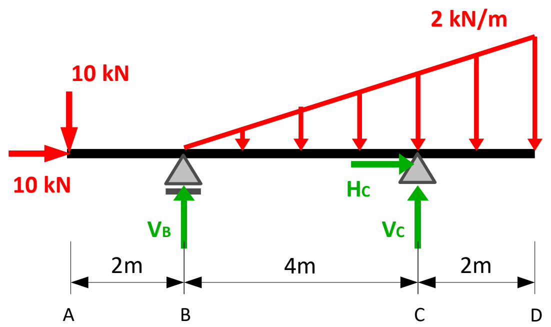
ZADANIE 3

Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe. Sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

Oznaczamy reakcje podporowe. Od razu możemy rozłożyć obciążenie ukośne na składowe pionowe i poziome:



Wykorzystujemy równania równowagi:

$$\Sigma X = 0: \quad H_C + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_C = -10 \text{ kN}}$$

Jeśli otrzymujemy **ujemną wartość reakcji**, oznacza to, że założony przez nas na początku zwrot reakcji jest błędny. Dość powszechnym postępowaniem w takiej sytuacji jest zmiana zwrotu strzałki na rysunku i zmiana wartości reakcji na dodatnią. Takie rozwiązanie wymaga jednak uwagi – konieczne jest wyraźne zaznaczenie na rysunku (na wszystkich rysunkach, jeśli jest ich wiele), który zwrot strzałki jest poprawny oraz wyraźne skreślenie ujemnej wartości reakcji uzyskanej w obliczeniach. Zaniedbanie tych zasad bardzo często prowadzi do błędów – dotyczy to w szczególności sytuacji, gdy ta sama siła występuje na kilku rysunkach z różnymi zwrotami (w przypadku „rozcinania" konstrukcji, o czym będzie mowa później lub w przypadku równoważenia węzłów kratownicy).

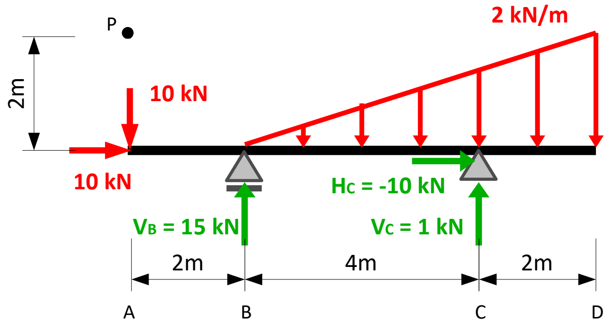
W mojej opinii dużo lepszym rozwiązaniem jest pozostawienie takiego zwrotu strzałki, jaki był przyjęty na początku i pozostawienie ujemnej wartości reakcji. Kolejne równania możemy i tak zapisać na początku symbolicznie (H_C) i dopiero w drugim kroku podstawić odpowiednie wartości (np $H_C = -10$). Takie postępowanie ma jeszcze tę zaletę, że równanie równowagi zapisane symbolicznie łatwiej się sprawdza, a jeśli jest zapisane poprawnie, to poprawność ta nie zależy od wartości reakcji wyznaczonych wcześniej. Ewentualne poprawki uwzględnia się podstawiając za symbole odpowiednio zmienione wartości.

Wyznaczamy pozostałe reakcje:

$$\Sigma M_C = 0: \quad -V_B \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = 15 \text{ kN}}$$

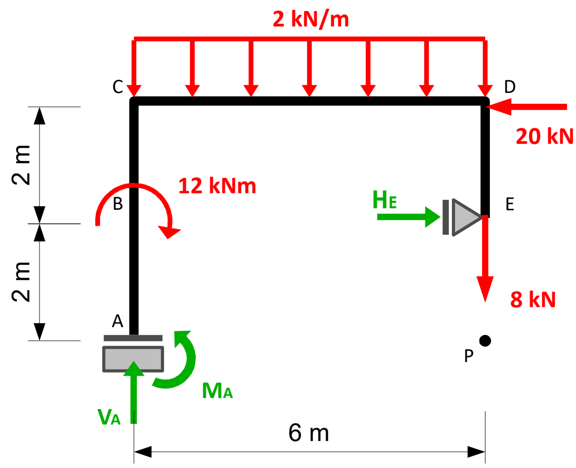
$$\Sigma Y = 0: \quad -10 + V_B + V_C - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = 1 \text{ kN}}$$

Jeśli chcemy dokonać sprawdzenia obliczając sumę momentów, to w wyborze bieguna nie musimy się ograniczać do punktów należących do konstrukcji – może to być dowolny punkt na płaszczyźnie. Wybierzmy taki punkt, aby nie leżał on na prostej działania ujemnej reakcji H_C , aby pokazać w jaki sposób zapiszemy równanie symbolicznie podstawiając następnie obliczone wartości reakcji:



$$\Sigma M_C = 0: \quad 10 \cdot 2 + V_B \cdot 2 + V_C \cdot 6 + H_C \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\right) \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 6\right) =$$
$$= 10 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + (-10) \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\right) \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 6\right) =$$
$$= 20 + 30 + 6 - 20 - 6 \cdot 6 = 36 - 36 = 0$$

ZADANIE 4
Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe. Sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma X = 0: \quad H_E - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = 20 \text{ kN}}$$

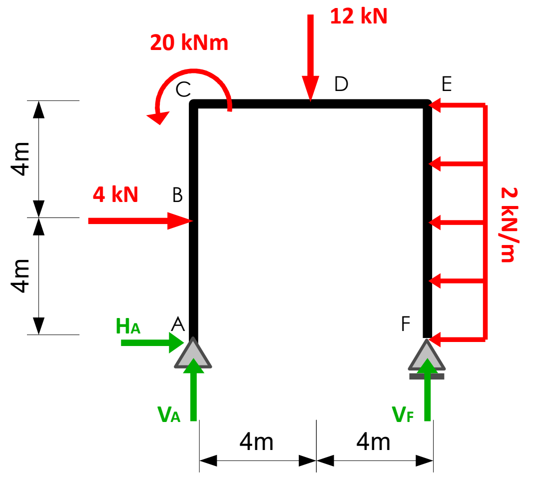
$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 2 \cdot 6 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 20 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_E = 0: \quad +M_A - V_A \cdot 6 - 12 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 20 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 56 \text{ kNm}}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma M_P = 0: \quad M_A - V_A \cdot 6 - 12 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 20 \cdot 4 - H_E \cdot 2 =$$
$$= 56 - 20 \cdot 6 - 12 + 36 + 80 - 20 \cdot 2 =$$
$$= 56 - 120 - 12 + 36 + 80 - 40 = 0$$

ZADANIE 5
Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe.



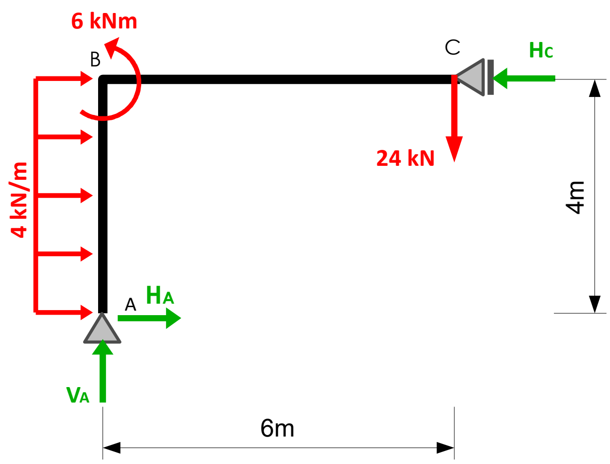
ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 4 - 2 \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 12 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad -4 \cdot 4 + 20 - 12 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + V_F \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_F = -2{,}5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 12 + V_F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 14{,}5 \text{ kN}}$$

ZADANIE 6
Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe.



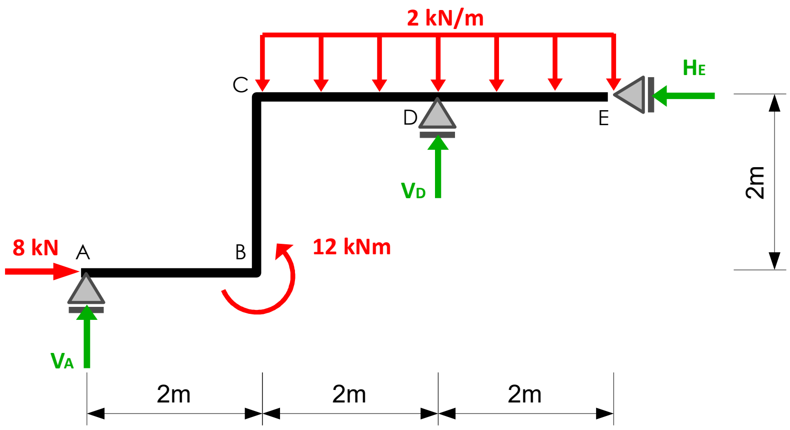
ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 24 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad -4 \cdot 4 \cdot 2 + 6 - 24 \cdot 6 + H_C \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_C = 42{,}5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 4 \cdot 4 - H_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 26{,}5 \text{ kN}}$$

ZADANIE 7
Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe.



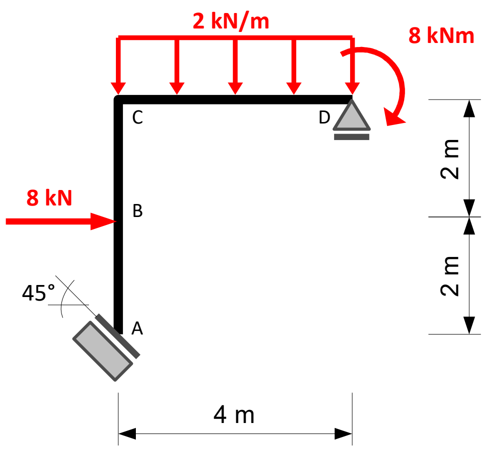
ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma X = 0: \quad 8 - H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = 8\ \text{kN}}$$

$$\Sigma M_D = 0: \quad +8 \cdot 2 - V_A \cdot 4 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 7\ \text{kN}}$$

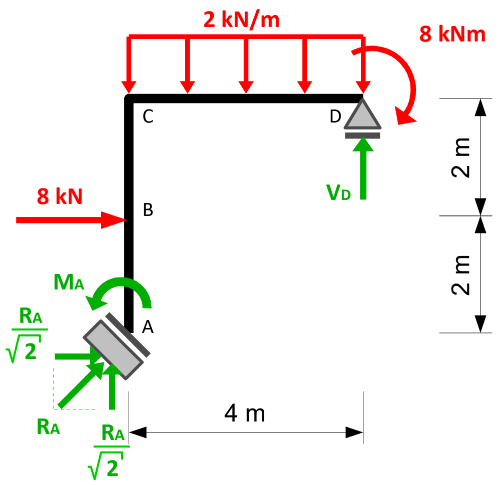
$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 2 \cdot 4 + V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_D = 1\ \text{kN}}$$

ZADANIE 8
Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe.



ROZWIĄZANIE:

W przypadku, gdy w układzie występuje podpora z dopuszczalnym przesuwem ukośnym, reakcja na tej podporze będzie zawsze prostopadła do kierunku tego dopuszczalnego przemieszczenia. Będzie to zawsze jedna niewiadoma, którą jednak rozłożymy na składowe: poziomą i pionową.



$$\Sigma X=0:\quad \frac{R_A}{\sqrt{2}}+8=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{R_A=-8\sqrt{2}\ \mathrm{kN}}$$

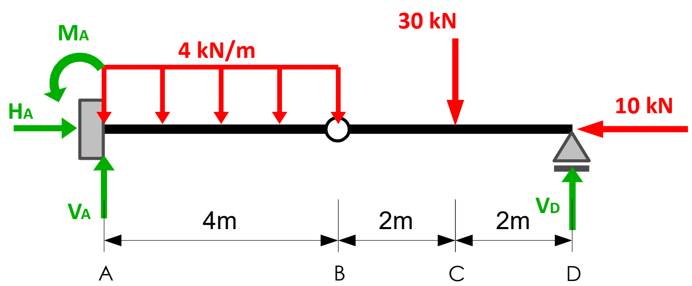
$$\Sigma Y=0:\quad \frac{R_A}{\sqrt{2}}-2\cdot 4+V_D=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_D=16\ \mathrm{kN}}$$

Wybierając biegun momentu do obliczenia moment utwierdzenia M_A możemy zauważyć, że punkt D leży na prostej działania zarówno siły V_D jak i reakcji R_A - choć nie leży on na prostej działania żadnej ze składowych R_A, to jednak sumarycznie składowe te dają oczywiście zerowy moment względem D.

$$\Sigma M_D=0:\quad +M_A+8\cdot 2+2\cdot 4\cdot 2-8=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{M_A=-24\ \mathrm{kNm}}$$

ZADANIE 9

Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe. Sprawdź poprawność obliczeń.



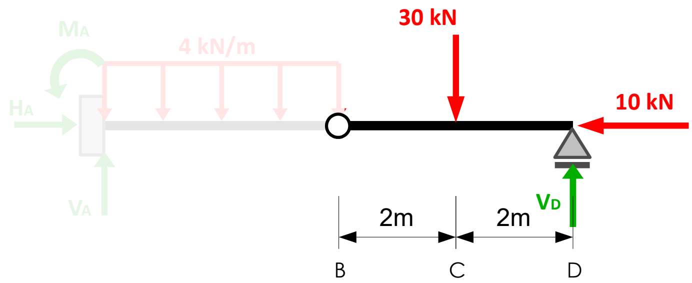
ROZWIĄZANIE:

W układach z przegubami do podstawowych trzech równań równowagi dochodzą nam jeszcze 2 dodatkowe równania na każdy z przegubów: **zerowanie się sumy momentów względem przegubu** od **sił przyłożonych do jednej lub drugiej z części konstrukcji** schodzących się w przegubie. Równania te nie są niezależne od podstawowych trzech równań równowagi, stąd w rezultacie każdy przegub daje nam 1 dodatkowe, niezależne równanie, na podstawie którego możemy wyznaczyć reakcje podporowe.

Na początku wyznaczymy reakcję poziomą w utwierdzeniu:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 10 \text{ kN}}$$

Zauważmy teraz, że zarówno równanie sumy rzutów sił pionowych jak i równanie sumy momentów względem dowolnego punktu da nam zawsze równanie zależne od co najmniej dwóch niewiadomych. Tak czy inaczej musielibyśmy w końcu skorzystać z **równania sumy momentów z jednej lub drugiej strony przegubu**. Układając to równanie dla sił przyłożonych do prawej części konstrukcji uzyskamy równanie zależne tylko od jednej niewiadomej. Przy zapisywaniu tego równania **całkowicie pomijamy siły przyłożone do drugiej części konstrukcji**.



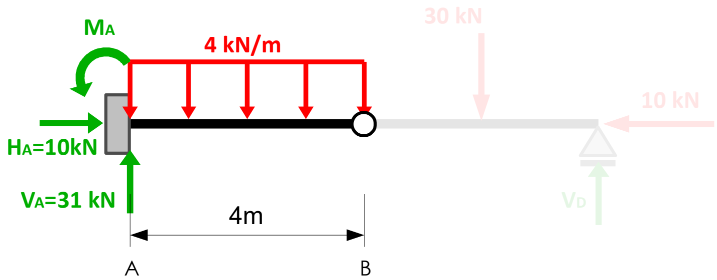
$$\Sigma M_B^{\rightarrow} = 0: \quad -30 \cdot 2 + V_D \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_D = 15 \text{ kN}}$$

UWAGA:
Należy zapamiętać, że sumę momentów z jednej lub drugiej strony punktu można zapisać **tylko dla przegubu**.

Drugą z reakcji pionowych wyznaczamy z równania na sumę sił pionowych:

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 4 \cdot 4 - 30 + V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 31 \text{ kN}}$$

Moment utwierdzenia możemy wyznaczyć wykorzystując drugie z równań, jakie daje nam obecność przegubu:



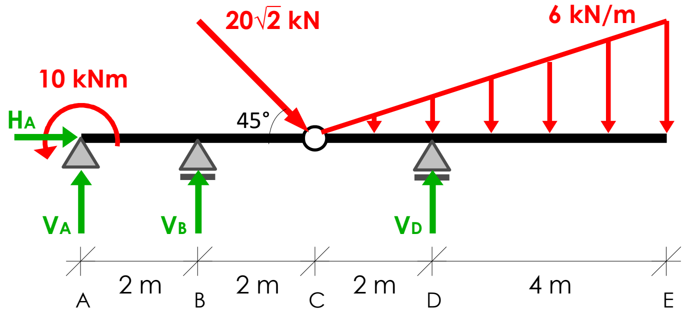
$$\Sigma M_B^{\leftarrow} = 0: \quad +M_A - V_A \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 92 \text{ kNm}}$$

Aby dokonać sprawdzenia musimy obliczyć sumę momentów (od całego obciążenia) względem jakiegoś punktu. Błędem byłoby wybranie punktu B, ponieważ wykorzystaliśmy już równania zerowania się sumy momentów z jednej strony i z drugiej strony przegubu. Z tych dwóch równań wynika, że suma momentów od całości obciążenia na pewno będzie w B równa 0 (to właśnie oznacza, że przegub daje nam 2 równania, ale tylko 1 jest niezależne od pozostałych równań równowagi). Możemy np. obliczyć sumę momentów względem C:

$$\Sigma M_C = M_A - V_A \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + V_D \cdot 2 = 92 - 31 \cdot 6 + 64 + 15 \cdot 2 = 0$$

ZADANIE 10

Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe. Sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = -20 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0: \quad +V_D \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_D = 36 \text{ kN}}$$

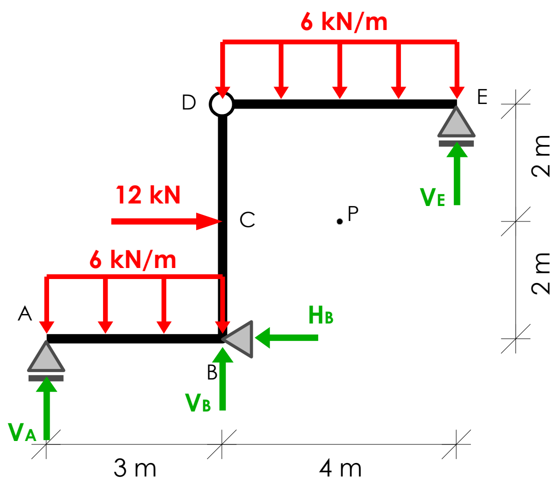
$$\Sigma M_A = 0: \quad +10 + V_B \cdot 2 - 20 \cdot 4 + V_D \cdot 6 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = -1 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_C^{\leftarrow} = : \quad +10 - V_A \cdot 4 - V_B \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 3 \text{ kN}}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma Y = V_A + V_B + V_D - 20 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 3 - 1 + 36 - 20 - 18 = 0$$ **OK!**

ZADANIE 11
Wyznacz reakcje podporowe i sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma M_D^{\rightarrow} = 0: \quad V_E \cdot 4 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 12 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad 12 - H_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_B = 12 \text{ kN}}$$

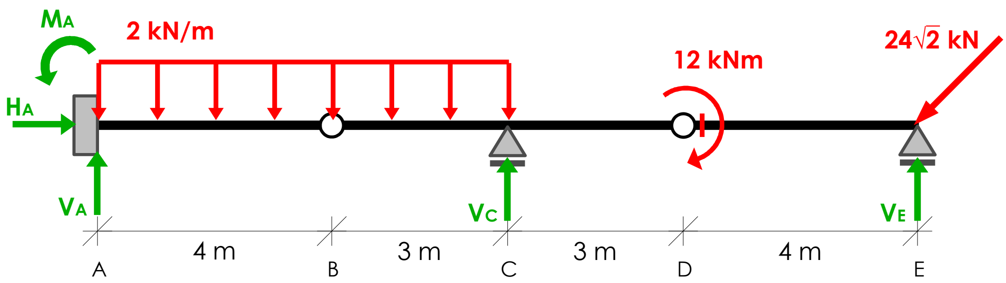
$$\Sigma M_D^{\downarrow} = 0: \quad 12 \cdot 2 - H_B \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - V_A \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 1 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A + V_B + V_E - 6 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = 29 \text{ kN}}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma M_P = -V_A \cdot 5 - V_B \cdot 2 - H_B \cdot 2 + V_E \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3{,}5 = -5 - 58 - 24 + 24 + 63 = 0$$ **OK!**

ZADANIE 12
Wyznacz reakcje podporowe .



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 24 \text{ kN}}$$

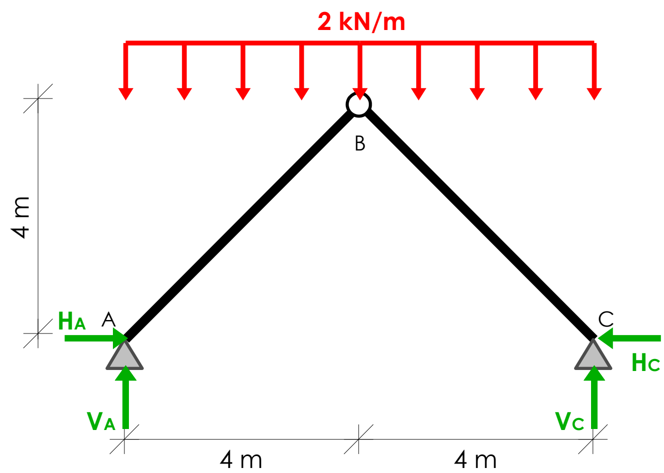
$$\Sigma M_D^{\rightarrow} = 0: \quad -12 - 24\cdot 4 + V_E \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 27 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B^{\rightarrow} = 0: \quad -2\cdot 3\cdot 1{,}5 + V_c\cdot 3 - 12 - 24\cdot 10 + V_E\cdot 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = -3 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = : \quad V_A + V_C + V_E - 2\cdot 7 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 14 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B^{\leftarrow} = 0: \quad M_A - V_A \cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 40 \text{ kNm}}$$

ZADANIE 13
Wyznacz reakcje podporowe.



ROZWIĄZANIE:

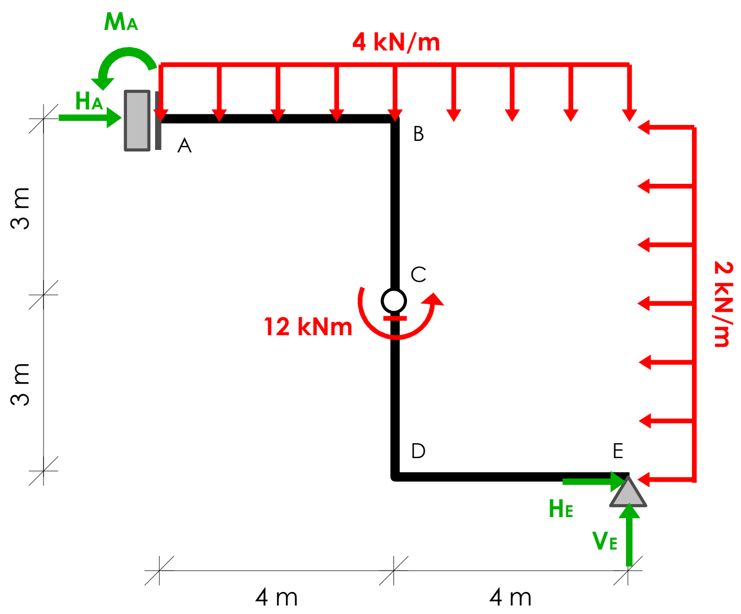
$$\Sigma M_C = 0: \quad -V_A\cdot 8 + 2\cdot 8\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 8 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B^{\leftarrow} = 0: \quad -V_A\cdot 4 + H_A\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 4 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - H_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_C = 4 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = : \quad V_A + V_C - 2\cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = 8 \text{ kN}}$$

ZADANIE 14
Wyznacz reakcje podporowe.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma Y = 0: \quad -4\cdot 8 + V_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 32 \text{ kN}}$$

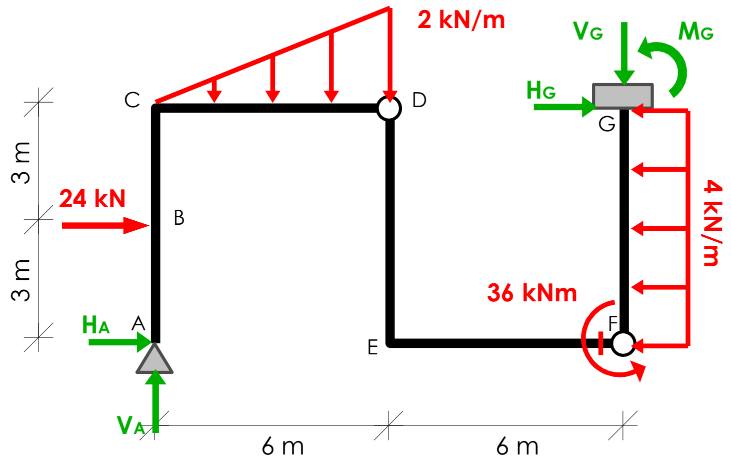
$$\Sigma M_C^{\downarrow} = 0: \quad 12 - 4\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 1{,}5 + H_E\cdot 3 + V_E\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = -33 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - 2\cdot 6 + H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 45 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = : \quad + M_A - H_A\cdot 3 + 4\cdot 4\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 94 \text{ kNm}}$$

ZADANIE 15

Wyznacz reakcje podporowe .



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma M_F^{\leftarrow}=0:\quad -V_A\cdot 12-24\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\cdot 8+36=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_A=1\ \text{kN}}$$

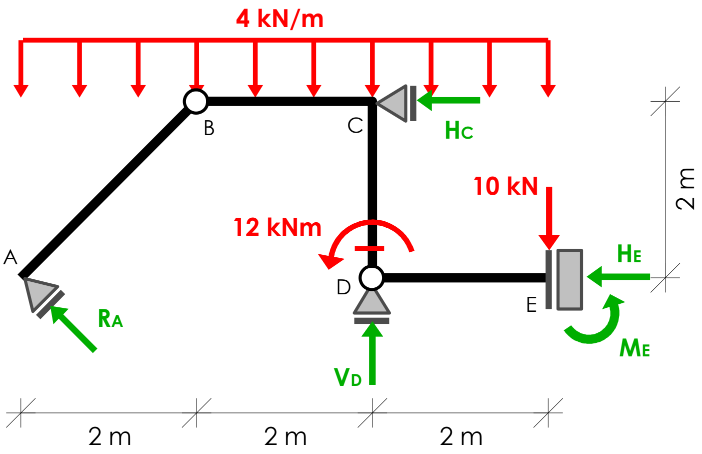
$$\Sigma M_D^{\leftarrow}=0:\quad -V_A\cdot 6+H_A\cdot 6+24\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\cdot 2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{H_A=-13\ \text{kN}}$$

$$\Sigma X=0:\quad H_A+24-4\cdot 6+H_G=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_C=13\ \text{kN}}$$

$$\Sigma Y=:\quad V_A-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2-V_G=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_G=-5\ \text{kN}}$$

$$\Sigma M_F^{\uparrow}=0:\quad +M_G-H_G\cdot 6+4\cdot 6\cdot 3=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{M_G=6\ \text{kNm}}$$

ZADANIE 16
Wyznacz reakcje podporowe .



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma M_D^{\rightarrow} = 0: \quad -10\cdot 2 - 4\cdot 2\cdot 1 + M_E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M_E = 28 \text{ kNm}}$$

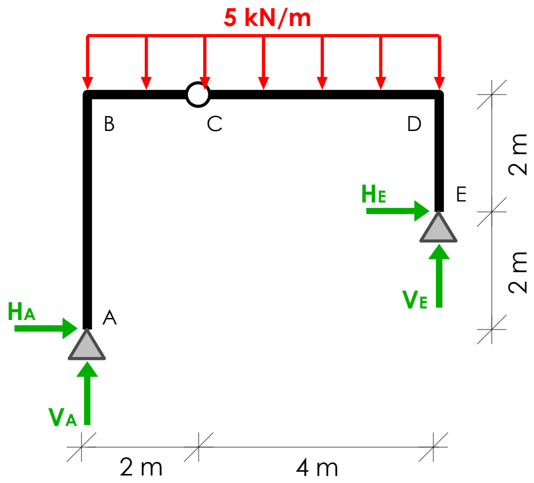
$$\Sigma M_B^{\leftarrow} = 0: \quad -\frac{R_A}{\sqrt{2}}\cdot 2 - \frac{R_A}{\sqrt{2}}\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R_A = 2\sqrt{2} \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad \frac{R_A}{\sqrt{2}} + V_D - 4\cdot 6 - 10 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_D = 32 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_D^{\uparrow} = : \quad +12 + H_C\cdot 2 - \frac{R_A}{\sqrt{2}}\cdot 4 + 4\cdot 4\cdot 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_C = -18 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad -\frac{R_A}{\sqrt{2}} - H_C - H_E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_E = 16 \text{ kN}}$$

ZADANIE 17
Wyznacz reakcje podporowe .



ROZWIĄZANIE:
Niekiedy nie jest możliwe wyznaczenie reakcji podporowych bez konieczności rozwiązania układu równań – taka sytuacja ma miejsce właśnie w przypadku niektórych ram trójprzegubowych.

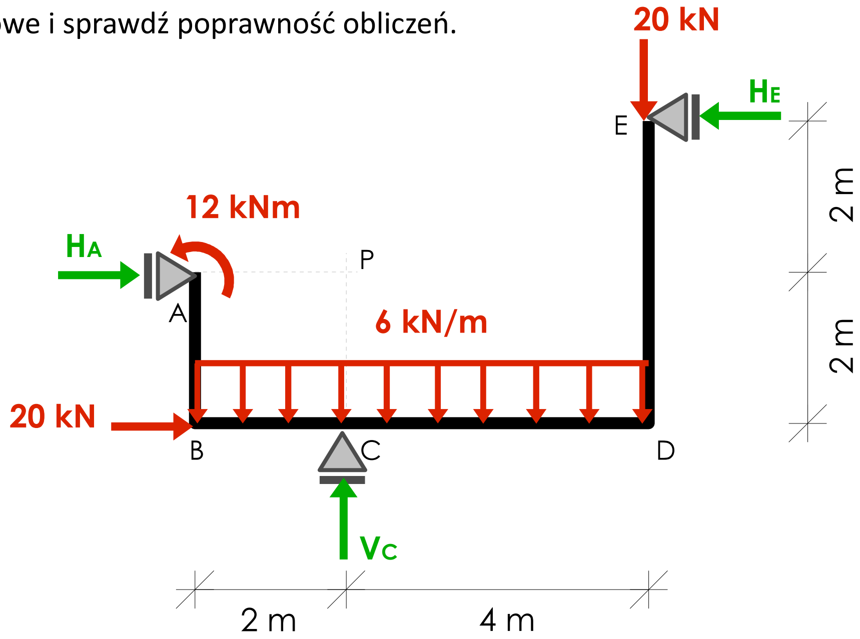
$$\begin{cases} \Sigma M_E = 0 \\ \Sigma M_C^{\leftarrow} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +H_A \cdot 2 - V_A \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \\ +H_A \cdot 4 - V_A \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} H_A = 6 \text{ kN} \\ V_A = 17 \text{ kN} \end{cases}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = -6 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A + V_E - 5 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 13 \text{ kN}}$$

ZADANIE 9

Wyznacz reakcje podporowe i sprawdź poprawność obliczeń.



$$\Sigma Y = 0: \quad V_C - 6 \cdot 6 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = 56}$$

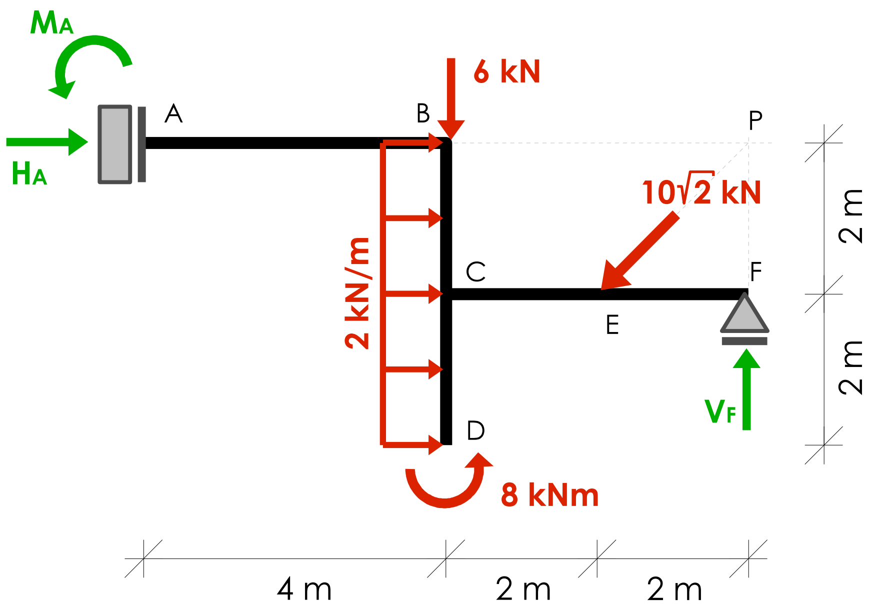
$$\Sigma M_P = 0: \quad +20 \cdot 2 - 6 \cdot 6 \cdot 1 + 12 - 20 \cdot 4 + H_E \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = 32}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 20 - H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 12}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma M_D = -H_A \cdot 2 + 12 - V_C \cdot 4 + 6 \cdot 6 \cdot 3 + H_E \cdot 4 =$$
$$-12 \cdot 2 + 12 - 56 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \cdot 3 + 32 \cdot 4 = 0$$

ZADANIE 10
Wyznacz reakcje podporowe i sprawdź poprawność obliczeń.



$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 2{\cdot}4 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{H_A = 2}$$

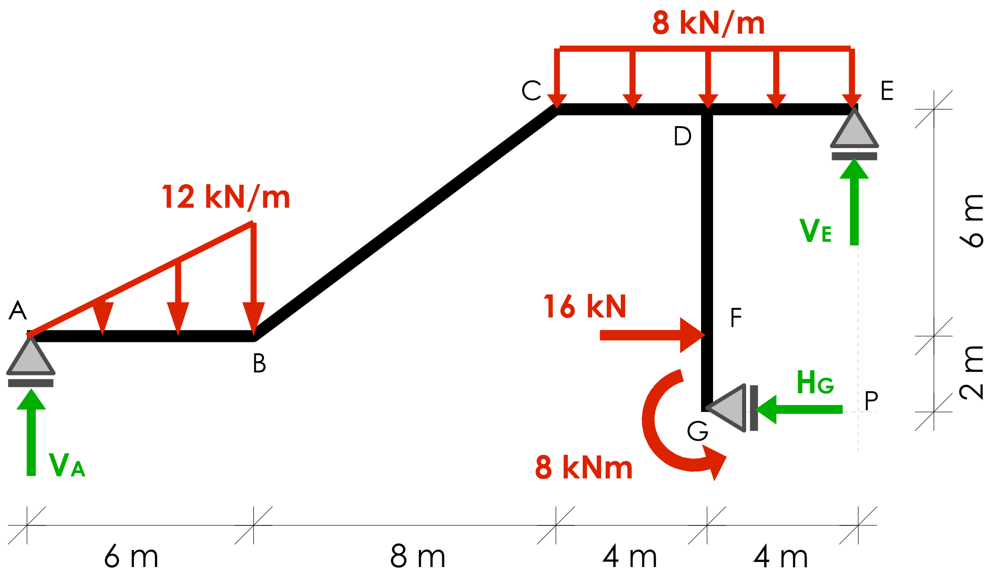
$$\Sigma Y = 0: \quad V_F - 6 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{V_F = 16}$$

$$\Sigma M_P = 0: \quad M_A + 6{\cdot}4 + 2{\cdot}4{\cdot}2 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{M_A = -48}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma M_E = +M_A - H_A{\cdot}2 + 6{\cdot}2 + 8 + V_F{\cdot}2 =$$
$$-48 - 2{\cdot}2 + 6{\cdot}2 + 8 + 16{\cdot}2 = 0$$

ZADANIE 11
Wyznacz reakcje podporowe.

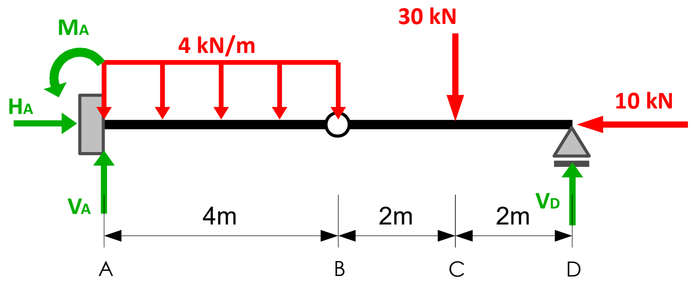


$$\Sigma X=0: \quad 16 - H_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_G = 16}$$

$$\Sigma M_P=0: \quad -V_A \cdot 22 + \left[\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\right]\cdot\left[16+\frac{1}{3}\cdot 6\right] + 8\cdot 8\cdot 4 - 16\cdot 2 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 40}$$

$$\Sigma Y=0: \quad V_A - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12 - 8\cdot 8 + V_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 60}$$

ZADANIE 12
Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe. Sprawdź poprawność obliczeń.



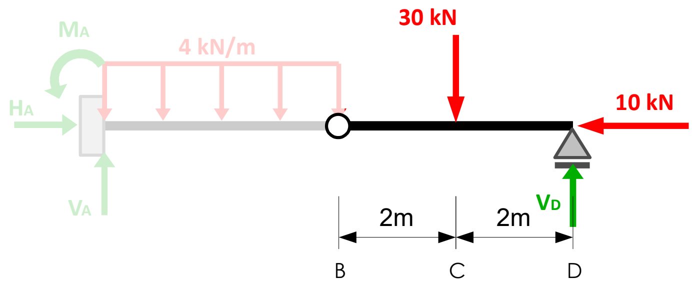
ROZWIĄZANIE:

W układach z przegubami do podstawowych trzech równań równowagi dochodzą nam jeszcze 2 dodatkowe równania na każdy z przegubów: **zerowanie się sumy momentów względem przegubu** od **sił przyłożonych do jednej lub drugiej z części konstrukcji** schodzących się w przegubie. Równania te nie są niezależne od podstawowych trzech równań równowagi, stąd w rezultacie każdy przegub daje nam 1 dodatkowe, niezależne równanie, na podstawie którego możemy wyznaczyć reakcje podporowe.

Na początku wyznaczymy reakcję poziomą w utwierdzeniu:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - 10 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_A = 10 \text{ kN}}$$

Zauważmy teraz, że zarówno równanie sumy rzutów sił pionowych jak i równanie sumy momentów względem dowolnego punktu da nam zawsze równanie zależne od co najmniej dwóch niewiadomych. Tak czy inaczej musielibyśmy w końcu skorzystać z **równania sumy momentów z jednej lub drugiej strony przegubu**. Układając to równanie dla sił przyłożonych do prawej części konstrukcji uzyskamy równanie zależne tylko od jednej niewiadomej. Przy zapisywaniu tego równania **całkowicie pomijamy siły przyłożone do drugiej części konstrukcji**.



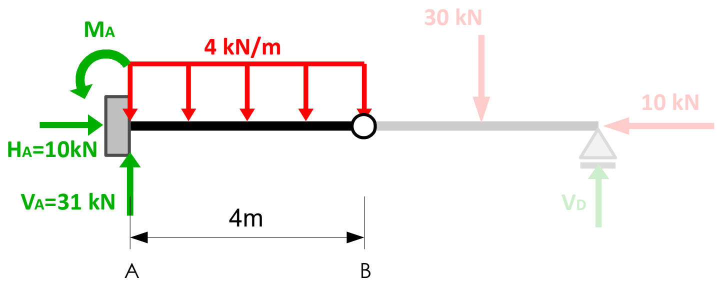
$$\Sigma M_B^{\rightarrow} = 0: \quad -30 \cdot 2 + V_D \cdot 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_D = 15 \text{ kN}}$$

UWAGA:
Należy zapamiętać, że sumę momentów z jednej lub drugiej strony punktu można zapisać **tylko dla przegubu**.

Drugą z reakcji pionowych wyznaczamy z równania na sumę sił pionowych:

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 4 \cdot 4 - 30 + V_D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_A = 31 \text{ kN}}$$

Moment utwierdzenia możemy wyznaczyć wykorzystując drugie z równań, jakie daje nam obecność przegubu:



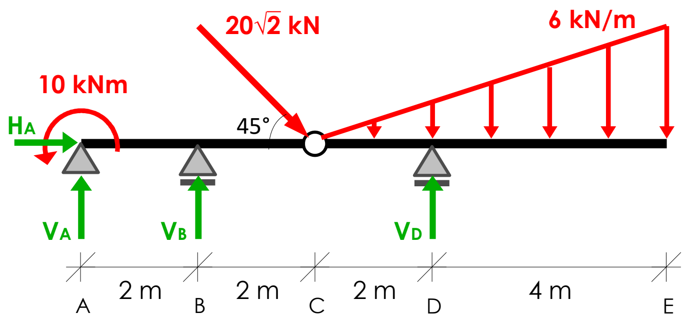
$$\Sigma M_B^{\leftarrow} = 0: \quad +M_A - V_A \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 92 \text{ kNm}}$$

Aby dokonać sprawdzenia musimy obliczyć sumę momentów (od całego obciążenia) względem jakiegoś punktu. Błędem byłoby wybranie punktu B, ponieważ wykorzystaliśmy już równania zerowania się sumy momentów z jednej strony i z drugiej strony przegubu. Z tych dwóch równań wynika, że suma momentów od całości obciążenia na pewno będzie w B równa 0 (to właśnie oznacza, że przegub daje nam 2 równania, ale tylko 1 jest niezależne od pozostałych równań równowagi). Możemy np. obliczyć sumę momentów względem C:

$$\Sigma M_C = M_A - V_A \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + V_D \cdot 2 = 92 - 31 \cdot 6 + 64 + 15 \cdot 2 = 0$$

ZADANIE 13

Korzystając z równań równowagi wyznacz reakcje podporowe. Sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = -20 \text{ kN}}$$

Siła przyłożona dokładnie w przegubie daje zerowy moment względem przegubu, więc problem przypisania jej do układu sił z jednej lub z drugiej strony przegubu nie istnieje.

$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0: \quad +V_D \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_D = 36 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad +10 + V_B \cdot 2 - 20 \cdot 4 + V_D \cdot 6 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = -1 \text{ kN}}$$

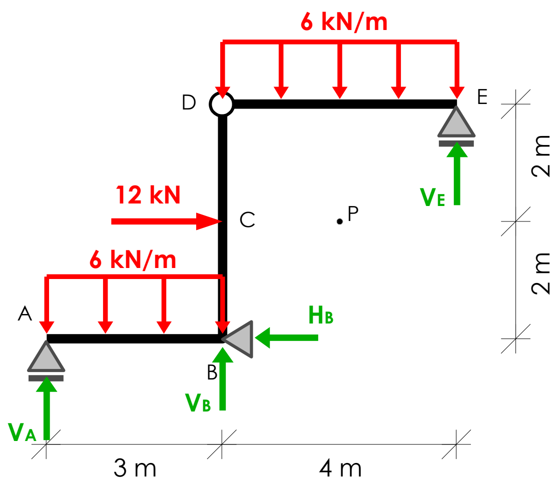
$$\Sigma M_C^{\leftarrow} = : \quad +10 - V_A \cdot 4 - V_B \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 3 \text{ kN}}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma Y = V_A + V_B + V_D - 20 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 3 - 1 + 36 - 20 - 18 = 0 \quad \textbf{OK!}$$

ZADANIE 14

Wyznacz reakcje podporowe i sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma M_D^{\rightarrow} = 0: \quad V_E \cdot 4 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 12 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad 12 - H_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_B = 12 \text{ kN}}$$

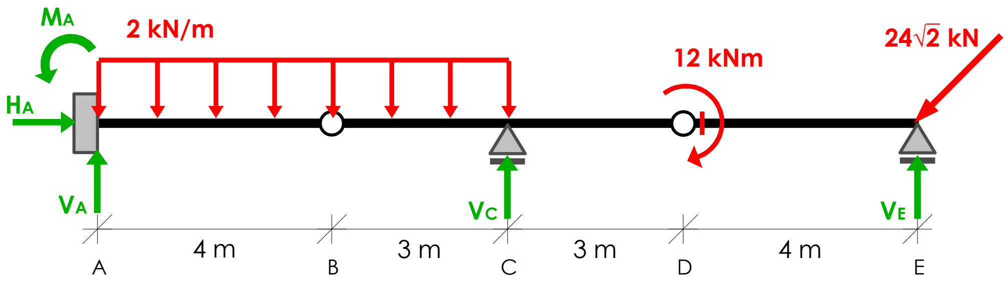
$$\Sigma M_D^{\downarrow} = 0: \quad 12 \cdot 2 - H_B \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - V_A \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 1 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A + V_B + V_E - 6 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = 29 \text{ kN}}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma M_P = -V_A \cdot 5 - V_B \cdot 2 - H_B \cdot 2 + V_E \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3{,}5 = -5 - 58 - 24 + 24 + 63 = 0$$ **OK!**

ZADANIE 15
Wyznacz reakcje podporowe .



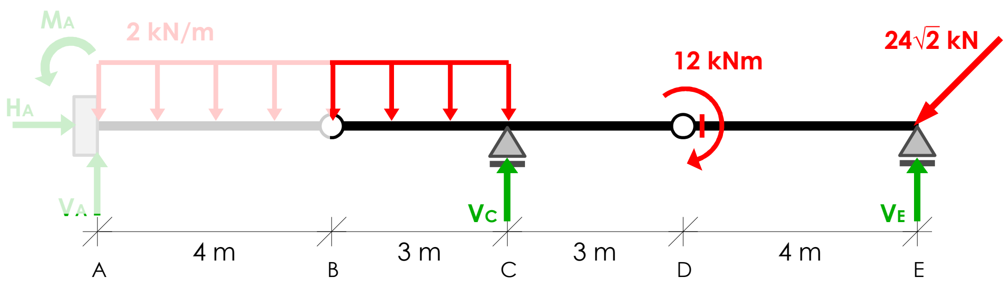
ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 24 \text{ kN}}$$

Moment skupiony, jako reprezentant pary sił odległych od siebie o jakąś małą, lecz skończoną odległość, nie może być przyłożony w przegubie – przynajmniej jedna z sił pary zawsze będzie się znajdować bądź po jednej bądź po drugiej jego stronie. Przegub jest jakby punktem nieciągłości w rozkładzie pola obrotu brył sztywnych – obrót z jednej strony może być inny niż z drugiej, a obrót samego przegubu nie jest w ogóle definiowany. Przegub jest węzłem, który nie stawia żadnego oporu obrotowi, więc przykładanie momentu skupionego (czyli obciążenia wymuszającego obrót) w idealnym przegubie nie jest ani możliwe ani nie ma sensu. Dlatego moment skupiony zawsze musi mieć określone położenie z jednej lub z drugiej strony przegubu – oznaczać je będziemy małą kreseczką z odpowiedniej strony.

$$\Sigma M_D^{\rightarrow} = 0: \quad -12 - 24 \cdot 4 + V_E \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 27 \text{ kN}}$$

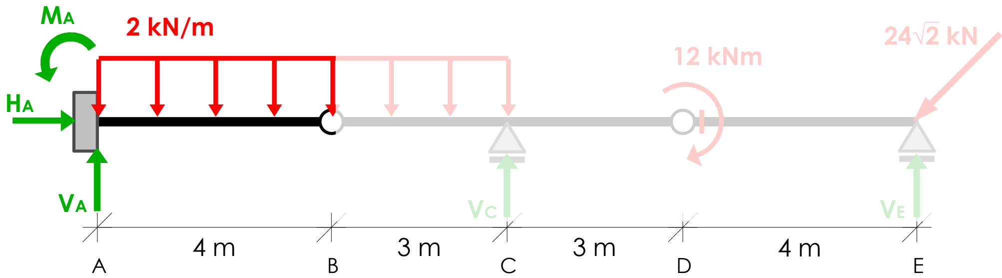
Obliczymy teraz sumę momentów względem przegubu B z prawej strony. W przypadku, gdy pojedyncze obciążenie ciągłe oddziałuje na dwie części konstrukcji połączone przegubem, przy obliczaniu sumy momentów względem przegubu od obciążeń z jednej jego strony należy pamiętać, że część obciążenia ciągłego przypisana jest do jednej części konstrukcji (jednej strony przegubu) a część do drugiej. W szczególności źródłem błędów może być zastąpienie całego obciążenia ciągłego pojedynczą wypadkową. Lepszym rozwiązaniem jest zastąpienie każdej z części, działającej na osobne części konstrukcji schodzące się w przegubie, osobną wypadkową.



$$\Sigma M_B^{\rightarrow} = 0: \quad -2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + V_c \cdot 3 - 12 - 24 \cdot 10 + V_E \cdot 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = -3 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = : \quad V_A + V_C + V_E - 2 \cdot 7 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 14 \text{ kN}}$$

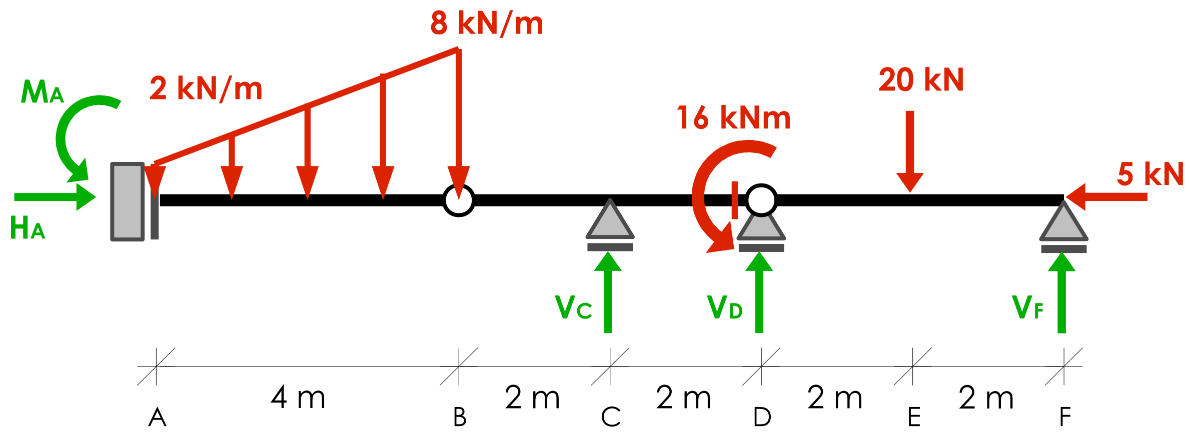
Suma momentów względem przegubu B z lewej strony:



$$\Sigma M_B^{\leftarrow} = 0: \quad M_A - V_A \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 40 \text{ kNm}}$$

ZADANIE 16

Wyznacz reakcje podporowe i sprawdź poprawność obliczeń.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma X=0:\quad H_A-5=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{H_A=5}$$

$$\Sigma M_B^{lewo}=0:\quad +M_A+[2\cdot4]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot4\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot4\cdot(8-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot4\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{M_A=-32}$$

$$\Sigma M_D^{prawo}=0:\quad -20\cdot2+V_F\cdot4=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_F=10}$$

$$\Sigma M_D^{lewo}=0:\quad +M_A+[2\cdot4]\cdot\left[4+\frac{1}{2}\cdot4\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot4\cdot(8-2)\right]\cdot\left[4+\frac{1}{3}\cdot4\right]+16-V_C\cdot2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_C=48}$$

$$\Sigma Y=0:\quad -2\cdot4-\frac{1}{2}\cdot4\cdot(8-2)+V_C+V_D-20+V_F=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_D=-18}$$

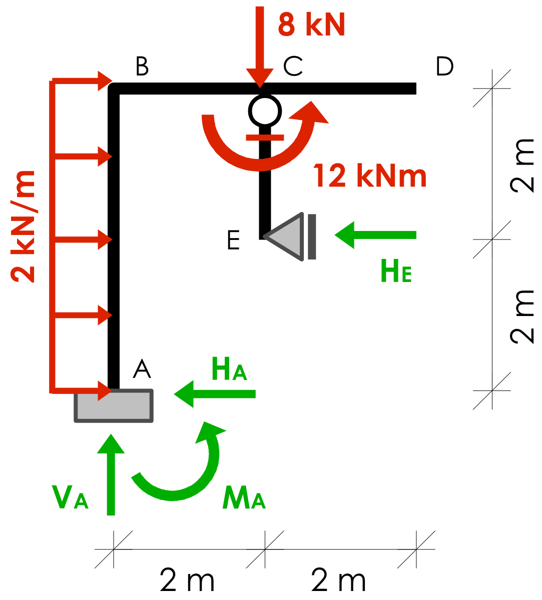
Sprawdzenie:

$$\Sigma M_E=+M_A+[2\cdot4]\cdot\left[6+\frac{1}{2}\cdot4\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot4\cdot(8-2)\right]\cdot\left[6+\frac{1}{3}\cdot4\right]+16-V_C\cdot4-V_D\cdot2+V_F\cdot2=$$

$$-32+8\cdot8+12\cdot\frac{22}{3}+16-48\cdot4-(-18)\cdot2+10\cdot2=0$$

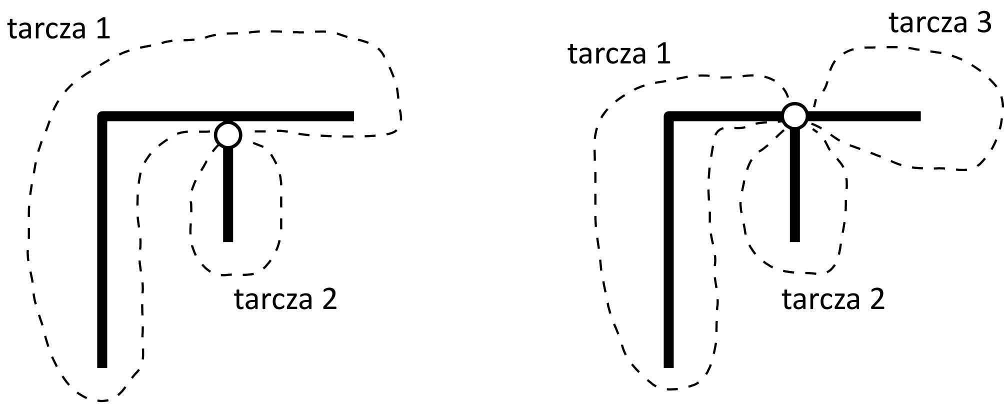
ZADANIE 17

Wyznacz reakcje podporowe.



ROZWIĄZANIE:

Nie każdy przegub dzieli konstrukcję na dwie części w tym sensie, że rozcina pręt, w którym przegub występuje. Wykorzystywać będziemy również przeguby tak jakby „przyklejone" do konstrukcji, tj. takie, które nie dzielą żadnego z prętów, a jedynie dołączają do niego dodatkowy element, który ma swobodę obrotu względem tego pierwszego. Takim przegubem jest przegub w punkcie C. Jest on przegubem pojedynczym, ponieważ schodzą się w nim dwie tarcze. Różnicę pomiędzy przegubem pojedynczym a podwójnym ilustruje poniższy obrazek:



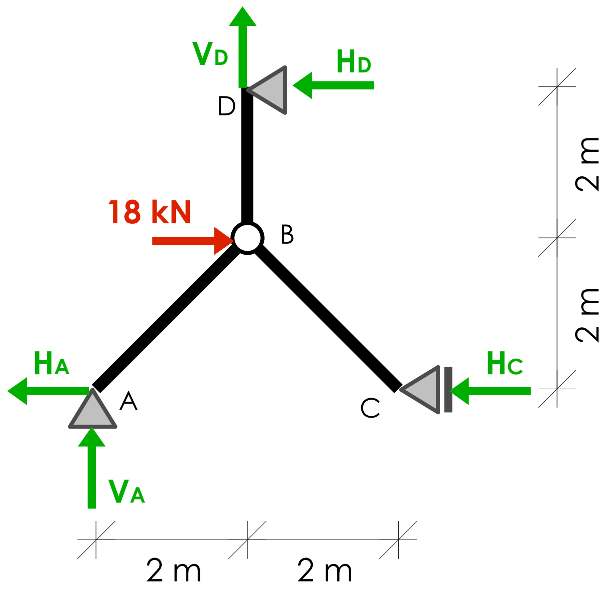
$$\Sigma M_C^{dół}=0: \quad +12 - H_E \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = 6}$$

$$\Sigma X=0: \quad +2 \cdot 4 - H_A - H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 2}$$

$$\Sigma Y=0: \quad V_A - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 8}$$

$$\Sigma M_E = 0: \quad M_A - H_A \cdot 2 - V_A \cdot 2 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 8}$$

ZADANIE 18
Wyznacz reakcje podporowe



ROZWIĄZANIE:

W konstrukcji występuje przegub podwójny – schodzą się w nim trzy tarcze. Dla każdej z tarcz mamy odrębne równanie równowagi, sumy momentów względem przegubu od obciążeń przyłożonych do tej tarczy. A zatem przegub podwójny dostarcza nam dwóch dodatkowych równań równowagi.

$$\Sigma M_B^{prawo-dół} = 0: \quad -H_C \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_C = 0}$$

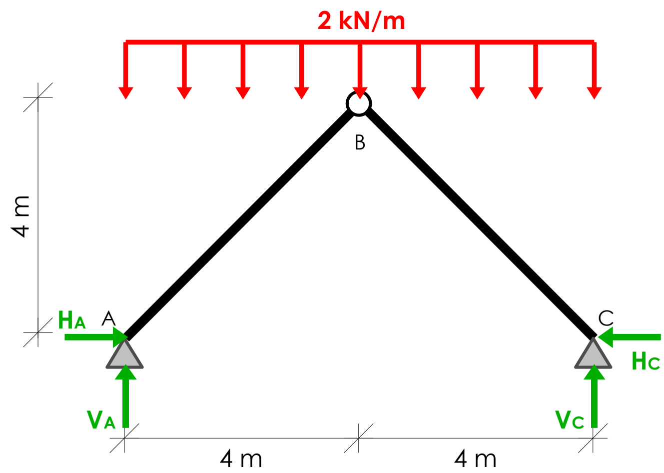
$$\Sigma M_B^{góra} = 0: \quad H_D \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_D = 0}$$

$$\Sigma X = 0: \quad -H_A + 18 - H_D - H_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 18}$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad -18 \cdot 2 + V_D \cdot 2 + H_D \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_D = 18}$$

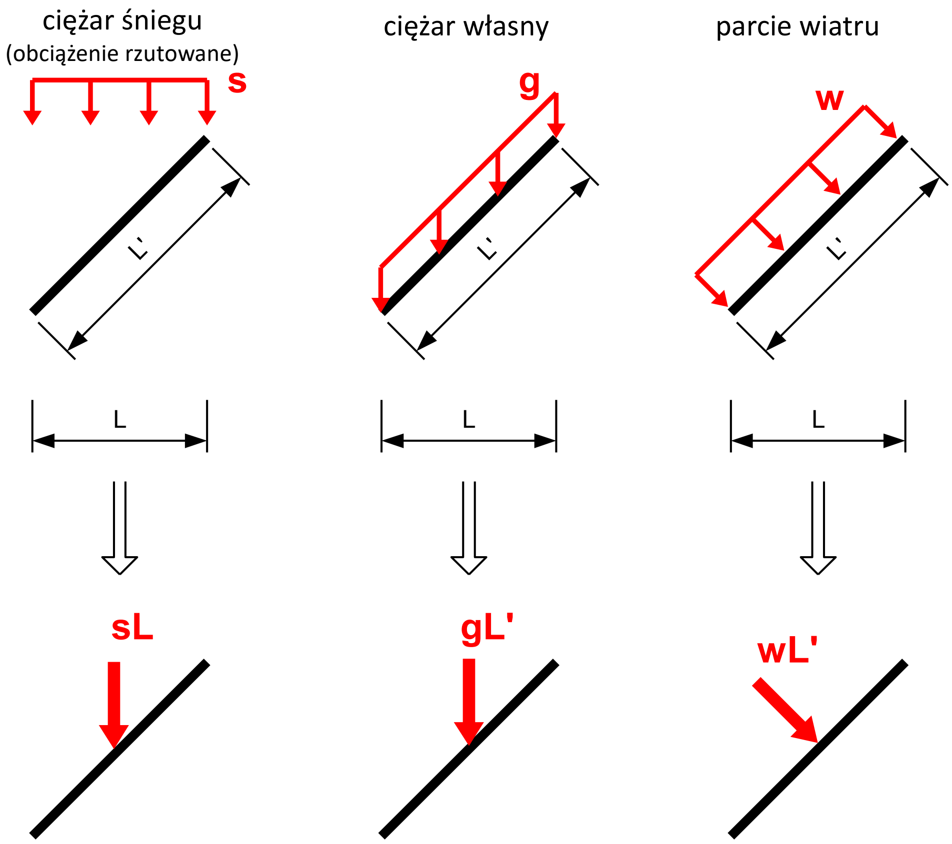
$$\Sigma Y = 0: \quad V_A + V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = -18}$$

ZADANIE 19
Wyznacz reakcje podporowe.



ROZWIĄZANIE:

W przypadku obciążenia ciągłego na pręt ukośny wyróżniamy trzy szczególne sytuacje:



Różnią się one obszarem, na którym obciążenie jest przyłożone, oraz kierunkiem działania. Śnieg i ciężar własny działają pionowo – wiatr działa prostopadle do elementu (parcie lub ssanie). Ciężar własny i wiatr określa się poprzez podanie gęstości obciążenia na długości elementu – w przypadku śniegu podaje się gęstość obciążenia odniesioną nie do wymiarów samego elementu, ale do wymiarów jego rzutu na płaszczyznę prostopadłą do kierunku działania obciążenia (dlatego nazywane jest obciążeniem rzutowanym).

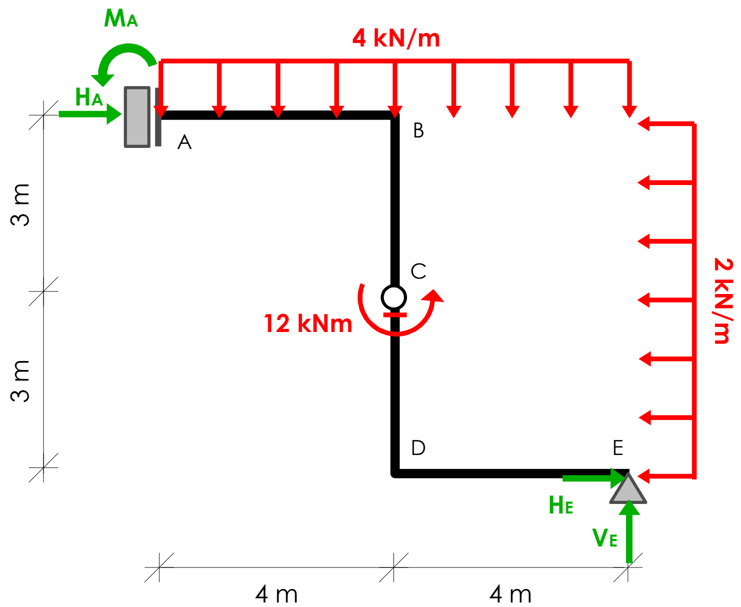
$$\Sigma M_C = 0: \quad -V_A \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 8 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B^{\leftarrow} = 0: \quad -V_A \cdot 4 + H_A \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 4 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - H_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_C = 4 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = : \quad V_A + V_C - 2 \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = 8 \text{ kN}}$$

ZADANIE 20
Wyznacz reakcje podporowe.



ROZWIĄZANIE:

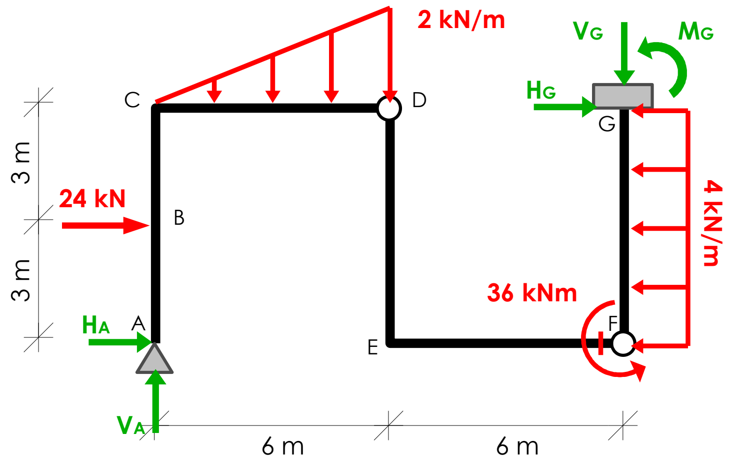
$$\Sigma Y = 0: \quad -4 \cdot 8 + V_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 32 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_C^{\downarrow} = 0: \quad 12 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + H_E \cdot 3 + V_E \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = -33 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - 2 \cdot 6 + H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 45 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = : \quad +M_A - H_A \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 94 \text{ kNm}}$$

ZADANIE 21
Wyznacz reakcje podporowe .



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma M_F^{\leftarrow} = 0: \quad -V_A \cdot 12 - 24 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 1 \text{ kN}}$$

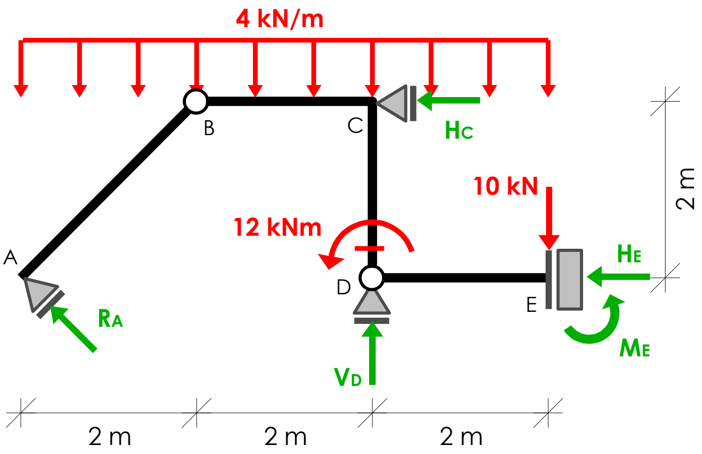
$$\Sigma M_D^{\leftarrow} = 0: \quad -V_A \cdot 6 + H_A \cdot 6 + 24 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = -13 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + 24 - 4 \cdot 6 + H_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = 13 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = : \quad V_A - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 - V_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_G = -5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_F^{\uparrow} = 0: \quad +M_G - H_G \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_G = 6 \text{ kNm}}$$

ZADANIE 22
Wyznacz reakcje podporowe .



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma M_D^{\rightarrow} = 0: \quad -10\cdot 2 - 4\cdot 2\cdot 1 + M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_E = 28 \text{ kNm}}$$

$$\Sigma M_B^{\leftarrow} = 0: \quad -\frac{R_A}{\sqrt{2}}\cdot 2 - \frac{R_A}{\sqrt{2}}\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_A = 2\sqrt{2} \text{ kN}}$$

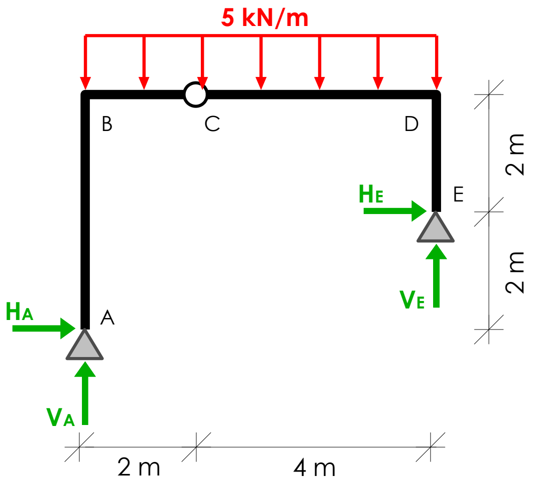
$$\Sigma Y = 0: \quad \frac{R_A}{\sqrt{2}} + V_D - 4\cdot 6 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_D = 32 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_D^{\uparrow} =: \quad +12 + H_C\cdot 2 - \frac{R_A}{\sqrt{2}}\cdot 4 + 4\cdot 4\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_C = -18 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad -\frac{R_A}{\sqrt{2}} - H_C - H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = 16 \text{ kN}}$$

ZADANIE 23

Wyznacz reakcje podporowe .



ROZWIĄZANIE:

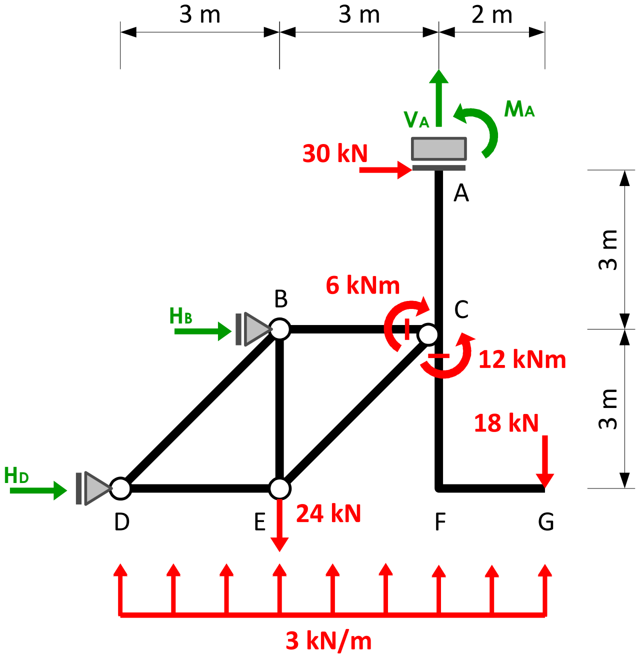
$$\begin{cases} \Sigma M_E = 0 \\ \Sigma M_C^{\leftarrow} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +H_A \cdot 2 - V_A \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \\ +H_A \cdot 4 - V_A \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} H_A = 6 \text{ kN} \\ V_A = 17 \text{ kN} \end{cases}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = -6 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A + V_E - 5 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 13 \text{ kN}}$$

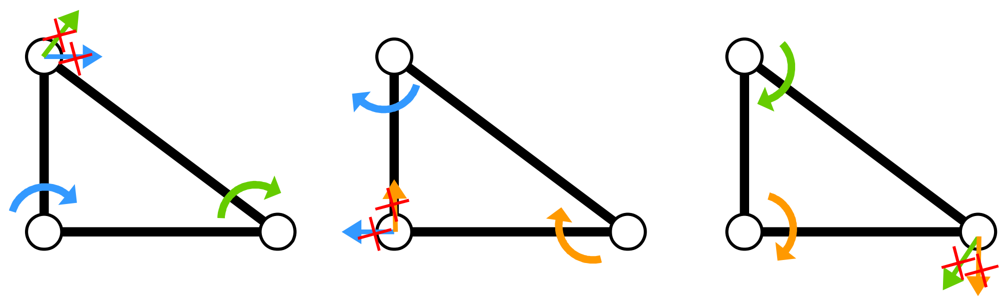
ZADANIE 24

Wyznacz reakcje podporowe w układzie jak na rysunku korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Nie każdy przegub, jaki pojawia się w konstrukcji, daje nam możliwość zapisania dodatkowych równań równowagi. Wiemy bowiem, że dowolne trzy tarcze sztywne (pręty, ramy, łuki, kratownice, elementy powierzchniowe), które połączone są trzema niewspółliniowymi przegubami, tworzą jedną tarczę sztywną. Tym samym nie pełnią już funkcji przegubu, ponieważ każdy z elementów schodzących się w tym przegubie nie ma możliwości obrotu względem pozostałych – wszystkie obroty wzajemnie się wykluczają. W szczególności trzy pręty połączone przegubami nieleżącymi na jednej prostej, tworzą jedną tarczę sztywną.



Jeśli do tej tarczy dołączymy za pomocą przegubów dodatkowe dwie inne tarcze połączone przegubami, to – o ile przeguby nie są na jednej prostej – razem będą stanowić jedną tarczę a żaden z przegubów nie będzie umożliwiać obrotu. To dlatego dowolna kratownica zbudowana z pól trójkątnych traktowana jest jako jedna tarcza, w której nie ma przegubów umożliwiających obrót.

W naszym przykładzie taką tarczę stanowi kratownica DECB. Przeguby w D, E i B nie umożliwiają obrotu. Ale przegub C z jedne strony należy do kratownicy (i tam nie pełni funkcji przegubu), z drugiej zaś łączy ją z ramą AFG. Jest zatem przegubem pojedynczym, bo łączą się w nim dwie tarcze. Pomyłką byłoby uważanie go za przegub podwójny tylko z tego powodu, że schodzą się tam trzy pręty. W rzeczywistości pręty BC i EC nie mogą się względem siebie obracać, bo wchodzą w skład jednej tarczy sztywnej.

$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0: \quad 12 + M_A - 30\cdot 3 - 18\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 108 \text{ kNm}}$$

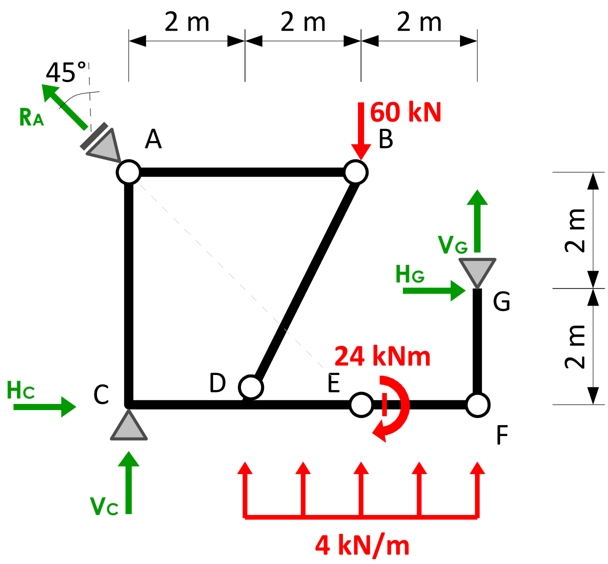
$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 18 - 24 + 3\cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 18 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_C^{\leftarrow} = 0: \quad -6 + 24\cdot 3 + H_D\cdot 3 - 3\cdot 6\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_D = -4 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_D + H_B + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_B = -26 \text{ kN}}$$

ZADANIE 25

Wyznacz reakcje podporowe w układzie jak na rysunku korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Tutaj mamy do czynienia jedynie z trzema tarczami (ramą ABCDE i prętami EF i FG) połączonymi tylko dwoma czynnymi przegubami (E i F)

$$\Sigma M_F^{\uparrow} = 0: \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_G = 0 \text{ kN}}$$

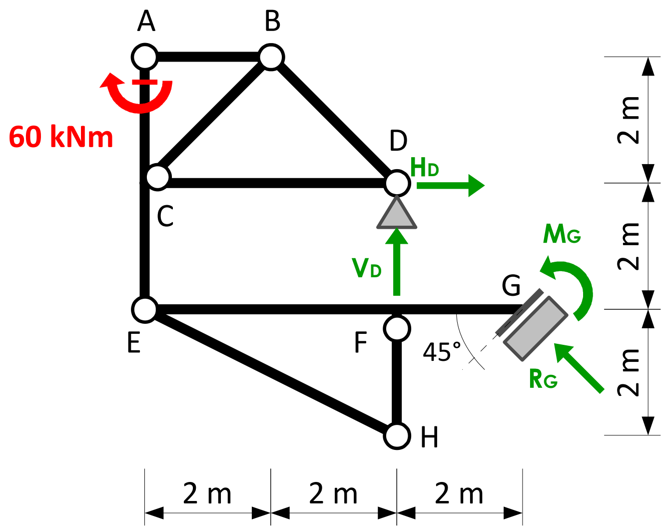
$$\Sigma M_E^{\rightarrow} = 0: \quad -24 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - H_G \cdot 2 + V_G \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_G = 8 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_E^{\leftarrow} = 0: \quad -4 \cdot 2 \cdot 1 - V_C \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = -2 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_C + V_G - 60 + 4 \cdot 4 + \frac{R_A}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_A = 38\sqrt{2} \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_C + H_G - \frac{R_A}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_C = 38 \text{ kN}}$$

ZADANIE 26
Wyznacz reakcje podporowe w układzie jak na rysunku korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Powyższa konstrukcja składa się tylko z dwóch tarcz połączonych w przegubie E. Tylko ten przegub umożliwia wzajemny obrót schodzących się w nim elementów.

$$\Sigma M_D = 0: \; -60 + M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_G = 60 \text{ kNm}}$$

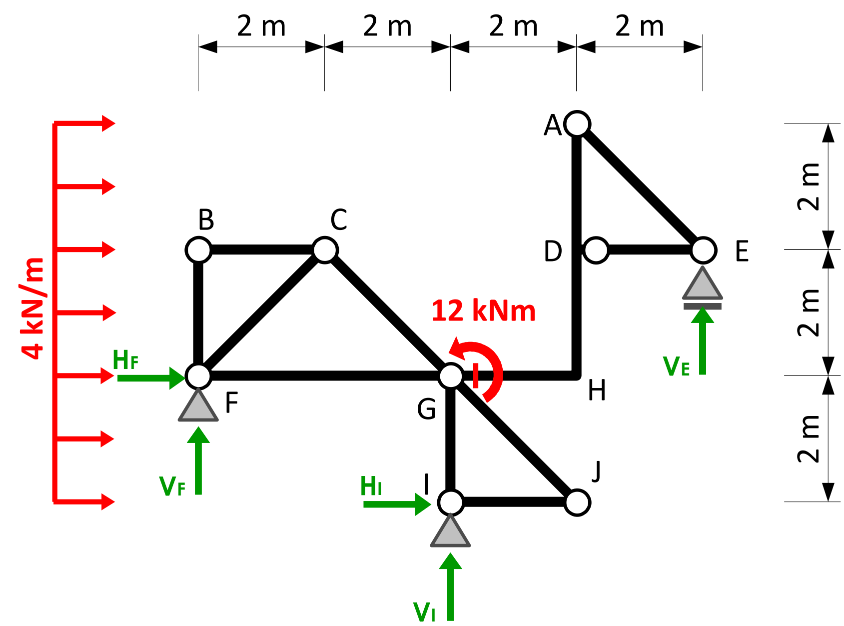
$$\Sigma M_E^{\rightarrow} = 0: \; M_G + \frac{R_G}{\sqrt{2}} \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_G = -10\sqrt{2} \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \; V_D + \frac{R_G}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_D = 10 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \; H_D - \frac{R_G}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_D = -10 \text{ kN}}$$

ZADANIE 27

Wyznacz reakcje podporowe w układzie jak na rysunku korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Powyższa konstrukcja składa się z trzech tarcz schodzących się w jednym przegubie podwójnym w punkcie G – pozostałe przeguby nie umożliwiają wzajemnych obrotów schodzących się w nim elementów.

$$\Sigma M_G^{\downarrow} = 0: \quad H_I \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_I = -4 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad 4 \cdot 6 + H_F + H_I = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_F = -20 \text{ kN}}$$

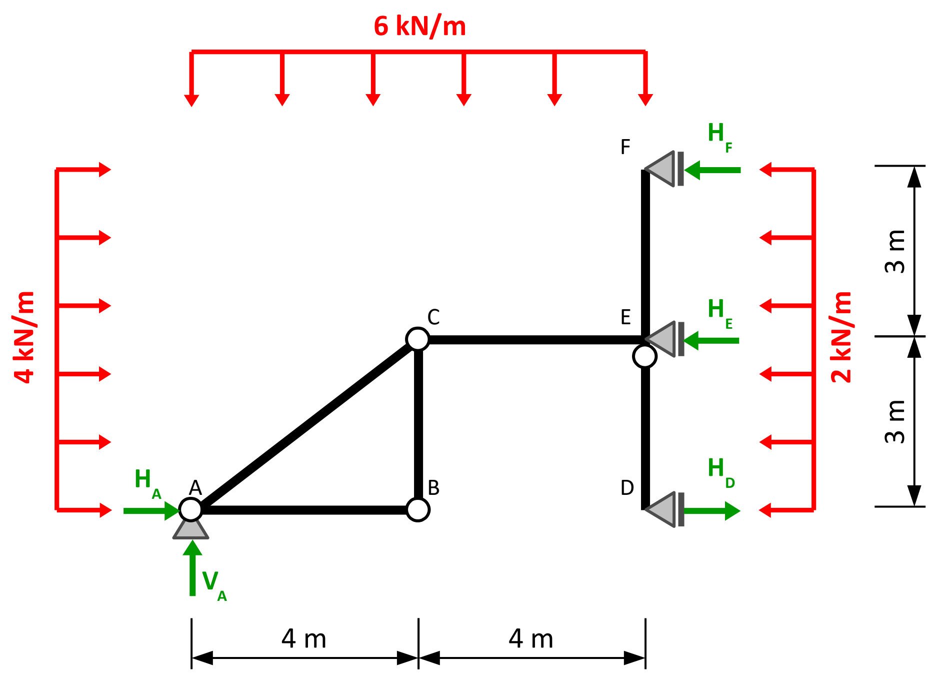
$$\Sigma M^{\leftarrow} = 0: \quad -V_F \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_F = -2 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M^{\rightarrow} = 0: \quad 12 + V_E \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 3 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_F + V_I + V_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_I = -1 \text{ kN}}$$

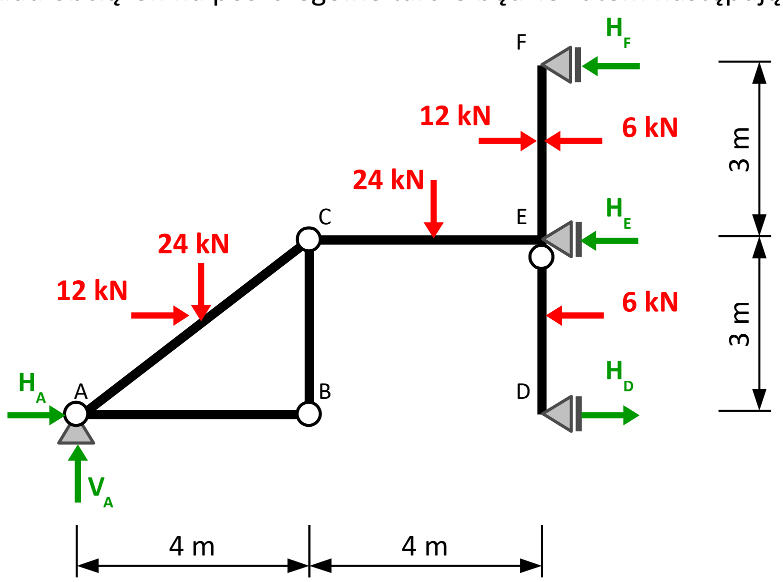
ZADANIE 28

Wyznacz reakcje podporowe korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Powyższy układ konstrukcyjny składa się z trzech tarcz (kratownica ABC, rama CEF i pręt DE) połączonych dwoma przegubami pojedynczymi (C i E). Każde z obciążeń ciągłych działa na więcej niż jedną tarczę. Należy przy tym pamiętać, że umowa dotycząca zapisu obciążeń jest taka, że obciążenie ciągłe (ew. rzutowane) działa na pierwszy pręt, jaki napotyka na swojej drodze, a na dalsze już nie. Rozkład obciążeń na poszczególne tarcze będzie zatem następujący:



Wyznaczamy reakcje podporowe:

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 24 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 48 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_E^{\downarrow} = 0: \quad H_D \cdot 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_D = 3 \text{ kN}}$$

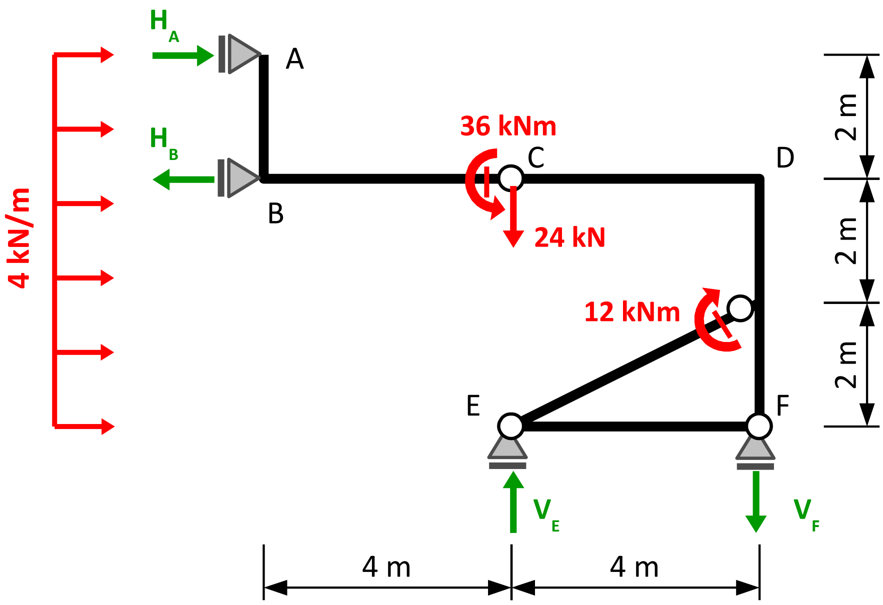
$$\Sigma M_C^{\leftarrow} = 0: \quad 24 \cdot 2 + 12 \cdot 1{,}5 + H_A \cdot 3 - V_A \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 42 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0: \quad -24 \cdot 2 - 12 \cdot 1{,}5 + 6 \cdot 1{,}5 - 6 \cdot 1{,}5 + H_D \cdot 3 + H_F \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_F = 19 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + H_D - H_E - H_F + 24 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = 38 \text{ kN}}$$

ZADANIE 29

Wyznacz reakcje podporowe korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma M_C^{\leftarrow} = 0: \quad -4 \cdot 2 \cdot 1 + 36 - H_A \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 14 \text{ kN}}$$

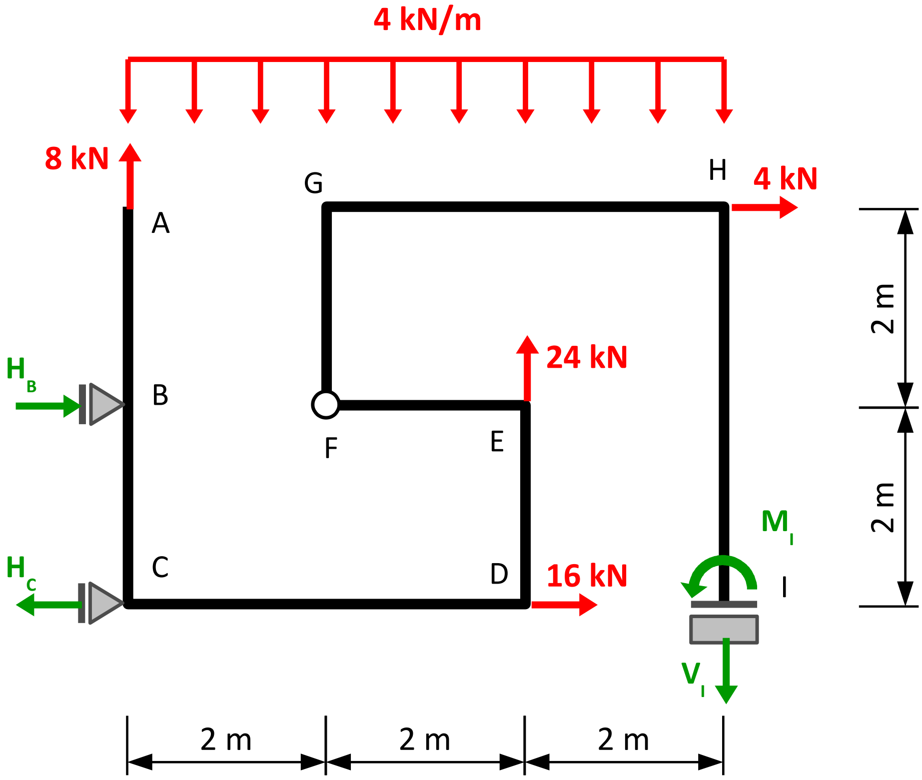
$$\Sigma X = 0: \quad H_A - H_B + 4 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_B = 38 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0: \quad 4 \cdot 4 \cdot 2 - 12 - V_F \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_F = 5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_E - V_F - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 29 \text{ kN}}$$

ZADANIE 30

Wyznacz reakcje podporowe korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

$$\Sigma Y = 0: \ \ 8+24-4\cdot 6 - V_I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_I = 8 \text{ kN}}$$

Zapisując sumę momentów z jednej strony przegubu należy uważać, żeby nie traktować tego wyrażenia naiwnie. Tak naprawdę zapisujemy „sumę momentów od obciążeń przyłożonych do tej części konstrukcji, która łączy się z przegubem z jednej strony”. To oznacza, że zapisując np $\Sigma M_F^{\rightarrow}$ uwzględniać będziemy całe obciążenie przyłożone do ramy FEDCA, czyli m.in. cały układ obciążeń, który znajduje się po lewej stronie przegubu F:

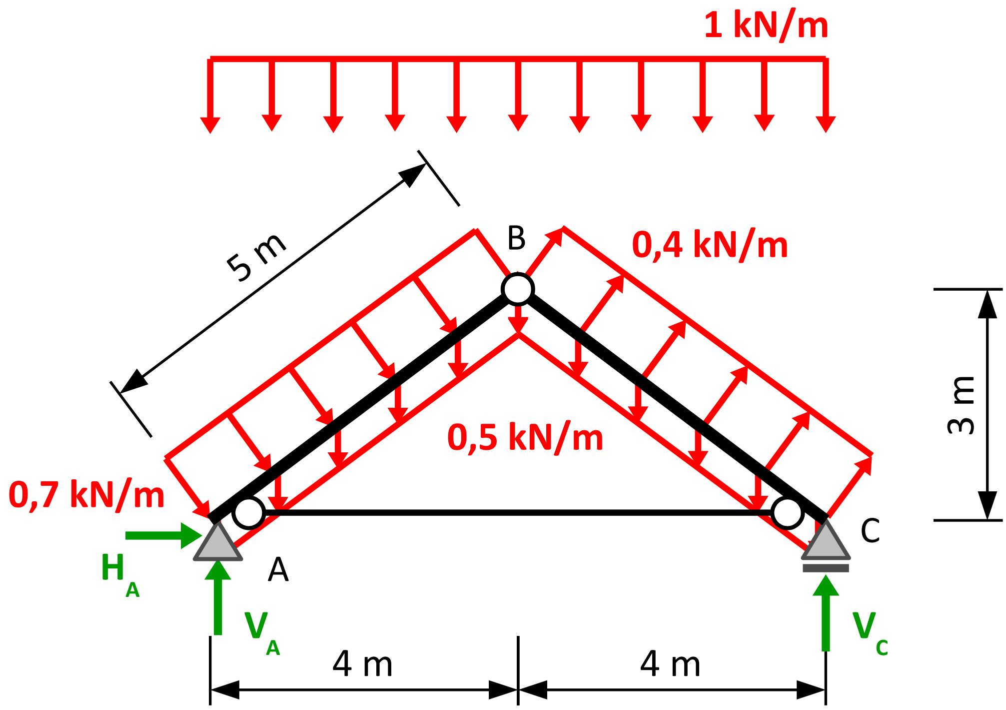
$$\Sigma M_F^{\rightarrow} = 0: \ \ 24\cdot 2 + 16\cdot 2 - H_c\cdot 2 - 8\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_C = 36 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \ \ H_B - H_C + 16 + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_B = 16 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_F^{\uparrow} = 0: \ \ -4\cdot 4\cdot 2 - 4\cdot 2 + M_I - V_I\cdot 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M_I = 72 \text{ kNm}}$$

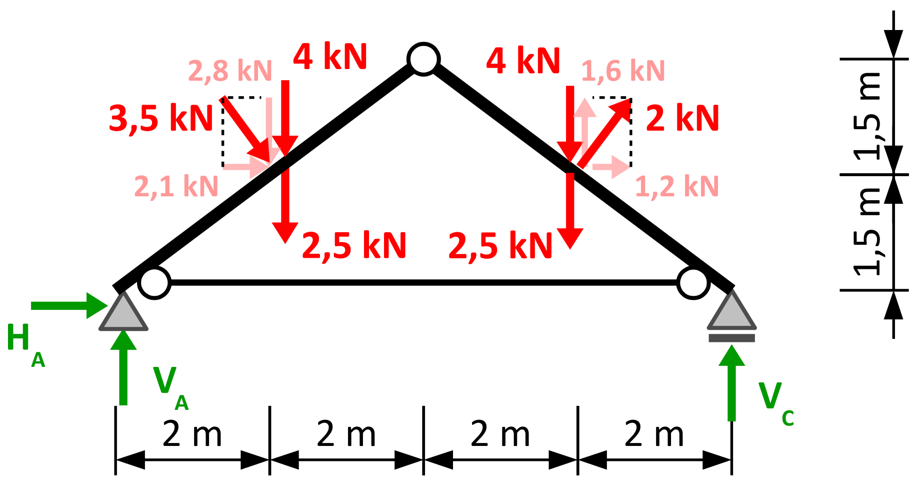
ZADANIE 31

Wyznacz reakcje podporowe oraz siłę w ściągu AC korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Powyższy schemat odpowiada w przybliżeniu wiązarowi dachowemu obciążonego śniegiem (obciążenie rzutowane z góry), parciem wiatru na połać nawietrzną, ssaniem wiatru na połaci zawietrznej oraz ciężarem własnym konstrukcji i warstw pokrycia. Na początku uprościmy schemat obciążenia poprzez zastąpienie obciążeń ciągłych ich wypadkowymi :



Wyznaczamy reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: \; 2{,}1 + 1{,}2 + H_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = -3{,}3 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0: \; -2{,}8 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 2{,}5 \cdot 2 - 2{,}1 \cdot 1{,}5 - 2{,}5 \cdot 6 - 4 \cdot 6 + 1{,}6 \cdot 6 - 1{,}2 \cdot 1{,}5 + V_C \cdot 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_C \approx 6{,}619 \text{ kN}}$$

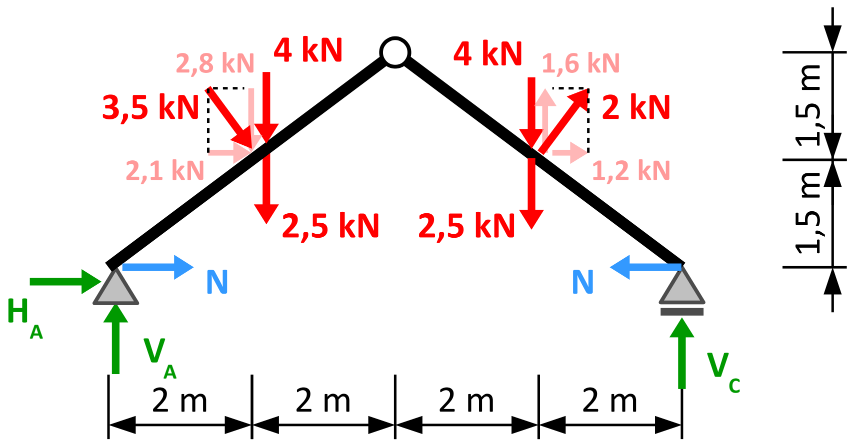
$$\Sigma Y = 0: \; V_A - 2{,}8 - 2{,}5 - 4 - 4 - 2{,}5 + 1{,}6 + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A \approx 7{,}581 \text{ kN}}$$

Ściąg jest elementem konstrukcyjnym służącym do przenoszenia sił rozporu – poziomych sił wynikających z obciążenia pionowego. Siły rozporu przenoszone są ostatecznie przez podpory. Można zredukować ich wielkość poprzez zwiększenie sztywności konstrukcji na odkształcenia poziome – wtedy siły przekazywany na podpory są zmniejszane kosztem dodatkowego obciążenia elementu, jakim jest ściąg.

Ściąg w rzeczywistych konstrukcjach jest belką, cienkim metalowym prętem lub nawet wiotkim metalowym cięgnem – w tym ostatnim przypadku ściąg może przenosić jedynie siłę rozciągającą. Z punktu widzenia liniowej mechaniki, ściąg modelować będziemy prętem:

- **prostym,**
- **zakończonym przegubami,**
- **nieobciążonym na swojej długości**

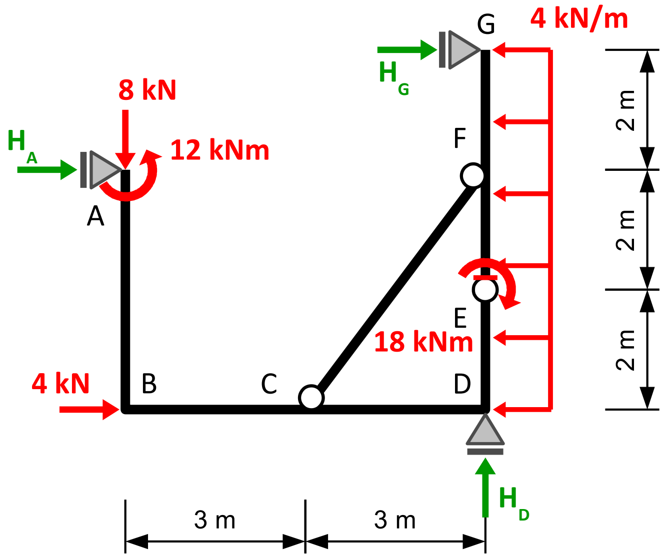
Taki pręt nazywać będziemy **prętem kratowym** – z takich właśnie elementów konstruuje się kratownice. Dopuszczalne są jedynie obciążenia węzłów (początku i końca) i to jedynie siłą skupioną (moment skupiony nie może być przyłożony w przegubie, więc jest w istocie obciążeniem na długości pręta). Z zależności różniczkowych, jakie wiążą ze sobą siły przekrojowe i obciążenie zewnętrzne, można pokazać, że pręt kratowy podlega jedynie działaniu siły osiowej, tj. rozciąganiu / ściskaniu. Nie występuje w nim ścinanie (siły poprzeczne) i zginanie (momenty zginające). Oznacza to, że jego interakcja z pozostałą częścią konstrukcji może być reprezentowana jedynie przez pojedynczą siłę na kierunku osi ściągu:



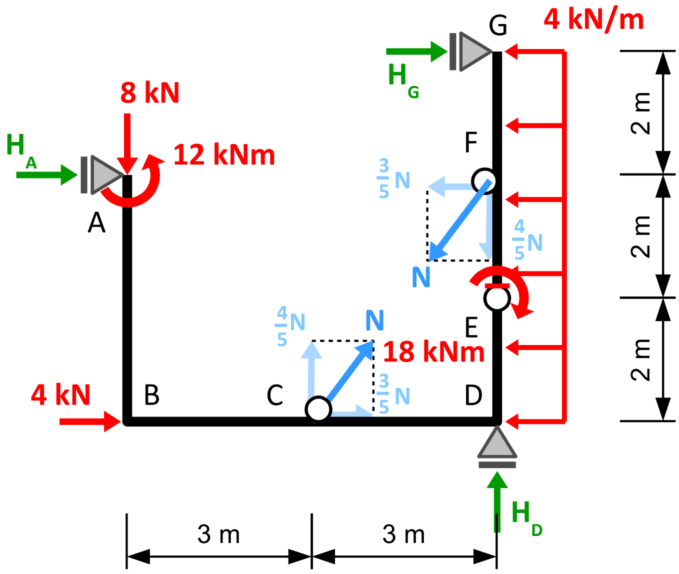
Zastąpienie ściągu siłą, która w nim występuje (tzw. „rozcięcie ściągu”) sprawia, że pojedyncza tarcza sztywna (w formie kratownicy) zamienia się w układ dwóch prętów połączonych przegubem. Daje nam to jedno dodatkowe równanie, dzięki któremu możemy wyznaczyć nieznaną siłę w ściągu:

$$\Sigma M_B^{\rightarrow} = 0: \;\; -2{,}5\cdot 2 - 4\cdot 2 + 1{,}6\cdot 2 + 1{,}2\cdot 1{,}5 - N\cdot 3 + V_C\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 6{,}159 \text{ kN}}$$

ZADANIE 32
Wyznacz siłę w ściągu CF.



ROZWIĄZANIE:



Rozetnijmy ściąg:

$$\Sigma Y = 0:\ \ -8 + V_D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_D = 8 \text{ kN}}$$

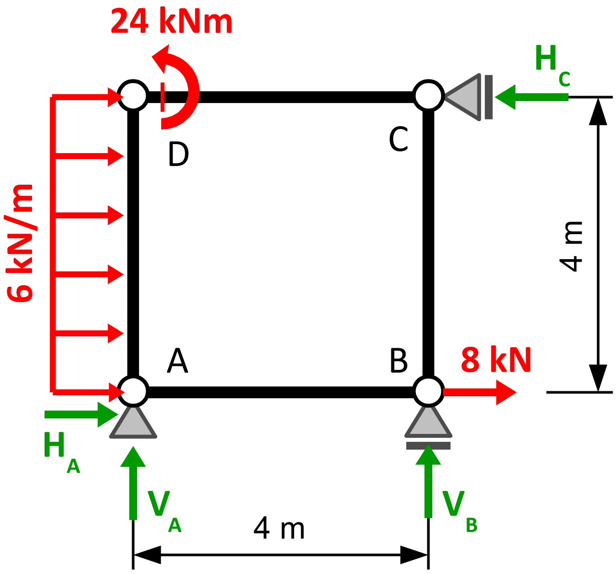
$$\Sigma M_A = 0:\ \ 12 + 4\cdot 4 - 18 + V_D\cdot 6 - H_G\cdot 2 - 4\cdot 6\cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_G = 17 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0:\ \ 4 + H_A - 4\cdot 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_A = 3 \text{ kN}}$$

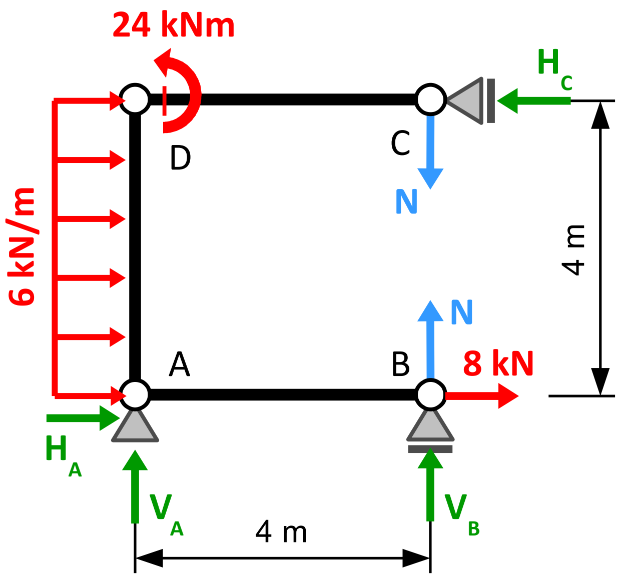
$$\Sigma M_E^{\uparrow} = 0:\ \ -18 + 4\cdot 4\cdot 2 - H_G\cdot 4 + \frac{3}{5}N\cdot 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{N = 45 \text{ kN}}$$

ZADANIE 33

Wyznacz reakcje podporowe korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:



Analiza kinematyczna układu wskazuje, że jest on układem statycznie wyznaczalnym i składa się z czterech tarcz sztywnych połączonych czterema przegubami – nie jest to pojedyncza tarcza sztywna. Każdy z tych przegubów umożliwia wzajemny obrót schodzących się w nim elementów. Układ pozostaje geometrycznie niezmienny z uwagi na obecność więzów reprezentowanych przez 4 reakcje podporowe. Do ich wyznaczenia potrzebne są dodatkowe równania poza trzema równaniami równowagi dla całego układu sił. Okazuje się jednak, że dla żadnego z przegubów nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jest „jednej" strony, ponieważ w układzie występuje „obieg zamknięty". Wyjściem z tej sytuacji jest rozcięcie konstrukcji tak, aby możliwe było wyróżnienie oddzielnych części konstrukcji spotykających się w przegubach. Rozcinać można w ogólności zarówno przez pręty kratowe jak i przeguby i pręty ramowe, ale w tych ostatnich przypadkach musimy liczyć się ze znacznym wzrostem liczby niewiadomych (2 siły w przegubie, 3 siły przekrojowe w pręcie ramowym). Przetnijmy zatem któryś z prętów kratowych – prętami takimi są pręty AB i BC. Wybierzmy pręt BC. Liczba niewiadomych zwiększa nam się o 1, ale dostajemy do dyspozycji dodatkowe dwa równania (po jednym na każdy „uwolniony przegub" – A i D). Ostatecznie otrzymujemy układ 5 równań na 5 niewiadomych.

$$\Sigma M_D^{\rightarrow} = 0: \;\; 24 - 4 \cdot N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{N = 6 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A^{\rightarrow} = 0: \;\; 4 V_B + 4 \cdot N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_B = -6 \text{ kN}}$$

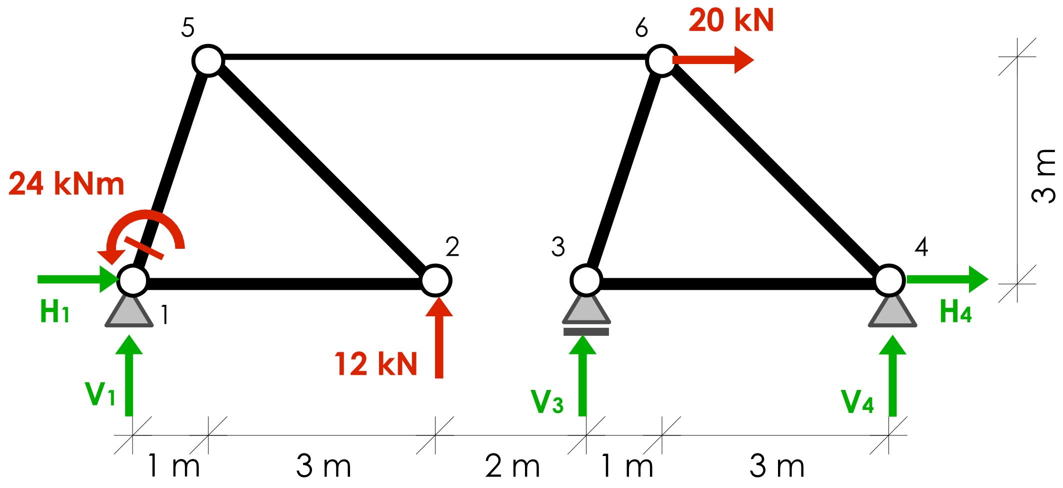
$$\Sigma Y = 0: \;\; V_A + V_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_A = 6 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A^{\uparrow} = 0: \;\; -6 \cdot 4 \cdot 2 + 24 - N \cdot 4 + H_C \cdot 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_C = 12 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \;\; H_A + 8 + 6 \cdot 4 - H_C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_A = -20 \text{ kN}}$$

ZADANIE 34

Wyznacz reakcje podporowe oraz siłę w ściągu 5-6.



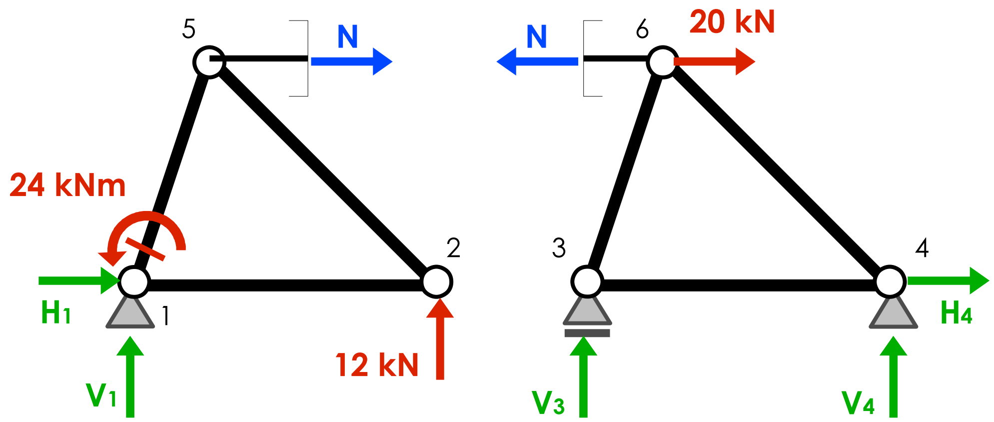
$$\begin{cases} \Sigma M_5^{dół}=0 \\ \Sigma M_6^{lewo}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +24+H_1\cdot 3-V_1\cdot 1+12\cdot 3=0 \\ +24+H_1\cdot 3-V_1\cdot 7-12\cdot 3=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} H_1=-24 \\ V_1=-12 \end{cases}}$$

$$\Sigma X=0:\quad H_1+20+H_4=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{H_4=4}$$

$$\Sigma M_4=0:\quad +24-V_1\cdot 10-12\cdot 6-V_3\cdot 4-20\cdot 3=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_3=3}$$

$$\Sigma Y=0:\quad V_1+12+V_3+V_4=0: \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_4=-3}$$

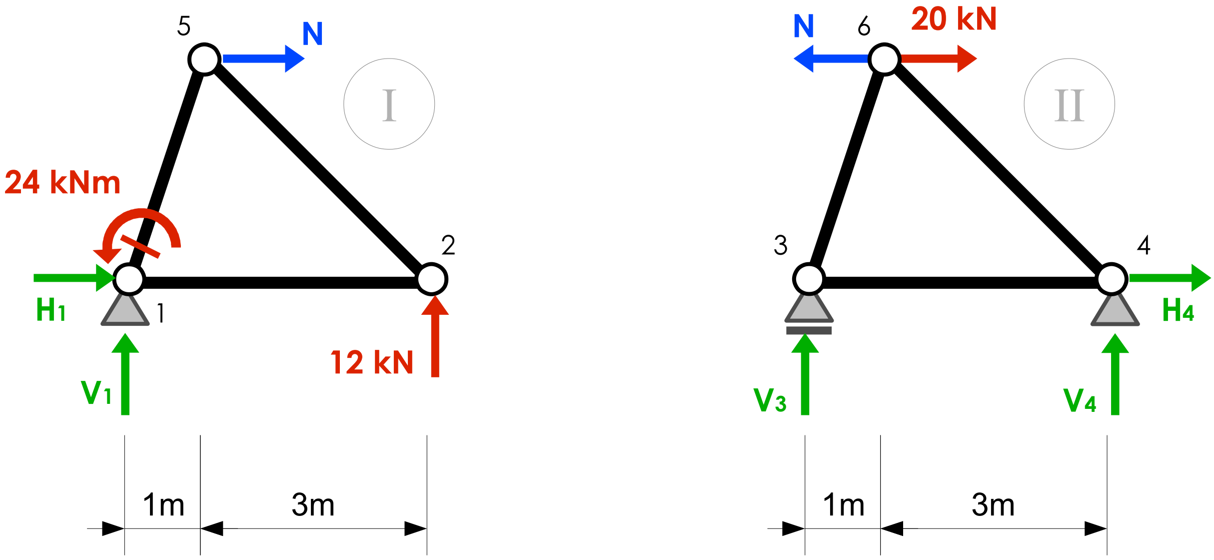
Celem wyznaczenia siły w ściągu rozcinamy konstrukcję przez ściąg:



Siłę wyznaczamy z równowagi sił przyłożonych do którejkolwiek części konstrukcji. Przykładowo, dla lewej części:

$$\Sigma X=0:\quad H_1+N=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{N=24}$$

Do wyznaczenia reakcji podporowych konieczne było rozwiązanie układu równań. Możemy uniknąć tego układu przyjmując inną taktykę rozwiązania. Już na początku możemy dokonać rozcięcia konstrukcji przez pręt 5-6. Otrzymujemy w ten sposób dwie niezależne części. Jeśli cały układ mechaniczny jest w równowadze, to również każda jego wyodrębniona część (z dodanymi siłami opisującymi jej wzajemne oddziaływanie z pozostałą częścią układu) musi być w równowadze – do każdej części z osoba stosują się zatem trzy podstawowe równania równowagi (i ewentualne równania dla przegubów). W naszym przypadku likwidacja pręta 5-6 sprawia, że przeguby w punktach 5 i 6 nie umożliwiają już żadnych obrotów (wchodzą w skład tarczy sztywnej), więc nie dają też żadnych dodatkowych równań równowagi.



Część I ma 3 niewiadome i 3 równania równowagi:

$$\Sigma Y^I = 0: \quad V_1 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_1 = -12\,\text{kN}}$$

$$\Sigma M_1^I = 0: \quad 24 + 12\cdot 4 - N\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 24\ \text{kN}}$$

$$\Sigma X^I = 0: \quad H_1 + N = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_1 = -24\,\text{kN}}$$

Wyznaczoną wartość siły osiowej z pręta 5-6 przykładamy do II części konstrukcji:

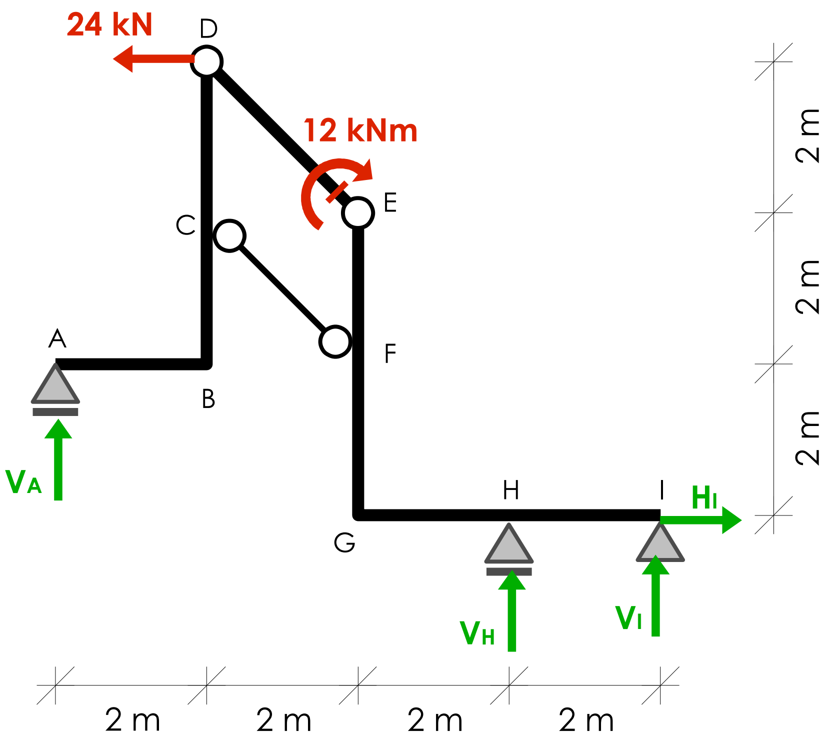
$$\Sigma X^{II} = 0: \quad H_4 + 20 - N = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_4 = 4\,\text{kN}}$$

$$\Sigma M_4^{II} = 0: \quad -V_3\cdot 4 - 20\cdot 3 + N\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_3 = 3\ \text{kN}}$$

$$\Sigma Y^{II} = 0: \quad V_3 + V_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_4 = -3\ \text{kN}}$$

ZADANIE 35

Wyznacz reakcje podporowe oraz siłę w ściągu C-F.

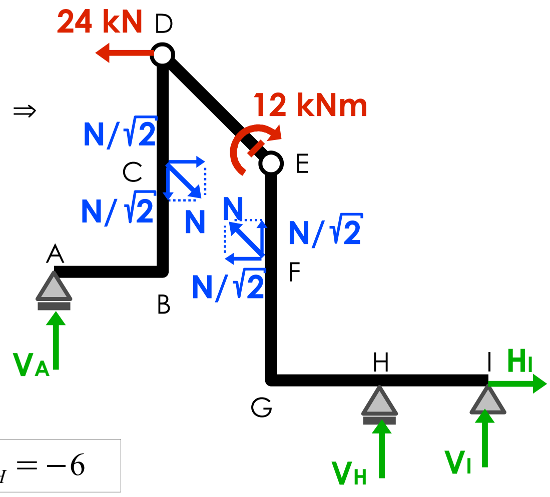


$$\Sigma X=0:\quad -24+H_I=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_I=24}$$

Aby uzyskać dodatkowe równania równowagi wynikające z zerowania się momentów sił z każdej strony przegubu pojedynczego, rozcinamy konstrukcję przez ściąg C-F:

$$\begin{cases} \Sigma M_D^{lewo}=0 \\ \Sigma M_E^{lewo}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\dfrac{N}{\sqrt{2}}\cdot 2-V_A\cdot 2=0 \\ -12+\dfrac{N}{\sqrt{2}}\cdot 2+24\cdot 2-V_A\cdot 4=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_A=18 \\ N=18\sqrt{2} \end{cases}}$$

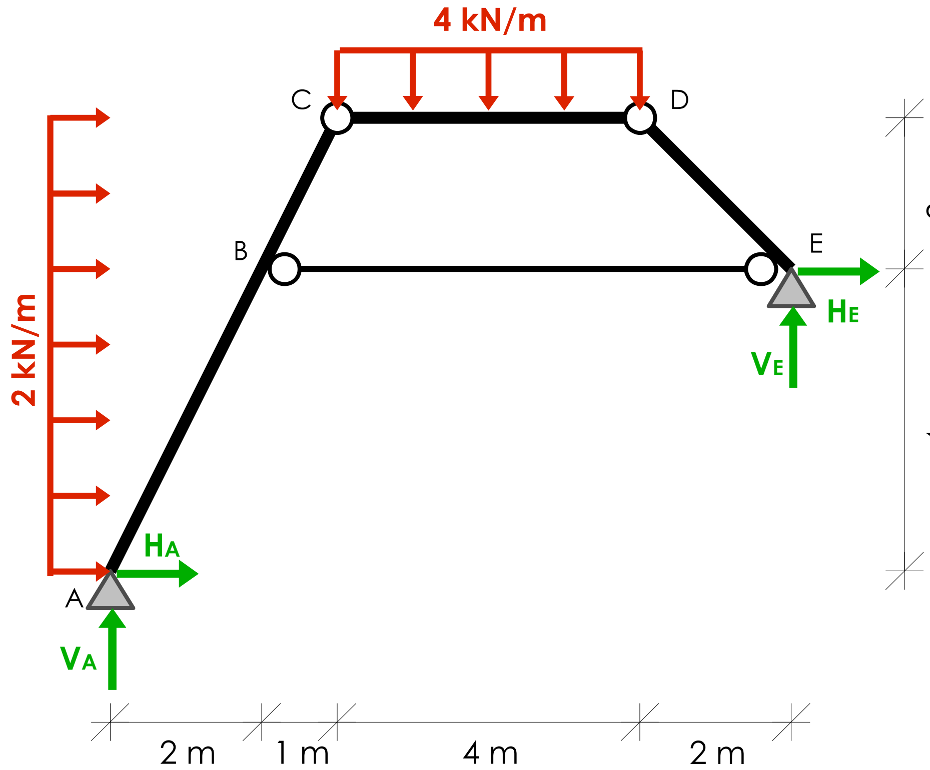


$$\Sigma M_I=0:\quad -V_H\cdot 2-12+24\cdot 6-V_A\cdot 8=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_H=-6}$$

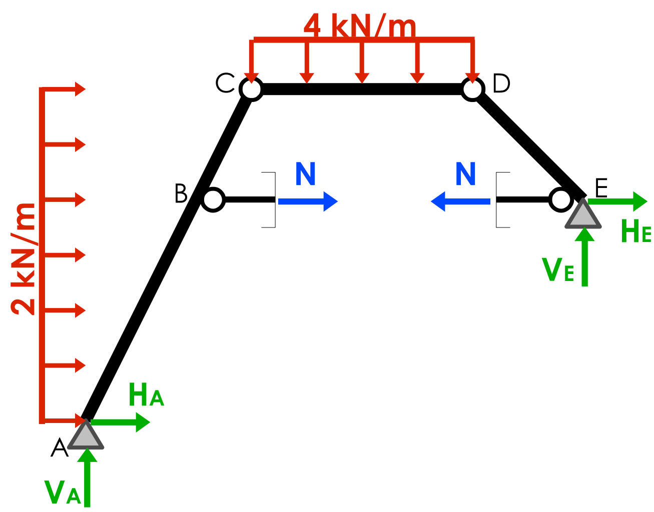
$$\Sigma Y=0:\quad V_A+V_H+V_I=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_I=-12}$$

ZADANIE 36

Wyznacz reakcje podporowe oraz siłę w ściągu B-E.



Aby uzyskać dodatkowe równania równowagi wynikające z zerowania się momentów sił z każdej strony przegubu pojedynczego, rozcinamy konstrukcję przez ściąg B-E:



$$\begin{cases} \Sigma M_D^{prawo}=0 \\ \Sigma M_C^{prawo}=0 \\ \Sigma M_A=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -N\cdot 2 + H_E\cdot 2 + V_E\cdot 2=0 \\ -N\cdot 2 + H_E\cdot 2 + V_E\cdot 6-4\cdot 4\cdot 2 = 0 \\ -H_E\cdot 4 + V_E\cdot 9 - 4\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot 6\cdot 3 = 0 \end{cases}$$

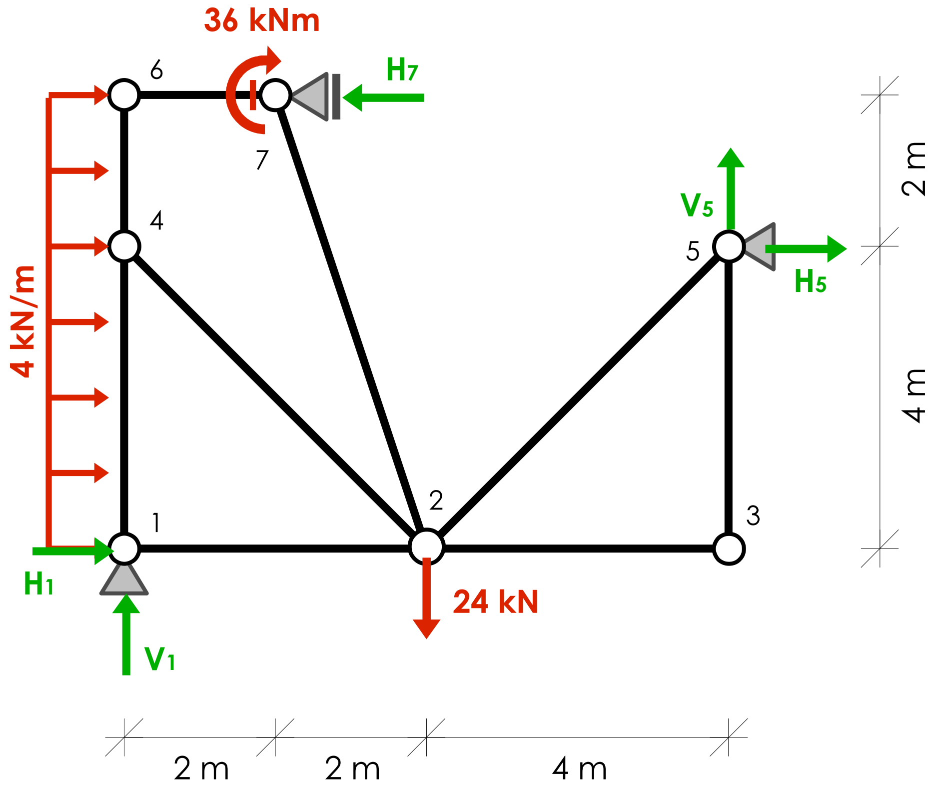
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_E=8 \\ H_E=-11 \\ N=-3 \end{cases}}$$

$$\Sigma X=0:\quad H_A + 2\cdot 6 + H_E = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{H_A=-1}$$

$$\Sigma Y=0:\quad V_A - 4\cdot 4 + V_E = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_A=8}$$

ZADANIE 37

Wyznacz reakcje podporowe.



Aby uzyskać dodatkowe równania równowagi wynikające z zerowania się momentów sił z każdej strony przegubu pojedynczego, rozcinamy konstrukcję przez ściąg 2-7:

$$\Sigma M_6^{prawo}=0:$$

$$-36-\frac{3N}{\sqrt{10}}\cdot 2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N=-6\sqrt{10}}$$

$$\Sigma M_4^{góra}=0:$$

$$-4\cdot 2\cdot 1-36-\frac{3N}{\sqrt{10}}\cdot 2-\frac{N}{\sqrt{10}}\cdot 2+H_7\cdot 2=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H_7=-2}$$

$$\Sigma M_2^{lewo}=0:$$

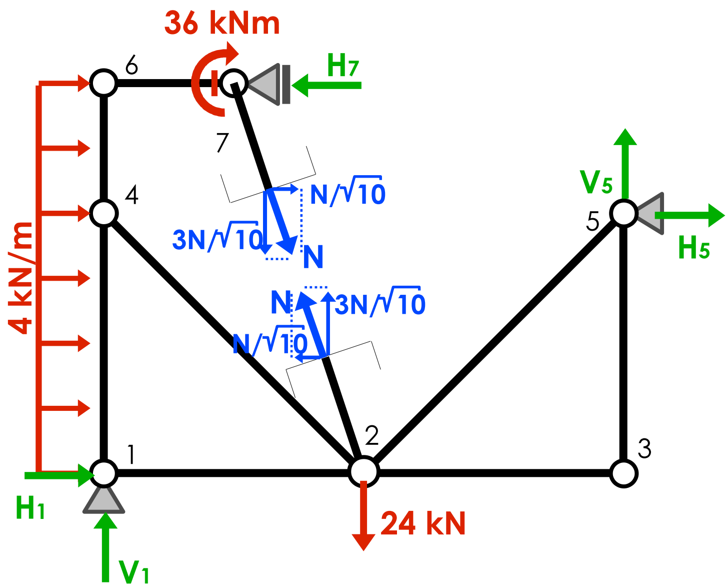
$$-V_1\cdot 4+H_7\cdot 6-36-4\cdot 6\cdot 3=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_1=-30}$$

$$\Sigma Y=0: \quad V_1-24+V_5=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_5=54}$$

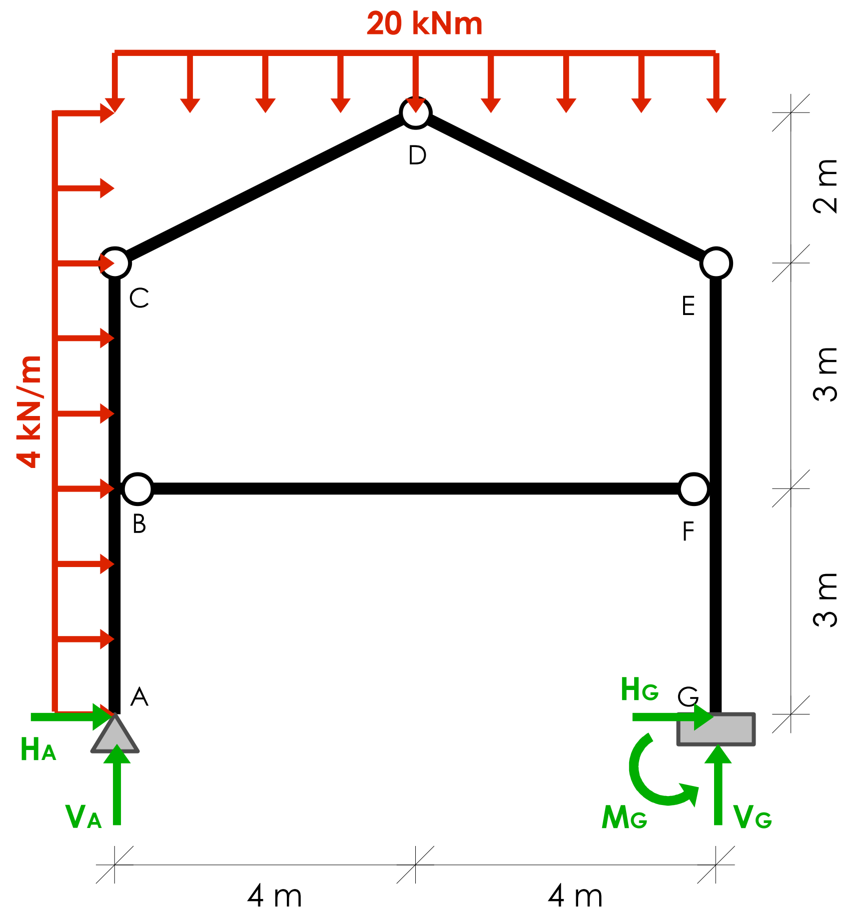
$$\Sigma M_2^{prawo}=0: \quad V_5\cdot 4-H_5\cdot 4=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_5=54}$$

$$\Sigma X=0: \quad -H_7+H_1+H_5+4\cdot 6=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_1=-80}$$



ZADANIE 38

Wyznacz reakcje podporowe.



Aby uzyskać dodatkowe równania równowagi wynikające z zerowania się momentów sił z każdej strony przegubu pojedynczego, rozcinamy konstrukcję przez ściąg B-F:

$$\begin{cases} \Sigma M_C^{dół}=0 \\ \Sigma M_D^{lewo}=0 \\ \Sigma M_E^{lewo}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

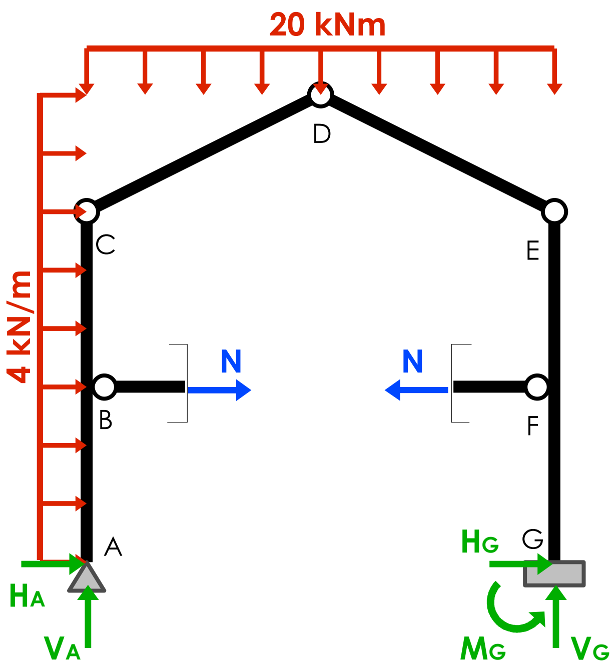
$$\Rightarrow \begin{cases} +4\cdot 6\cdot 3 + N\cdot 3 + H_A\cdot 6 = 0 \\ +4\cdot 8\cdot 4 + N\cdot 5 + H_A\cdot 8 - V_A\cdot 4 + 20\cdot 4\cdot 2 = 0 \\ +4\cdot 8\cdot 2 + N\cdot 3 + H_A\cdot 6 - V_A\cdot 8 + 20\cdot 8\cdot 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} H_A = -74 \\ V_A = 79 \\ N = 124 \end{cases}}$$

$$\Sigma X=0: \quad H_A + 4\cdot 8 + H_G = 0 \quad \Rightarrow \boxed{H_G = 42}$$

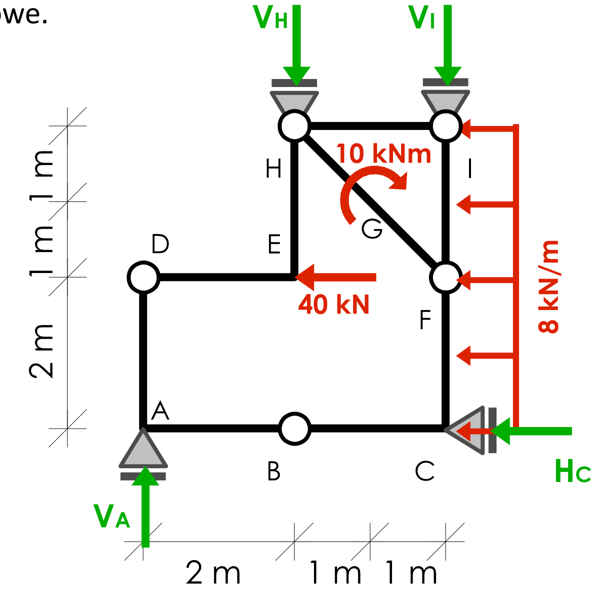
$$\Sigma Y=0: \quad V_A - 20\cdot 8 + V_G = 0 \quad \Rightarrow \boxed{V_G = 81}$$

$$\Sigma M_E^{dół}=0: \quad -N\cdot 3 + H_G\cdot 6 + M_G = 0 \quad \Rightarrow \boxed{M_G = 120}$$



ZADANIE 39

Wyznacz reakcje podporowe.



$$\Sigma X=0: \quad -40-8\cdot 4-H_C=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_C=-72}$$

Aby uzyskać dodatkowe równania równowagi wynikające z zerowania się momentów sił z każdej strony przegubu pojedynczego, rozcinamy konstrukcję przez przegub B:

$$\begin{cases}\Sigma M_D^{dół}=0\\ \Sigma M_F^{dół}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}+H_B\cdot 2-V_B\cdot 2=0\\ -H_B\cdot 2-V_B\cdot 2-H_C\cdot 2-8\cdot 2\cdot 1=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}H_B=32\\ V_B=32\end{cases}}$$

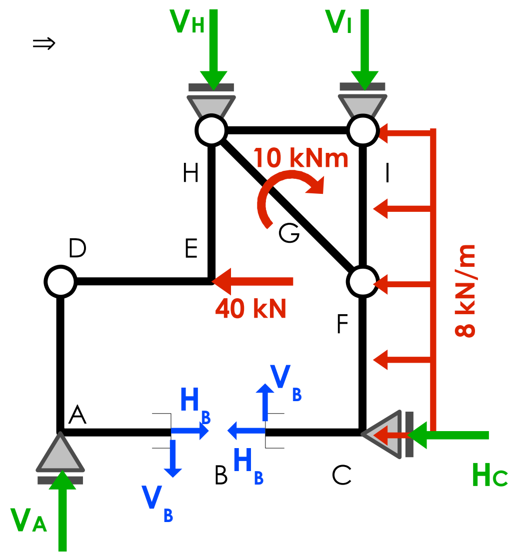
$$\Sigma M_H^{dół}=0: \quad +N\cdot 4-V_A\cdot 2-40\cdot 2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A=24}$$

$$\Sigma M_C=0:$$

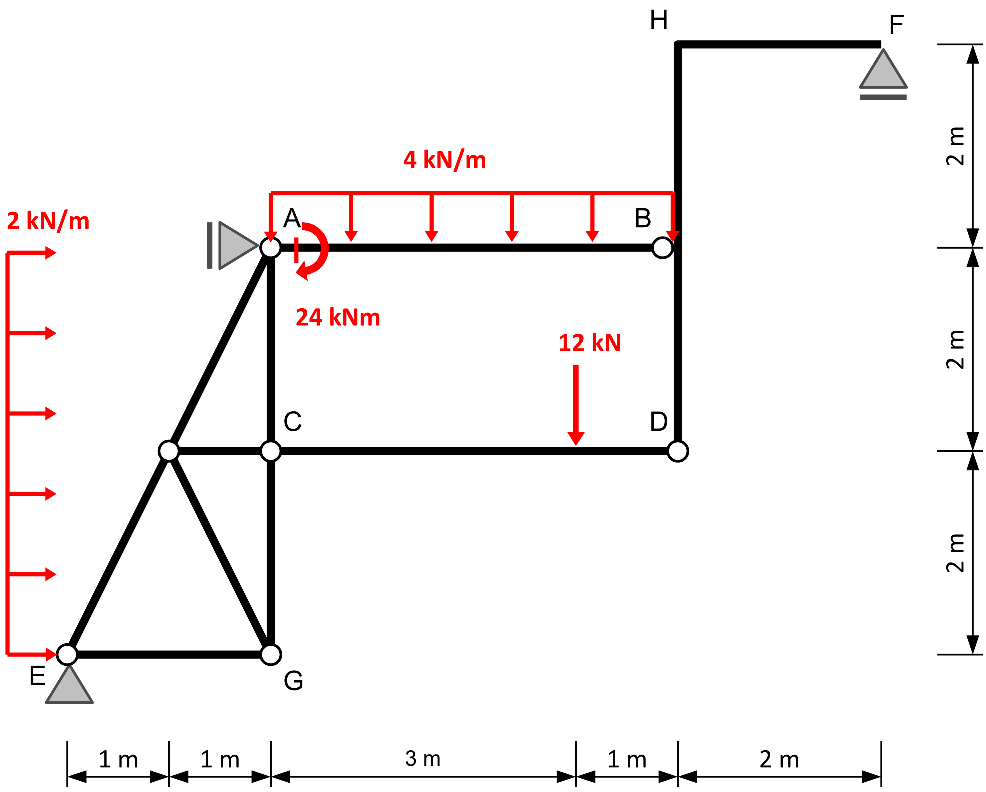
$$-V_A\cdot 4+40\cdot 2+8\cdot 4\cdot 2-10+V_H\cdot 2=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_H=-19}$$

$$\Sigma Y=0: \quad V_A-V_H-V_I=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_I=43}$$

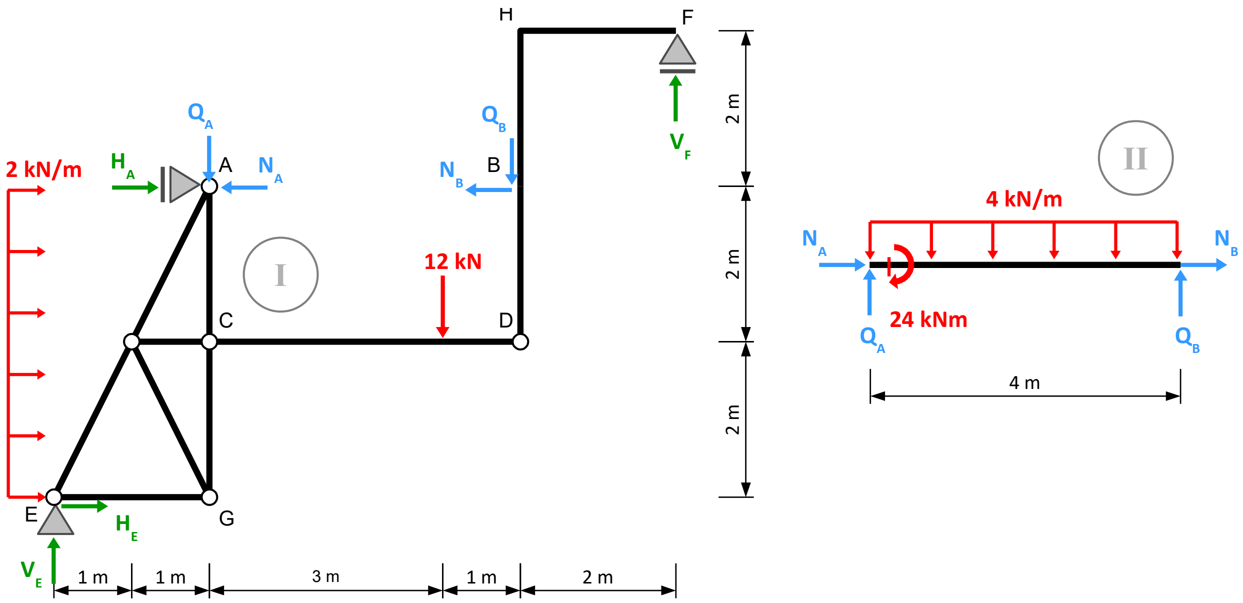


ZADANIE 40
Wyznacz reakcje podporowe oraz siły w przegubach A, B, C i D w układzie jak na rysunku, korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Możemy zauważyć, że układ konstrukcyjny złożony jest z czterech tarcz sztywnych – kratownica AEG, pręty obciążone poprzecznie AB i CD i rama DHF - połączonych czterema przegubami A, B, C, D i tworzących obieg zamknięty. Jest to układ statycznie wyznaczalny, zatem reakcje można w nim wyznaczyć z samych tylko równań równowagi. Aby móc zapisać równania równowagi jednostronnej dla przegubów, konieczne jest rozcięcie konstrukcji. W układzie nie ma prętów kratowych, które nie wchodzą w skład tarczy sztywnej, a cięcie przez pręty ramowe skutkuje dużą liczbą niewiadomych. Dokonując cięcia przez przeguby A i B, umożliwimy zapisanie równań równowagi dla przegubów C i D – analogicznie rozcinając przez C i D, otrzymamy dodatkowe równania dla przegubów A i B. Cięcia te można wykonać osobno lub jednocześnie, choć w tym drugim przypadku nie będziemy mieli już równań równowagi dla przegubów, ale równania równowagi dla czterech rozciętych części konstrukcji. W tym przykładzie zastosujmy kolejne cięcia. Zacznijmy od wycięcia pręta AB. Pręty obciążone poprzecznie, łączące części konstrukcji, nazywać będziemy niekiedy ryglami. Rozcinając przegub musimy uwzględnić siły interakcji między rozdzielanymi elementami – w przegubie jest to siła o nieznanej wartości i kierunku, dlatego zapiszemy ją jako układ dwóch składowych, pionowej i poziomej.



Równania równowagi dla układu II pozwalają nam wyznaczyć siłe poprzeczne w przegubach:

$$\Sigma M_A^{II} = 0: \quad -24 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + Q_B \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_B = 14 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y^{II} = 0: \quad -4 \cdot 4 + Q_A + Q_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_A = 2 \text{ kN}}$$

Ponadto, w przypadku rygla obciążonego wyłącznie poprzecznie do jego osi, mamy:

$$\Sigma X^{II} = 0: \boxed{N_A = -N_B}$$

Dla układu I możemy napisać:

$$\begin{cases} \Sigma M_C^{I,\rightarrow} = 0: \\ \Sigma M_D^{I,\uparrow} = 0: \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12 \cdot 3 + N_B \cdot 2 - Q_B \cdot 4 + V_F \cdot 6 = 0 \\ N_B \cdot 2 + V_F \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_F = 23 \text{ kN} \\ N_B = -23 \text{ kN} \end{cases}}$$

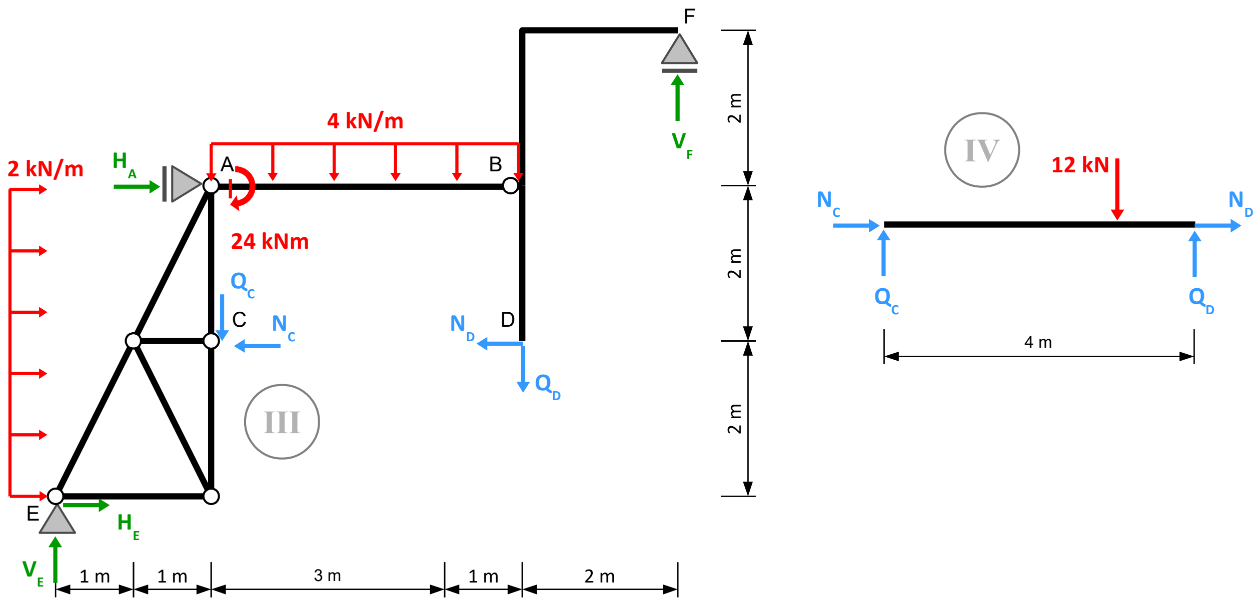
Z równania równowagi dla całości układu (bez wycięcia):

$$\Sigma Y = 0: \quad V_E + V_F - 12 - 4 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_E = 0: \quad -H_A \cdot 4 + V_F \cdot 8 - 12 \cdot 5 - 24 - 4 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + H_E + 2 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = -13 \text{ kN}}$$

Przy okazji wyznaczyliśmy siły w przegubach A i B. Aby wyznaczyć siły w przegubach C i D, wytnijmy teraz rygiel CD.



Z równań równowagi dla rygla:

$$\Sigma M_C^{IV} = 0: \quad -12\cdot 3 + Q_D\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_D = 9 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y^{IV} = 0: \quad Q_C + Q_D - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_C = 3 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X^{IV} = 0: \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_C = -N_D}$$

Z równań równowagi dla pozostałej części układu:

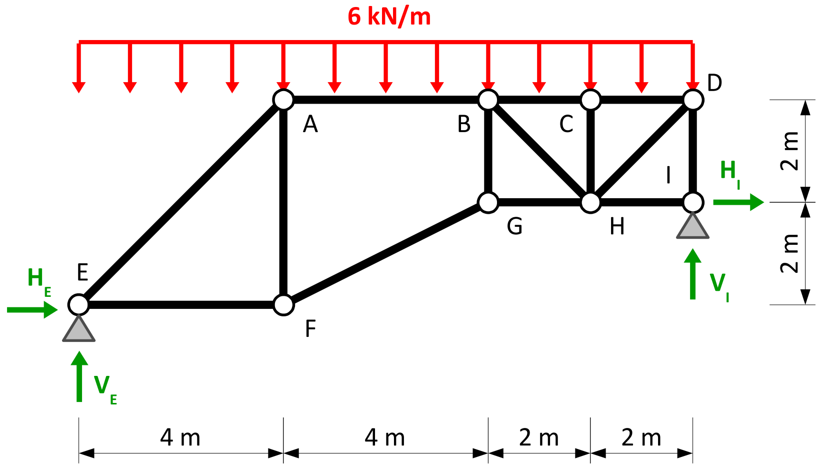
$$\Sigma M_B^{III,\rightarrow} = 0: \quad -N_D\cdot 2 + V_F\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_D = 23 \text{ kN}}$$

Ostatecznie

Reakcje:	Siły w przegubach:
$H_A = 5$ kN	$N_A = 23$ kN
$H_E = -13$ kN	$Q_A = 2$ kN
$V_E = 5$ kN	$N_B = -23$ kN
$V_F = 23$ kN	$Q_B = 14$ kN
	$N_C = -23$ kN
	$Q_C = 3$ kN
	$N_D = 23$ kN
	$Q_D = 9$ kN

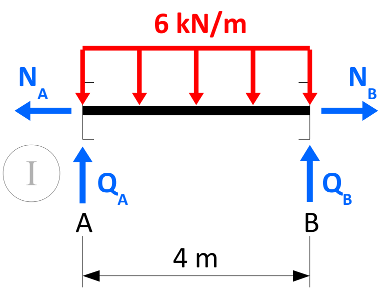
ZADANIE 41

Wyznacz reakcje podporowe oraz siłę osiową w prętach AB i FG w układzie jak na rysunku korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Aby uzyskać wymaganą liczbę równań równowagi możemy dokonać cięcia przez przeguby A, B, F oraz G. Pręt FG jest prętem kratowym – występuje w nim jedynie siła osiowa. Pręt AB jest prętem zginanym, obciążonym poprzecznie, zatem przeguby na jego końcach przenoszą również siłę poprzeczną. Wyznaczymy ją z równowagi pręta AB:

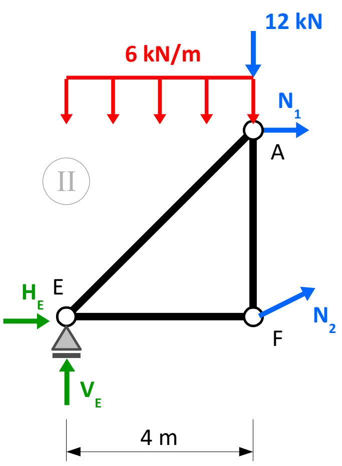


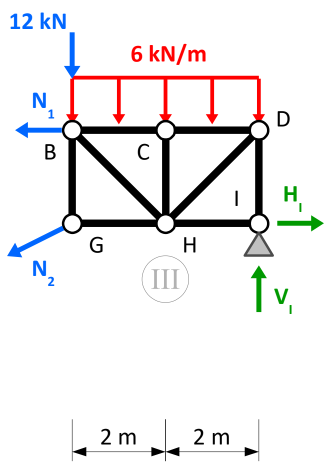
$$\Sigma X^{I} = 0: \quad \Rightarrow \quad N_A = N_B$$

$$\Sigma M_A^{I} = 0: \; Q_B \cdot 4 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_B = 12 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B^{I} = 0: \; -Q_A \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_A = 12 \text{ kN}}$$

Możemy zatem narysować:





Zapisując równanie sumy momentów w punkcie D dla prawej części konstrukcji otrzymujemy:

$$\Sigma M_D^{III} = 0: \quad 12\cdot 4 + 6\cdot 4\cdot 2 + H_I\cdot 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_I = -48 \text{ kN}}$$

Pozostałe równania możemy zapisać już dla całego (nierozciętego) układu:

$$\Sigma X = 0: \quad H_E + H_I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_E = 48 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_E = 0: \quad -6\cdot 12\cdot 6 + V_I\cdot 12 - H_I\cdot 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_I = 28 \text{ kN}}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_E + V_I - 6\cdot 12 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_E = 44 \text{ kN}}$$

Nieznane siły osiowe możemy wyznaczyć np. z równań równowagi dla lewej części konstrukcji:

$$\Sigma Y^{II}: \quad V_E + \frac{N_2}{\sqrt{5}} - 12 - 6\cdot 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{N_2 = -8\sqrt{5} \text{ kN}}$$

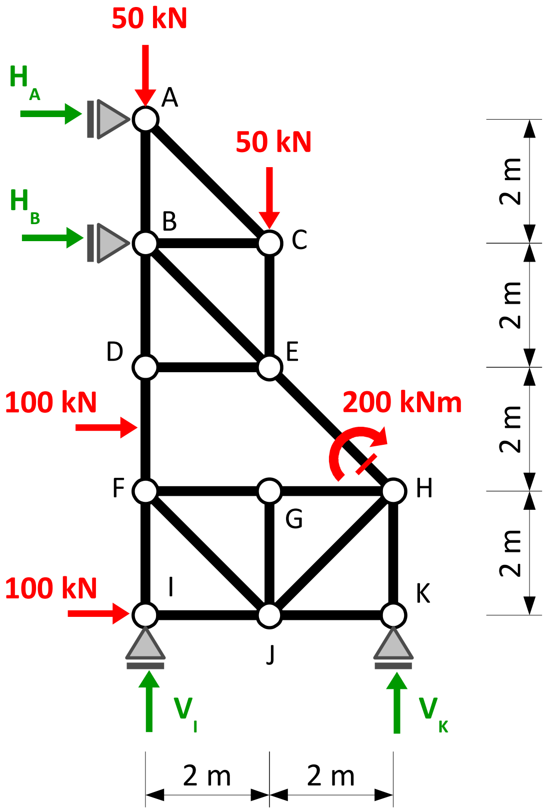
$$\Sigma X^{II}: \quad H_E + \frac{2}{\sqrt{5}} N_2 + N_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{N_1 = -32 \text{ kN}}$$

Sprawdzenia można dokonać wyznaczając sumę układu sił przyłożonego do prawej części konstrukcji:

$$\Sigma Y^{III} = -12 - 6\cdot 4 - \frac{N_2}{\sqrt{5}} + V_I = -12 - 24 + 8 + 28 = 0$$

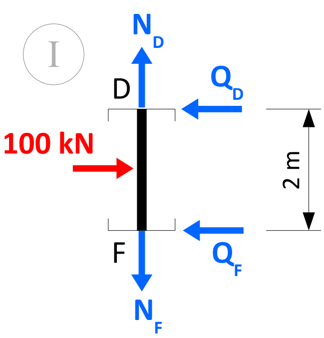
$$\Sigma X^{III} = -N_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} N_2 + H_I = 32 + 16 - 48 = 0$$

ZADANIE 42
Wyznacz reakcje podporowe oraz siłę osiową w prętach EF i EH w układzie jak na rysunku korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Aby uzyskać wymaganą liczbę równań równowagi możemy dokonać cięcia przez przeguby D, E, F oraz G. Pręty DF i EG obciążone są poprzecznie, zatem przeguby na ich końcach przenoszą zarówno siłę podłużną jak i siłę poprzeczną. Wartość sił poprzecznych możemy wyznaczyć z warunków równowagi dla tych prętów.

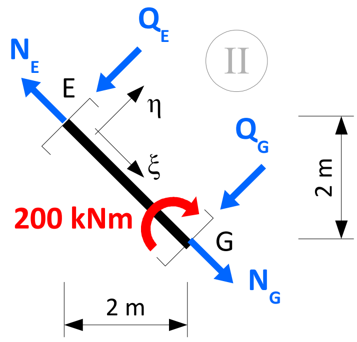


$$\Sigma Y^I = 0 \quad \Rightarrow \quad N_F = N_D$$

$$\Sigma M_D^I = 0: \; 100 \cdot 1 - Q_F \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_F = 50 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_F^I = 0: \; -100 \cdot 1 + Q_D \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_D = 50 \text{ kN}}$$

Dla prętów ukośnych wygodnie jest wprowadzić lokalny układ współrzędnych, którego jedna z osi jest równoległa do osi pręta.

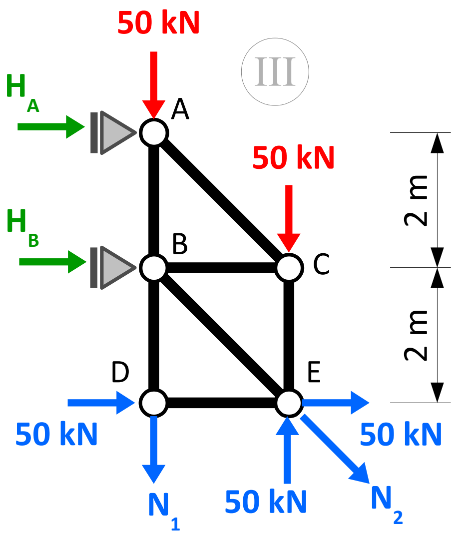


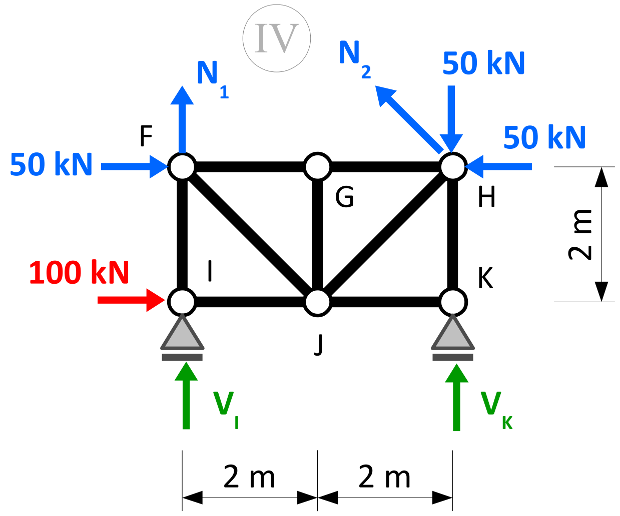
$$\Sigma \xi^{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_E = N_G$$

$$\Sigma M_E^{II} = 0: \ -200 - Q_G \cdot 2\sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_G = -50\sqrt{2} \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_G^{II} = 0: \ -200 + Q_E \cdot 2\sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_E = 50\sqrt{2} \text{ kN}}$$

Ukośne siły poprzeczne możemy rozłożyć na składowe:





Suma momentów względem punktu B dla górnej części konstrukcji:

$$\Sigma M_B^{III} = 0: \ -H_A \cdot 2 - 50 \cdot 2 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_A = 100 \text{ kN}}$$

Suma rzutów sił na oś X dla całej konstrukcji:

$$\Sigma X = 0: \ H_A + H_B + 100 + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_B = -300 \text{ kN}}$$

Suma rzutów sił na oś X dla dolnej części konstrukcji:

$$\Sigma X^{IV} = 0: \ 100 + 50 - 50 - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_2 = 100\sqrt{2} \text{ kN}}$$

Suma rzutów siła na oś Y dla górnej części konstrukcji:

$$\Sigma Y^{III} = 0: \ -50 - 50 + 50 - N_1 - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1 = -150 \text{ kN}}$$

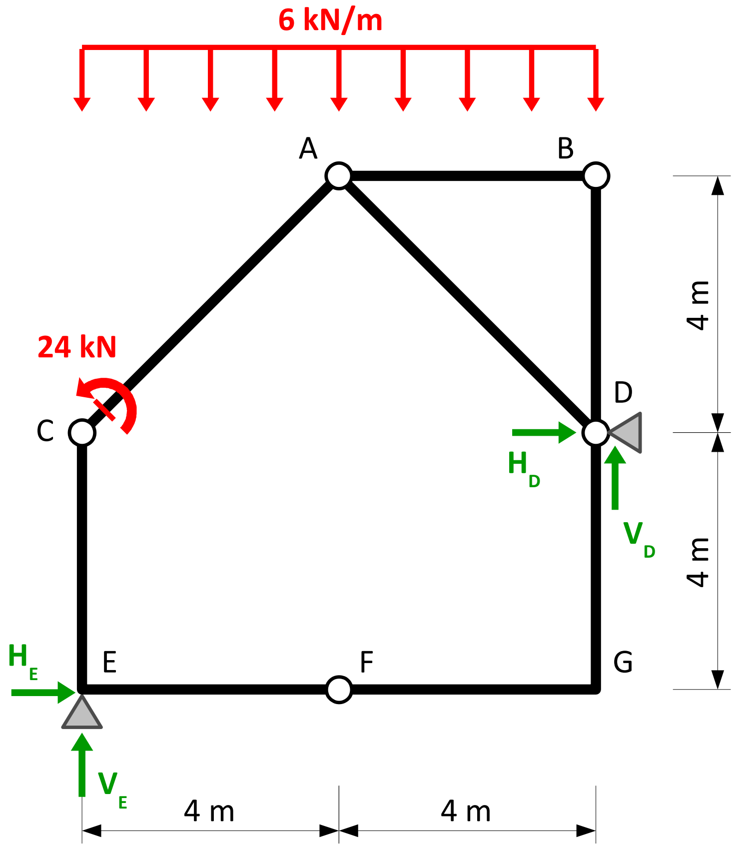
Suma momentów względem punktu H dla dolnej części konstrukcji:

$$\Sigma M_H^{IV} = 0: \; -N_1 \cdot 4 + 100 \cdot 2 - V_I \cdot 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_I = 200 \text{ kN}}$$

Suma rzutów sił na oś Y dla dolnej części konstrukcji:

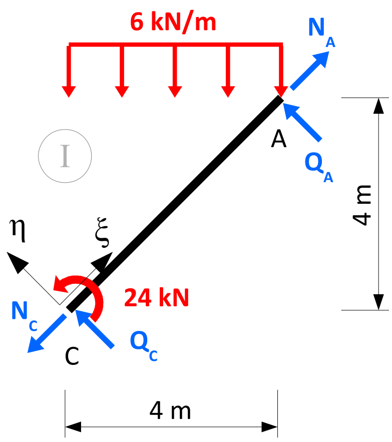
$$\Sigma Y^{IV} = 0: \; N_1 + V_I + V_K + \frac{N_2}{\sqrt{2}} - 50 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_K = -100 \text{ kN}}$$

ZADANIE 43
Wyznacz reakcje podporowe w układzie jak na rysunku korzystając z równań równowagi.



ROZWIĄZANIE:

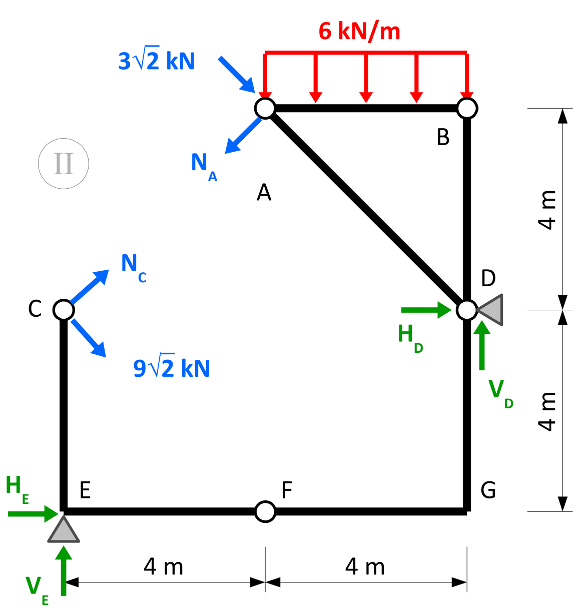
Wycinamy pręt AC:



$$\Sigma M_C^I = 0:$$
$$24-6\cdot 4\cdot 2+Q_A\cdot 4\sqrt{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_A = 3\sqrt{2}\text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A^I = 0:$$
$$24+6\cdot 4\cdot 2-Q_C\cdot 4\sqrt{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_C = 9\sqrt{2}\text{ kN}}$$

$$\Sigma \xi^I = 0:$$
$$-N_C+N_A-\frac{6\cdot 4\cdot 1}{\sqrt{2}}=0 \quad N_C = N_A-12\sqrt{2}$$



$$\Sigma M_D^{II\uparrow} = 0:$$
$$6 \cdot 4 \cdot 2 + N_A \cdot 4\sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_A = -6\sqrt{2}\,\text{kN}}$$

$$\boxed{N_C = N_A - 12\sqrt{2} = -18\sqrt{2}\,\text{kN}}$$

$$\Sigma M_F^{II\leftarrow} = 0:$$
$$-V_E \cdot 4 - N_C \cdot 4\sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 36\ \text{kN}}$$

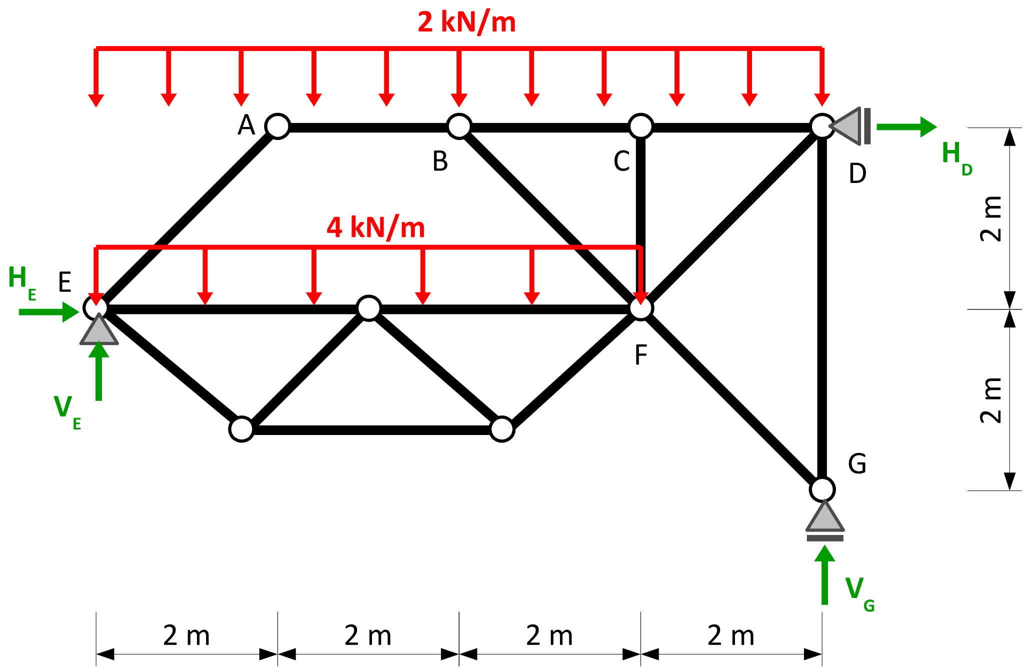
Pozostałe równania możemy ułożyć już dla całości układu:

$$\Sigma Y = 0:$$
$$V_E + V_D - 6 \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_D = 12\ \text{kN}}$$

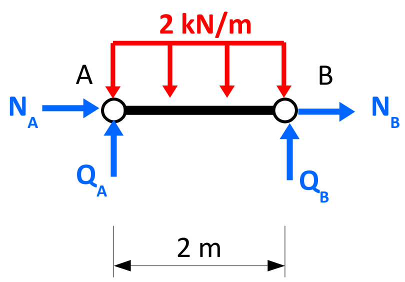
$$\Sigma M_E = 0:$$
$$-H_D \cdot 4 + V_D \cdot 8 + 24 - 6 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_D = -18\ \text{kN}}$$

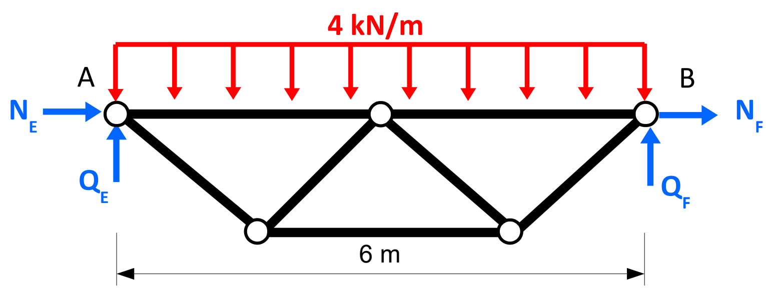
$$\Sigma X = 0 \quad H_E + H_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = 18\ \text{kN}}$$

ZADANIE 44
Wyznacz reakcje podporowe, korzystając z równań równowagi.



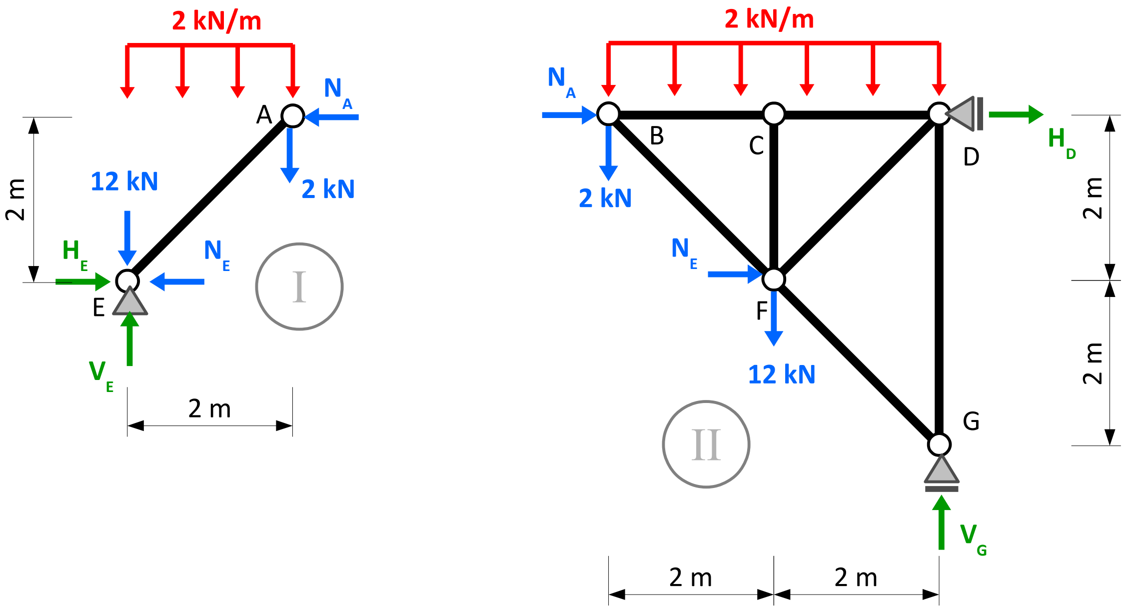
ROZWIĄZANIE:
Rozcinamy konstrukcję przez pręty AB i EF. Siły poprzeczne w przegubach A, B, E i F wyznaczamy z równowagi wyciętych prętów. W obydwu przypadkach układ sił jest symetryczny, przez co łatwo znajdujemy poszukiwane wartości sił:





$$Q_A = Q_B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ kN} \qquad Q_E = Q_F = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ kN}$$

$$N_B = -N_A \qquad N_F = -N_E$$



$$\Sigma Y^{I} = V_E - 12 - 2 - 2\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 18\ \text{kN}}$$

4 kN/m

$$\Sigma Y^{II} = V_G - 12 - 2 - 2\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_G = 22\ \text{kN}}$$

$$\Sigma M_E^{I} = N_A\cdot 2 - 2\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = 4\ \text{kN}$$

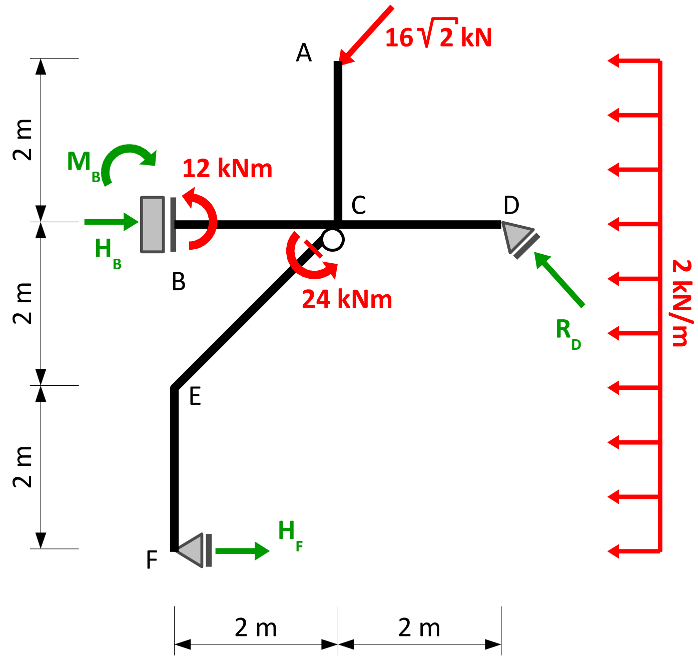
$$\Sigma M_D^{II} = N_E\cdot 2 + 2\cdot 4 + 12\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_E = -24\ \text{kN}$$

$$\Sigma X^{I} = H_E - N_E - N_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_E = -20\ \text{kN}}$$

$$\Sigma X^{II} = N_A + N_E + H_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_D = 20\ \text{kN}}$$

ZADANIE 45

Wyznacz reakcje podporowe rozcinając konstrukcję na ramy proste.

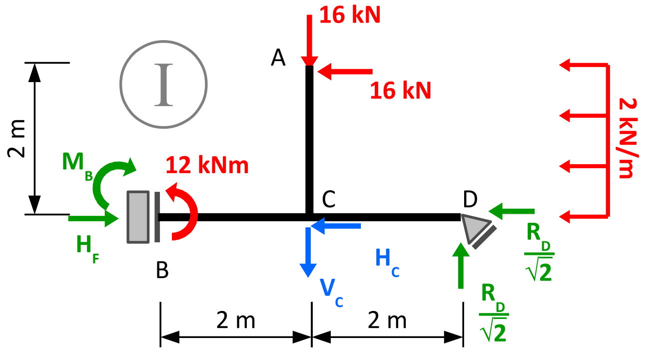


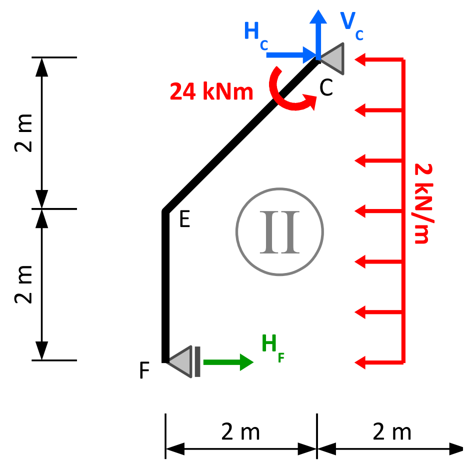
ROZWIĄZANIE:

W układzie możemy wyróżnić dwie proste ramy:

- Rama ABCD w kształcie odwróconej litery „T"
- Rama FEC w kształcie pręta zagiętego

Rama ABCD posiada wystarczającą liczbę podpór, aby pozostać w stanie równowagi. Tym samym stanowi ona podporę dla ramy FEC – połączenie ram następuje w przegubie, który przenosi siłę poziomą i pionową. Siły te mogą być wyznaczone jako reakcje podporowe na fikcyjnej podporze ramy FEC i stanowią obciążenie dla ramy ABCD.





Rama II:

$$\Sigma Y^{II} = V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 24 - 2\cdot4\cdot2 + H_F\cdot4 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_F = -2 \text{ kN}$$

$$\Sigma X^{II} = H_F + H_C - 2\cdot4 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_C = 10 \text{ kN}$$

Rama I:

$$\Sigma M_D = V_C\cdot2 + 16\cdot2 + 16\cdot2 + 2\cdot2\cdot1 + 12 - M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = 80 \text{ kNm}$$

$$\Sigma Y^I = -16 - V_C + \frac{R_D}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_D = 16\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\Sigma X^I = H_F - 16 - H_C - \frac{R_D}{\sqrt{2}} - 2\cdot2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_F = 46 \text{ kN}$$

