NAJWAŻNIEJSZE WZORY

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

Iloczyn skalarny: $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

Iloczyn wektorowy: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left[\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} ; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right]$

Iloczyn mieszany: $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

Rzutowanie na kierunek wektora: $\mathbf{a}_n=\dfrac{\mathbf{a}\circ\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$

Rzutowania na płaszczyznę: $\mathbf{a}_\pi=\mathbf{a}-\dfrac{\mathbf{a}\circ\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\cdot\mathbf{n}\,,\qquad \mathbf{n}\perp\pi$

MOMENT SIŁY, UKŁADY SIŁ

Moment siły względem punktu P: $\mathbf{M}_B=\mathbf{a}\times\vec{AB}$

Moment siły względem prostej:

$$\mathbf{M}_p=\left(\mathbf{a}-\frac{\mathbf{a}\circ\vec{BC}}{|\vec{BC}|^2}\vec{BC}\right)\times\left(\vec{AC}-\frac{\vec{AC}\circ\vec{BC}}{|\vec{BC}|^2}\vec{BC}\right)=\frac{(\mathbf{a}\times\vec{AC})\circ\vec{BC}}{|\vec{BC}|^2}\cdot\vec{BC}\qquad B,C\in p$$

Twierdzenie o zmianie bieguna: $\mathbf{M}_C=\mathbf{M}_B+\mathbf{a}\times\vec{BC}$

Suma układu sił: $\mathbf{S}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i$

Moment układu sił względem punktu P: $\mathbf{M}_P=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i\times\vec{P_iP})$

Twierdzenie o zmianie bieguna dla układu sił: $\mathbf{M}_Q=\mathbf{M}_P+\mathbf{S}\times\vec{PQ}$

Parametr układu: $K=\mathbf{S}\circ\mathbf{M}_P$

REDUKCJA DO NAJPROSTSZEJ POSTACI

- $\mathbf{S}=\mathbf{0}\wedge\mathbf{M}_P=\mathbf{0}\;\Leftrightarrow\;K=0\quad\Rightarrow$ **układ zerowy w dowolnym punkcie**
- $\mathbf{S}=\mathbf{0}\wedge\mathbf{M}_P\neq\mathbf{0}\;\Leftrightarrow\;K=0\quad\Rightarrow$ **para w dowolnym punkcie**
- $\mathbf{S}\neq\mathbf{0}\wedge K=0\;\Rightarrow\;(\mathbf{M}_P=\mathbf{0}\vee\mathbf{M}_P\perp\mathbf{S})\quad\Leftrightarrow$ **wypadkowa w osi środkowej**
- $K\neq 0\quad\Rightarrow$ **skrętnik w osi środkowej**

Równanie osi środkowej: $\mathbf{r}(\lambda)=\vec{OP}+\dfrac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_P}{\mathbf{S}^2}+\lambda\mathbf{S}$

Moment pary w skrętniku: $\mathbf{M}_Q=\dfrac{K}{|\mathbf{S}|^2}\cdot\mathbf{S}$

REDUKCJA RÓWNOLEGŁEGO UKŁADU SIŁ

- Równoległy układ sił redukuje się do wypadkowej, pary lub układu zerowego
- Wersor równoległy do każdej z sił: $\mathbf{e}$
- Dany układ sił: $\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{F}_1\\A_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{F}_2\\A_2\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\mathbf{F}_n\\A_n\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{F}_i = F_i\mathbf{e}\ ,\quad \mathbf{r}_i = \vec{OA_i}$
- Wyznaczamy: $S = \sum_{i=1}^{n} F_i\ ,\quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} F_i\mathbf{r}_i$
- Suma układu: $\mathbf{S} = S\,\mathbf{e}$
- Moment względem dowolnego punktu B: $\mathbf{M}_B = \mathbf{S}\times\vec{O^*B}$
- Środek równoległego układu sił: $\vec{OO^*} = \dfrac{\mathbf{M}}{S} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$
- Wypadkowa (jeśli wektor sumy $\mathbf{S}\neq\mathbf{0}$): $\mathbf{w}=\mathbf{S}$
- Równanie osi środkowej: $\mathbf{r}(\lambda)=\vec{OO^*}+\lambda\mathbf{S}$

REDUKCJA OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO DO WYPADKOWEJ

- Wypadkowa $S = \int_0^L q(x)\,\mathrm{d}x$
- Moment względem $x=0$ $M = \int_0^L q(x)\cdot x\,\mathrm{d}x$
- Położenie wypadkowej $x_0 = \dfrac{M}{S}$

ZADANIE 1

Dane są wektory: $\mathbf{a}=[1\ ;\ 2\ ;\ 3]$ $\mathbf{b}=[2\ ;\ 1\ ;\ -2]$ $\mathbf{c}=[-4\ ;\ 2\ ;\ -3]$ $\mathbf{d}=[0\ ;\ 2\ ;\ -1]$

Obliczyć:

a) $2\mathbf{a}+\mathbf{b}=?$ b) $3\mathbf{c}-2\mathbf{d}=?$

c) $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=?$ d) $\mathbf{b}\circ\mathbf{c}=?$ e) $\mathbf{c}\circ\mathbf{d}=?$

f) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=?$ g) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=?$ h) $\mathbf{c}\times\mathbf{d}=?$

i) $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=?$ j) $[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]=?$

k) zrzutować $\mathbf{a}$ na $\mathbf{b}$ l) zrzutować $\mathbf{c}$ na $\mathbf{d}$

ROZWIĄZANIE:

a) $$2\mathbf{a}+\mathbf{b}=[2\cdot1+2\ ;\ 2\cdot2+1\ ;\ 2\cdot3-2]=[4\ ;\ 5\ ;\ 4]$$

b) $$3\mathbf{c}-2\mathbf{d}=[3\cdot(-4)-2\cdot0\ ;\ 3\cdot2-2\cdot2\ ;\ 3\cdot(-3)-2\cdot(-1)]=[-12\ ;\ 2\ ;\ -7]$$

c) $$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=1\cdot2+2\cdot1+3\cdot(-2)=-2$$

d) $$\mathbf{b}\circ\mathbf{c}=2\cdot(-4)+1\cdot2+(-2)\cdot(-3)=0$$

e) $$\mathbf{c}\circ\mathbf{d}=(-4)\cdot0+2\cdot2+(-3)\cdot(-1)=7$$

f) $$\begin{array}{l}\times\ \ [1\,;2\,;3]\\ \quad\ [2\,;1\,;-2]\\ \hline \left[\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right]\end{array}=[2\cdot(-2)-1\cdot3\ ;\ -1\cdot(-2)+2\cdot3\ ;\ 1\cdot1-2\cdot2]=[-7\,;8\,;-3]$$

g) $$\begin{array}{l}\times\ \ [2\,;1\,;-2]\\ \quad[-4\,;2\,;-3]\\ \hline \left[\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}2 & -2\\ -4 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}\right]\end{array}=[1\cdot(-3)-2\cdot(-2)\ ;\ -2\cdot(-3)+(-4)\cdot(-2)\ ;\ 2\cdot2-(-4)\cdot1]=[1\,;14\,;8]$$

h) $$\begin{array}{l}\times[-4\,;2\,;-3]\\ \quad\ [0\,;2\,;-1]\\ \hline \left[\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right]\end{array}=[2\cdot(-1)-2\cdot(-3)\ ;\ -(-4)\cdot(-1)+0\cdot(-3)\ ;\ (-4)\cdot2-0\cdot2]=[4\,;-4\,;-8]$$

i) $$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & 2 & -3\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-3)+2\cdot2\cdot3+(-4)\cdot2\cdot(-2)-3\cdot1\cdot(-4)-(-2)\cdot2\cdot1-(-3)\cdot2\cdot2=53$$

j) $$[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -4 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot(-1)+(-4)\cdot2\cdot(-2)+0\cdot1\cdot(-3)-(-2)\cdot2\cdot0-(-3)\cdot2\cdot2-(-1)\cdot1\cdot(-4)=20$$

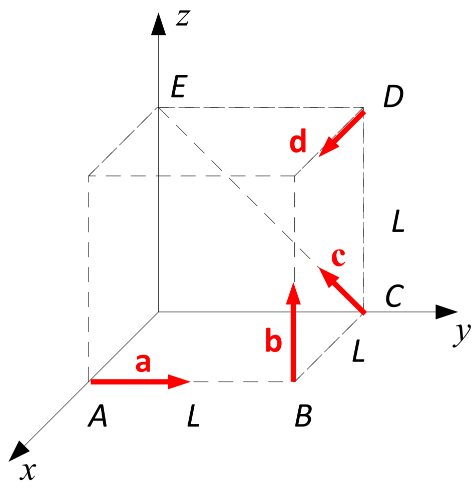
k) $$\frac{\mathbf{a}\circ\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}\cdot\mathbf{b}=\frac{1\cdot2+2\cdot1+3\cdot(-2)}{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot[2\,;1\,;-2]=\frac{-2}{9}\cdot[2\,;1\,;-2]=\left[-\frac{4}{9};-\frac{2}{9};\frac{4}{9}\right]$$

l) $$\frac{\mathbf{c}\circ\mathbf{d}}{\mathbf{d}^2}\cdot\mathbf{d}=\frac{(-4)\cdot0+2\cdot2+(-3)\cdot(-1)}{0^2+2^2+(-1)^2}\cdot[0\,;2\,;-1]=\frac{7}{5}\cdot[0\,;2\,;-1]=\left[0;\frac{14}{5};-\frac{7}{5}\right]$$

ZADANIE 2

Wyznacz momenty $M_D(\mathbf{a}), M_E(\mathbf{b}), M_B(\mathbf{c}), M_A(\mathbf{d}), \mathbf{M_B}(\mathbf{a})$

$|\mathbf{a}| = 2P$
$|\mathbf{b}| = P$
$|\mathbf{c}| = 3\sqrt{2}P$
$|\mathbf{d}| = 2P$



ROZWIĄZANIE:

Moment $M_D(\mathbf{a})$:
$$\mathbf{a} = [0\,;\,2P\,;\,0]$$
$$\vec{AD} = [-L\,;\,L\,;\,L]$$
$$M_D(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \vec{AD} = [2PL\,;0\,;2PL]$$

Moment $M_E(\mathbf{b})$:
$$\mathbf{b} = [0\,;\,0\,;\,P]$$
$$\vec{BE} = [-L\,;-L\,;\,L]$$
$$M_E(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \vec{BE} = [PL\,;-PL\,;0]$$

Moment $M_B(\mathbf{c})$:

Składowe wektora $\mathbf{c}$ znajdziemy wyznaczając najpierw jednostkowy wektor równoległy do $\mathbf{c}$ a następnie mnożąc go przez długość $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{e}_c = \frac{[0\,;-L\,;L]}{\sqrt{0^2+(-L)^2+L^2}} = \left[0\,;-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = |\mathbf{c}| \cdot \mathbf{e}_c = [0\,;-3\,;3]$$
$$\vec{CB} = [L\,;0\,;0]$$
$$M_B(\mathbf{c}) = \mathbf{c} \times \vec{CB} = [0\,;3PL\,;3PL]$$

Moment $M_A(\mathbf{d})$:
$$\mathbf{d} = [2P\,;\,0\,;\,0]$$
$$\vec{DA} = [L\,;-L\,;-L]$$
$$\mathbf{d} \times \vec{DA} = [0\,;2PL\,;-2PL]$$

Moment $M_B(\mathbf{a})$: Punkt B leży na prostej działania siły $\mathbf{a}$, zatem moment jest zerowy.

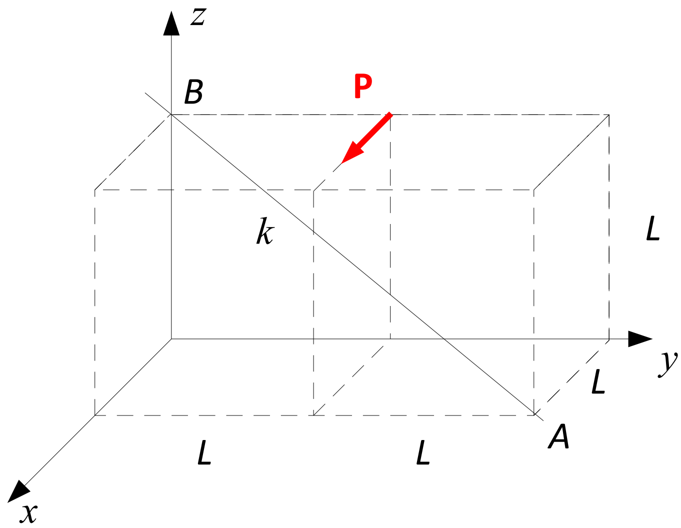
$$\mathbf{a} = [0\,;\,2P\,;\,0]$$
$$\vec{AB} = [0\,;L\,;0]$$
$$\mathbf{a} \times \vec{AB} = [0\,;0\,;0]$$

ZADANIE 3

Wyznacz moment siły $\mathbf{P}$ względem prostej k

a) korzystając z definicji

b) korzystając z twierdzenia



ROZWIĄZANIE:

a) Na podstawie definicji

Aby skorzystać z definicji momentu wektora względem prostej, musimy mieć płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

Ogólne równanie płaszczyzny w przestrzeni:

$$\pi: \quad Ax+By+Cz+D=0$$

Wektor $[A\ ;\ B\ ;\ C]$, którego składowe są równe stałym współczynnikom tego równania jest prostopadły do tej płaszczyzny. Wektor ten będzie oczywiście równoległy do prostej k . Wektorem taki może być:

$$\mathbf{k} = \vec{AB} = [-L\ ;\ -2L\ ;\ L]$$

Równanie płaszczyzny: $\pi: \ -Lx-2Ly+Lz+D = 0$

Płaszczyzn takich jest nieskończenie wiele. W szczególności możemy wybrać taką, która zawiera punkt zaczepienia siły $\mathbf{P}$. Punkt ten ma współrzędne $P=(0\,;L\,;L)$ - podstawiając je do równania płaszczyzny otrzymamy wartość D :

$$-L\cdot 0-2L\cdot L+L\cdot L+D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = L^2$$

Znajdziemy teraz punkt C przebicia płaszczyzny przez prostą k . Równanie prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do wektora $\mathbf{k}$ ma postać:

$$\mathbf{r} = \vec{OA}+\lambda\,\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=L-\lambda L \\ y=2L-2\lambda L \\ z = 0+\lambda L \end{cases}$$

Podstawiając do równania płaszczyzny:

$$-L\cdot(L-\lambda L)-2L\cdot(2L-2\lambda L)+L\cdot(\lambda L)+L^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad C: \begin{cases} x=\dfrac{L}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}L \\ z=\dfrac{2}{3}L \end{cases}$$

Znajdziemy teraz rzut wektora łączącego punkt zaczepienia siły z dowolnym punktem prostej – ponieważ płaszczyzna zawiera punkt zaczepienia siły, rzut ten to po prostu wektor łączący punkt zaczepienia siły i punkt przebicia płaszczyzny przez prostą:

$$\vec{PC} = \left[\frac{L}{3}-0\ ;\ \frac{2}{3}L-L\ ;\ \frac{2}{3}L-L\right] = \left[\frac{L}{3}\ ;\ -\frac{L}{3}\ ;\ -\frac{L}{3}\right]$$

Rzut wektora $\mathbf{P}$ na normalną do płaszczyzny π :

$$\mathbf{P}_k = \frac{\mathbf{P}\circ\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\cdot\mathbf{k} = \frac{P\cdot(-L)+0\cdot(-2L)+0\cdot L}{(-L)^2+(-2L)^2+L^2}[-L;-2L;L] = -\frac{PL}{6L^2}[-L;-2L;L] = \left[\frac{P}{6}\ ;\ \frac{P}{3}\ ;\ -\frac{P}{6}\right]$$

Rzut wektora $\mathbf{P}$ na płaszczyznę π : $\mathbf{P}_\pi = \mathbf{P}-\mathbf{P}_k = \left[\frac{5}{6}P\ ;\ -\frac{P}{3}\ ;\ \frac{P}{6}\right]$

Moment siły $\mathbf{P}$ względem prostej k : $\mathbf{M}_k(\mathbf{P}) = \mathbf{P}_\pi\times\vec{PC} = \left[\frac{PL}{6}\ ;\ \frac{PL}{3}\ ;\ -\frac{PL}{6}\right]$

b) Na podstawie twierdzenia

Wyznaczamy moment siły względem dowolnego punktu leżącego na rozpatrywanej prostej, a następnie rzutujemy otrzymany wektor na kierunek prostej. Obliczmy moment względem np. punktu A:

Wektor siły: $\mathbf{P} = [P\ ;\ 0\ ;\ 0]$
Wektor łączący punkt przyłożenia siły z biegunem: $\vec{PA} = [L\ ;\ L\ ;\ -L]$
Moment siły względem punktu A: $\mathbf{M}_A(\mathbf{P}) = [0\ ;\ PL\ ;\ PL]$

Rzut momentu na kierunek prostej:

$$\mathbf{M}_k(\mathbf{P}) - \frac{\mathbf{M}_A(\mathbf{P})\circ\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\cdot\mathbf{k} = \frac{0\cdot(-L)+PL\cdot(-2L)+PL\cdot L}{(-L)^2+(-2L)^2+L^2}[-L;-2L;L] = \frac{-PL^2}{6L^2}[-L;-2L;L] =$$
$$= \left[\frac{PL}{6}\ ;\ \frac{PL}{3}\ ;\ -\frac{PL}{6}\right]$$

ZADANIE 4

Wyznacz parę odpowiadającą wektorowi momentu $\mathbf{M}=[2;-1;-2]$, w której jeden z wektorów zaczepiony jest w punkcie $A=(1,2,-1)$.

ROZWIĄZANIE:

Para odpowiadająca danemu wektorowi momentu leży w płaszczyźnie prostopadłej do tego wektora, oba te wektory są zatem prostopadłe do $\mathbf{M}$. Możemy je wybrać dowolnie. Niech $\mathbf{F}=[F_x;F_y;F_z]$ będzie pierwszym wektorem pary, wtedy:

$$\mathbf{F}\perp\mathbf{M} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}\circ\mathbf{M}=0 \quad\Rightarrow\quad 2F_x-F_y-2F_z=0$$

Równanie to stanowi jedyne ograniczenie w wyborze składowych siły $\mathbf{F}$. Możemy je zapisać w postaci:

$$F_y=2F_x-2F_z$$

Składowe F_x,F_z możemy wybrać dowolnie – nie możemy jedynie obu przyjąć 0, bo dostaniemy wektor zerowy. Najprościej przyjąć jedną z nich równą 0, a drugą równą 1, wtedy:

$$\mathbf{F}=[F_x;F_y;F_z]=[1\,;\,(2\cdot1-2\cdot0)\,;\,0]=[1;2;0]$$

Druga z sił jest siłą przeciwną: $-\mathbf{F}=[-1;-2;0]$

Musimy jedynie znaleźć punkt zaczepienia tej drugiej siły, wiedząc, że $\mathbf{F}$ zaczepiona jest w $A=(1,2,-1)$. Wiemy, że moment siły względem punktu leżącego na jej prostej działania jest zerowy. Wiemy ponadto, że moment pary sił jest niezależny od wyboru bieguna. Obliczmy zatem moment siły $\mathbf{F}$ względem punktu B, tj. nieznanego punktu zaczepienia siły $-\mathbf{F}$. Będzie musiał być równy $\mathbf{M}=[2;-1;-2]$. Zatem:

$$\mathbf{M}_B(\mathbf{F})=\mathbf{F}\times\vec{AB}=[1;2;0]\times[(x_B-x_A);(y_B-y_A);(z_B-z_A)]=$$
$$=[1;2;0]\times[(x_B-1);(y_B-2);(z_B+1)]=[2z_B+2\,;\,-z_B-1\,;\,y_B-2x_B]\equiv[2;-1;-2]$$

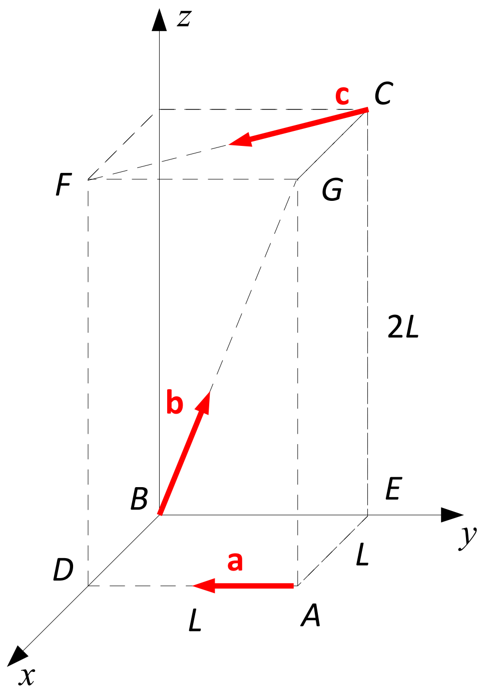
stąd: $\begin{cases}2z_B+2=2\\-z_B-1=-1\\y_B-2x_B=-2\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}z_B=0\\y_B=2x_B-2\end{cases}$

Położenie siły $-\mathbf{F}$ również może być wybrane z pewną dowolnością – może ona bowiem leżeć w dowolnym punkcie prostej równoległej do prostej działania siły $\mathbf{F}$, odległej o $d=|\mathbf{M}|/|\mathbf{F}|$. Przyjmijmy zatem np. $x_B=0$, wtedy $y_B=-2$.

Ostatecznie:

Momentowi $\mathbf{M}=[2;-1;-2]$ odpowiada para sił złożona z siły $\mathbf{F}=[1;2;0]$ zaczepionej w punkcie $A=(1,2,-1)$ oraz siły $-\mathbf{F}=[-1;-2;0]$ zaczepionej w punkcie $B=(0,-2,0)$.

ZADANIE 5



Zredukuj układ sił kolejno do punktów D, E, F.

$|\mathbf{a}| = 2P$

$|\mathbf{b}| = 2\sqrt{6}P$

$|\mathbf{c}| = \sqrt{2}P$

ROZWIĄZANIE:

Wektory sił:

$\mathbf{a} = [0\ ;\ -2P\ ;\ 0]$

$$\mathbf{b} = 2\sqrt{6}P \cdot \frac{\vec{BG}}{|\vec{BG}|} = \frac{2\sqrt{6}P}{\sqrt{L^2+L^2+(2L)^2}}[L;L;2L] = $$
$$= [2P\ ;\ 2P\ ;\ 4P]$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{2}P \cdot \frac{\vec{CF}}{|\vec{CF}|} = \frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{L^2+(-L)^2+0^2}}[L;-L;0] = $$
$$= [P\ ;\ -P\ ;\ 0]$$

Suma układu: $\mathbf{S} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = [3P\ ;\ -P\ ;\ 4P]$

Redukcja w punkcie D:

$$\mathbf{M}_D(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\vec{AD} = [0;-2P;0]\times[0;-L;0] = [0;0;0]$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\vec{BD} = [2P;2P;4P]\times[L;0;0] = [0;4PL;-2PL]$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{c}) = \mathbf{c}\times\vec{CD} = [P;-P;0]\times[L;-L;-2L] = [2PL;2PL;0]$$

$$\mathbf{M}_D = [2PL;6PL;-2PL]$$

W punkcie D układ redukuje się do wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [3P\ ;\ -P\ ;\ 4P]$ zaczepionego w D oraz do dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_D = [2PL;6PL;-2PL]$.

Redukcja w punkcie E:

$$\mathbf{M}_E(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\vec{AE} = [0;-2P;0]\times[-L;0;0] = [0;0;-2PL]$$
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\vec{BE} = [2P;2P;4P]\times[0;L;0] = [-4PL;0;2PL]$$
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{c}) = \mathbf{c}\times\vec{CE} = [P;-P;0]\times[0;0;-2L] = [2PL;2PL;0]$$

$$\mathbf{M}_E = [-2PL;2PL;0]$$

Ten sam wynik moglibyśmy otrzymać wykorzystując **twierdzenie o zmianie bieguna**:

$$\mathbf{M}_E = \mathbf{M}_D + \mathbf{S}\times\vec{DE} = [2PL;6PL;-2PL] + [3P;-P;4P]\times[-L;L;0] = [-2PL;2PL;0]$$

W punkcie E układ redukuje się do wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [3P\ ;\ -P\ ;\ 4P]$ zaczepionego w E oraz do dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_E = [-2PL;2PL;0]$.

Redukcja w punkcie F:

$$\mathbf{M}_F(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\vec{AF} = [0;-2P;0]\times[0;-L;2L] = [-4PL;0;0]$$
$$\mathbf{M}_F(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\vec{BF} = [2P;2P;4P]\times[L;0;2L] = [4PL;0;-2PL]$$
$$\mathbf{M}_F(\mathbf{c}) = \mathbf{c}\times\vec{CF} = [P;-P;0]\times[L;-L;0] = [0;0;0]$$

$$\mathbf{M}_F = [0;0;-2PL]$$

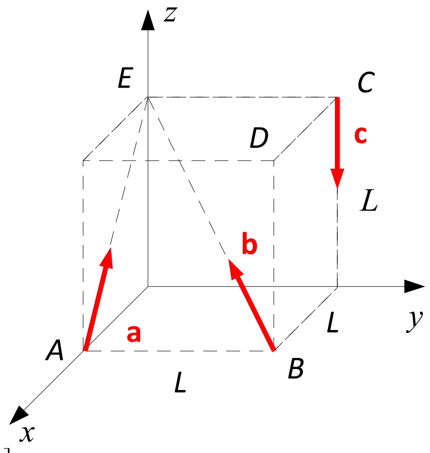
Ten sam wynik moglibyśmy otrzymać wykorzystując **twierdzenie o zmianie bieguna**:

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{M}_D + \mathbf{S}\times\vec{DF} = [2PL;6PL;-2PL] + [3P;-P;4P]\times[0;0;2L] = [0;0;-2PL]$$

W punkcie F układ redukuje się do wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [3P\ ;\ -P\ ;\ 4P]$ zaczepionego w F oraz do dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_F = [0;0\text{a};-2PL]$.

ZADANIE 6

Zredukować podany układ sił w punkcie D a następnie zredukować go do najprostszej postaci.



$|\mathbf{a}| = \sqrt{2}\,P$
$|\mathbf{b}| = \sqrt{3}\,P$
$|\mathbf{c}| = 2\,P$

ROZWIĄZANIE:

Wektory sił:

$$\mathbf{a} = 2\sqrt{6}\,P\cdot\frac{\vec{AE}}{|\vec{AE}|} = \frac{\sqrt{2}\,P}{\sqrt{(-L)^2+0^2+L^2}}[-L;0;L] = [-P\;;\;0\;;\;P]$$

$$\mathbf{b} = \sqrt{2}\,P\cdot\frac{\vec{BE}}{|\vec{BE}|} = \frac{\sqrt{3}\,P}{\sqrt{(-L)^2+(-L)^2+L^2}}[-L;-L;L] = [-P\;;\;-P\;;\;P]$$

$$\mathbf{c} = [0\;;\;0\;;\;-2\,P]$$

Suma układu: $\mathbf{S} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = [-2P\;;\;-P\;;\;0]$

Redukcja w punkcie D:

$$\mathbf{M}_D(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\vec{AD} = [-P;0;P]\times[0;L;L] = [-PL;PL;-PL]$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\vec{BD} = [-P;-P;P]\times[0;0;L] = [-PL;PL;0]$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{c}) = \mathbf{c}\times\vec{CD} = [0;0;-2P]\times[L;0;0] = [0;-2PL;0]$$

$$\mathbf{M}_D = [-2PL;0;-PL]$$

W punkcie D układ redukuje się do wektora $\mathbf{W}=\mathbf{S} = [-2P\;;\;-P\;;\;0]$ zaczepionego w D oraz do dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_D = [-2PL;0;-PL]$.

Redukcja do najprostszej postaci:

Parametr układu: $K = \mathbf{S}\circ\mathbf{M}_D = [-2P;-P;0]\circ[-2PL;0;-PL] = 4P^2L$

$K \neq 0 \quad \Rightarrow$ redukcja do **skrętnika**.

Równanie osi środkowej

W przypadku redukcji do wypadkowej lub do skrętnika, wiemy, że jednym z wektorów układu zredukowanego jest wektor równy sumie układu zaczepiony w dowolnym punkcie osi środkowej. Oś środkową możemy wyznaczyć na dwa sposoby:

- korzystając ze wzoru
- korzystając z twierdzenia o zmianie bieguna

1) Oś środkowa – ze wzoru:

Wektor wodzący punktu redukcji: $\vec{OD} = [L\,;L\,;L]$

Wektor łączący punkt D z osią środkową:

$$\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_D}{\mathbf{S}^2} = \frac{[-2P\,;-P\,;0]\times[-2PL\,;0\,;-PL]}{[-2P\,;-P\,;0]\circ[-2P\,;-P\,;0]} = \frac{[P^2L\,;-2P^2L\,;-2P^2L]}{5P^2} = \left[\frac{1}{5}L\,;-\frac{2}{5}L\,;-\frac{2}{5}L\right]$$

Równania parametryczne osi środkowej:

$$\mathbf{r} = \vec{OD}+\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_D}{\mathbf{S}^2}+\lambda\mathbf{S} = [L\,;L\,;L]+\left[\frac{1}{5}L\,;-\frac{2}{5}L\,;-\frac{2}{5}L\right]+[-2\lambda P\,;-\lambda P\,;0] =$$
$$= \left[\frac{6}{5}L-2\lambda P\,;\frac{3}{5}L-\lambda P\,;\frac{3}{5}L\right]$$

Parametr λ może być dowolny. W szczególności zamiast niego możemy przyjąć parametr $\mu=\lambda P$, aby formalnie wyrugować z równania określającego prostą (obiekt geometryczny) wielkość P o wymiarze siły. Ostatecznie, możemy więc napisać równanie osi środkowej w postaci:

$$\mathbf{r}(\mu) = \begin{cases} x = \frac{6}{5}L-2\mu \\ y = \frac{3}{5}L-\mu \\ z = \frac{3}{5}L \end{cases}$$

2) Oś środkowa – z twierdzenia o zmianie bieguna:

Zakładamy, że istnieje pewien punkt $P=(x,y,z)$ należący do osi środkowej. Mając obliczoną sumę momentów względem D, wyznaczamy wektor łączący stary i nowy biegun odejmując od współrzędnych końca współrzędne początku:

$$\vec{DP} = [x-L\,;y-L\,;z-L]$$

Następnie korzystamy z twierdzenia o zmianie bieguna, wiedząc, że moment względem dowolnego punktu osi środkowej wyraża się wzorem:

$$\mathbf{M}_P = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\cdot\mathbf{S}$$

Wzór ten jest poprawny zarówno w przypadku redukcji do skrętnika $(K\neq 0)$, jak i w przypadku redukcji do wypadkowej $(K=0)$ – wtedy wektor momentu względem punktów osi środkowej jest wektorem zerowym.

$$\mathbf{M}_D+\mathbf{S}\times\vec{DP} = \mathbf{M}_P = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\cdot\mathbf{S}$$

$$[-2PL\ ;\ 0\ ;\ -PL]+[-2P;-P;0]\times[x-L\ ;\ y-L\ ;\ z-L]=\left[-\frac{8}{5}PL\ ;\ -\frac{4}{5}PL\ ;\ 0\right]$$

$$[-2PL\ ;\ 0\ ;\ -PL]+[-P(z-L)\ ;\ 2P(x-L)\ ;\ -2P(y-L)+P(x-L)]=\left[-\frac{8}{5}PL\ ;\ -\frac{4}{5}PL\ ;\ 0\right]$$

$$[-Pz-PL\ ;\ 2Px-2PL\ ;\ Px-2Py]=\left[-\frac{8}{5}PL\ ;\ -\frac{4}{5}PL\ ;\ 0\right]$$

Po przeniesieniu wszystkich wyrazów na lewą stronę i podzieleniu obustronnie przez P otrzymujemy:

$$\begin{cases} -z+\frac{3}{5}L=0 \\ 2z-\frac{6}{5}L=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań zależnych – łatwo zauważyć, że pierwsze i drugie równanie są sobie tożsame. Układ ten równoważny jest układowi dwóch równań:

$$\begin{cases} z-\frac{3}{5}L=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Układ ten opisuje prostą, która stanowi krawędź przecięcia się dwóch płaszczyzn odpowiadających kolejnym równaniom. Można zauważyć, że powyższy układ równań można uzyskać z równań parametrycznych osi środkowej np. podstawiając $\mu=\frac{3}{5}L-y$ i podstawiając do równania na współrzędną x .

Moment w skrętniku

Musimy wyznaczyć moment względem dowolnego punktu na osi środkowej. Można go wyznaczyć korzystając ze wzoru na rzut wektora momentu na kierunek sumy układu lub poprzez wybór dowolnego punktu na osi.

1) Moment w skrętniku – ze wzoru:

$$\mathbf{M}_P=\frac{K}{\mathbf{S}^2}\cdot\mathbf{S}=\frac{4P^2L}{5P^2}[-2P;-P;0]=\left[-\frac{8}{5}PL\ ;\ -\frac{4}{5}PL\ ;\ 0\right]$$

2) Moment w skrętniku – z twierdzenia o zmianie bieguna:

Ten sam wynik uzyskamy obliczając sumę momentów względem dowolnego punktu na osi środkowej. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie bieguna. W tym celu wyznaczamy wektor łączący biegun D z dowolnym punktem na prostej:

$$\vec{DP}=\vec{OP}-\vec{OD}=\left[\frac{6}{5}L-2\mu\ ;\ \frac{3}{5}L-\mu\ ;\ \frac{3}{5}L\right]-[L;L;L]=\left[\frac{1}{5}L-2\mu\ ;-\frac{2}{5}L-\mu\ ;-\frac{2}{5}L\right]$$

$$\mathbf{M}_P=\mathbf{M}_D+\mathbf{S}\times\vec{DP}=[-2PL\ ;\ 0\ ;\ -PL]+[-2P;-P;0]\times\left[\frac{1}{5}L-2\mu\ ;\ -\frac{2}{5}L-\mu\ ;\ -\frac{2}{5}L\right]=$$
$$=[-2PL\ ;\ 0\ ;\ -PL]+\left[\frac{2}{5}PL;-\frac{4}{5}PL\ ;\ PL\right]=\left[-\frac{8}{5}PL;-\frac{4}{5}PL\ ;\ 0\right]$$

Zauważmy, że uzyskany wynik nie zależy od parametru μ, mimo że występował on jawnie w wektorze wodzącym dowolnego punktu osi środkowej. Ponieważ oś środkowa jest równoległa do sumy, wynik musiał być właśnie taki. Wektor łączący dowolny biegun z biegunem na osi środkowej zawsze można rozłożyć na sumę części stałej i zależnej od parametru μ, przy czym część zależna od parametru jest zawsze równoległa do sumy (taka jest postać równania osi środkowej). Jeśli zatem pomnożymy wektor sumy układu przez taki wektor, to korzystając z rozdzielności mnożenia wektorowego względem dodawania łatwo zauważyć, że część zależna od parametru zawsze da nam wektor zerowy. Ostatecznie więc, jeśli chcemy wyznaczać moment w skrętniku korzystając z twierdzenia o zmianie bieguna, możemy po prostu przyjąć dowolną wartość parametru, taką, dla której obliczenia są najprostsze, np. $\mu=0$.

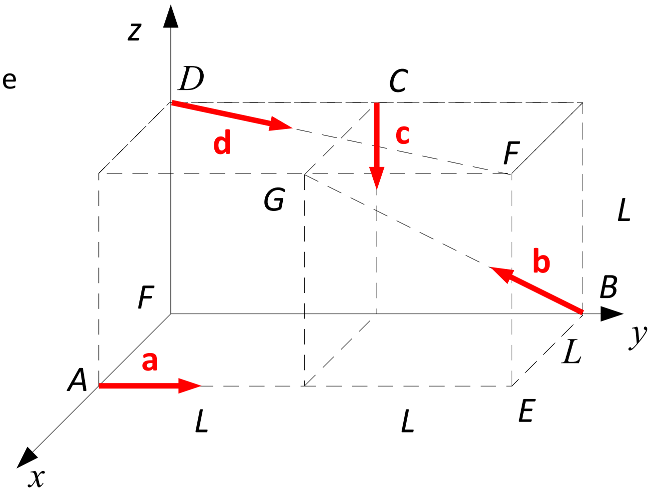
Ostatecznie, wynik redukcji do najprostszej postaci możemy podsumować następująco:

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do skrętnika złożonego z wektora $\mathbf{W}=\mathbf{S}=[-2P\ ;\ -P\ ;\ 0]$ zaczepionego w dowolnym punkcie osi środkowej danej równaniami:

$$\mathbf{r}(\mu)=\begin{cases}x=\frac{6}{5}L-2\mu\\ y=\frac{3}{5}L-\mu\\ z=\frac{3}{5}L\end{cases}$$

oraz z dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_P=\left[-\frac{8}{5}PL\ ;\ -\frac{4}{5}PL\ ;\ 0\right]$, równoległym do wektora $\mathbf{S}$.

ZADANIE 7



Zredukować podany układ sił w punkcie E a następnie zredukować go do najprostszej postaci.

$$|\mathbf{a}| = 3P$$
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{3}P$$
$$|\mathbf{c}| = P$$
$$|\mathbf{d}| = 2\sqrt{5}P$$

ROZWIĄZANIE:

Wektory sił:

$$\mathbf{a} = [0\ ;\ 3P\ ;\ 0]$$

$$\mathbf{b} = \sqrt{3}P\cdot\frac{\vec{BG}}{|\vec{BG}|} = \frac{\sqrt{3}P}{\sqrt{L^2+(-L)^2+L^2}}[L;-L;L] = [P\ ;\ -P\ ;\ P]$$

$$\mathbf{c} = [0\ ;\ 0\ ;\ -P]$$

$$\mathbf{d} = 2\sqrt{5}P\cdot\frac{\vec{DF}}{|\vec{DF}|} = \frac{2\sqrt{5}P}{\sqrt{L^2+(2L)^2+0^2}}[L;2L;0] = [2P\ ;\ 4P\ ;\ 0]$$

Suma układu: $\mathbf{S} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = [3P\ ;\ 6P\ ;\ 0]$

Redukcja w punkcie E:

$$\mathbf{M}_E(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\vec{AE} = [0;3P;0]\times[0;2L;0] = [0;0;0]$$
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\vec{BE} = [P;-P;P]\times[L;0;0] = [0;PL;PL]$$
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{c}) = \mathbf{c}\times\vec{CE} = [0;0;-P]\times[L;L;-L] = [PL;-PL;0]$$
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{d}) = \mathbf{d}\times\vec{DE} = [2P;4P;0]\times[L;2L;-L] = [-4PL;2PL;0]$$

$$\mathbf{M}_E = [-3Pa;2Pa;Pa]$$

W punkcie E układ redukuje się do wektora $\mathbf{W}=\mathbf{S} = [6P\ ;\ 3P\ ;\ -P]$ zaczepionego w E oraz do dowolnej pary o momencie. $\mathbf{M}_E = [-3PL;2PL;PL]$

Redukcja do najprostszej postaci:

Parametr układu: $K = \mathbf{M}_E\circ\mathbf{S} = [-3PL;2PL;PL]\circ[3P;6P;0] = 3P^2L$

$K\neq 0 \quad\Rightarrow$ redukcja do **skrętnika**.

Moment w skrętniku:

$$\mathbf{M}_P = \frac{K}{\mathbf{S}^2}\cdot\mathbf{S} = \frac{3P^2L}{45P^2}[3P;6P;0] = \left[\frac{1}{5}PL\ ;\ \frac{2}{5}PL\ ;\ 0\right]$$

Równanie osi środkowej:

Wektor wodzący punktu redukcji: $\vec{OE} = [L\,;2L\,;0]$

Wektor łączący punkt E z osią środkową:

$$\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_E}{\mathbf{S}^2} = \frac{[6P\,;3P\,;0]\times[-3PL\,;2PL\,;PL]}{[6P\,;3P\,;0]\circ[6P\,;3P\,;0]} = \frac{[6P^2L\,;-3P^2L\,;24P^2L]}{45P^2} =$$
$$= \left[\frac{2}{15}L\,;-\frac{1}{15}L\,;\,\frac{8}{15}L\right]$$

Równania parametryczne osi środkowej:

$$\mathbf{r} = \vec{OE} + \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_E}{\mathbf{S}^2} + \lambda\mathbf{S} = [L\,;2L\,;0] + \left[\frac{2}{15}L\,;\,-\frac{1}{15}L\,;\,\frac{8}{15}L\right] + [3\lambda P\,;6\lambda P\,;0] =$$
$$= \left[\frac{17}{15}L+3\mu\,;\,\frac{29}{15}L+6\mu\,;\,\frac{8}{15}L-\mu\right]$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do skrętnika złożonego z wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [6P\,;\,3P\,;\,-P]$ zaczepionego w dowolnym punkcie osi środkowej danej równaniami:

$$\mathbf{r}(\mu) = \begin{cases} x = \frac{17}{15}L+3\mu \\ y = \frac{29}{15}L+6\mu \\ z = -\frac{8}{15}L \end{cases}$$

oraz z dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_P = \left[\frac{1}{5}PL\,;\,\frac{2}{5}PL\,;\,0\right]$, równoległym do wektora $\mathbf{S}$.

ZADANIE 8

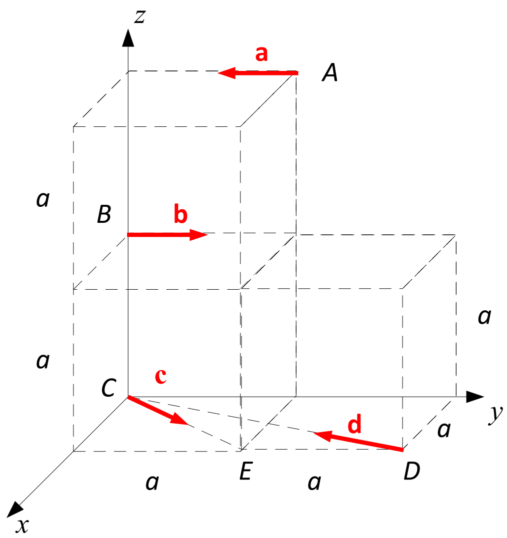
Zredukuj podany układ do najprostszej postaci:

$|\mathbf{a}| = P$

$|\mathbf{b}| = 2P$

$|\mathbf{c}| = \sqrt{2}P$

$|\mathbf{d}| = \sqrt{5}P$



ROZWIĄZANIE:

Wektory sił:

$$\mathbf{a} = [0\ ;\ -P\ ;\ 0]$$

$$\mathbf{b} = [0\ ;\ 2P\ ;\ 0]$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{2}P\cdot\frac{\vec{CE}}{|\vec{CE}|} = \frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{L^2+L^2+0^2}}[L;L;0] = [P\ ;\ P\ ;\ 0]$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{5}P\cdot\frac{\vec{DC}}{|\vec{DC}|} = \frac{\sqrt{5}P}{\sqrt{(-L)^2+(-2L)^2+0^2}}[-L;-2L;0] = [-P\ ;\ -2P\ ;\ 0]$$

Suma układu: $\mathbf{S} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = [0\ ;\ 0\ ;\ 0]$

Suma układu jest wektorem zerowym, zatem układ redukuje się albo do układu zerowego, albo do pary, przy czym redukcja ta w każdym punkcie jest taka sama i jest zawsze redukcją do najprostszej postaci.

Aby zredukować układ do najprostszej postaci musimy wyznaczyć sumę jego momentów względem dowolnego punktu – najprościej wybrać taki punkt, który leży na przecięciu się prostych działania możliwie wielu sił jednocześnie, wtedy moment tych sił względem tego punktu jest równy 0. Przyjmijmy do obliczeń punkt C:

Redukcja w punkcie C:

$$\mathbf{M}_C(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\vec{AC} = [0;-P;0]\times[0;-L;-2L] = [2PL;0;0]$$

$$\mathbf{M}_C(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\vec{BC} = [0;2P;0]\times[0;0;-L] = [-2PL;0;0]$$

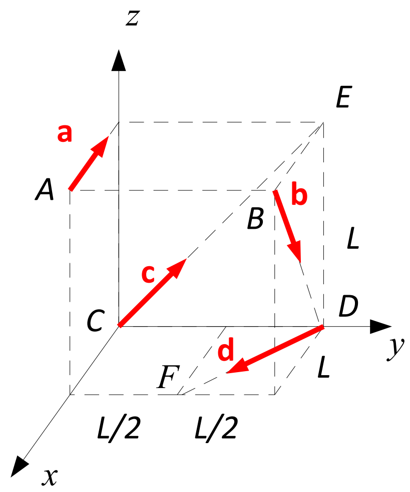
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_E(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_E = [0;0;0]$$

Zarówno suma jak i moment układu są zerowe – układ w każdym punkcie redukuje się do układu zerowego.

ZADANIE 9



Zredukuj podany układ do najprostszej postaci:

$|\mathbf{a}| = P$
$|\mathbf{b}| = \sqrt{2}P$
$|\mathbf{c}| = \sqrt{2}P$
$|\mathbf{d}| = \sqrt{5}P$

ROZWIĄZANIE:

Wektory sił:

$\mathbf{a} = [-P\ ;\ 0\ ;\ 0]$

$$\mathbf{b} = \sqrt{2}P\cdot\frac{\vec{BD}}{|\vec{BD}|} = \frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{(-L)^2+0^2+(-L)^2}}[-L;0;-L] = [-P\ ;\ 0\ ;\ -P]$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{2}P\cdot\frac{\vec{CE}}{|\vec{CE}|} = \frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{0^2+L^2+L^2}}[0;L;L] = [0\ ;\ P\ ;\ P]$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{5}P\cdot\frac{\vec{DF}}{|\vec{DF}|} = \frac{\sqrt{5}P}{\sqrt{L^2+(-L/2)^2+0^2}}[L;-L/2;0] = [2P\ ;\ -P\ ;\ 0]$$

Suma układu: $\mathbf{S} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = [0\ ;\ 0\ ;\ 0]$

Suma układu jest wektorem zerowym, zatem układ redukuje się albo do układu zerowego, albo do pary, przy czym redukcja ta w każdym punkcie jest taka sama i jest zawsze redukcją do najprostszej postaci.

Punkt D leży na przecięciu prostych działania sił $\mathbf{b}$ i $\mathbf{d}$ - względem tego punktu najłatwiej będzie obliczyć sumę momentów układu:

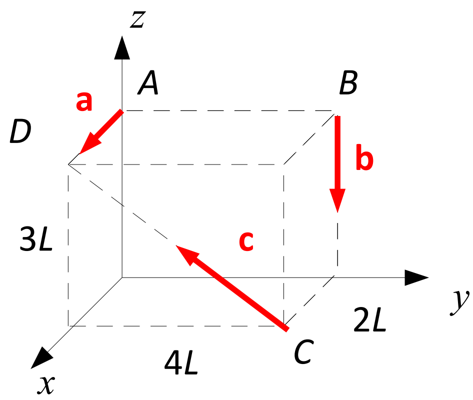
Redukcja w punkcie D:

$$\mathbf{M}_D(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\vec{AD} = [-P;0;0]\times[-L;L;-L] = [0;-PL;-PL]$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{c}) = \mathbf{c}\times\vec{CD} = [0;P;P]\times[0;L;0] = [-PL;0;0]$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_E = [-PL;-PL;-PL]$$

Układ w każdym punkcie redukuje się do pewnej pary o momencie $\mathbf{M} = [-PL;-PL;-PL]$.

ZADANIE 10



Zredukuj podany układ do najprostszej postaci:

$|\mathbf{a}| = P$
$|\mathbf{b}| = 2P$
$|\mathbf{c}| = 5P$

a następnie oblicz moment układu względem prostej AC.

ROZWIĄZANIE:

Wektory sił:

$$\mathbf{a} = [P\ ;\ 0\ ;\ 0]$$
$$\mathbf{b} = [0 ; 0 ; -2P]$$
$$\mathbf{c} = 5P \cdot \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \frac{5P}{\sqrt{0^2+(-4L)^2+(3L)^2}}[0 ; -4L ; 3L] = [0\ ;\ -4P\ ;\ 3P]$$

Suma układu: $\mathbf{S} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = [P\ ;\ -4P\ ;\ P]$

Redukcja w punkcie D:

$$\mathbf{M}_D(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_D(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\vec{BD} = [0 ; 0 ; -2P]\times[2L ; -4L ; 0] = [-8PL ; -4PL ; 0]$$

$$\mathbf{M}_D = [-8PL ; -4PL ; 0]$$

Parametr układu: $K = \mathbf{M}_D \circ \mathbf{S} = [-8PL ; -4PL ; 0]\circ[P ; -4P ; P] = 8P^2L$

$K \neq 0 \quad \Rightarrow$ redukcja do **skrętnika**.

Redukcja do najprostszej postaci:

Wektor wodzący punktu redukcji: $\vec{OD} = [2L\ ;\ 0\ ;\ 3L]$

Wektor łączący punkt D z osią środkową:

$$\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_D}{\mathbf{S}^2} = \frac{[P ; -4P ; P]\times[-8PL ; -4PL ; 0]}{[P ; -4P ; P]\circ[P ; -4P ; P]} = \frac{[4P^2L ; -8P^2L ; -36P^2L]}{18P^2} =$$
$$= \left[\frac{2}{9}L ; -\frac{4}{9}L ; -2L\right]$$

Równanie osi środkowej:

$$\mathbf{r} = \vec{OD} + \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{M}_D}{\mathbf{S}^2} + \lambda\mathbf{S} = [2L ; 0 ; 3L] + \left[\frac{2}{9}L\ ;\ -\frac{4}{9}L\ ;\ -2L\right] + [\lambda P ; -4\lambda P ; \lambda P] =$$
$$= \left[\frac{20}{9}L+\mu\ ;\ -\frac{4}{9}L-4\mu\ ;\ L+\mu\right]$$

Moment w skrętniku:

$$\mathbf{M}_{P}=\frac{K}{\mathbf{S}^{2}}\cdot\mathbf{S}=\frac{8\,P^{2}L}{18\,P^{2}}[P\,;-4\,P\,;P]=\left[\frac{4}{9}PL\;;-\frac{16}{9}PL\;;\frac{4}{9}PL\right]$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do skrętnika złożonego z wektora $\mathbf{W}=\mathbf{S}=[P\;;\;-4\,P\;;\;P]$ zaczepionego w dowolnym punkcie osi środkowej danej równaniami:

$$\mathbf{r}(\mu)=\begin{cases} x=\frac{20}{9}L+\mu \\ y=-\frac{4}{9}L-4\mu \\ z=L+\mu \end{cases}$$

oraz z dowolnej pary o momencie $\mathbf{M}_{P}=\left[\frac{4}{9}PL\;;-\frac{16}{9}PL\;;\frac{4}{9}PL\right]$, równoległym do wektora $\mathbf{S}$.

Moment układu względem prostej AC obliczamy zgodnie z twierdzeniem o momencie względem prostej.

Wektor równoległy do prostej AC: $\vec{AC}=[2\,L\;;\;4\,L\;;\;-3\,L]$

Moment względem dowolnego punktu należącego do prostej obliczamy z twierdzenia o zmianie bieguna:

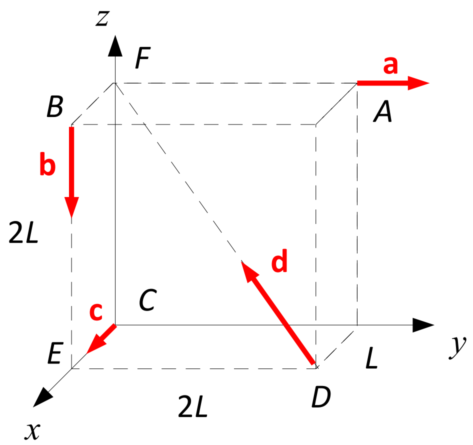
$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{A}=\mathbf{M}_{D}+\mathbf{S}\times\vec{DA}&=[-8\,PL\,;-4\,PL\,;0]+[P\,;-4\,P\,;P]\times[-2\,L\,;0\,;0]=\\&=[-8\,PL\,;-4\,PL\,;0]+[0\,;-2\,PL\,;-8\,PL]=[-8\,PL\,;-6\,PL\,;-8\,PL]\end{aligned}$$

Moment układu względem prostej AC:

$$\mathbf{M}_{AC}=\frac{\mathbf{M}_{A}\circ\vec{AC}}{|\vec{AC}|^{2}}\vec{AC}=\frac{[-8\,PL\,;-6\,PL\,;-8\,PL]\circ[2\,L\,;4\,L\,;-3\,L]}{(2\,L)^{2}+(4\,L)^{2}+(-3\,L)^{2}}[2\,L\,;4\,L\,;-3\,L]=$$

$$=\frac{-16\,PL^{2}}{29\,L^{2}}[2\,L\,;4\,L\,;-3\,L]=\left[-\frac{32}{29}PL\;;-\frac{64}{29}PL\;;\frac{48}{29}PL\right]$$

ZADANIE 11



Zredukuj podany układ do najprostszej postaci:

$|\mathbf{a}| = P$
$|\mathbf{b}| = 2P$
$|\mathbf{c}| = P$
$|\mathbf{d}| = 3P$

ROZWIĄZANIE:

Wektory sił:

$$\mathbf{a} = [0 \; ; \; P \; ; \; 0]$$
$$\mathbf{b} = [0 ; 0 ; -2P]$$
$$\mathbf{c} = [P ; 0 ; 0]$$
$$\mathbf{d} = 3P \cdot \frac{\vec{DF}}{|\vec{DF}|} = \frac{3P}{\sqrt{(-a)^2+(-2a)^2+(2a)^2}}[-L ; -2L ; 2L] = [-P \; ; \; -2P \; ; \; 2P]$$

Suma układu: $\mathbf{S} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = [0 \; ; \; -P \; ; \; 0]$

Redukcja w punkcie E:

$$\mathbf{M}_E(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \vec{AE} = [0 ; P ; 0] \times [L ; -2L ; -2L] = [-2PL ; 0 ; -PL]$$
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_E(\mathbf{d}) = \mathbf{d} \times \vec{DE} = [-P ; -2P ; 2P] \times [0 ; -2L ; 0] = [4PL ; 0 ; 2PL]$$

$$\mathbf{M}_E = [2PL ; 0 ; PL]$$

Parametr układu: $K = \mathbf{M}_E \circ \mathbf{S} = [2PL ; 0 ; PL] \circ [0 ; -P ; 0] = 0$

$K=0 \quad \wedge \quad \mathbf{S} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow$ redukcja do **wypadkowej**.

Redukcja do najprostszej postaci:

Wektor wodzący punktu redukcji: $\vec{OE} = [L ; 0 ; 0]$

Wektor łączący punkt E z osią środkową:

$$\frac{\mathbf{S} \times \mathbf{M}_E}{\mathbf{S}^2} = \frac{[0 ; -P ; 0] \times [2PL ; 0 ; PL]}{[0 ; -P ; 0] \circ [0 ; -P ; 0]} = \frac{[-P^2 L ; 0 ; 2P^2 L]}{P^2} =$$
$$= [-L ; 0 ; 2L]$$

Równanie osi środkowej:

$$\mathbf{r} = \vec{OE} + \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{M}_E}{\mathbf{S}^2} + \lambda \mathbf{S} = [L ; 0 ; 0] + [-L \; ; \; 0 \; ; \; 2L] + [0 ; -\lambda P ; 0] =$$
$$= [0 \; ; \; -\mu \; ; \; 2L]$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wypadkowej $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [0\ ;\ -P\ ;\ 0]$ zaczepionej w dowolnym punkcie osi środkowej danej równaniami:

$$\mathbf{r}(\mu) = \begin{cases} x = 0 \\ y = -\mu \\ z = 2L \end{cases}$$

Oś środkowa jest tutaj prostą poziomą, równoległą do osi *y* (wektor sumy jest równoległy do osi *y*), zawierająca punkt $F = (0 ; 0 ; 2L)$ – współrzędne tego punktu otrzymamy podstawiając w równaniach osi środkowej $\mu = 0$. Zobaczmy, co stałoby się, gdybyśmy za pierwotny punkt redukcji przyjęli właśnie punkt F. Wtedy:

Redukcja w punkcie F:

$$\mathbf{M}_F(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_F(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \vec{BF} = [0 ; 0 ; -2P] \times [-L ; 0 ; 0] = [0 ; 2PL ; 0]$$
$$\mathbf{M}_F(\mathbf{c}) = \mathbf{c} \times \vec{CF} = [P ; 0 ; 0] \times [0 ; 0 ; 2L] = [0 ; -2PL ; 0]$$
$$\mathbf{M}_F(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_F = [0 ; 0 ; 0]$$

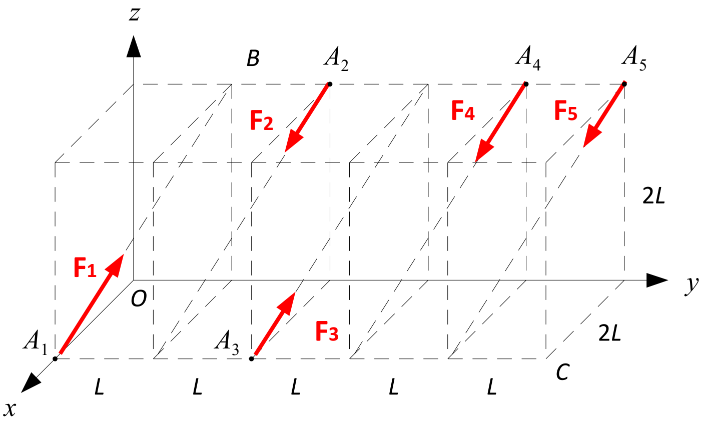
Z faktu, że $\mathbf{M}_F = \mathbf{0}$ od razu wynika, że $K = 0$ i $\mathbf{M}_F \times \mathbf{S} = \mathbf{0}$, skąd wnioskujemy, że układ redukuje się do wypadkowej zaczepionej w osi środkowej, która zawiera punkt F i jest równoległa do **S**.

ZADANIE 12

Zredukuj podany układ do najprostszej postaci:

$$|\mathbf{F}_1| = 6\,P$$
$$|\mathbf{F}_2| = 4\,P$$
$$|\mathbf{F}_3| = 3\,P$$
$$|\mathbf{F}_4| = 5\,P$$
$$|\mathbf{F}_5| = 3\,P$$

Wyznacz moment układu względem punktu C.



ROZWIĄZANIE:

Wektory wodzące punktów przyłożenia sił:

$$\mathbf{r_1} = [2\,L;0;0]$$
$$\mathbf{r_2} = [0;2\,L;2\,L]$$
$$\mathbf{r_3} = [2\,L;2\,L;0]$$
$$\mathbf{r_4} = [0;4\,L;2\,L]$$
$$\mathbf{r_5} = [0;5\,L;2\,L]$$

Przyjmujemy **wersor**: $\mathbf{e} = \dfrac{\vec{A_1 B}}{|\vec{A_1 B}|} = \dfrac{[-2\,L\ ;\ L\ ;\ 2\,L]}{\sqrt{(-2\,L)^2+L^2+(2\,L)^2}} = \left[-\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right]$

$$\begin{array}{llll}
F_1=6\,P & F_1\mathbf{r_1} = & 6\,P[2\,L;0;0] = & [12\,PL;0;0] \\
F_2=-4\,P & F_2\mathbf{r_2} = & -4\,P[0;2\,L;2\,L] = & [0;-8\,PL;-8\,PL] \\
F_3=3\,P & F_3\mathbf{r_3} = & 3\,P[2\,L;2\,L;0] = & [6\,PL;6\,PL;0] \\
F_4=-5\,P & F_4\mathbf{r_4} = & -5\,P[0;4\,L;2\,L] = & [0;-20\,PL;-10\,PL] \\
F_5=-3\,P & F_5\mathbf{r_5} = & -3\,P[0;5\,L;2\,L] = & [0;-15\,PL;-6\,PL] \\
\hline
S=\sum_{i=1}^{5} F_i=-3\,P & & \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{5} F_i\mathbf{r_i}=[18\,PL;-37\,PL;-24\,PL] &
\end{array}$$

Suma jest różna od 0 – układ redukuje się do wypadkowej.

Wypadkowa: $\mathbf{W} = \mathbf{S} = S\,\mathbf{e} = -3\,P\left[-\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right] = [2\,P;-P;-2\,P]$

Środek równoległego układu sił: $\vec{OO^*} = \dfrac{\mathbf{M}}{S} = \dfrac{[18\,PL;-37\,PL;-24\,PL]}{-3\,P} = \left[-6\,L\ ;\ \dfrac{37}{3}\,L\ ;\ 8\,L\right]$

Równanie osi środkowej:

$$\mathbf{r}(\lambda) = \overrightarrow{OO^*} + \lambda \mathbf{S} = \left[-6L \; ; \; \frac{37}{3}L \; ; \; 8L\right] + \lambda[2P; -P; -2P] = \begin{cases} x = -6L + 2P\lambda \\ y = \frac{37}{3}L - P\lambda \\ z = 8L - 2P\lambda \end{cases}$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wypadkowej $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [2P; -P; -2P]$ zaczepionej w punkcie osi środkowej danej równaniami:

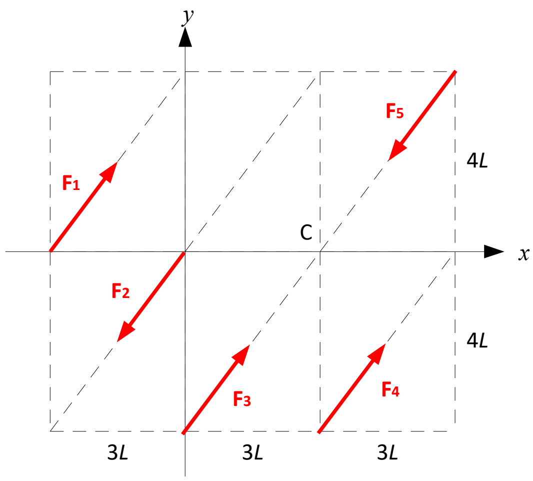
$$\mathbf{r}(\lambda) = \begin{cases} x = -6L + 2P\lambda \\ y = \frac{37}{3}L - P\lambda \\ z = 8L - 2P\lambda \end{cases}$$

Moment układu sił względem punktu C wyznaczamy korzystając z twierdzenia o zmianie bieguna i z faktu, że moment układu względem środka układu równoległego jest zerowy:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{S} \times \overrightarrow{O^*C} = [2P; -P; -2P] \times \left[2L - (-6L); 5L - \frac{37}{3}L; 0 - 8L\right] =$$
$$= \left[-\frac{20}{3}PL \; ; \; 0 \; ; \; -\frac{20}{3}PL\right]$$

ZADANIE 13

Zredukuj podany układ do najprostszej postaci:



$$|\mathbf{F}_1| = 5\,P$$
$$|\mathbf{F}_2| = 10\,P$$
$$|\mathbf{F}_3| = 5\,P$$
$$|\mathbf{F}_4| = 15\,P$$
$$|\mathbf{F}_5| = 20\,P$$

Zilustruj uzyskany wynik.
Wyznacz moment układu względem punktu C.

ROZWIĄZANIE:

Przyjmujemy **wersor**: $\mathbf{e} = \dfrac{[3\,L\;;\;4\,L\;;\;0]}{\sqrt{(3\,L)^2+(4\,L)^2+0^2}} = \left[\dfrac{3}{5}\;;\;\dfrac{4}{5}\;;\;0\right]$

$$\begin{array}{lll}
F_1 = 5\,P & F_1\mathbf{r}_1 = \;\;5\,P[-3\,L;0;0] & = [-15\,PL;0;0] \\
F_2 = -10\,P & F_2\mathbf{r}_2 = -10\,P[0;0;0] & = [0;0;0] \\
F_3 = 5\,P & F_3\mathbf{r}_3 = \;\;5\,P[0;-4\,L;0] & = [0\,PL;-20\,PL;0] \\
F_4 = 15\,P & F_4\mathbf{r}_4 = \;\;15\,P[3\,L;-4\,L;0] & = [45\,PL;-60\,PL;0] \\
F_5 = -20\,P & F_5\mathbf{r}_5 = -20\,P[6\,L;4\,L;0] & = [-120\,PL;-80\,PL;0] \\
\hline
S = \sum_{i=1}^{5} F_i = -5\,P & & \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{5} F_i\mathbf{r}_i = [-90\,Pa;-160\,Pa;0]
\end{array}$$

Suma jest różna od 0 – układ redukuje się do wypadkowej.

Wypadkowa: $\mathbf{W} = \mathbf{S} = S\,\mathbf{e} = (-5\,P)\left[\dfrac{3}{5}\;;\;\dfrac{4}{5}\;;\;0\right] = [-3\,P;-4\,P;0]$

Środek równoległego układu sił: $\vec{OO}^* = \dfrac{\mathbf{M}}{S} = \dfrac{[-90\,PL;-160\,PL;0]}{5\,P} = [18\,L\;;\;32\,L\;;\;0]$

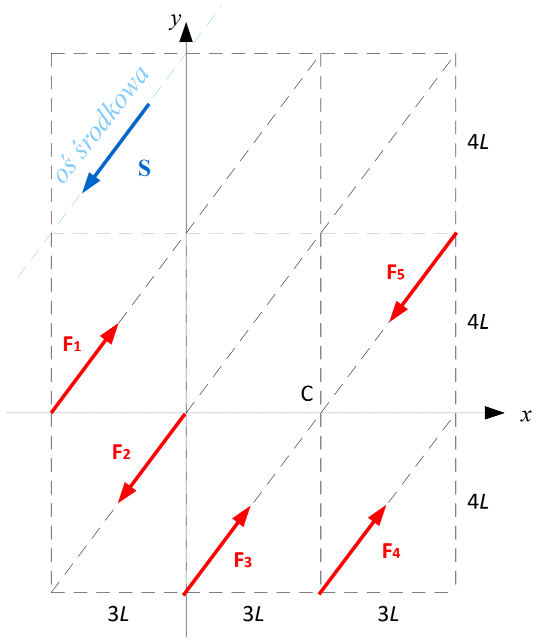
Równanie osi środkowej:

$$\mathbf{r}(\lambda) = \vec{OO}^* + \lambda\mathbf{S} = [18\,L\;;\;32\,L\;;\;0] + \lambda[-3\,P;-4\,P;0] = \begin{cases} x = 18\,L - 3\,P\,\lambda \\ y = 32\,L - 4\,P\,\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Prostą na płaszczyźnie możemy zapisać w prostszej postaci, rugując parametr λ. Mnożąc pierwsze równanie przez (-4), drugie zaś przez 3 i dodając je do siebie otrzymamy:

$$-4\,x + 3\,y = -72\,L + 12\,P\,\lambda + 96\,L - 12\,P\,\lambda \quad\Rightarrow\quad y = \frac{4}{3}\,x + 8\,L$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wypadkowej $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [-3P; -4P; 0]$ zaczepionej w punkcie osi środkowej o równaniu: $y = \frac{4}{3}x + 8L$

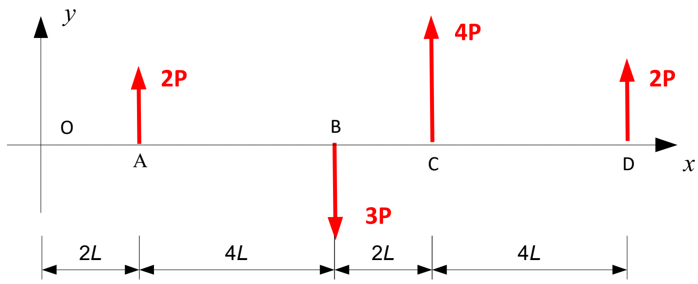


Moment układu sił względem punktu C jest równy:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{S} \times \overrightarrow{O^*C} = [-3P; -4P; 0] \times [3L - 18L; 0 - 32L; 0] = [0\ ;\ 0\ ;\ 36PL]$$

ZADANIE 14

Zredukuj podany układ sił do najprostszej postaci.



ROZWIĄZANIE:
Przyjmujemy wersor: $\mathbf{e}=[0;1;0]$

$$
\begin{array}{ll}
F_1=2P & F_1\mathbf{r}_1=2P[2L;0;0]=[4PL;0;0] \\
F_2=-3P & F_2\mathbf{r}_2=-3P[6L;0;0]=[-18PL;0;0] \\
F_3=4P & F_3\mathbf{r}_3=4P[8L;0;0]=[32PL;0;0] \\
F_4=2P & F_4\mathbf{r}_4=2P[12L;0;0]=[24PL;0;0] \\
\hline
S=\sum_{i=1}^{5}F_i=5P & \mathbf{M}=\sum_{i=1}^{5}F_i\mathbf{r}_i=[42PL;0;0]
\end{array}
$$

Suma jest różna od 0 – układ redukuje się do wypadkowej.

Wypadkowa: $\mathbf{W}=\mathbf{S}=S\mathbf{e}=5P[0;1;0]=[0;5P;0]$

Środek równoległego układu sił: $\vec{OO}^*=\dfrac{\mathbf{M}}{S}=\dfrac{[42PL;0;0]}{5P}=[8{,}4L\,;\,0\,;\,0]$

Równanie osi środkowej: $\mathbf{r}(\lambda)=\vec{OO}^*+\lambda\mathbf{S}=[8{,}4L\,;\,0\,;\,0]+\lambda[0;5P;0]=\begin{cases}x=8{,}4\\ y=5\lambda P\\ z=0\end{cases}$

Powyższe obliczenia sugerują prostszy sposób liczenia. Skoro wszystkie siły są pionowe, nie potrzeba zatem opisywać ich wektorami, skoro ich kierunek i tak jest znany. Podobnie, ponieważ wszystkie siły leżą w jednej płaszczyźnie i zaczepione są na jednej prostej, stąd nie musimy opisywać ich położenia wektorem wodzącym punktu zaczepienia, a jedynie podając odciętą tego punktu na osi x. Wreszcie, ponieważ wektory leżą w jednej płaszczyźnie, więc momenty tych sił względem dowolnego punktu na tej płaszczyźnie będą do siebie równoległe, tj. prostopadłe do tej płaszczyzny – wystarczy zatem, że podany tę jedyną niezerową składową wektorów momentu.

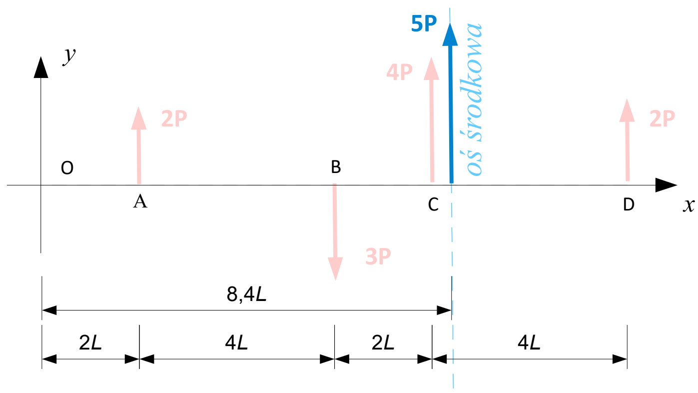
Mamy więc:

$$S=\sum_{i=1}^{n} a_i = 2P-3P+4P+2P=5P$$
$$M=\sum_{i=1}^{n} a_i r_i = (2P)\cdot(2L)+(-3P)\cdot(6L)+(4P)\cdot(8L)+(2P)\cdot(12L)=42Pa$$

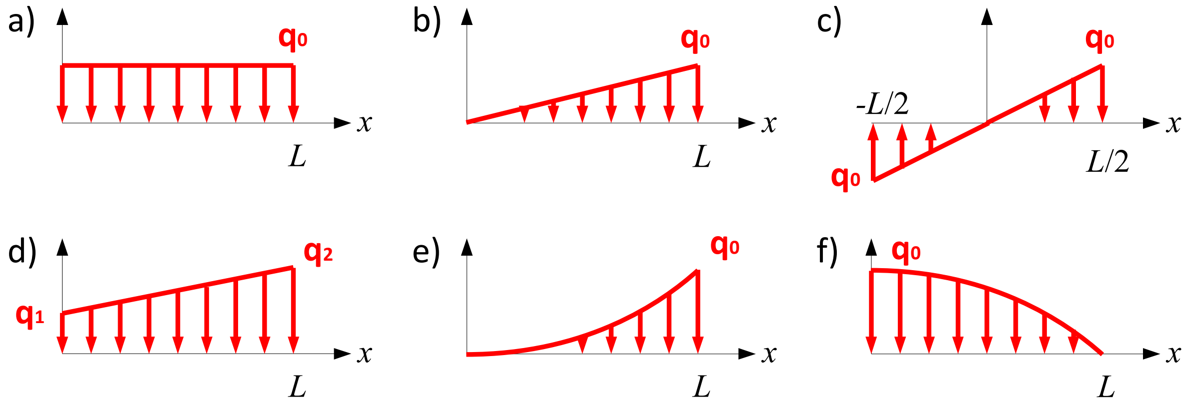
Wszystkie wektory są pionowe i leżą w jednej płaszczyźnie, zatem oś środkowa układu będzie również pionowa i leżeć będzie w tej płaszczyźnie. Wystarczy, że znajdziemy jeden punkt, który do niej należy. Tym puntem jest środek równoległego układu sił o odciętej:

$$x_O=\frac{M}{S}=8{,}4\,L$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wypadkowej $\mathbf{W}=\mathbf{S}=[0\,;5P\,;0]$ zaczepionej w punkcie osi środkowej leżącej w płaszczyźnie $(x\,,y)$ danej równaniem $x=8{,}4\,L$.



ZADANIE 15
Zredukuj podane ciągłe układy sił.



ROZWIĄZANIE:

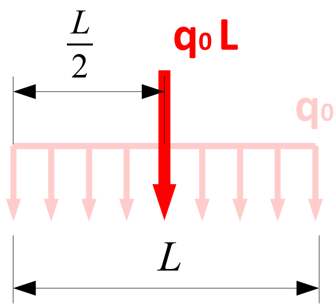
a) Obciążenie prostokątne

Funkcja intensywności obciążenia: $q(x) = q_0$

Suma: $S = \int_0^L q_0 \,\mathrm{d}x = [qx]_0^L = q_0 L$

Moment: $M = \int_0^L q_0 x \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{q_0 x^2}{2}\right]_0^L = \dfrac{q_0 L^2}{2}$

Środek układu: $x_O = \dfrac{M}{S} = \dfrac{L}{2}$



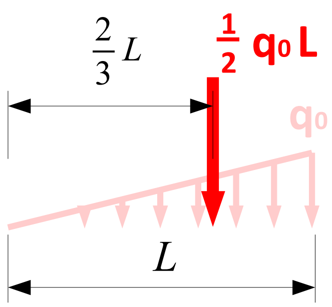
b) Obciążenie trójkątne

Funkcja intensywności obciążenia: $q(x) = \dfrac{q_0}{L} x$

Suma: $S = \int_0^L \dfrac{q_0}{L} x \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{q_0 x^2}{2L}\right]_0^L = \dfrac{q_0 L}{2}$

Moment: $M = \int_0^L \dfrac{q_0}{L} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{q_0 x^3}{3L}\right]_0^L = \dfrac{q_0 L^2}{3}$

Środek układu: $x_O = \dfrac{M}{S} = \dfrac{2}{3} L$



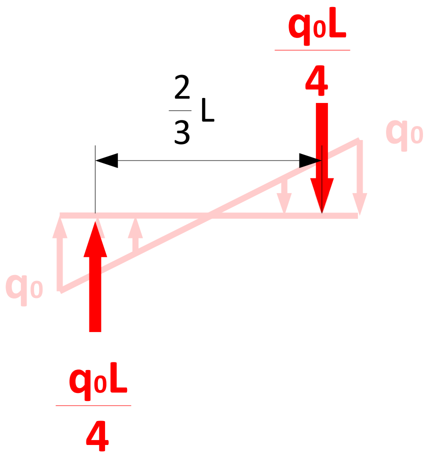
c) Antysymetryczne obciążenie liniowe

Funkcja intensywności obciążenia: $q(x) = \frac{2q_0}{L}x$

Suma: $S = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2q_0}{L} x \, dx = \left[\frac{q_0 x^2}{L} \right]_{-L/2}^{L/2} = 0$

Moment: $M = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2q_0}{L} x^2 \, dx = \left[\frac{2 q_0 x^3}{3L} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{q_0 L^2}{6}$

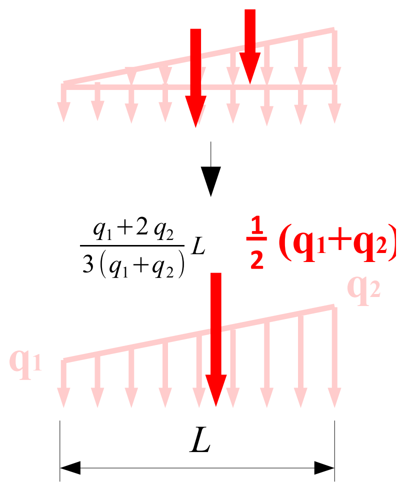
Suma układu jest równa 0, moment zaś jest różny od 0. Podany układ sił redukuje się zatem do pary o momencie $\frac{q_0 L^2}{6}$. Parę tę można wyznaczyć dowolnie – w szczególności każdą z trójkątnych części obciążenia możemy zastąpić wypadkową:



$$M = P \cdot d = \frac{q_0 L}{4} \cdot \frac{2}{3} L = \frac{q_0 L^2}{6}$$

d) Obciążenie trapezowe

Wypadkową tego obciążenia najprościej znaleźć traktując je jako superpozycję obciążenia prostokątnego o intensywności q_1 i trójkątnego o intensywności $q_2 - q_1$, zgodnie z rysunkiem:



Suma: $S = q_1 L + \frac{1}{2}(q_2 - q_1) L = \frac{(q_1+q_2)L}{2}$

Moment: $M = \frac{q_1 L^2}{2} + \frac{(q_2 - q_1) L^2}{3} = \frac{(q_1 + 2q_2) L^2}{6}$

Środek układu: $x_O = \frac{M}{S} = \frac{q_1 + 2q_2}{3(q_1+q_2)} L$

e) Obciążenie paraboliczne I

Intensywność obciążenia jest pewną funkcją kwadratową $q(x) = A x^2 + B x + C$, której parametry wyznaczamy na podstawie rysunku. Mamy bowiem:

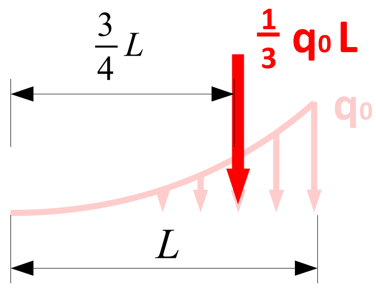
$$\begin{cases} q(0)=0 \\ q'(0)=0 \\ q(L)=q_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ B=0 \\ A L^2 + B L + C = q_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{q_0}{L^2} \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

Funkcja intensywności obciążenia: $q(x) = \dfrac{q_0}{L^2} x^2$

Suma: $S = \int\limits_0^L \dfrac{q_0}{L^2} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{q_0 x^3}{3 L^2} \right]_0^L = \dfrac{q_0 L}{3}$

Moment: $M = \int\limits_0^L \dfrac{q_0}{L^2} x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{q_0 x^4}{4 L^2} \right]_0^L = \dfrac{q_0 L^2}{4}$

Środek układu: $x_O = \dfrac{M}{S} = \dfrac{3}{4} L$



f) Obciążenie paraboliczne II

Intensywność obciążenia jest pewną funkcją kwadratową $q(x) = A x^2 + B x + C$, której parametry wyznaczamy na podstawie rysunku. Mamy bowiem:

$$\begin{cases} q(0)=q_0 \\ q'(0)=0 \\ q(L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=q_0 \\ B=0 \\ A L^2 + B L + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{q_0}{L^2} \\ B=0 \\ C=q_0 \end{cases}$$

Funkcja intensywności obciążenia: $q(x) = -\dfrac{q_0}{L^2} x^2 + q_0$

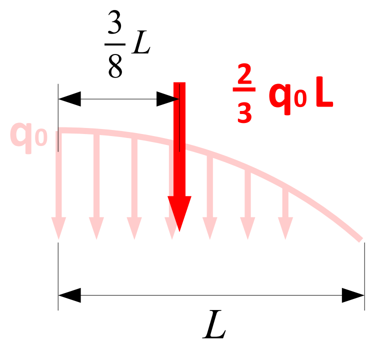
Suma: $S = \int\limits_0^L -\dfrac{q_0}{L^2} x^2 + q_0 \,\mathrm{d}x = \left[q_0 x - \dfrac{q_0 x^3}{3 L^2} \right]_0^L = $

$= q_0 L - \dfrac{q_0 L}{3} = \dfrac{2}{3} q_0 L$

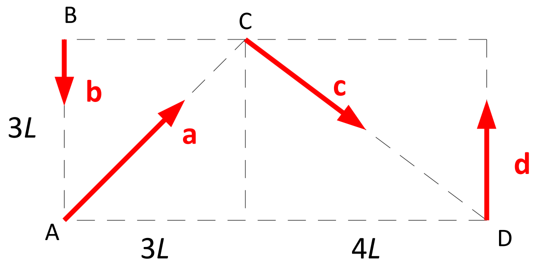
Moment: $M = \int\limits_0^L \left(-\dfrac{q_0}{L^2} x^2 + q_0 \right) x \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{q_0 x^2}{2} - \dfrac{q_0 x^4}{4 L^2} \right]_0^L =$

$= \dfrac{q_0 L^2}{2} - \dfrac{q_0 L^2}{4} = \dfrac{q_0 L^2}{4}$

Środek układu: $x_O = \dfrac{M}{S} = \dfrac{3}{8} L$



ZADANIE 16
Wyznacz sumę momentów podanego układu względem punktów A i D



$|\mathbf{a}| = P\sqrt{2}$
$|\mathbf{b}| = 2P$
$|\mathbf{c}| = 5P$
$|\mathbf{d}| = P$

ROZWIĄZANIE:

Wektory: $\mathbf{a} = [P; P; 0]$ $\mathbf{b} = [0; -2P; 0]$ $\mathbf{c} = [4P; -3P; 0]$ $\mathbf{d} = [0; P; 0]$

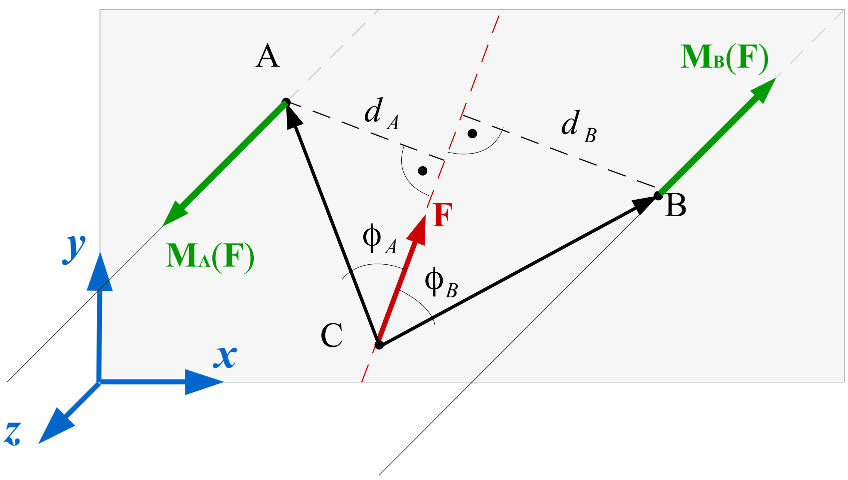
Moment układu względem punktu A. Moment od sił $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest zerowy. Każdą siłę można przesuwać do dowolnego punktu leżącego na jej prostej działania, zatem siły $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ można sprowadzić do punktu D i dodać do siebie:

$$\mathbf{M}_A = (\mathbf{c}+\mathbf{d}) \times \vec{DA} = [4P; -2P; 0] \times [-7L; 0; 0] = [0, 0, -14PL]$$

Moment układu względem punktu D. Moment od sił $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ jest zerowy. Każdą siłę można przesuwać do dowolnego punktu leżącego na jej prostej działania, zatem siły $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ można sprowadzić do punktu A i dodać do siebie:

$$\mathbf{M}_D = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \vec{AD} = [P; -P; 0] \times [7L; 0; 0] = [0, 0, 7PL]$$

Moment płaskiego układu sił zawsze jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny, w której zaczepione są i leżą siły. Zgodnie z poniższym przykładem, wektory sił leżące w płaszczyźnie (x, y) mają zawsze momenty równoległe do osi z . Składowa na osi z jest równa (co do wartości bezwzględnej) ich długości, którą wyznaczamy z definicji iloczynu wektorowego:



$\mathbf{F} = [F_x; F_y; 0]$
$\mathbf{r} = [r_x; r_y; 0]$
$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} = [0; 0; M_z]$

$|M_z| = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \sin\phi = |\mathbf{F}| \cdot d$

Wartość momentu siły względem punktu jest równa **wartości tej siły** pomnożonej przez **odległość bieguna od prostej działania** tej siły. Znak określamy z reguły śruby prawoskrętnej. Moment **dodatni**, to taki, dla którego siła „obraca się” wokół bieguna **przeciwnie do ruchu wskazówek zegara**.

$M_z > 0$ $\qquad$ $M_z < 0$

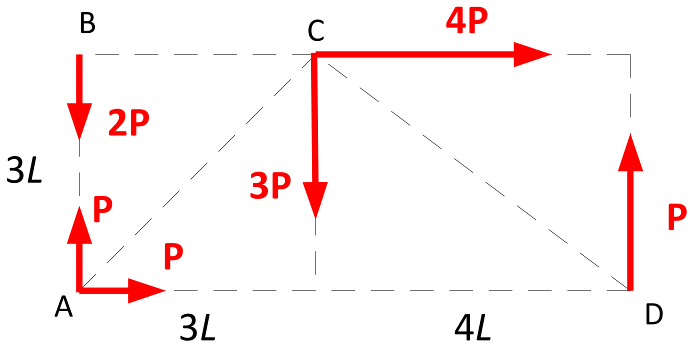
Nasze zadanie możemy teraz rozwiązać w uproszczony sposób:

- Rozkładamy siły na **składowe poziome i pionowe**
- Wartość moment to wartość siły przemnożonej przez odległość bieguna od prostej działania siły

moment = siła x ramię

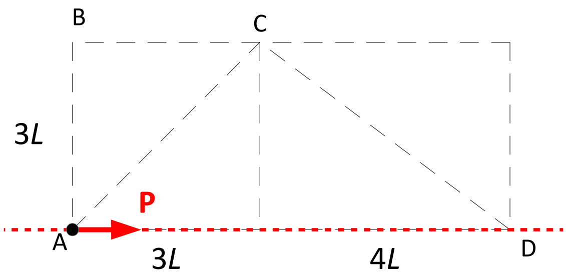
- Obliczając moment wyznaczamy **odległości bieguna od prostych działania wszystkich sił (ramię):**
  - **odległość od prostej pionowej** mierzymy **poziomie**
  - **odległość od prostej poziomej** mierzymy **w pionie**

- **Moment dodatni** odpowiada obrotowi **przeciwnie do ruchu wskazówek zegara**
- **Moment ujemny** odpowiada obrotowi **zgodnie z ruchem wskazówek zegara**



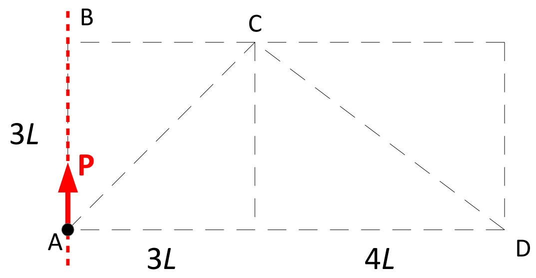
Moment układu względem punktu A:

Rozpiszmy obliczenia bardzo szczegółowo, obliczając moment dla każdej z siły osobno.



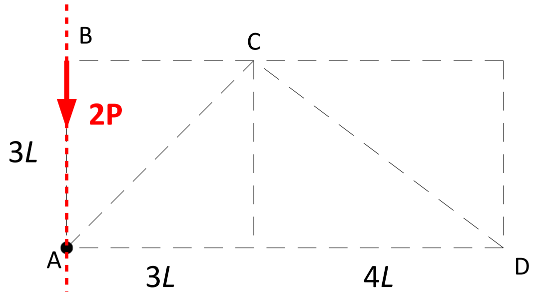
Punkt A leży na prostej działania siły P (punkt zaczepienia siły pokrywa się z biegunem A). Moment od tej siły jest zerowy.

$$M = 0$$



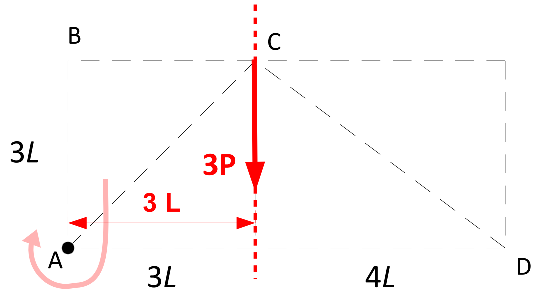
Punkt A leży na prostej działania siły P (punkt zaczepienia siły pokrywa się z biegunem A). Moment od tej siły jest zerowy.

$$M = 0$$



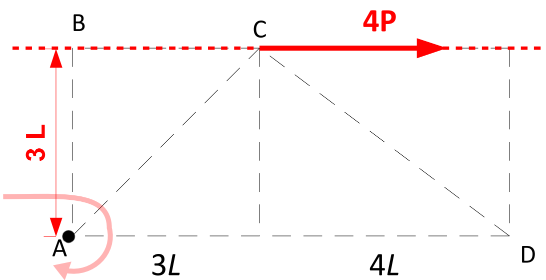
Punkt A leży na prostej działania siły 2P. Moment od tej siły jest zerowy.

$$M = 0$$



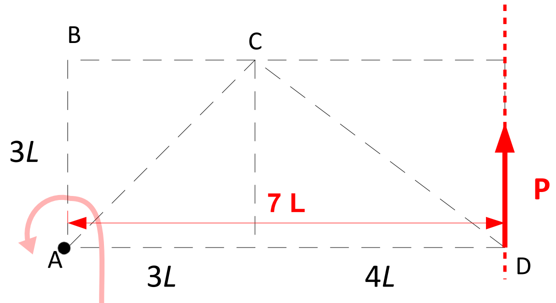
Odległość bieguna A od prostej działania siły 3P to 3L. Gdy przesuwamy tę siłę wzdłuż jej prostej działania w kierunku zgodnym z jej orientacją, gdyby siła miała zakręcić na wysokości punktu A, musiałaby zacząć kręcić się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Moment jest ujemny.

$$M = -3P \cdot 3L$$



Odległość bieguna A od prostej działania siły 4P to 3L. Gdy przesuwamy tę siłę wzdłuż jej prostej działania w kierunku zgodnym z jej orientacją, gdyby siła miała zakręcić na wysokości punktu A, musiałaby zacząć kręcić się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Moment jest ujemny.

$$M = -4P \cdot 3L$$



Odległość bieguna A od prostej działania siły P to 7L. Gdy przesuwamy tę siłę wzdłuż jej prostej działania w kierunku zgodnym z jej orientacją, gdyby siła miała zakręcić na wysokości punktu A, musiałaby zacząć kręcić się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Moment jest dodatni.

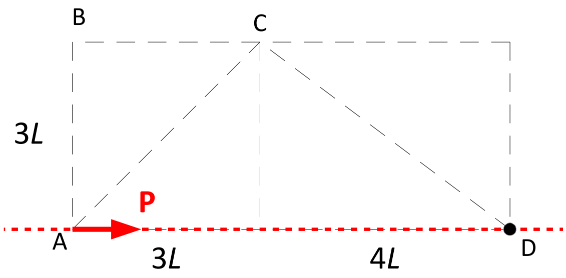
$$M = +P \cdot 7L$$

Podsumowując:

$$M_A = \underbrace{P\cdot 0 + P\cdot 0}_{\mathbf{M}(\mathbf{a})} + \underbrace{2P\cdot 0}_{\mathbf{M}(\mathbf{b})} \underbrace{-3P\cdot 3L - 4P\cdot 3L}_{\mathbf{M}(\mathbf{c})} \underbrace{+P\cdot 7L}_{\mathbf{M}(\mathbf{d})} =$$
$$= -9PL - 12PL + 7PL = -14PL$$

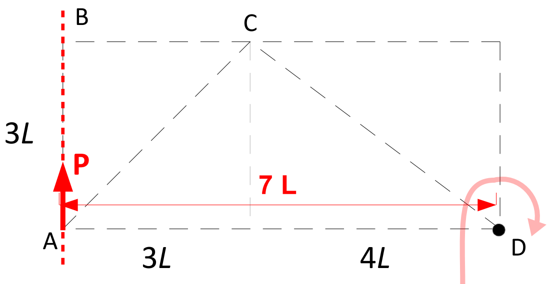
Moment układu względem punktu D:

Rozpiszmy obliczenia bardzo szczegółowo, obliczając moment dla każdej z siły osobno.



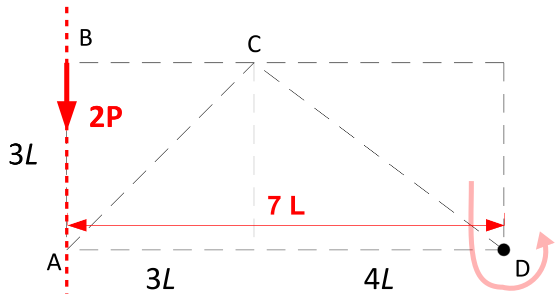
Punkt D leży na prostej działania siły P. Moment od tej siły jest zerowy.

$$M = 0$$



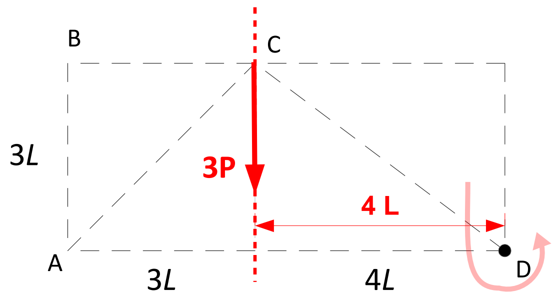
Odległość bieguna D od prostej działania siły P to 7L. Gdy przesuwamy tę siłę wzdłuż jej prostej działania w kierunku zgodnym z jej orientacją, gdyby siła miała zakręcić na wysokości punktu D, musiałaby zacząć kręcić się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Moment jest ujemny.

$$M = -P\cdot 7L$$



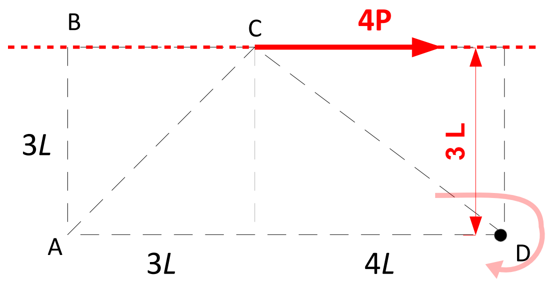
Odległość bieguna D od prostej działania siły 2P to 7L. Gdy przesuwamy tę siłę wzdłuż jej prostej działania w kierunku zgodnym z jej orientacją, gdyby siła miała zakręcić na wysokości punktu D, musiałaby zacząć kręcić się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Moment jest dodatni.

$$M = +2P\cdot 7L$$



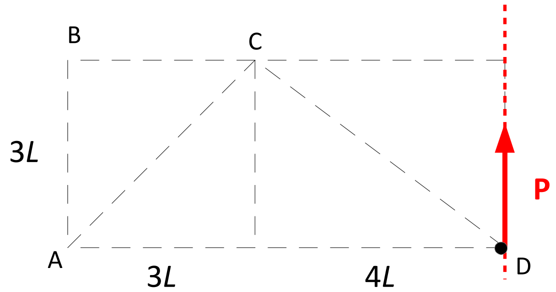
Odległość bieguna D od prostej działania siły 3P to 4L. Gdy przesuwamy tę siłę wzdłuż jej prostej działania w kierunku zgodnym z jej orientacją, gdyby siła miała zakręcić na wysokości punktu D, musiałaby zacząć kręcić się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Moment jest dodatni.

$$M = +3P\cdot 4L$$



Odległość bieguna D od prostej działania siły 4P to 3L. Gdy przesuwamy tę siłę wzdłuż jej prostej działania w kierunku zgodnym z jej orientacją, gdyby siła miała zakręcić na wysokości punktu D, musiałaby zacząć kręcić się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Moment jest ujemny.

$$M = -4P \cdot 3L$$



Punkt D leży na prostej działania siły P (punkt zaczepienia siły pokrywa się z biegunem D). Moment od tej siły jest zerowy.

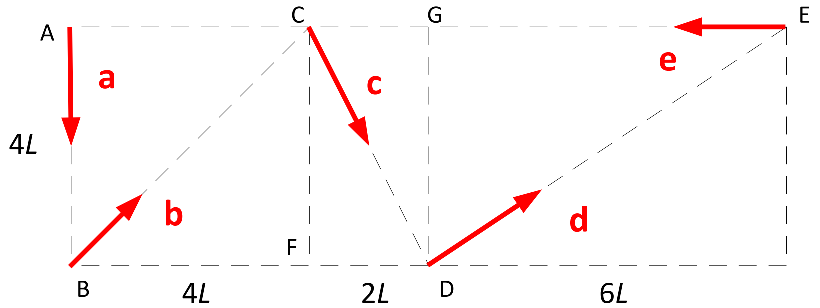
$$M = 0$$

Podsumowując:

$$M_D = \underbrace{P \cdot 0 - P \cdot 7L}_{\mathbf{M(a)}} \underbrace{+ 2P \cdot 7L}_{\mathbf{M(b)}} \underbrace{+ 3P \cdot 4L - 4P \cdot 3L}_{\mathbf{M(c)}} + \underbrace{P \cdot 0}_{\mathbf{M(d)}} =$$
$$= -7PL + 14PL + 12PL - 12PL = 7PL$$

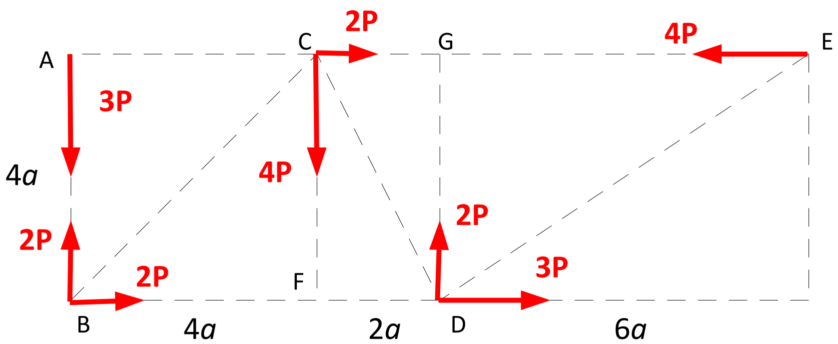
ZADANIE 17

Oblicz momenty podanego układu sił względem punktów F i G



$$|\mathbf{a}| = 3\,P$$
$$|\mathbf{b}| = 2\sqrt{2}\,P$$
$$|\mathbf{c}| = 2\sqrt{5}\,P$$
$$|\mathbf{d}| = \sqrt{13}\,P$$
$$|\mathbf{e}| = 4\,P$$

ROZWIĄZANIE:



$$\mathbf{a}=[0;-3\,P]$$
$$\mathbf{b}=[2\,P;2\,P]$$
$$\mathbf{c}=[2\,P;-4\,P]$$
$$\mathbf{d}=[3\,P;2\,P]$$
$$\mathbf{e}=[-4\,P;0]$$

Moment układu względem punktu F:

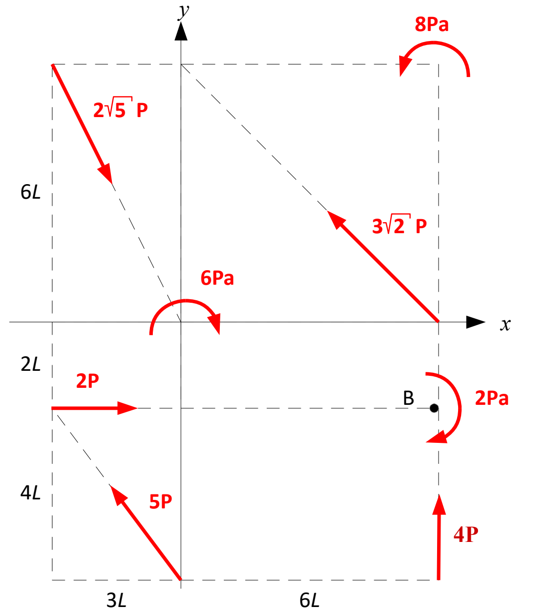
$$M_F = \underbrace{+3\,P\cdot 4\,L}_{\mathbf{M}(\mathbf{a})} \underbrace{-\,2\,P\cdot 4\,L + 2\,P\cdot 0}_{\mathbf{M}(\mathbf{b})} \underbrace{+\,4\,P\cdot 0 - 2\,P\cdot 4\,L}_{\mathbf{M}(\mathbf{c})} \underbrace{+\,2\,P\cdot 2\,L + 3\,P\cdot 0}_{\mathbf{M}(\mathbf{d})} \underbrace{+\,4\,P\cdot 4\,L}_{\mathbf{M}(\mathbf{e})} = 16\,PL$$

Moment układu względem punktu G:

$$M_G = \underbrace{+3\,P\cdot 6\,L}_{\mathbf{M}(\mathbf{a})} \underbrace{-\,2\,P\cdot 6\,L + 2\,P\cdot 4\,L}_{\mathbf{M}(\mathbf{b})} \underbrace{+\,4\,P\cdot 2\,L - 2\,P\cdot 0}_{\mathbf{M}(\mathbf{c})} \underbrace{+\,2\,P\cdot 0 + 3\,P\cdot 4\,L}_{\mathbf{M}(\mathbf{d})} \underbrace{+\,4\,P\cdot 0}_{\mathbf{M}(\mathbf{e})} = 34\,PL$$

ZADANIE 18

Zredukuj podany układ sił w punkcie B, a następnie, do najprostszej postaci.



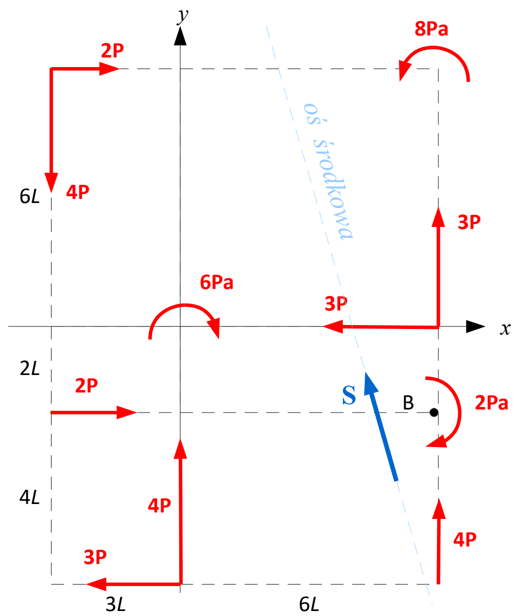
ROZWIĄZANIE:
Rozkładamy wszystkie podane siły na składowe pionowe i poziome.

Suma rzutów sił na kierunek x
$$\Sigma F_x = 2P - 3P + 2P - 3P = -2P$$

Suma rzutów sił na kierunek y
$$\Sigma F_y = -4P + 3P + 4P + 4P = 7P$$

Moment układu względem punktu B:
$$\Sigma M_O = -2P \cdot 8a + 4P \cdot 9a + 8Pa - 6Pa + 3P \cdot 2a + -2Pa - 3P \cdot 4a - 4P \cdot 6a = -10Pa$$

Układ redukuje się w puncie B do wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [-2P; 7P; 0]$ oraz do pary o momencie $\mathbf{M}_B = [0; 0; -10Pa]$.



Płaski układ sił może zredukować się jedynie do układu zerowego, pary sił lub do wypadkowej. Suma podanego układu płaskiego jest różna od 0, zatem układ redukuje się do wypadkowej. Oś środkowa będzie równoległa do wektora sumy. Musimy znaleźć punkt $P(x, y, 0)$ należący do osi środkowej. Moment względem punktu należącego do osi środkowej musi być równy 0. Korzystamy z twierdzenia o zmianie bieguna. Wektor łączący stary biegun i nowy biegu wyznaczamy odejmując współrzędne początku od współrzędnych końca:

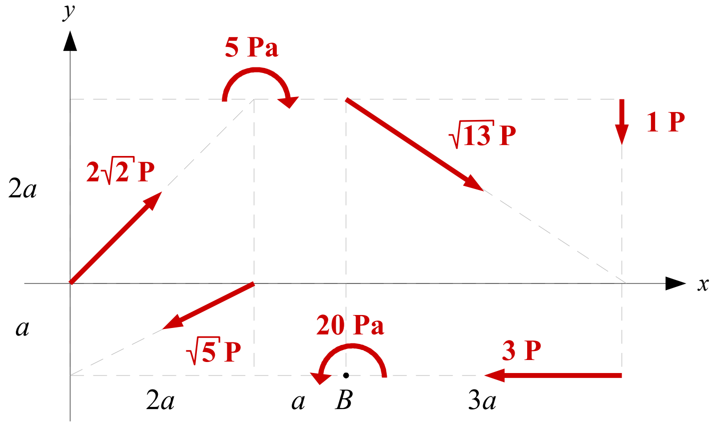
$$\begin{matrix} P = (x; y; 0) \\ B = (6L; -2L; 0) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{BP} = [x - 6L \,;\; y - (-2L) \,;\; 0]$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_P = \mathbf{M}_B + \mathbf{S} \times \vec{BP} \quad \Rightarrow \quad [0; 0; 0] = [0; 0; -10PL] + [-2P; 7P; 0] \times [x - 6L; y + 2L; 0]$$
$$[0; 0; 0] = [0; 0; -10PL] + [0; 0; -2P(y + 2L) - 7P(x - 6L)]$$
$$[0; 0; 0] = [0; 0; -10PL - 2Py - 7Px - 4PL + 42PL]$$
$$28PL - 2Py - 7Px = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 14L - \frac{7}{2}x$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wypadkowej $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [-2P; 7P; 0]$ zaczepionej w osi środkowej o równaniu $y = 14a - \frac{7}{2}x$.

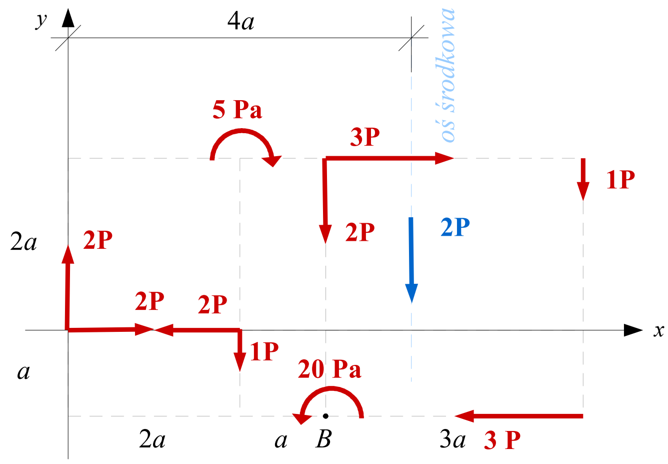
ZADANIE 19

Zredukuj podany układ sił w punkcie B, a następnie do najprostszej postaci.



ROZWIĄZANIE:

Rozkładamy wszystkie siły na składowe poziomie i pionowe, a następnie obliczamy sumę układu i moment układu względem P. **UWAGA**: Moment skupiony w każdym punkcie zawsze daje ten sam moment, również w punkcie, w którym jest przyłożony.



Suma na kierunku x :

$$\Sigma F_x = 3P + 2P - 2P - 3P = 0$$

Suma na kierunku y :

$$\Sigma F_y = 2P - P - 2P - P = -2P$$

Moment układu względem punktu B:

$$\Sigma M_B = -5Pa + 0 - 3P \cdot 3a - P \cdot 3a - 2P \cdot 3a - 2P \cdot a + 2P \cdot a + P \cdot a + 20Pa + 0 = -2Pa$$

Podany układ sił redukuje się w punkcie B do wektora $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [0; -2P; 0]$ oraz do pary o momencie $\mathbf{M} = [0; 0; -2Pa]$.

Suma układu jest różna od 0, zatem układ redukuje się do wypadkowej. Położenie wypadkowej znajdujemy z warunku zerowania się momentu względem punktów osi środkowej. Stosujemy twierdzenie o zmianie bieguna:

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_P = \mathbf{M}_B + \mathbf{S} \times \vec{BP} \quad \Rightarrow \quad [0;0;0] = [0;0;-2Pa] + [0;-2P;0] \times [x-3a; y+a; 0]$$

$$[0;0;0] = [0;0;-2Pa] + [0;0;2Px - 6Pa]$$

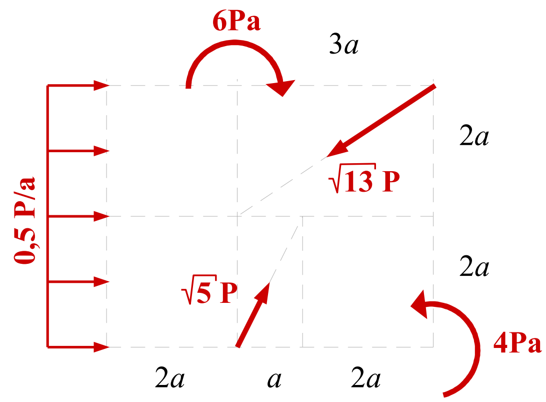
$$[0;0;0] = [0;0;2Px - 8Pa]$$

$$2Px - 8Pa = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4a$$

Podany układ sił redukuje się w najprostszej postaci do wypadkowej $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [0; -2P; 0]$ zaczepionej w osi środkowej o równaniu $x = 4a$,

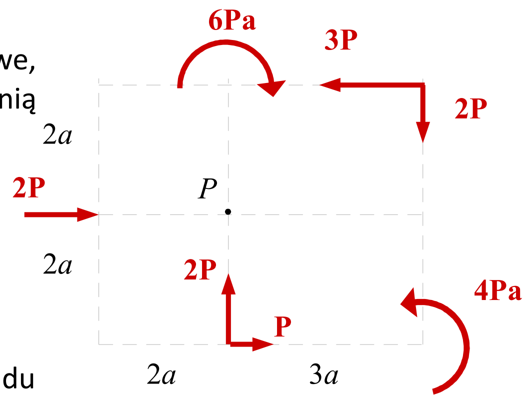
ZADANIE 20

Zredukuj podany układ sił do najprostszej postaci



ROZWIĄZANIE:

Rozkładamy siły na składowe poziome i pionowe, obciążenie ciągłe zaś zastępujemy odpowiednią wypadkową:



Suma na kierunku x **:** $\Sigma F_x = 2P + P - 3P = 0$

Suma na kierunku y **:** $\Sigma F_y = 2P - 2P = 0$

Suma układu jest równa 0 – układ redukuje się do układu zerowego albo do pary.

Redukując do najprostszej postaci możemy obliczyć sumę momentów względem dowolnie wybranego punktu. Niech będzie to punkt, względem którego zerują się momenty możliwie dużej liczby sił. Wybieramy punkt P, jak na rysunku.

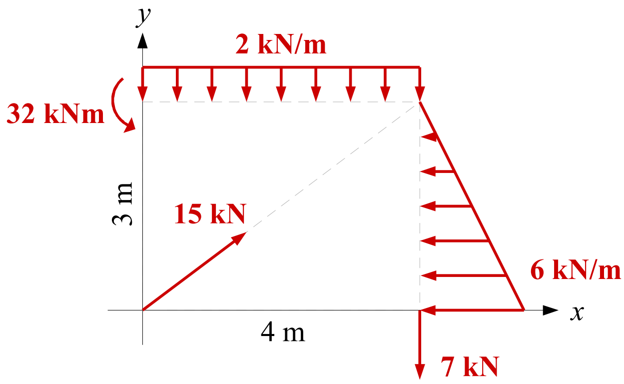
Moment układu względem punktu P:

$$\Sigma M_P = -6Pa + 4Pa + P \cdot 2a = 0$$

Zarówno suma, jak i moment układu są równe 0. Podany układ sił redukuje się w każdym punkcie do układu zerowego.

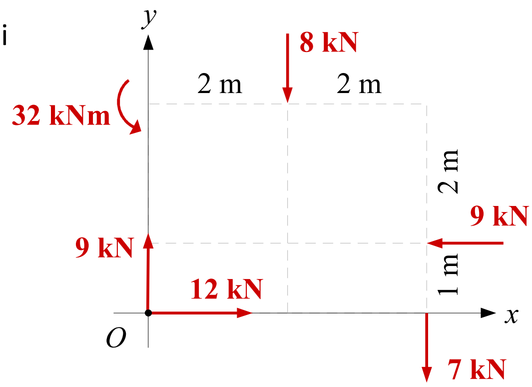
ZADANIE 21

Zredukuj podany układ sił do najprostszej postaci i zilustruj wynik redukcji.



ROZWIĄZANIE:

- Obciążenia ukośne zastępujemy ich składowymi pionowymi i poziomymi
- Obciążenia ciągłe zastępujemy ich wypadkowymi



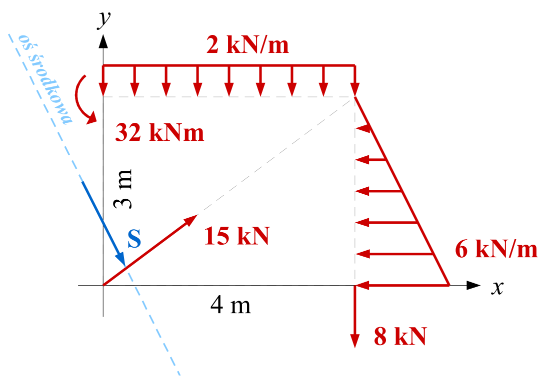
Redukujemy układ w środku układu współrzędnych:

$$\Sigma F_x = 12 - 9 = 3 \quad [\mathrm{kN}]$$
$$\Sigma F_y = -8 + 9 - 7 = -6 \quad [\mathrm{kN}]$$
$$\Sigma M_O = 32 - 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 - 7 \cdot 4 = -3 \quad [\mathrm{kNm}]$$

Wyznaczamy oś środkową:

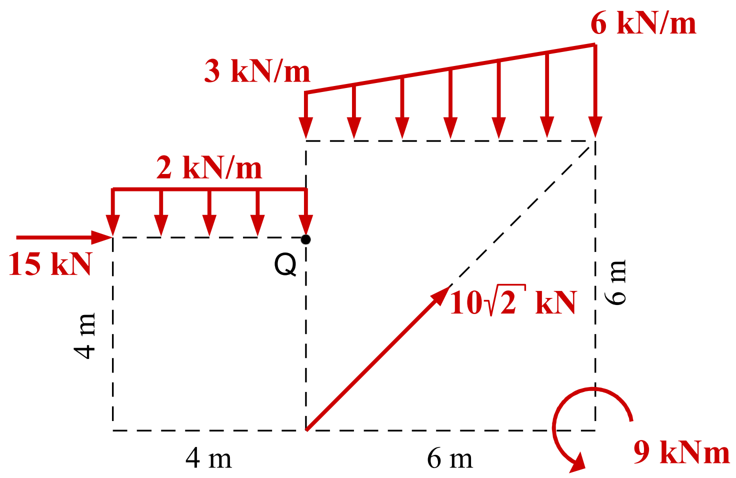
$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_O + \mathbf{S} \times \vec{OP} = [0;0;-3] + [3;-6;0] \times [x;y;0] \quad [\mathrm{kNm}]$$
$$[0;0;0] = [0;0;-3] + [0;0;3y+6x]$$
$$0 = 3y + 6x - 3 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 1$$

Podany układ sił redukuje się do wypadkowej $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [3\,\mathrm{kN}; -6\,\mathrm{kN}; 0]$ zaczepionej w osi środkowej o równaniu $y = -2x + 1$



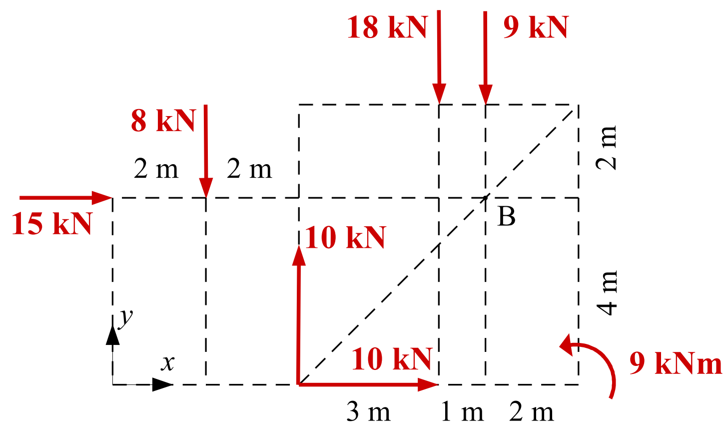
ZADANIE 22

Zredukuj podany układ sił do najprostszej postaci i zilustruj wynik redukcji. Jaki moment skupiony należy przyłożyć w punkcie Q, aby oś środkowa przechodziła przez ten punkt?



ROZWIĄZANIE:

- Obciążenia ukośne zastępujemy ich składowymi pionowymi i poziomymi
- Obciążenie trapezowe rozkładamy na sumę obciążenia prostokątnego i trójkątnego
- Obciążenia ciągłe zastępujemy ich wypadkowymi



Najprościej będzie zredukować układ sił w punkcie B – leży on na przecięciu prostych działania trzech sił – poziomej siły skupionej, wypadkowej obciążenia trójkątnego oraz siły ukośnej (pomijamy zatem udział obydwu jej składowych w obliczaniu momentu)

$$\Sigma F_x = 15+10 = 25 \quad [\mathrm{kN}]$$

$$\Sigma F_y = -8+10-18-9 = -25 \quad [\mathrm{kN}]$$

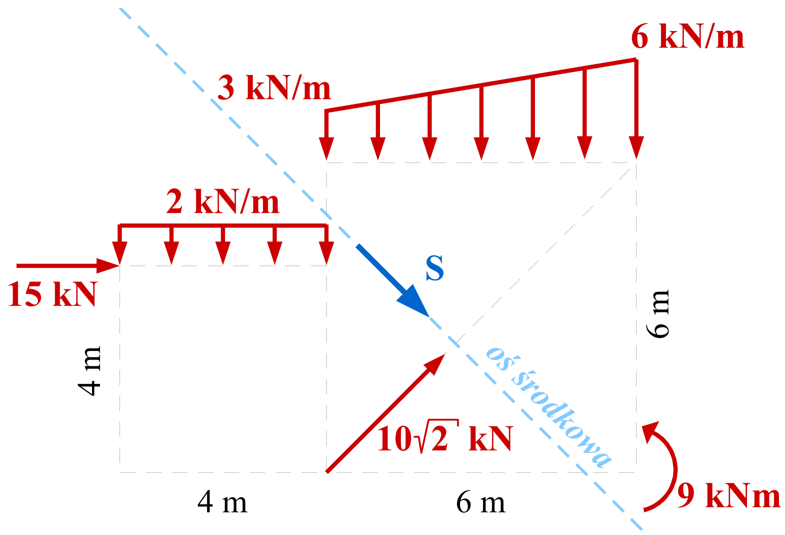
$$\Sigma M_B = 8\cdot 6+18\cdot 1+9 = 75 \quad [\mathrm{kNm}]$$

Wyznaczamy oś środkową:

$$\mathbf{0}=\mathbf{M}_B+\mathbf{S}\times\vec{BP}=[0;0;75]+[25;-25;0]\times[x-8;y-4;0]\quad[\mathrm{kNm}]$$

$$[0;0;0]=[0;0;75]+[0;0;25y+25x-300]$$

$$0=25y+25x-225\qquad\Rightarrow\qquad y=-x+9$$



Podany układ sił redukuje się do wypadkowej $\mathbf{W}=\mathbf{S}=[25\ \mathrm{kN}\ ;\ -25\ \mathrm{kN}\ ;\ 0]$ zaczepionej w osi środkowej o równaniu $y=-x+9\,[\mathrm{m}]$.

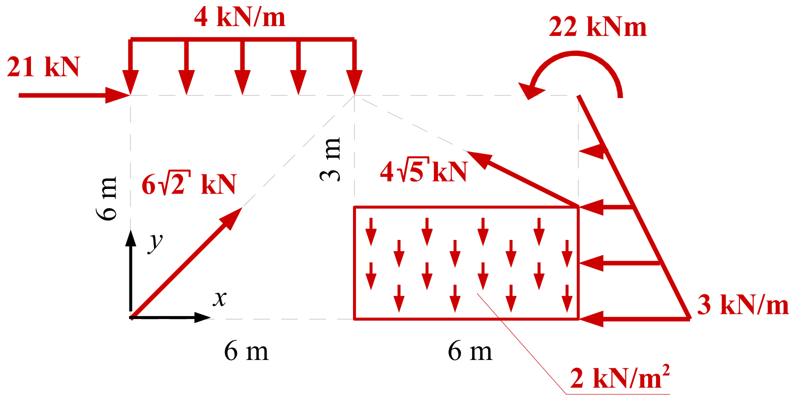
Moment względem Q wyznaczamy z twierdzenia o zmianie bieguna:

$$\mathbf{M}_Q=\mathbf{M}_B+\mathbf{S}\times\vec{BQ}=[0;0;75]+[25;-25;0]\times[-4;0;0]=[0;0;-25]\quad[\mathrm{kNm}]$$

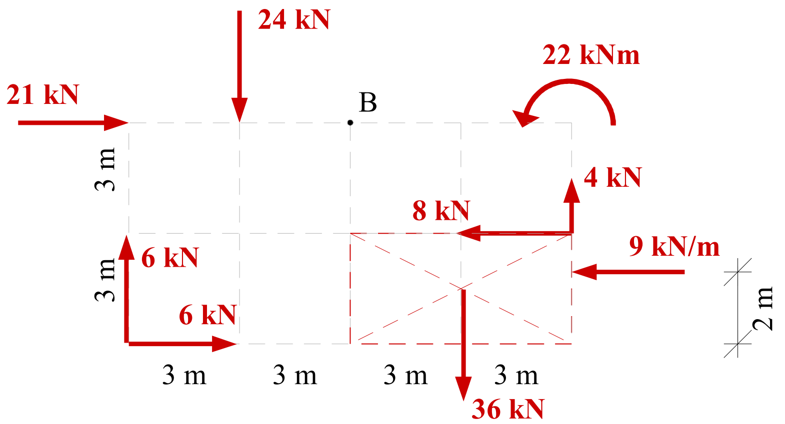
Warunek, aby punkt Q należał do osi środkowej jest równoważny warunkowi, aby moment układu względem tego punktu był zerowy. Zatem, **jeśli w punkcie Q przyłożymy moment skupiony** $[0;0;+25\,\mathrm{kNm}]$ **(zgodny z ruchem wskazówek zegara), to** $\mathbf{M}_Q=\mathbf{0}$ **i Q należeć będzie do osi środkowej**. Ponieważ wpływ momentu skupionego nie zależy od punktu jego przyłożenia, stąd moment ten może być przyłożony w dowolnym punkcie płaszczyzny, niekoniecznie w punkcie Q.

ZADANIE 23

Zredukować podany układ sił do najprostszej postaci:



ROZWIĄZANIE:



$$\Sigma F_x = 21+6-8-9 = 10 \quad [\text{kN}]$$

$$\Sigma F_y = 6-24-36+4 = -50 \quad [\text{kN}]$$

Moment obliczymy w punkcie B – leży na przecięciu prostych działania wszystkich sił skupionych:

$$\Sigma M_B = 24\cdot 3+22-36\cdot 3-9\cdot 4 = -50 \quad [\text{kNm}]$$

Wyznaczamy oś środkową:

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_B+\mathbf{S}\times\vec{BP} = [0\,;0\,;-50] + [10\,;-50\,;0]\times[x-6\,;y-6\,;0] \quad [\text{kNm}]$$

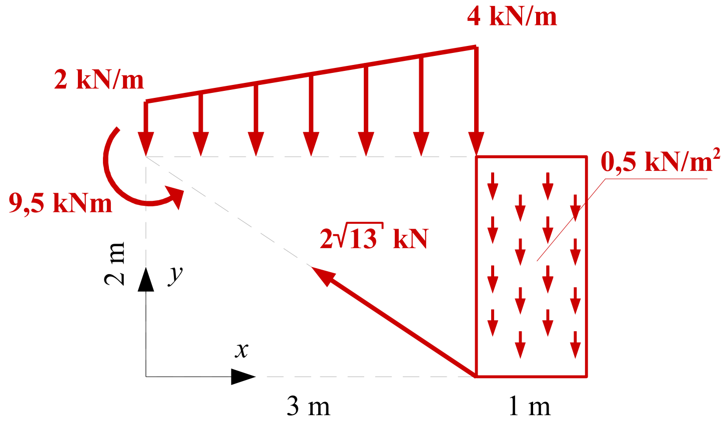
$$[0\,;0\,;0] = [0\,;0\,;-50] + [0\,;0\,;10y+50x-360]$$

$$0 = 10y+50x-410 \qquad \Rightarrow \qquad y = -5x+41$$

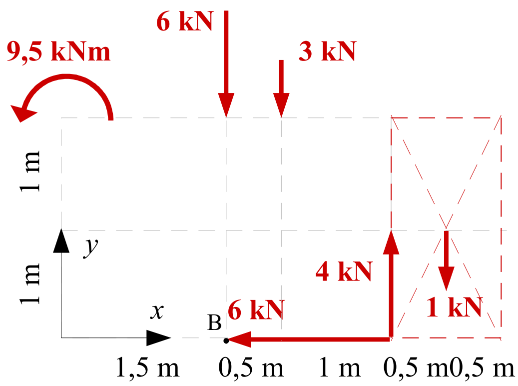
Podany układ sił redukuje się do wypadkowej $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [10\text{ kN}\,;-50\text{ kN}\,;0]$ zaczepionej w osi środkowej o równaniu $y = -5x+41\ [\text{m}]$.

ZADANIE 24

Zredukować podany układ sił do najprostszej postaci:



ROZWIĄZANIE:



$$\Sigma F_x = -6 \;\; [\mathrm{kN}]$$

$$\Sigma F_y = -6-3+4-1 = -6 \;\; [\mathrm{kN}]$$

$$\Sigma M_B = 9{,}5-3\cdot 0{,}5+4\cdot 1{,}5-1\cdot 2 = 12 \;\; [\mathrm{kNm}]$$

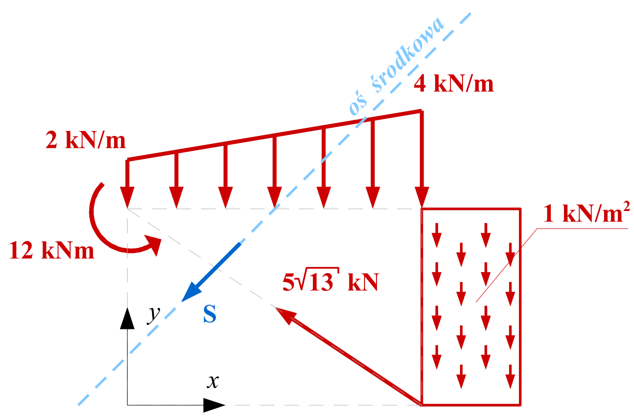
Wyznaczamy oś środkową:

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_B + \mathbf{S}\times\vec{BP} = [0\,;0\,;12] + [-6\,;-6\,;0]\times[x-1{,}5\,;\,y-0\,;0] \;\; [\mathrm{kNm}]$$

$$[0\,;0\,;0] = [0\,;0\,;12] + [0\,;0\,;-6y+6x-9]$$

$$0 = -6y+6x+3 \quad \Rightarrow \quad y = x+0{,}5$$

Podany układ sił redukuje się do wypadkowej $\mathbf{W} = \mathbf{S} = [-6\ \mathrm{kN}\ ;-6\ \mathrm{kN}\ ;\ 0]$ zaczepionej w osi środkowej o równaniu $y = x+0{,}5\ [\mathrm{m}]$.

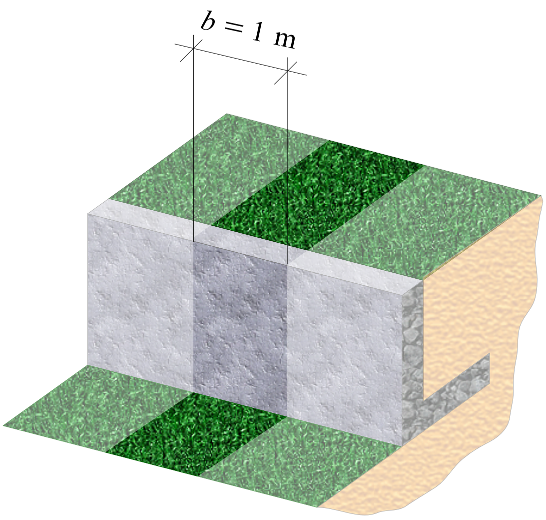


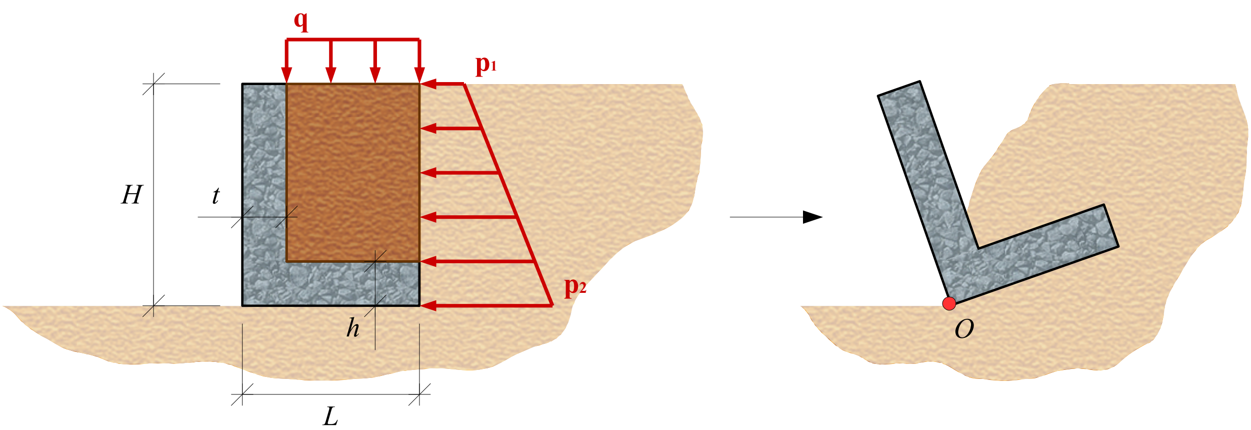
ZADANIE 25

Sprawdź stateczność na obrót ściany oporowej jak na rysunku dla następujących danych:

- wysokość ściany oporowej $H=4{,}5\ \mathrm{m}$
- grubość ściany oporowe $t=0{,}5\ \mathrm{m}$
- długość płyty ściany oporowej $L=4\ \mathrm{m}$
- grubość płyty ściany oporowej $h=0{,}5\ \mathrm{m}$
- ciężar objętościowy żelbetu $\gamma_s = 25\ \mathrm{kN/m^3}$
- ciężar objętościowy gruntu $\gamma_g = 20\ \mathrm{kN/m^3}$
- obciążenie naziomu $q = 5\ \mathrm{kN/m^2}$
- kąt tarcia wewnętrznego gruntu $\phi=30^\circ$
- parcie gruntu wyraża się wzorem $p(z) = \mathrm{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right)\cdot[q+\gamma_g z]$

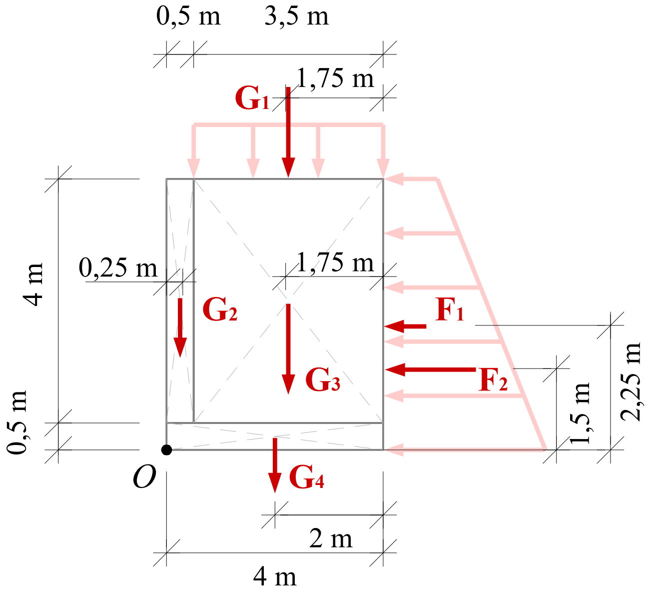
Obliczenia przeprowadza się dla wycinka ściany o szerokości $b = 1\,\mathrm{m}$. Stateczność na obrót sprawdza się w ten sposób, że w **założonym z góry środku obrotu** ściany porównuje się tzw. **moment obracający**, tj. moment wszystkich sił dążących do przewrócenia ściany (parcie gruntu) oraz **moment utrzymujący**, tj. wszystkich sił działających przeciwnie (ciężar ściany, ciężar gruntu oraz obciążenie naziomu). Jeśli moment utrzymujący jest większy od momentu obracającego, wtedy przyjmuje się, że ściana się nie przewróci. Środek obrotu zakłada się w punkcie O, jak na rysunku.





ROZWIĄZANIE:

Przyjmujemy schemat statyczny jak na rysunku obok



- Wypadkowe ciężaru ściany

$$G_2 = \gamma_s \cdot (H-h) \cdot t \cdot b = 50 \text{ kN}$$
$$G_4 = \gamma_s \cdot L \cdot h \cdot b = 50 \text{ kN}$$

- Wypadkowa ciężaru gruntu

$$G_3 = \gamma_g \cdot (H-h) \cdot (L-t) \cdot b = 280 \text{ kN}$$

- Wypadkowa obciążenia naziomu

$$G_1 = q \cdot (L-t) \cdot b = 17{,}5 \text{ kN}$$

- Parcie gruntu: $p_1 = p(0) = 1{,}667 \text{ kN/m}^2$
  $p_2 = p(H) = 31{,}667 \text{ kN/m}^2$

- Wypadkowa równomiernej (prostokątnej) części parcia gruntu

$$F_1 = p_1 \cdot H \cdot b = 7{,}5 \text{ kN}$$

- Wypadkowa hydrostatycznej (trójkątnej) części parcia gruntu

$$F_2 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \cdot H \cdot b = 67{,}5 \text{ kN}$$

- **Moment utrzymujący**

$$M_u = -(G_1 + G_3) \cdot \left(t + \frac{L-t}{2}\right) - G_1 \cdot \frac{t}{2} - G_4 \cdot \frac{L}{2} = -781{,}875 \text{ kNm}$$

- **Moment obracający**

$$M_o = F_1 \cdot \frac{H}{2} + F_2 \cdot \frac{H}{3} = 118{,}125 \text{ kNm}$$

$|M_u| > |M_o|$ **- moment utrzymujący jest większy od momentu obracającego. Ściana oporowa nie przewróci się pod naporem gruntu.**