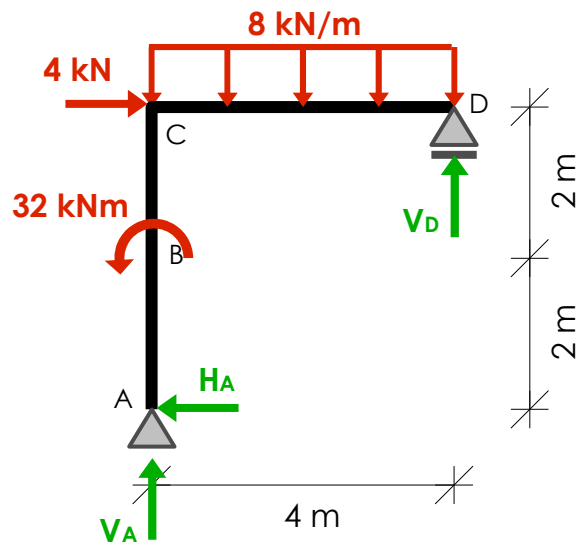


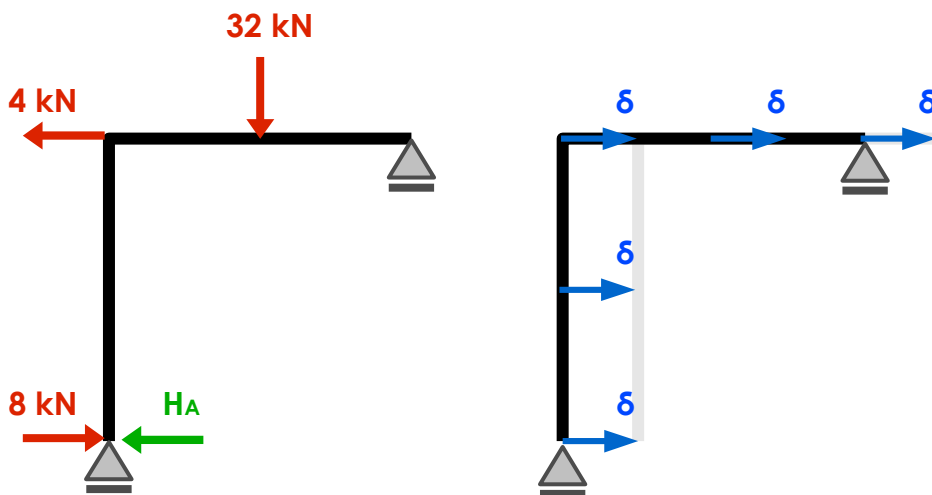
ZADANIE 1

Wyznacz każdą z reakcji podporowych za pomocą ZPW.



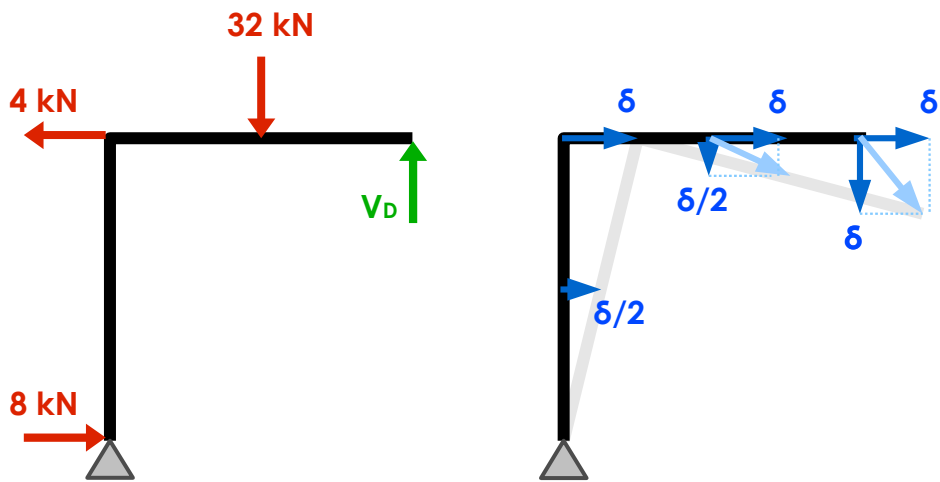
- Obciążenie ciągłe zastępujemy wypadkową w odpowiednim miejscu
- Moment skupiony M zastępujemy dowolną parą sił P w odległości d , gdzie $M = Pd$ - siły tej pary można przyłożyć gdziekolwiek na tej tarczy sztywnej, do której przyłożony jest moment skupiony. Wygodnie jest przyłożyć te siły w miejscach występowania innych sił, aby ograniczyć rachunki.

Reakcja H_A



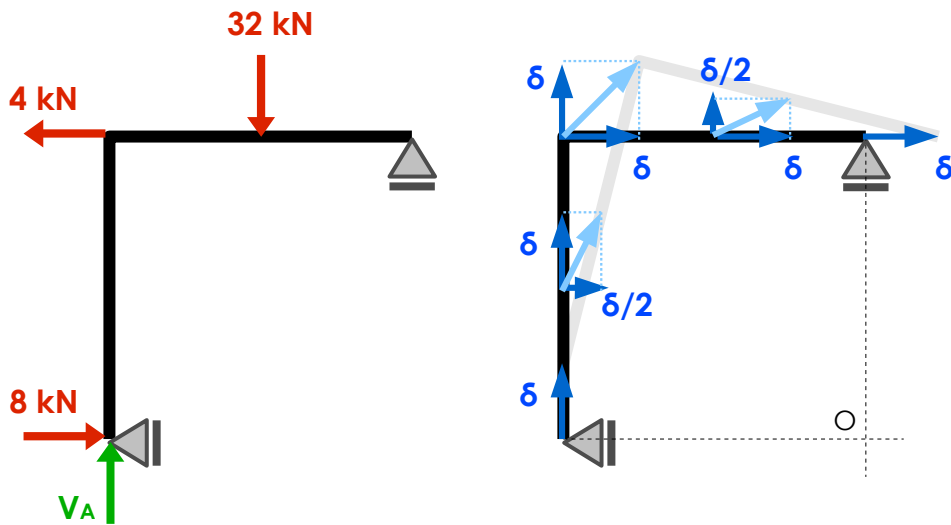
$$\delta L = 8 \cdot \delta - H_A \cdot \delta - 4 \cdot \delta = 0 \Rightarrow H_A = 4$$

Reakcja V_D



$$\delta L = -4 \cdot \delta + 32 \cdot \frac{\delta}{2} - V_D \cdot \delta = 0 \Rightarrow V_D = 12$$

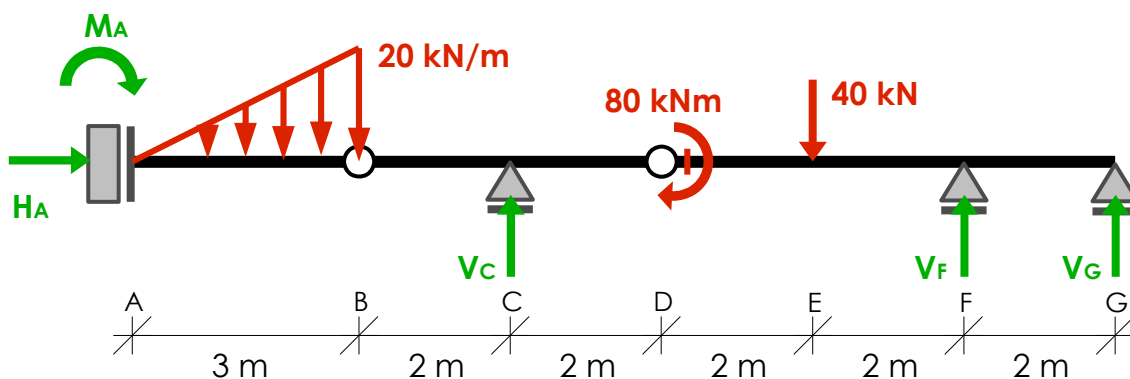
Reakcja V_A



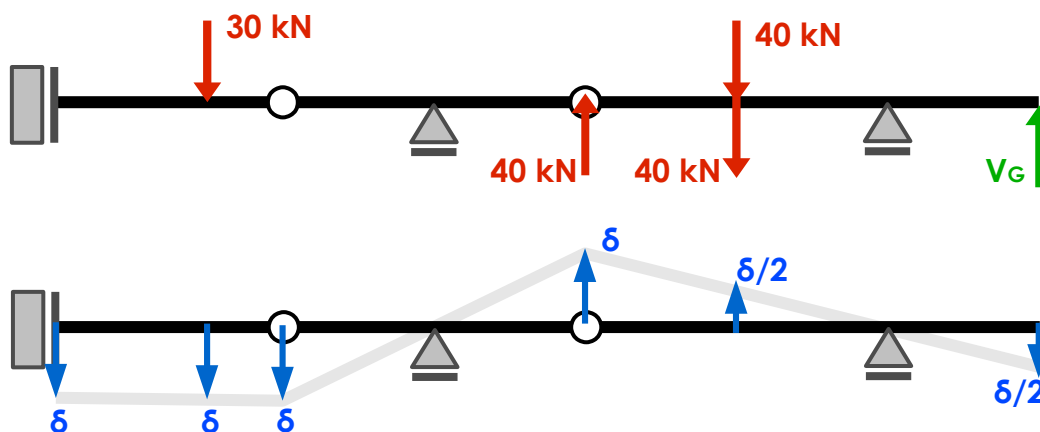
$$\delta L = V_A \cdot \delta - 4 \cdot \delta - 32 \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow V_A = 20$$

ZADANIE 2

Wyznacz pionowe reakcje podporowe korzystając z ZPW.

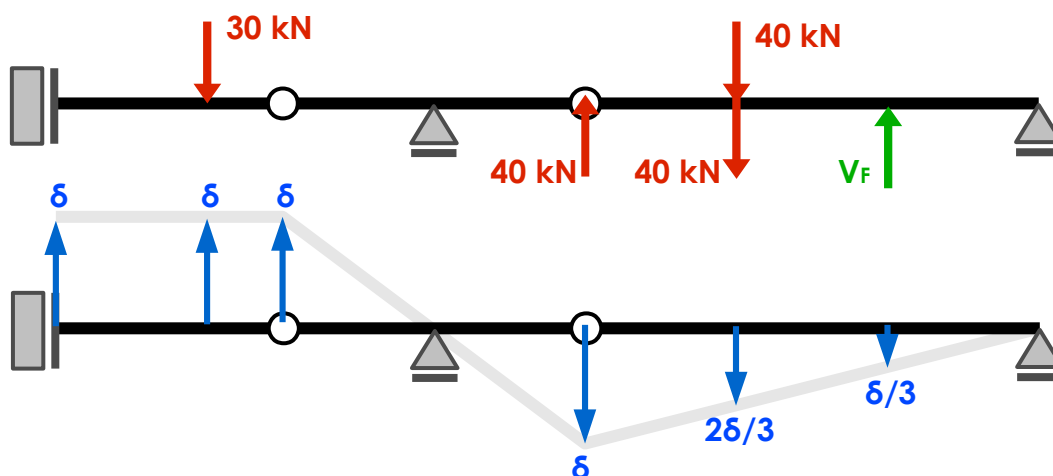


Reakcja V_G :



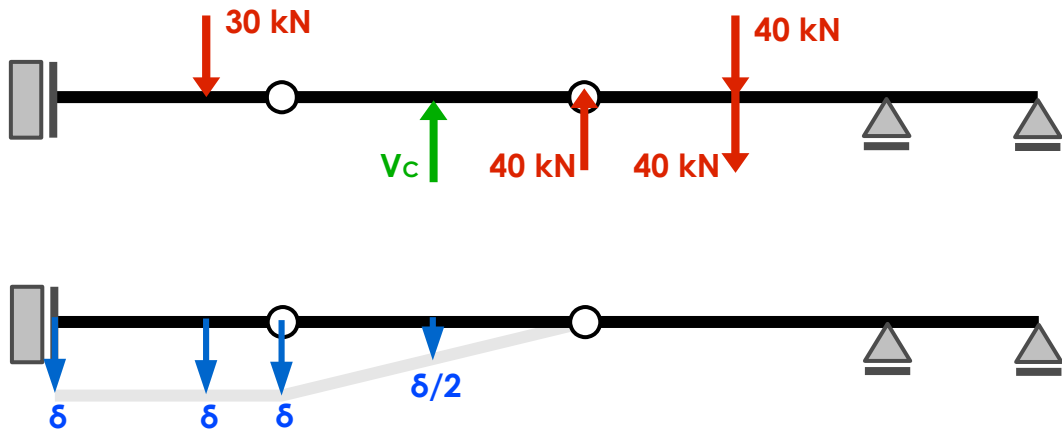
$$\delta L = 30 \cdot \delta + 40 \cdot \delta - (40 + 40) \cdot \frac{\delta}{2} - V_G \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow V_G = 60$$

Reakcja V_F :



$$\delta L = -30 \cdot \delta - 40 \cdot \delta + (40 + 40) \cdot \frac{2\delta}{3} - V_G \cdot \frac{\delta}{3} = 0 \Rightarrow V_F = -50$$

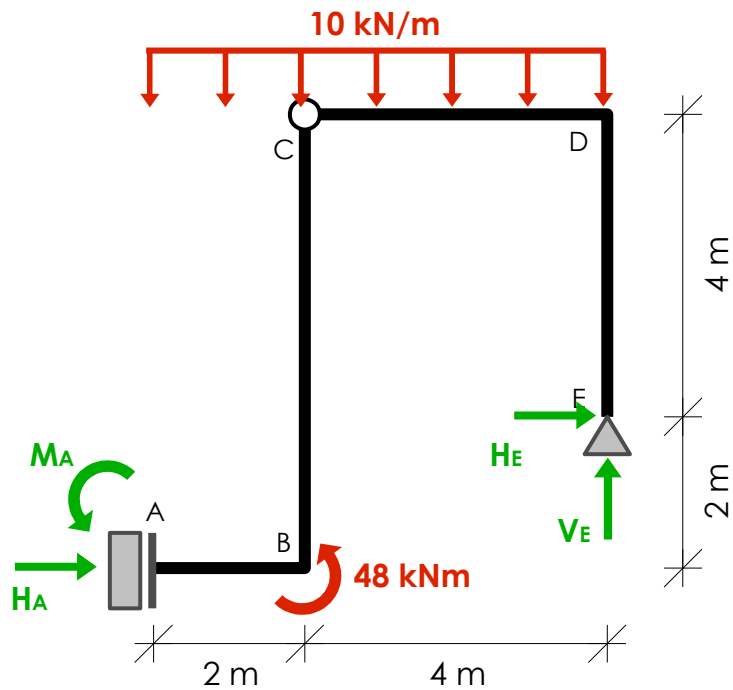
Reakcja V_C :



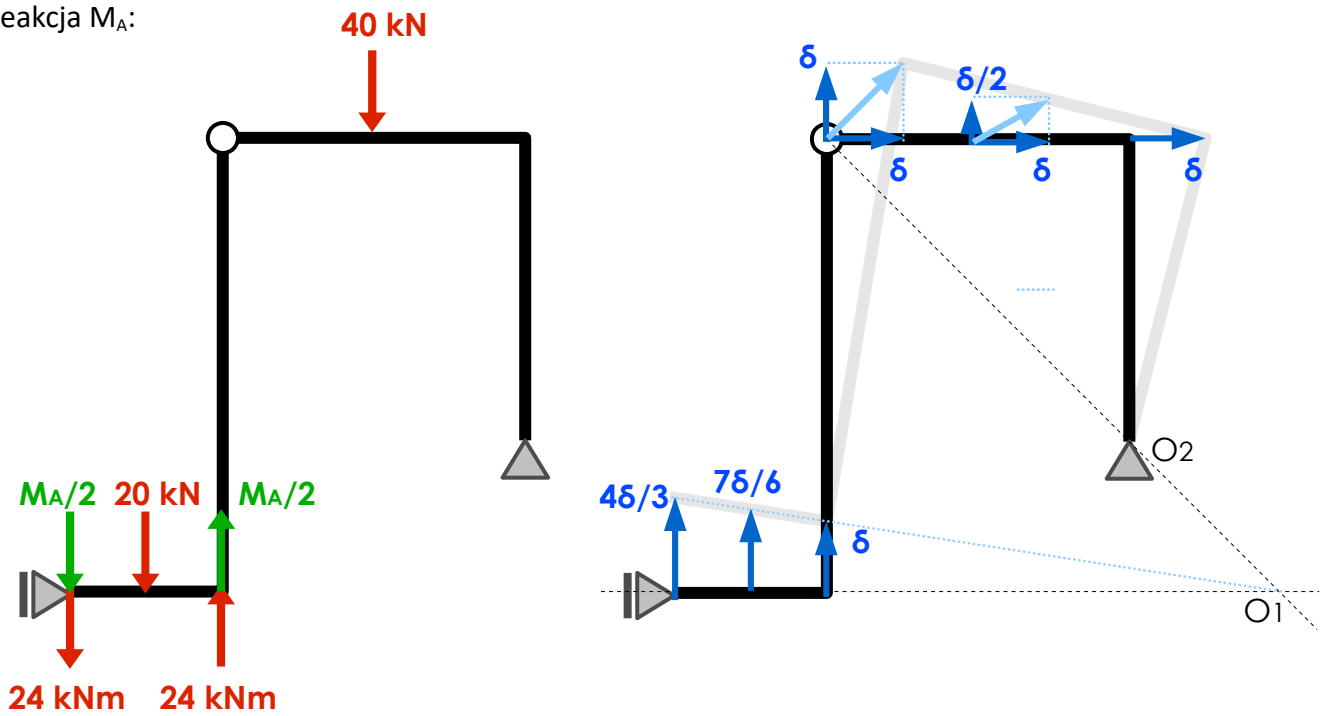
$$\delta L = 30 \cdot \delta - V_C \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow V_C = 60$$

ZADANIE 3

Wyznacz reakcje na podporze A korzystając z ZPW.

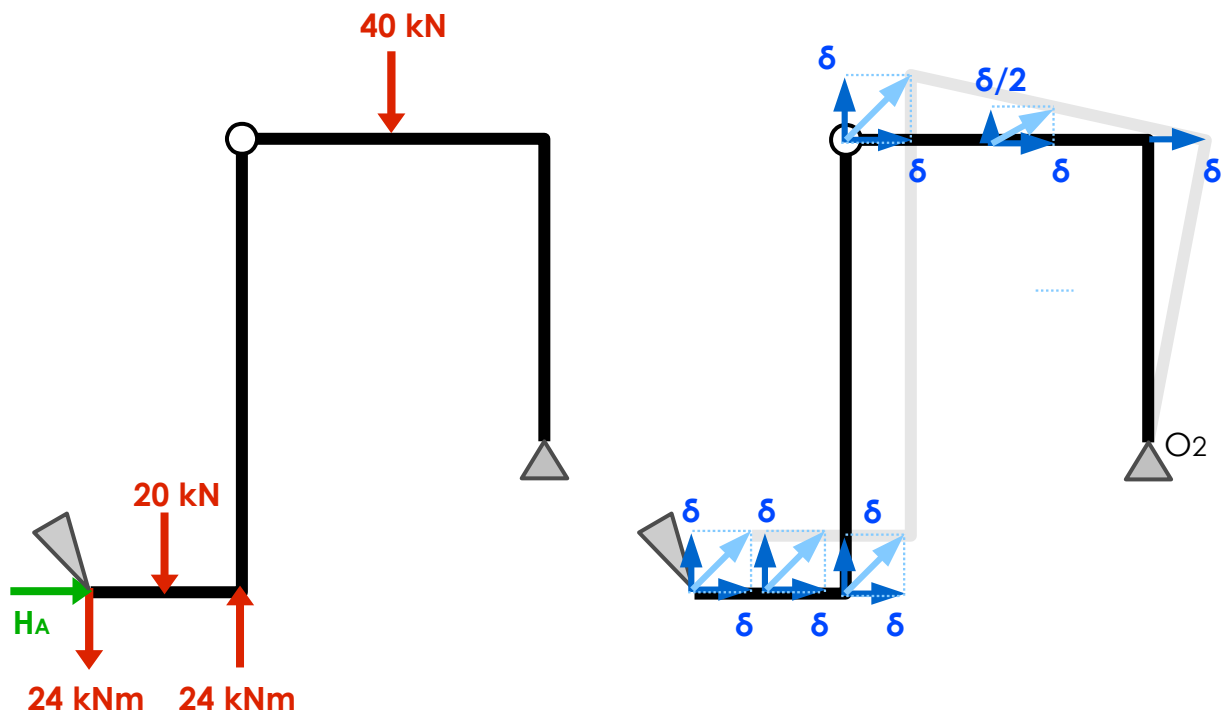


Reakcja M_A :



$$\delta L = -\frac{M_A}{2} \cdot \frac{4\delta}{3} - 24 \cdot \frac{4\delta}{3} - 20 \cdot \frac{7\delta}{6} + \frac{M_A}{2} \cdot \delta + 24 \cdot \delta - 40 \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow M_A = -308$$

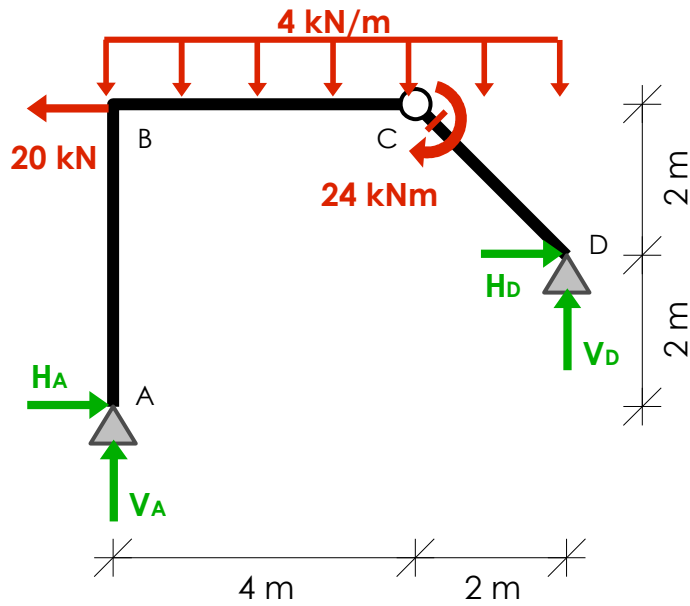
Reakcja H_A :



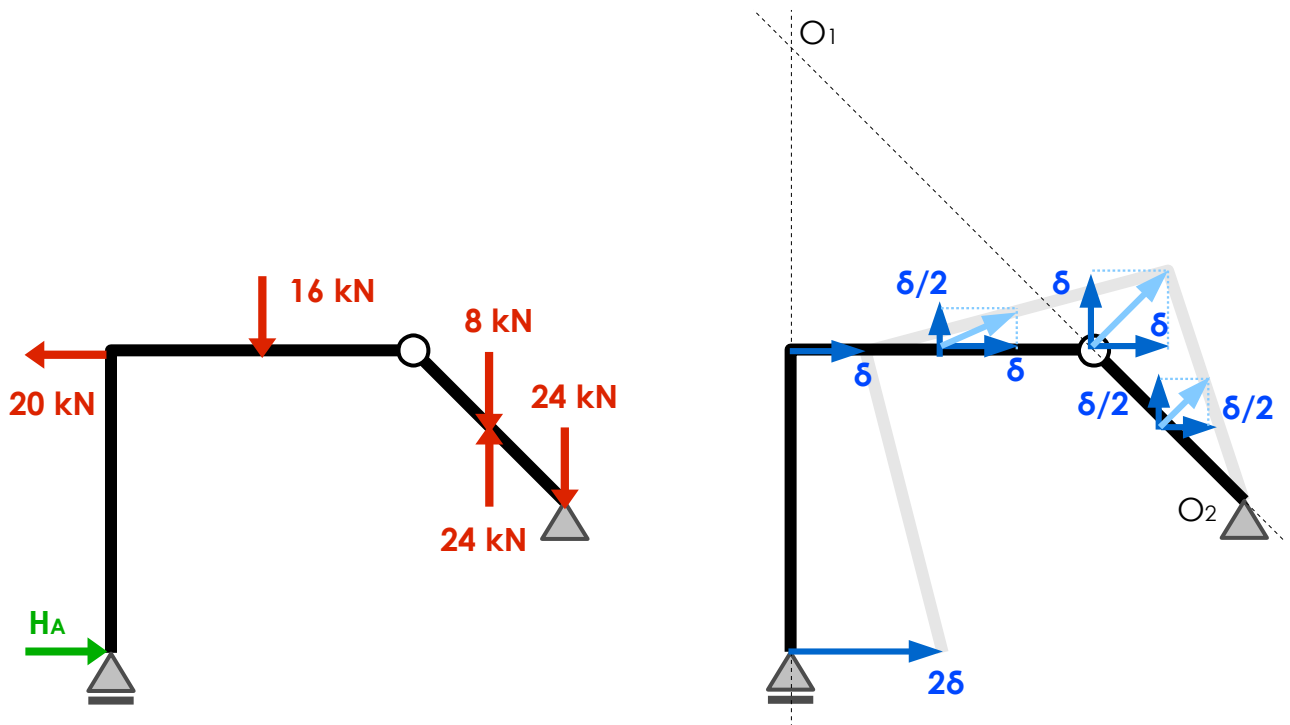
$$\delta L = H_A \cdot \delta - 24 \cdot \delta - 20 \cdot \delta + 24 \cdot \delta - 40 \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow H_A = 40$$

ZADANIE 4

Wyznacz reakcje H_A oraz V_D korzystając z ZPW.

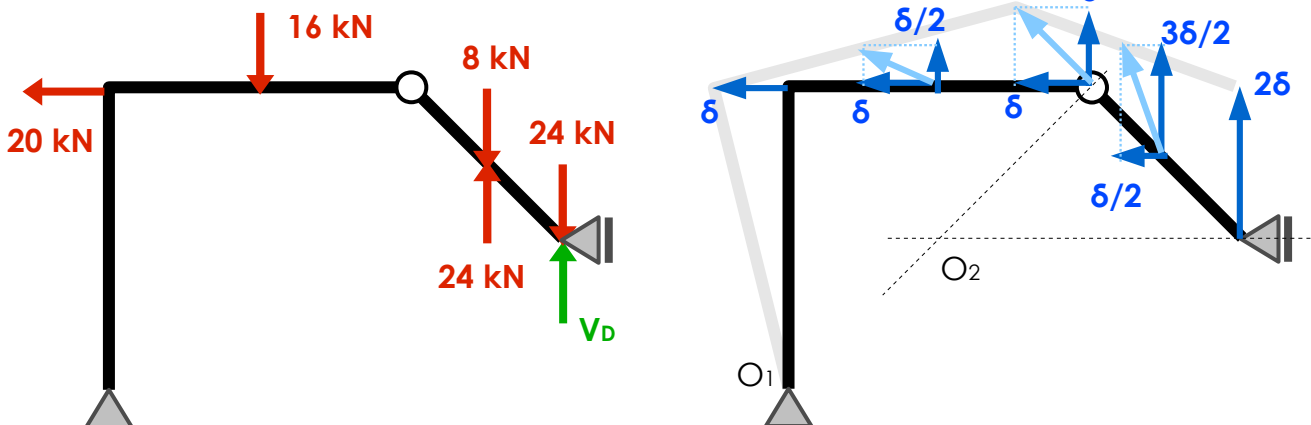


Reakcja H_A :



$$\delta L = H_A \cdot 2\delta - 20 \cdot \delta - 16 \cdot \frac{\delta}{2} - 8 \cdot \frac{\delta}{2} + 24 \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow H_A = 10$$

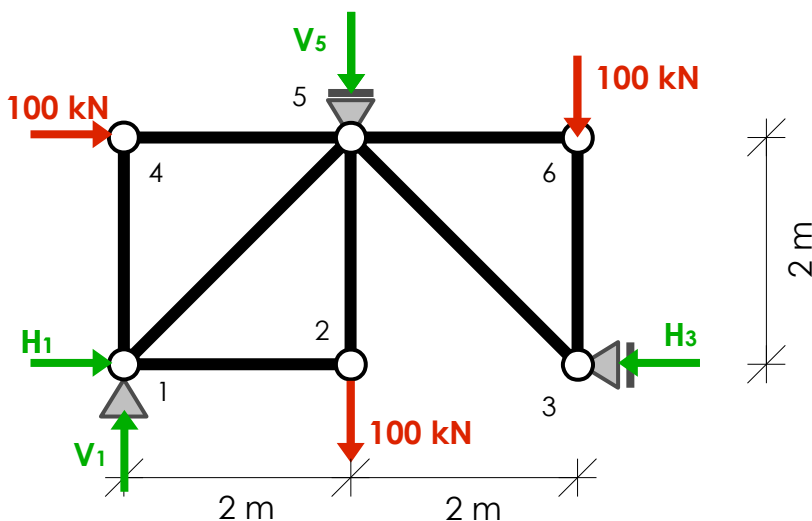
Reakcja V_D :



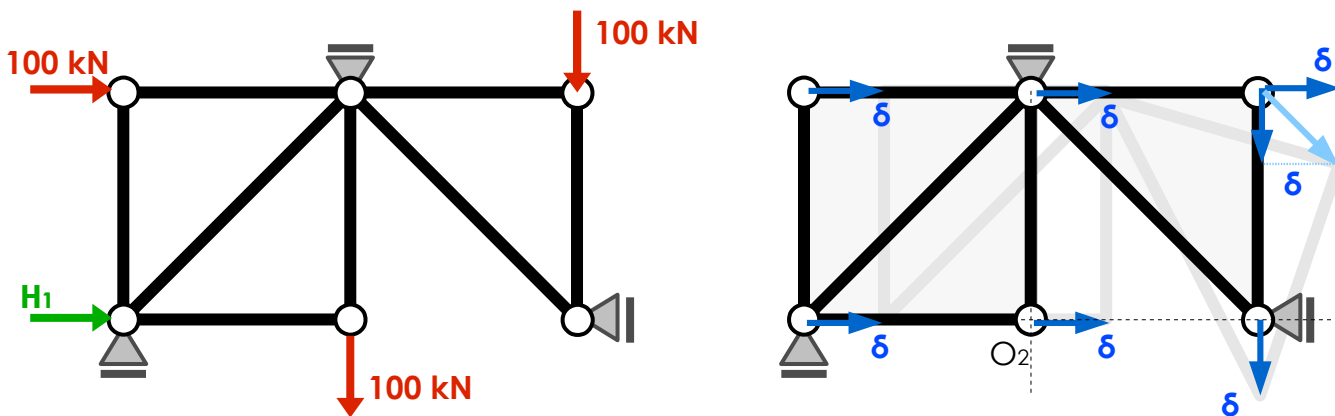
$$\delta L = 20 \cdot \delta - 16 \cdot \frac{\delta}{2} - 8 \cdot \frac{3\delta}{2} + 24 \cdot \frac{3\delta}{2} - 24 \cdot 2\delta + V_D \cdot 2\delta = 0 \Rightarrow V_D = 6$$

ZADANIE 5

Wyznacz reakcje na podporze 1 oraz siłę w krzyżulcu 1-5 korzystając z ZPW.

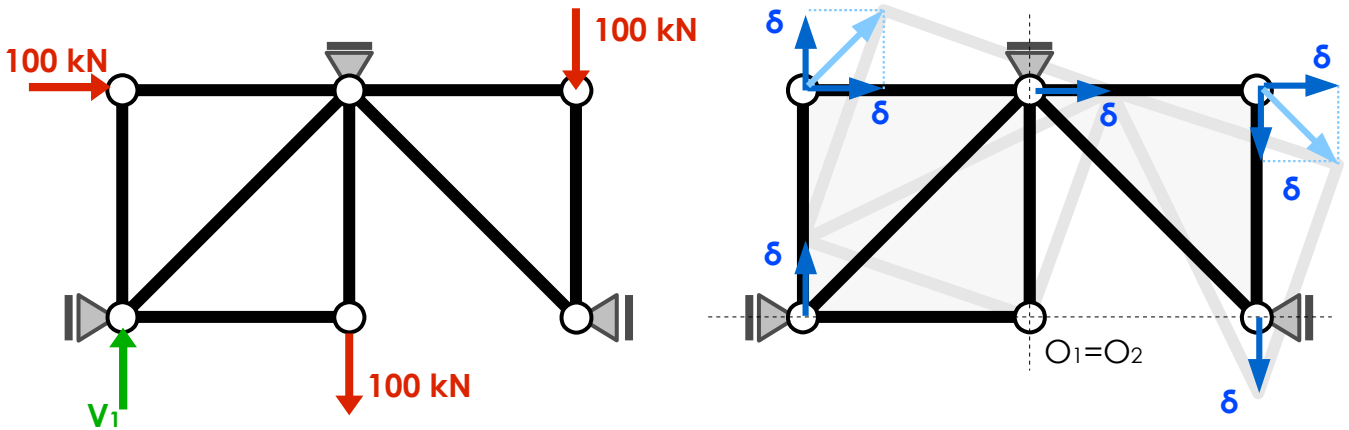


Reakcja H_1 :



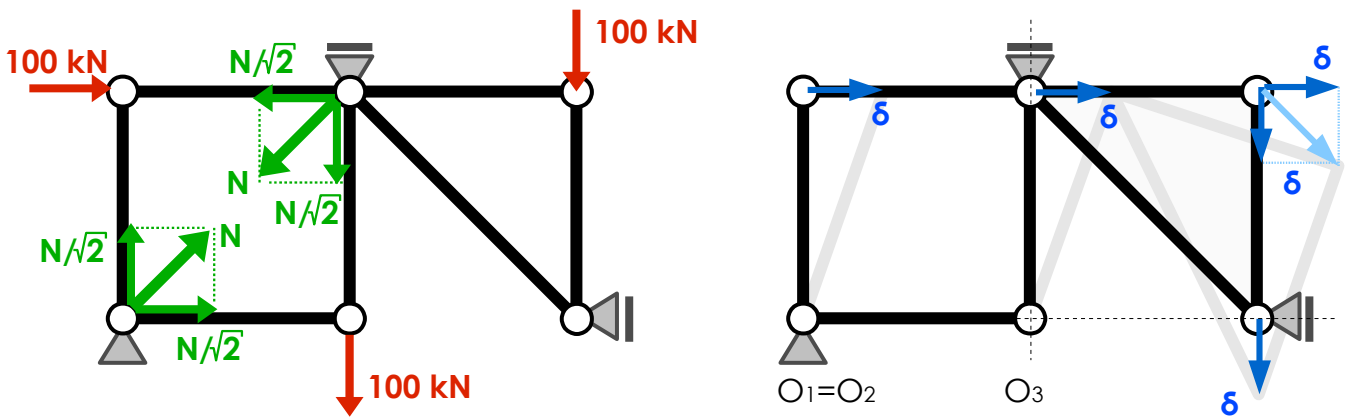
$$\delta L = H_1 \cdot \delta + 100 \cdot \delta + 100 \cdot \delta = 0 \Rightarrow H_1 = -200$$

Reakcja V_1 :



$$\delta L = V_1 \cdot \delta + 100 \cdot \delta + 100 \cdot \delta = 0 \Rightarrow V_1 = -200$$

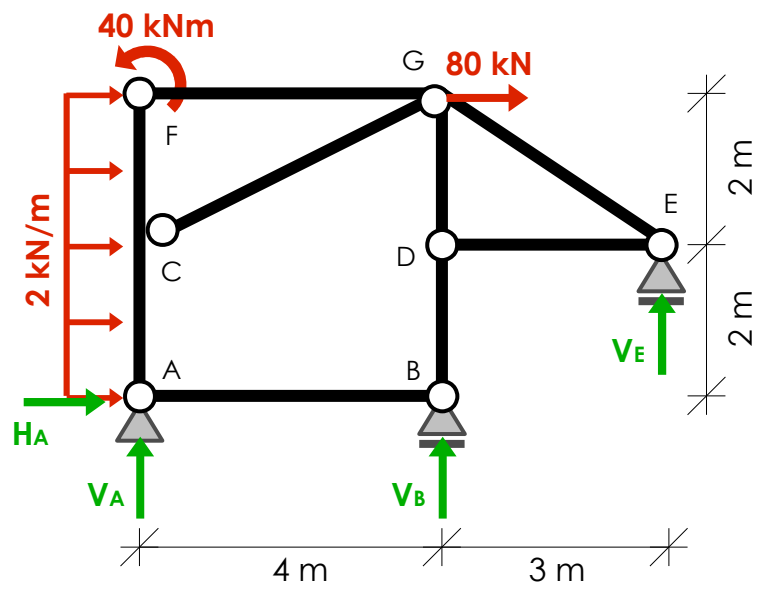
Siła w krzyżulcu 1-5:



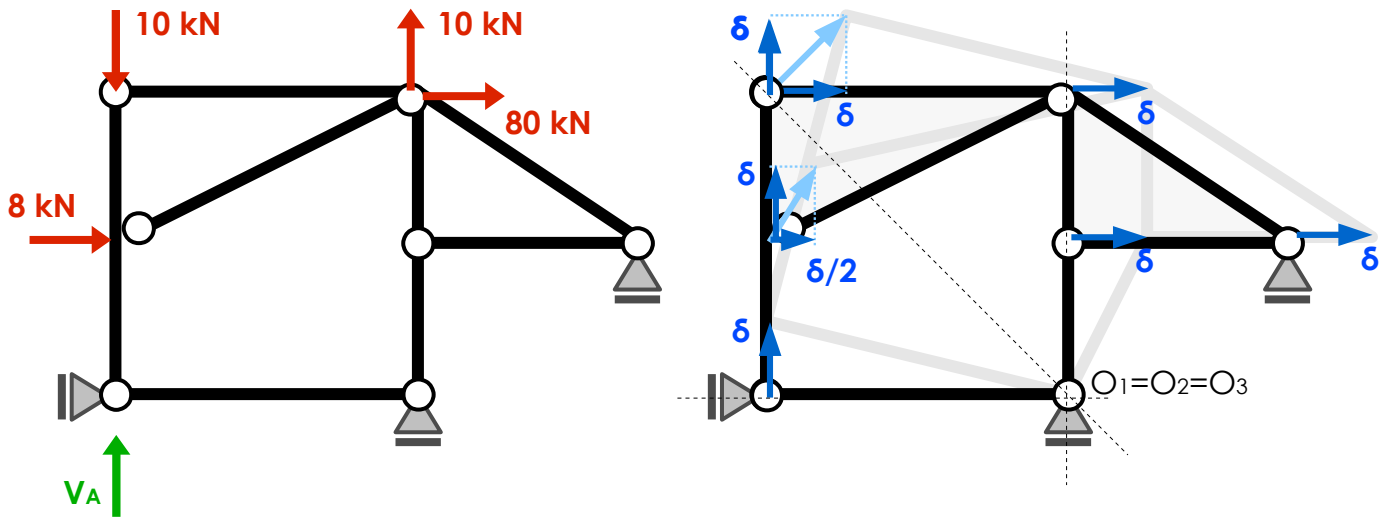
$$\delta L = 100 \cdot \delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \delta + 100 \cdot \delta = 0 \Rightarrow N = 200\sqrt{2}$$

ZADANIE 6

Wyznacz reakcje V_A i V_E oraz siłę w ściąg C-G korzystając z ZPW.

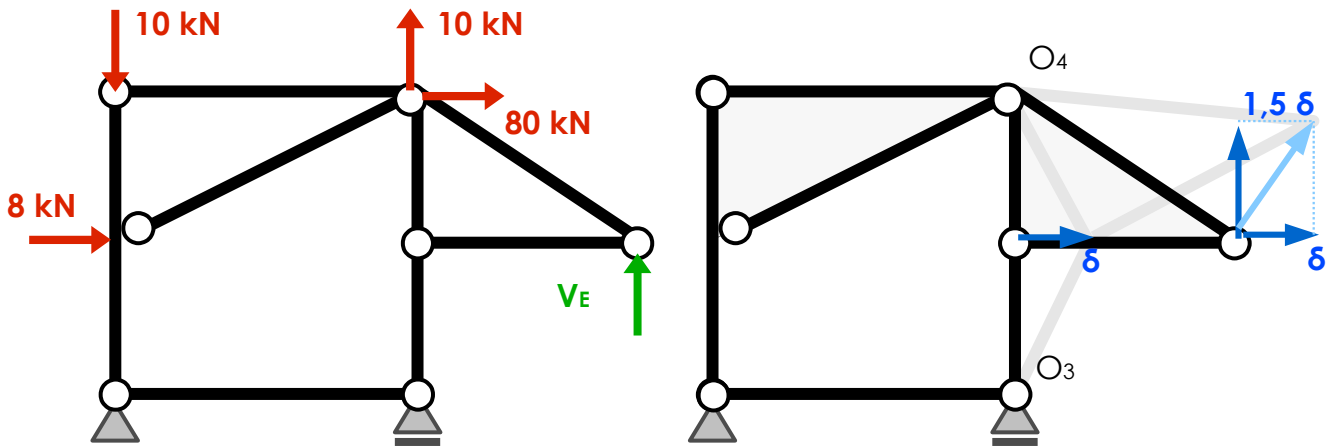


Reakcja V_A :



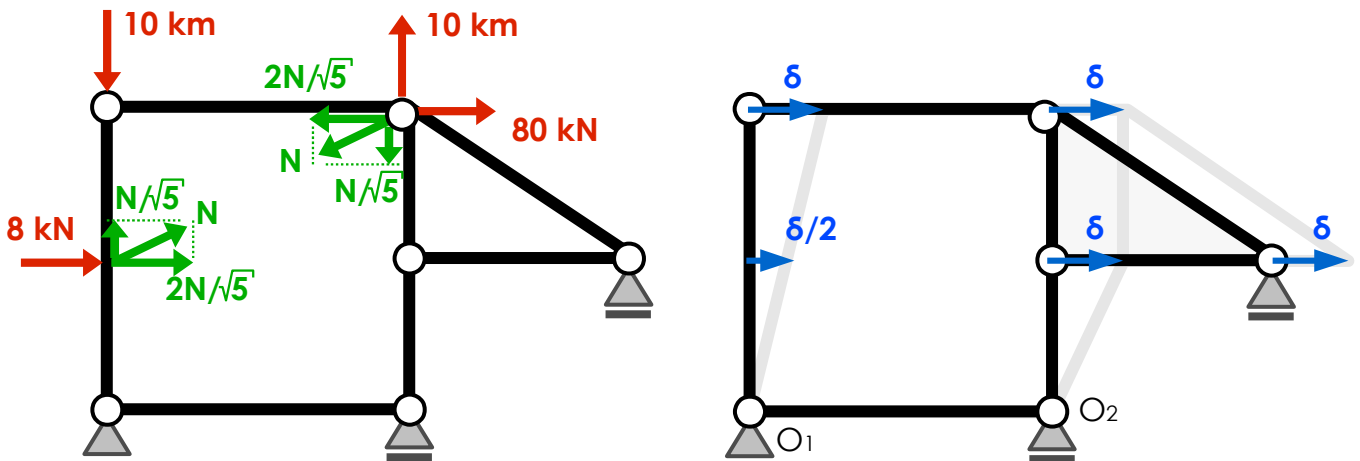
$$\delta L = V_A \cdot \delta + 8 \cdot \frac{\delta}{2} - 10 \cdot \delta + 80 \cdot \delta = 0 \Rightarrow V_A = -74$$

Reakcja V_E :



$$\delta L = V_E \cdot 1,5\delta = 0 \Rightarrow V_E = 0$$

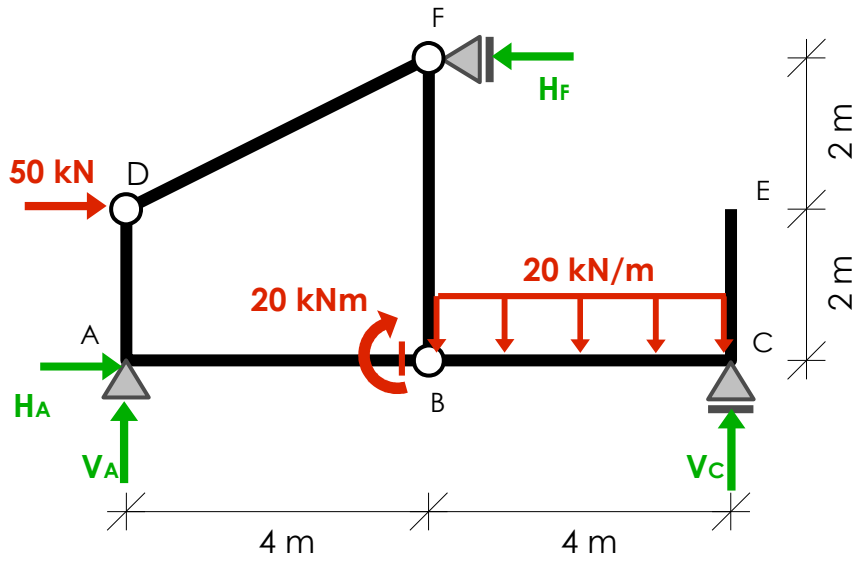
Siła w ściągu C-G:



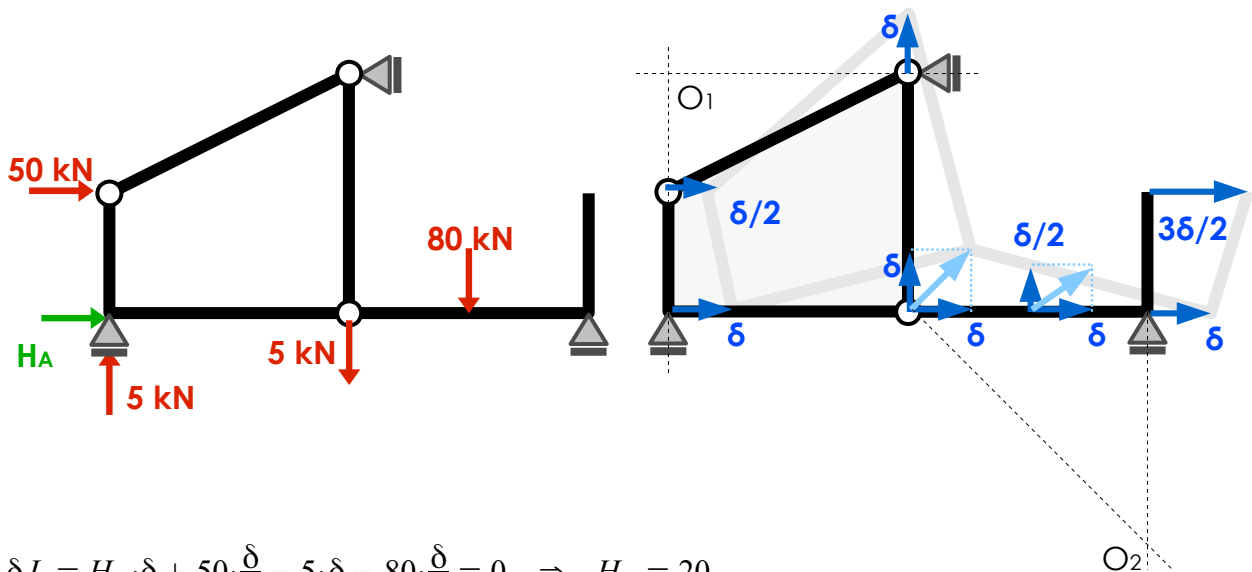
$$\delta L = 8 \cdot \frac{\delta}{2} + \frac{2N}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\delta}{2} - \frac{2N}{\sqrt{5}} \cdot \delta + 80 \cdot \delta = 0 \Rightarrow N = 84\sqrt{5}$$

ZADANIE 7

Wyznacz reakcję H_A oraz siłę w ściągu D-F korzystając z ZPW.

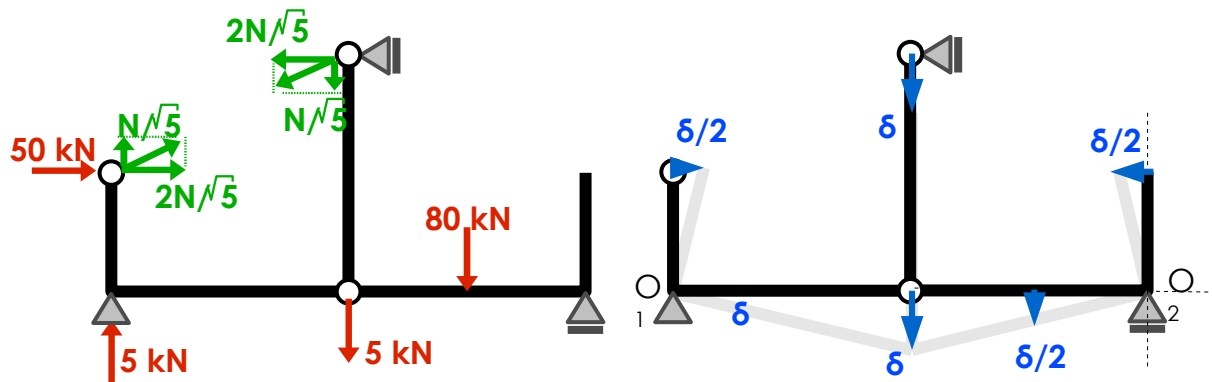


Reakcja H_A :



$$\delta L = H_A \cdot \delta + 50 \cdot \frac{\delta}{2} - 5 \cdot \delta - 80 \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow H_A = 20$$

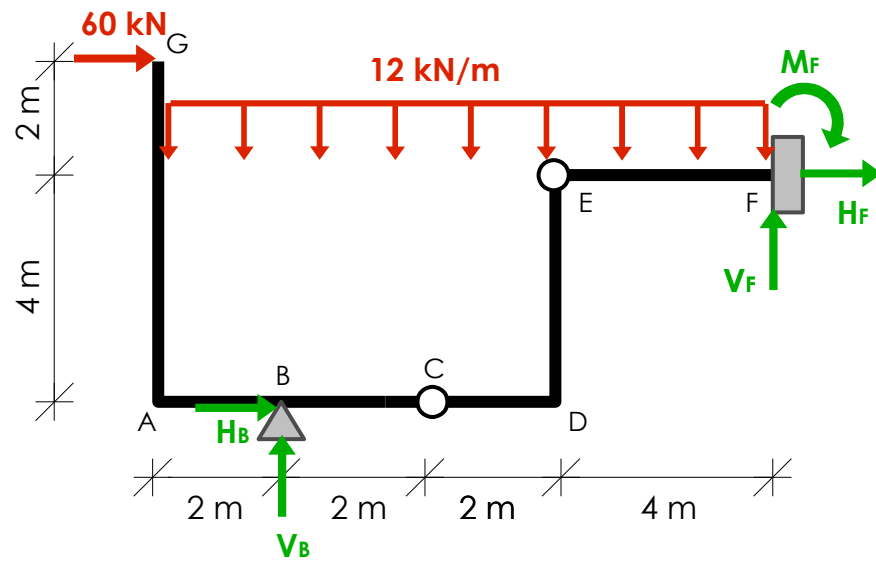
Siła w ściągu D-F:



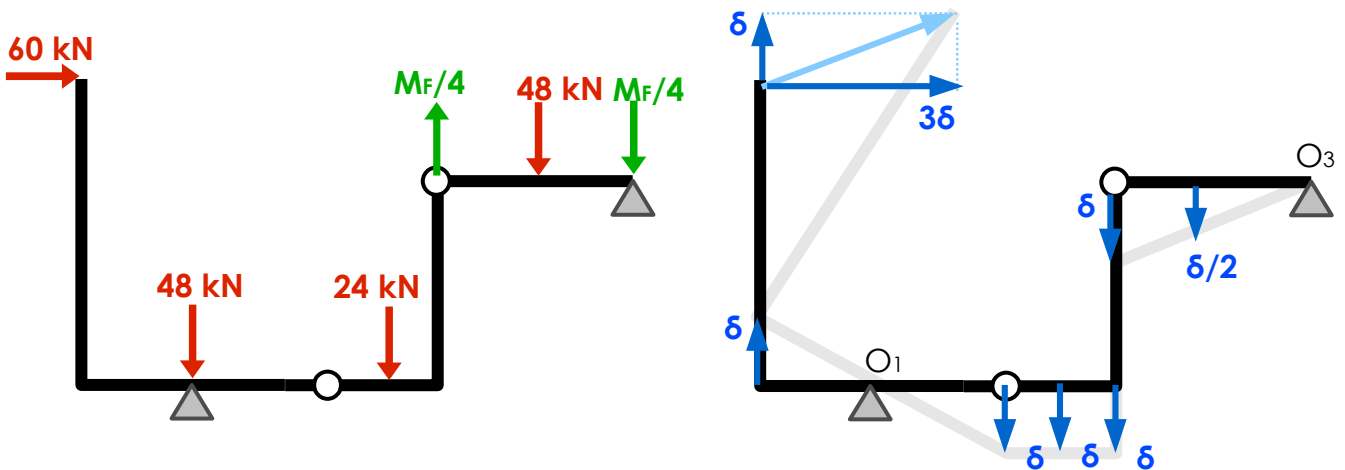
$$\delta L = 50 \cdot \frac{\delta}{2} + \frac{2N}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\delta}{2} + 5 \cdot \delta + \frac{N}{\sqrt{5}} \cdot \delta + 80 \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow N = -35\sqrt{5}$$

ZADANIE 8

Korzystając z ZPW wyznacz reakcje V_B oraz M_F .

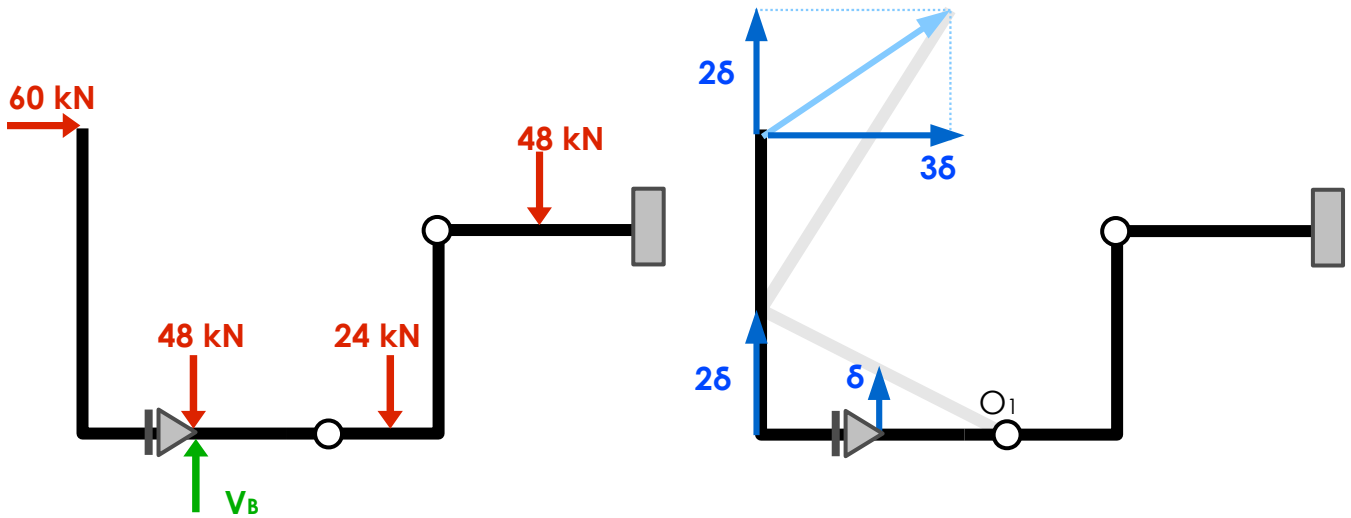


Reakcja M_F :



$$\delta L = 60 \cdot 3\delta + 24 \cdot \delta - \frac{M_F}{4} \cdot \delta + 48 \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow M_F = 912$$

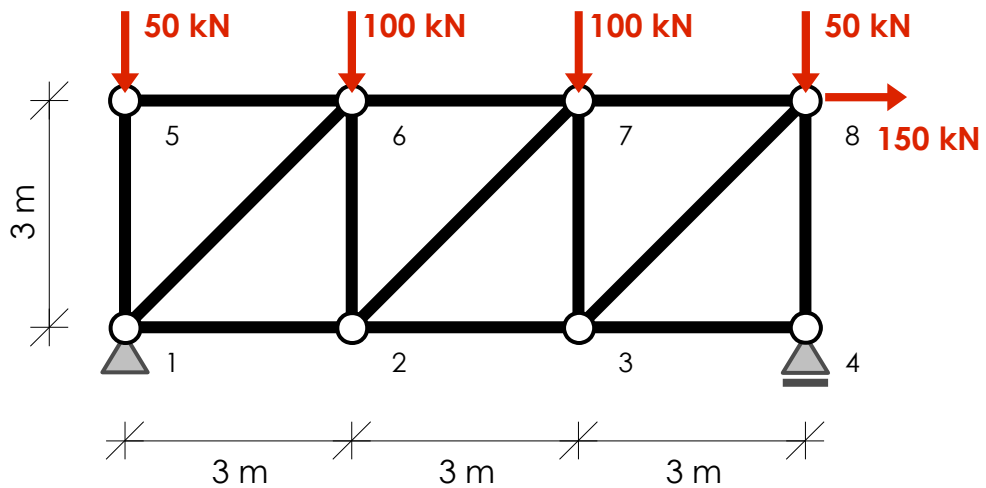
Reakcja V_B :



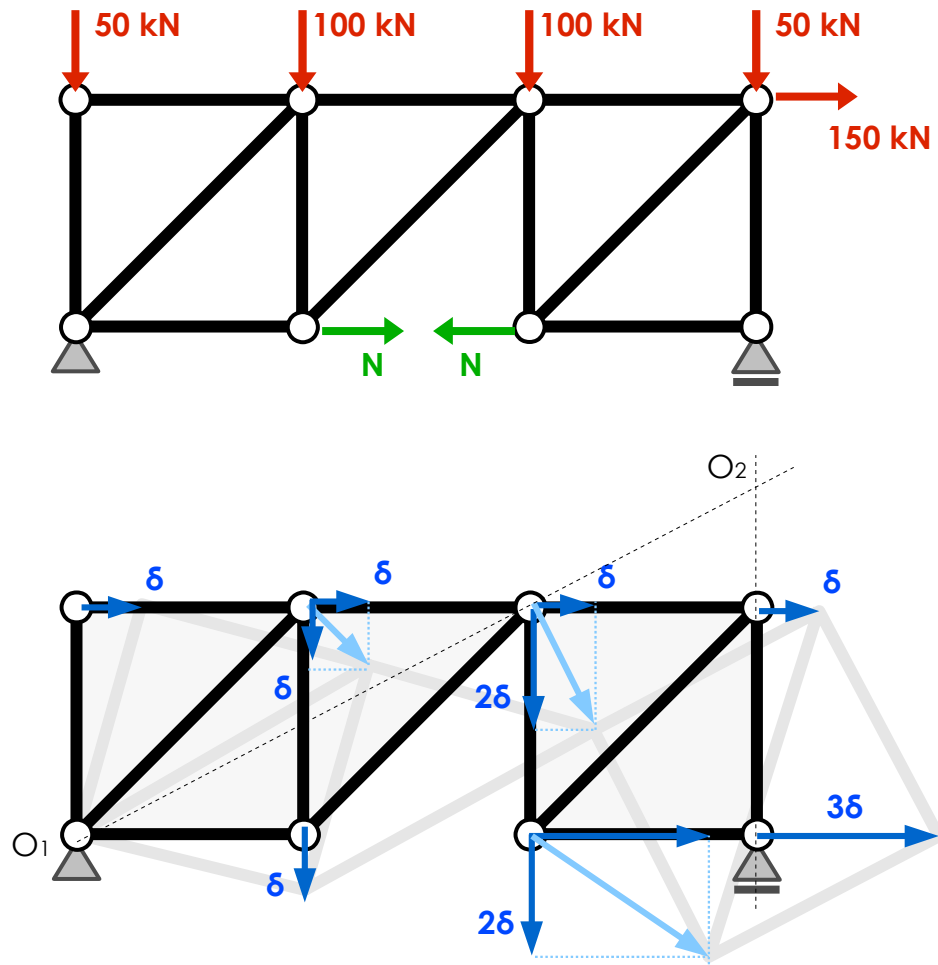
$$\delta L = V_B \cdot \delta - 48 \cdot \delta + 60 \cdot 3\delta = 0 \Rightarrow V_B = -132$$

ZADANIE 9

Korzystając z ZPW wyznacz siły w prętach 2-3, 2-7 oraz 3-7.

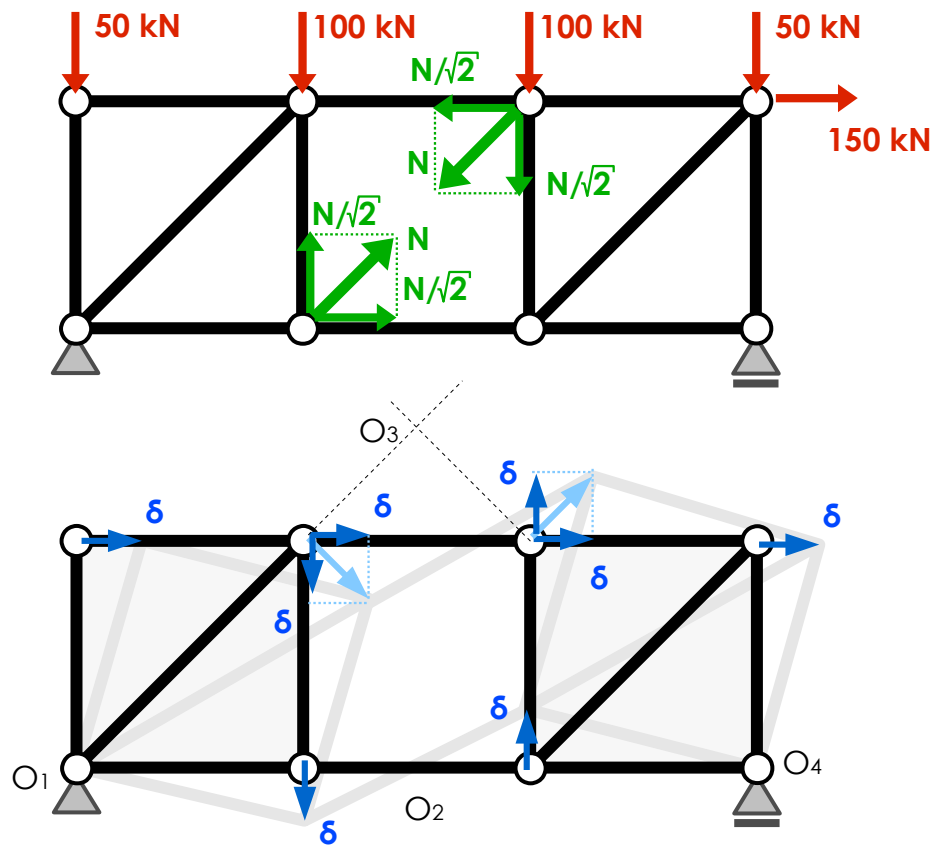


Siła w pręcie 2-3:



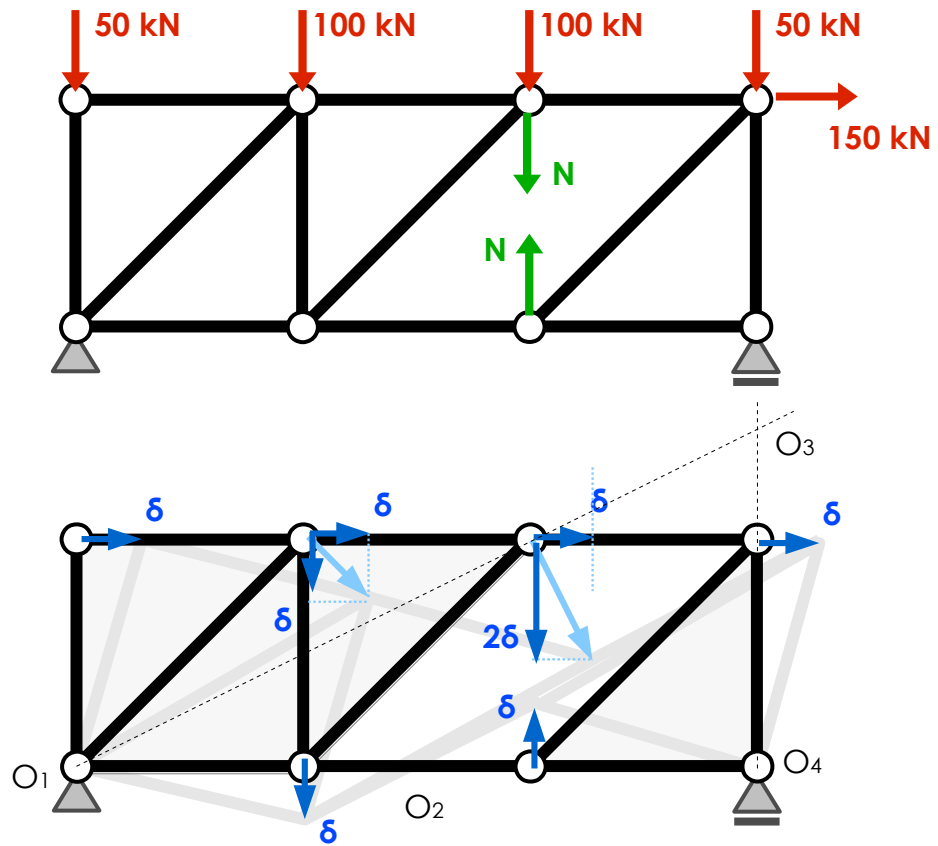
$$\delta L = 100 \cdot \delta + 100 \cdot 2\delta + 150 \cdot \delta - N \cdot 3\delta = 0 \Rightarrow N = 150$$

Siła w pręcie 2-7:



$$\delta L = 100 \cdot \delta - 100 \cdot \delta + 150 \cdot \delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \delta = 0 \Rightarrow N = 50\sqrt{2}$$

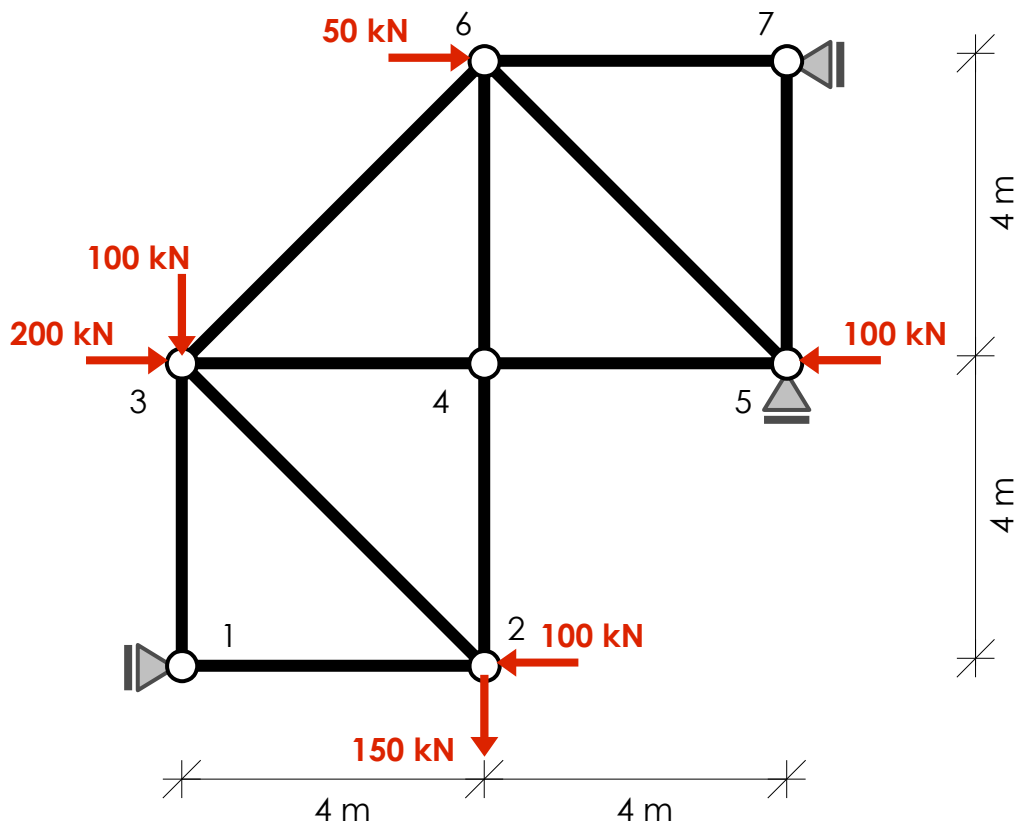
Siła w pręcie 3-7:



$$\delta L = 100 \cdot \delta + 100 \cdot 2\delta + N \cdot 2\delta + N \cdot \delta + 150 \cdot \delta = 0 \Rightarrow N = -150$$

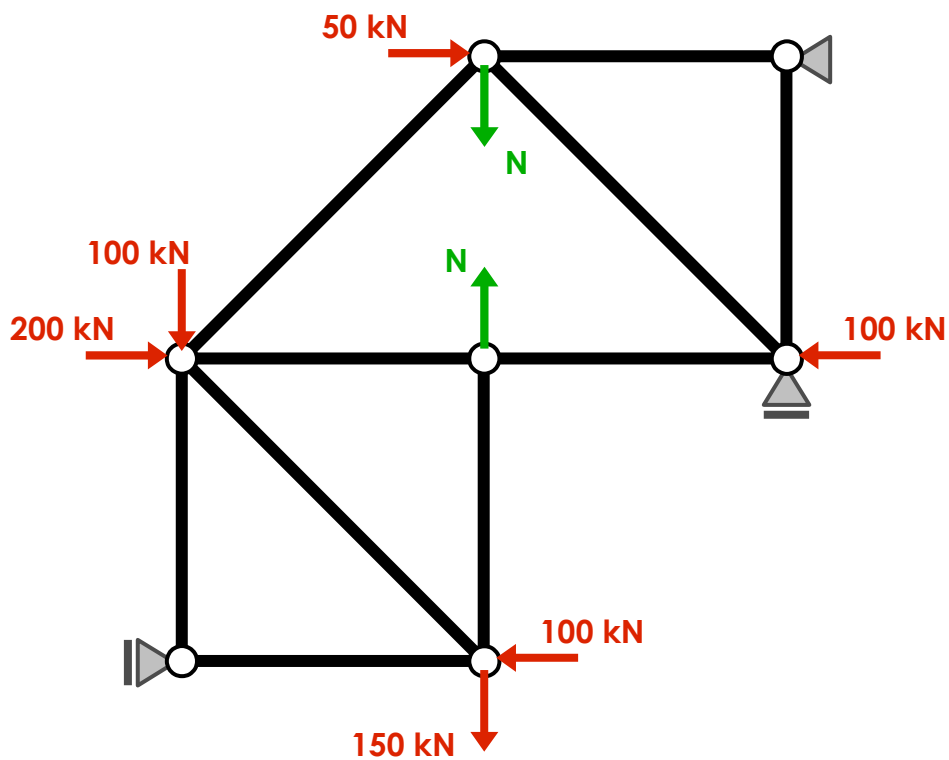
ZADANIE 10

Wyznaczyć siłę w pręcie 4-6 korzystając z ZPW.



Po rozcięciu otrzymujemy:

Układ sił



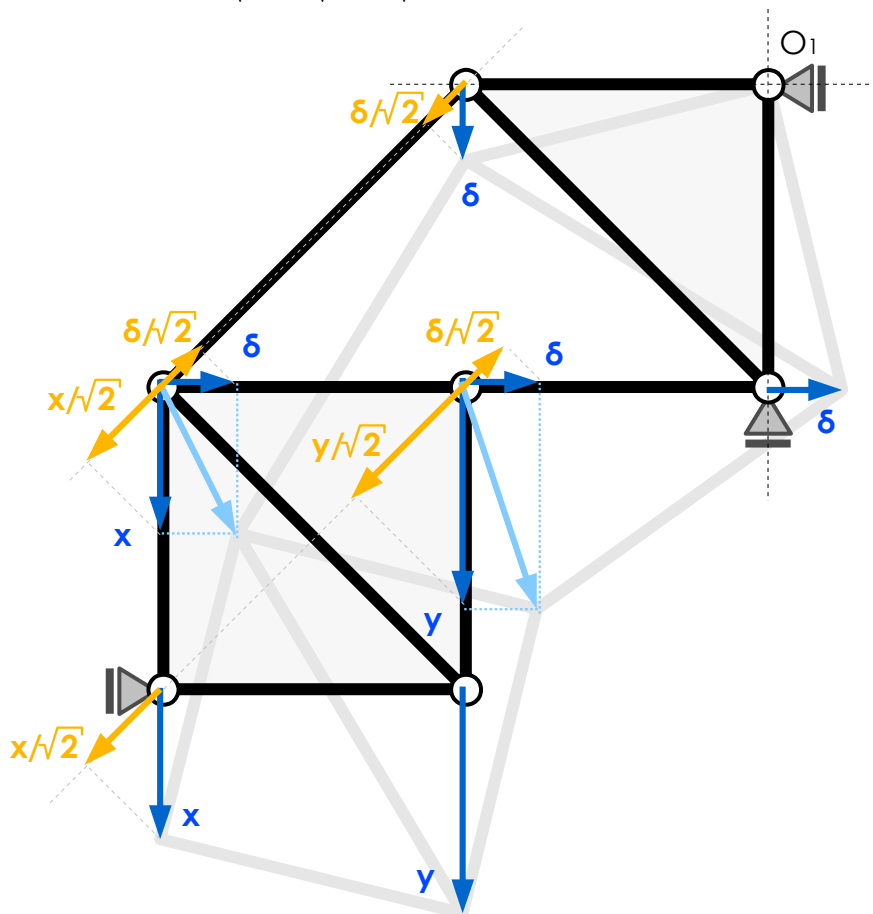
Układ przemieszczeń

- Podpory w węzłach 5 i 7 wyznaczają środek obrotu O_1 tarczy 5-6-7.
- Składowa przemieszczenia poziomego w węzłach 3 i 4 musi być taka sama jak w węzle 5 (wszystkie leżą na jednej prostej poziomej)
- Nieznane składowe pionowe przemieszczeń w węzłach 3 i 4 oznaczamy odpowiednio przez x i y .
- Składową x wyznaczamy z warunku, że rzut wektora przemieszczenia w węzłach 5 i 6 na kierunek łączący węzły 5 i 6 musi być taki sam:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\delta}{\sqrt{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 2\delta$$

- Składową y wyznaczamy z warunku, że rzut wektora przemieszczenia w węzłach 1 i 4 na kierunek łączący węzły 1 i 4 musi być taki sam:

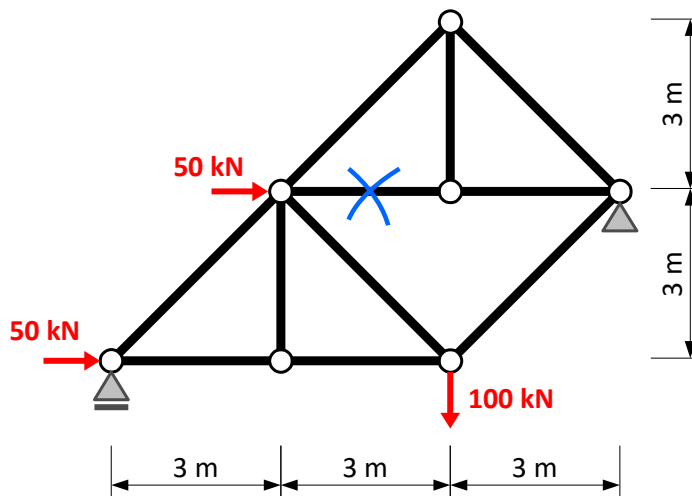
$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{\delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = x + \delta = 3\delta$$



$$\delta L = 200 \cdot \delta + 100 \cdot 2\delta + 150 \cdot 3\delta - N \cdot 3\delta + N \cdot \delta - 100 \cdot \delta = 0 \Rightarrow N = 375$$

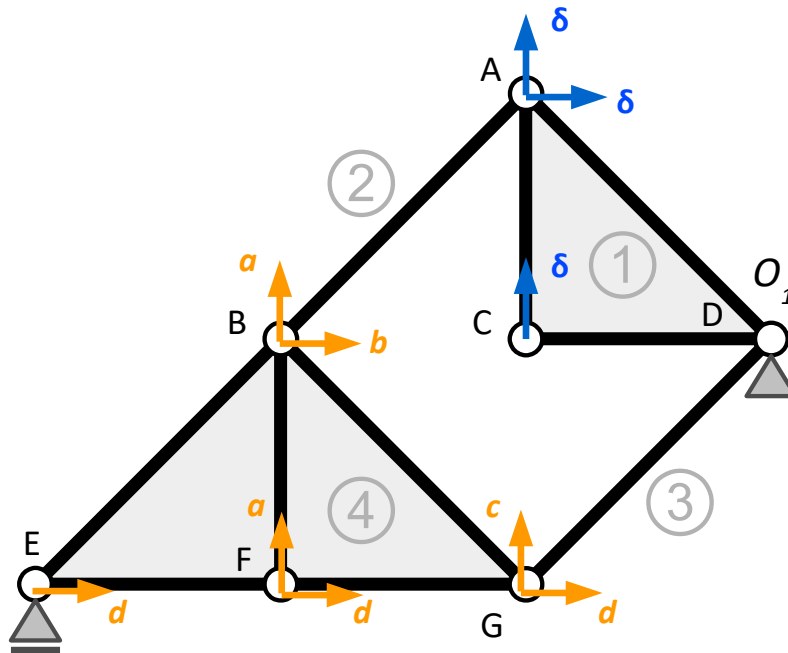
ZADANIE 11

Wyznacz siłę w pręcie kratowym zaznaczonym na rysunku korzystając z zasady prac wirtualnych.



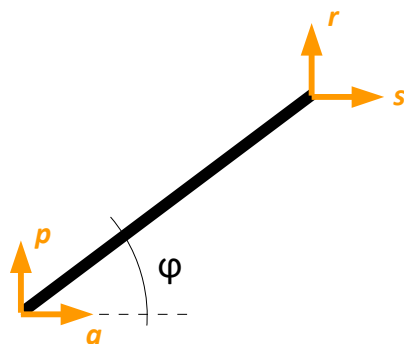
ROZWIĄZANIE:

Od razu znajdujemy środek chwilowego obrotu i rozkład przemieszczeń wirtualnych dla tarczy 1. Pozostałe niewidome przemieszczenia (ich składowe poziome i pionowe) oznaczamy kolejno literami a, b, c, d uwzględniając w ich rozkładzie przyłożone więzy oraz twierdzenia o rozkładzie prędkości w bryle sztywnej.



Wartości nieznanymi przemieszczeń wirtualnych wyznaczmy korzystając z twierdzenia o równości rzutów wektorów prędkości na kierunek łączący dwa punkty w bryle sztywnej. Dla pręta ukośnego możemy napisać:

$$p \cdot \sin \varphi + q \cdot \cos \varphi = r \cdot \sin \varphi + s \cdot \cos \varphi$$



W przypadku prętów nachylonych pod kątem $\varphi = 45^\circ$:

$$p \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + q \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + s \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

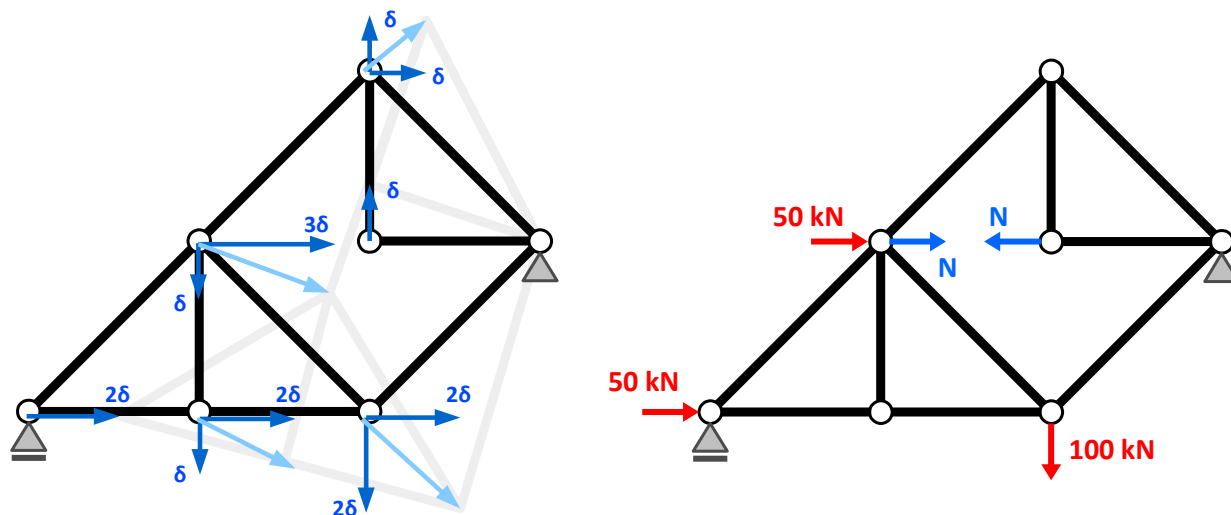
czyli:

$$p + q = r + s$$

W tym uproszczonym zapisie (obowiązującym tylko dla prętów pod kątem $\varphi = 45^\circ$!) należy uważać na zwrot narysowanych przemieszczeń wirtualnych. Rzutując na kolejne kierunki możemy napisać:

$$\begin{cases} AB: & a + b = \delta + \delta \\ GD: & c + d = 0 \\ BG: & -a + b = -c + d \\ EB: & d = b + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\delta \\ b = 3\delta \\ c = -2\delta \\ d = 2\delta \end{cases}$$

Otrzymujemy rozkład przemieszczeń:



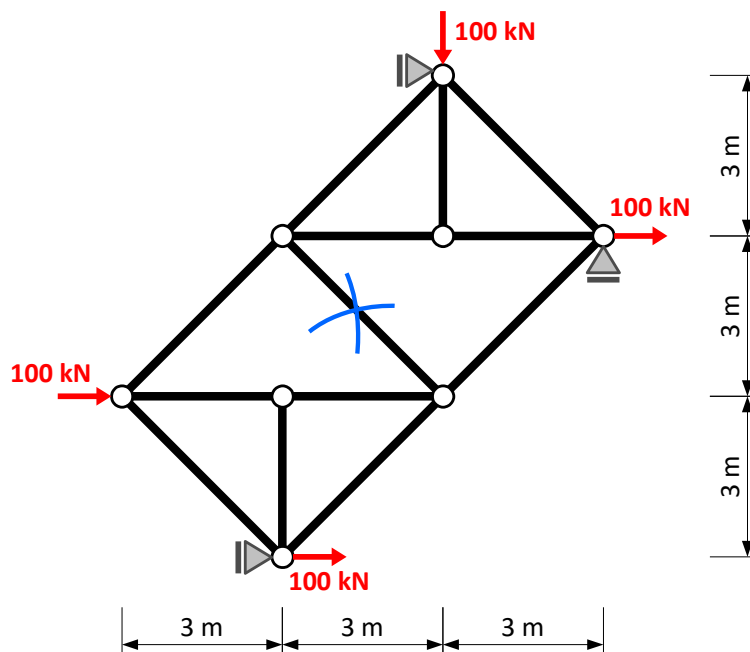
Praca wirtualna:

$$\delta L = 50 \cdot 3\delta + N \cdot 3\delta + N \cdot 0 + 50 \cdot 2\delta + 100 \cdot 2\delta = 0$$

$$N = -150 \text{ kN}$$

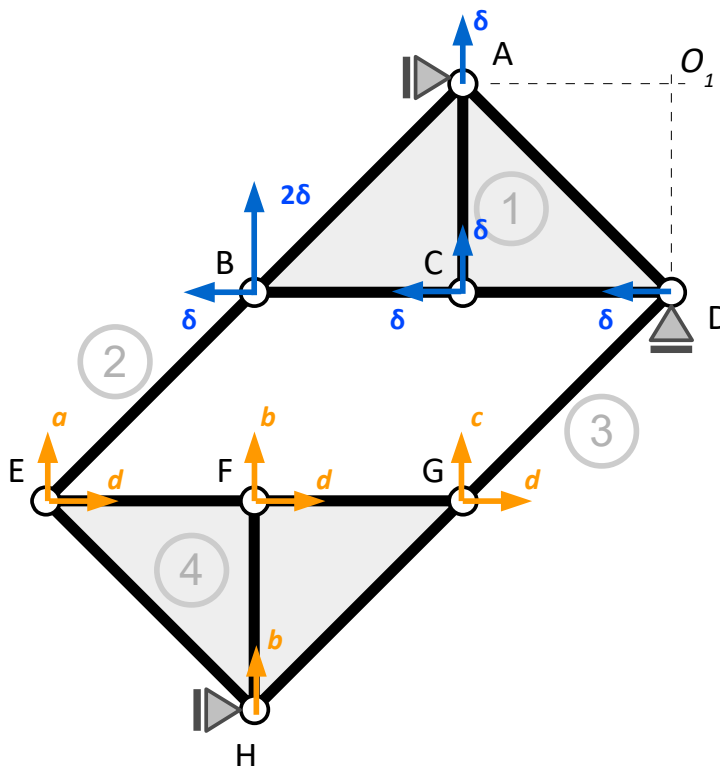
ZADANIE 12

Wyznacz siłę w pręcie kratowym zaznaczonym na rysunku korzystając z zasady prac wirtualnych.



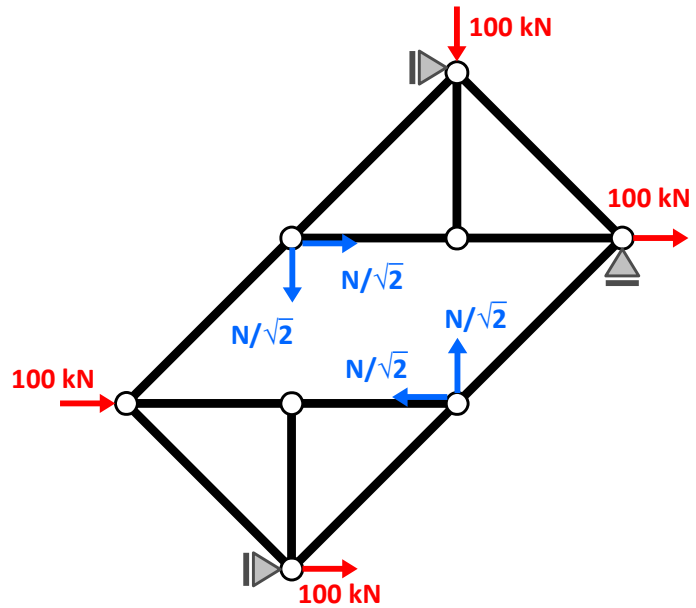
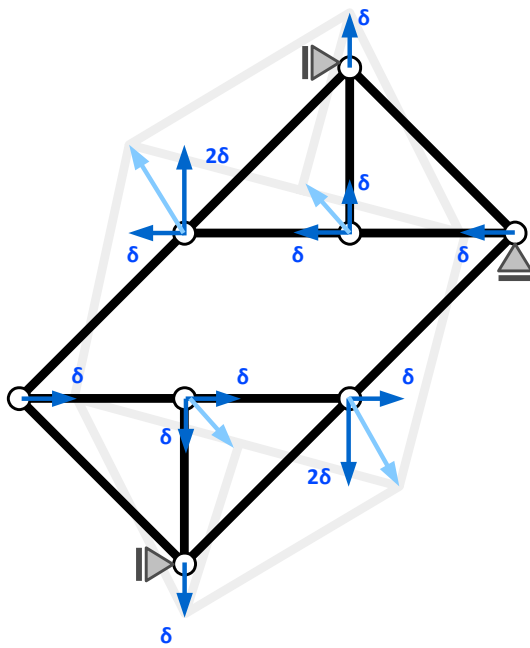
ROZWIĄZANIE:

Wyznaczamy rozkład przemieszczeń wirtualnych po rozcięciu pręta. Wyznaczamy środek chwilowego obrotu i rozkład przemieszczeń dla tarczy 1. Pozostałe przemieszczenia wirtualne oznaczamy jako niewiadome uwzględniając przyłożone więzy i twierdzenia o rozkładzie prędkości w bryle sztywnej.



Rzutuując przemieszczenia wirtualne na kolejne kierunki otrzymujemy:

$$\begin{cases} EB: & a+d = -\delta+2\delta \\ GD: & c+d = -\delta \\ EH: & -a+d = -b \\ HG: & c+d = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\delta \\ c = -2\delta \\ d = \delta \end{cases}$$



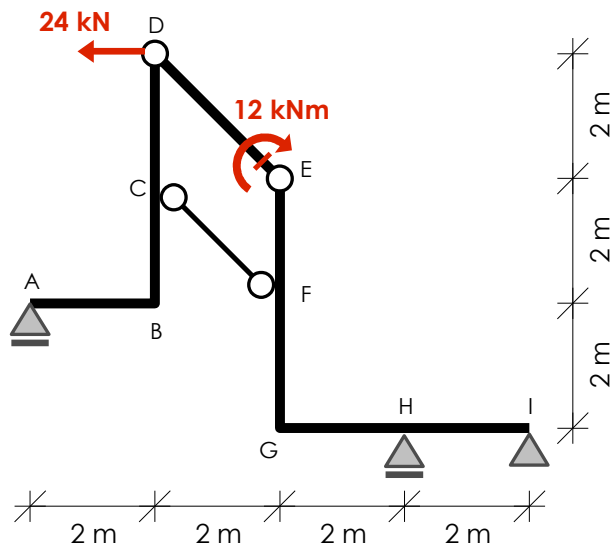
Praca wirtualna:

$$\delta L = -100 \cdot \delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot 2\delta - 100 \cdot \delta + 100 \cdot \delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot 2\delta + 100 \cdot 0 = 0$$

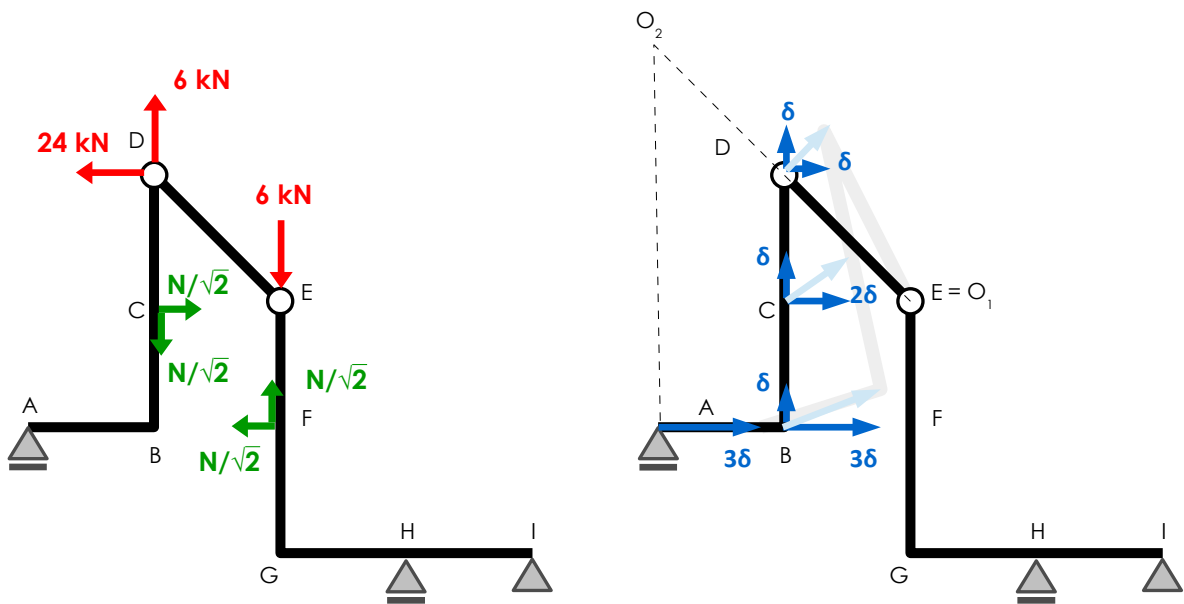
$$N = -\frac{50}{3} \sqrt{2} \text{ kN} \approx -23,57 \text{ kN}$$

ZADANIE 13

Wyznacz siłę w pręcie CF korzystając z zasady prac wirtualnych:



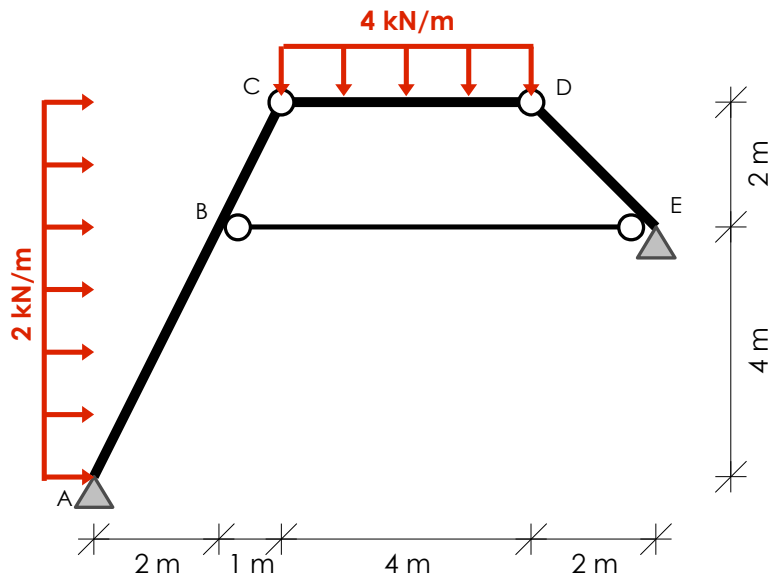
ROZWIĄZANIE:



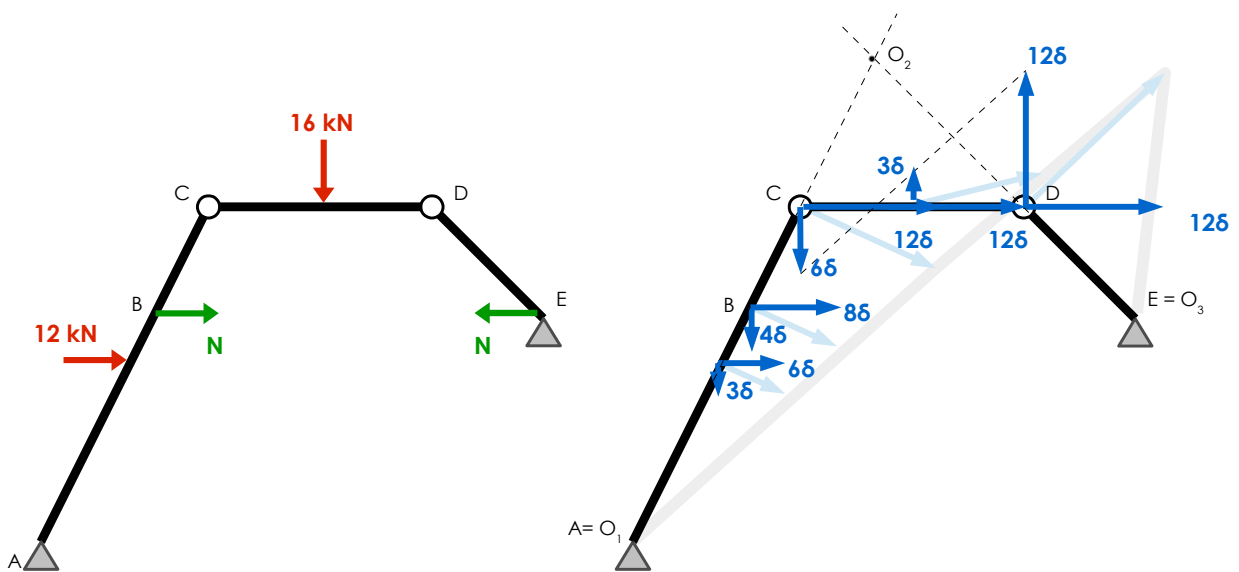
$$\delta L = -24 \cdot \delta + 6 \cdot \delta + \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot 2\delta - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 18\sqrt{2} \text{ kN}$$

ZADANIE 14

Wyznacz siłę w pręcie BE korzystając z zasady prac wirtualnych:



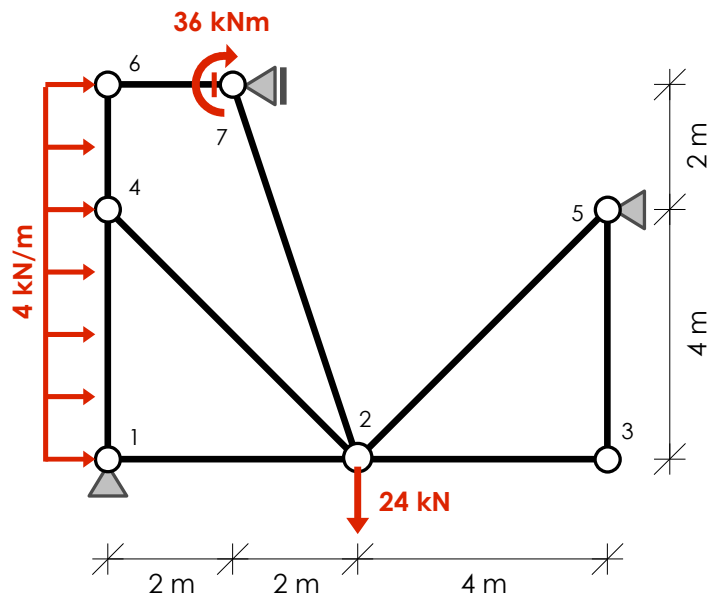
ROZWIĄZANIE:



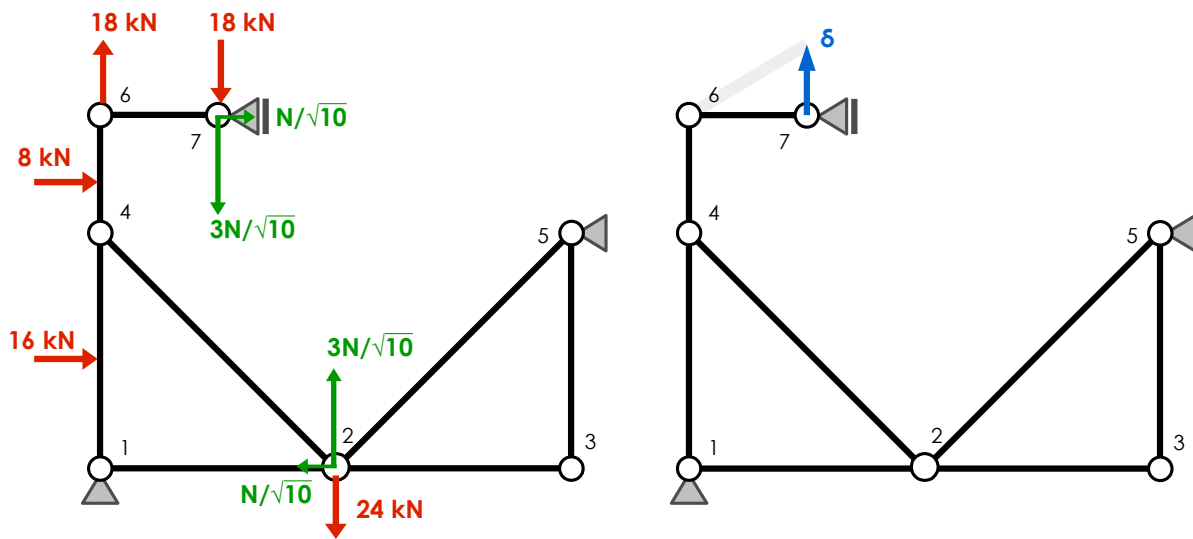
$$\delta L = 12 \cdot 6\delta + N \cdot 8\delta - 16 \cdot 3\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = -3 \text{ kN}$$

ZADANIE 15

Wyznacz siłę w pręcie 2-7 korzystając z zasady prac wirtualnych:



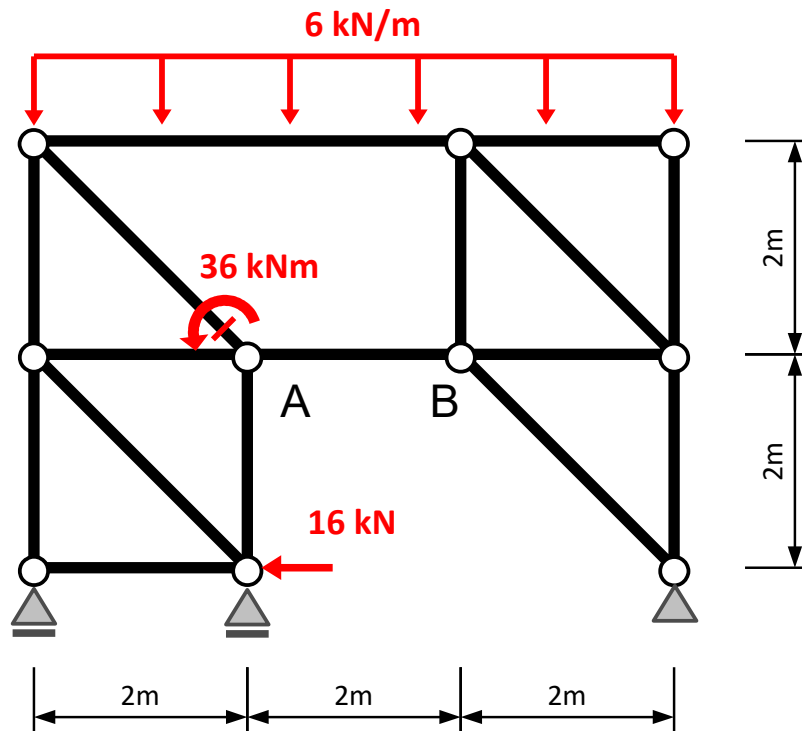
ROZWIĄZANIE:



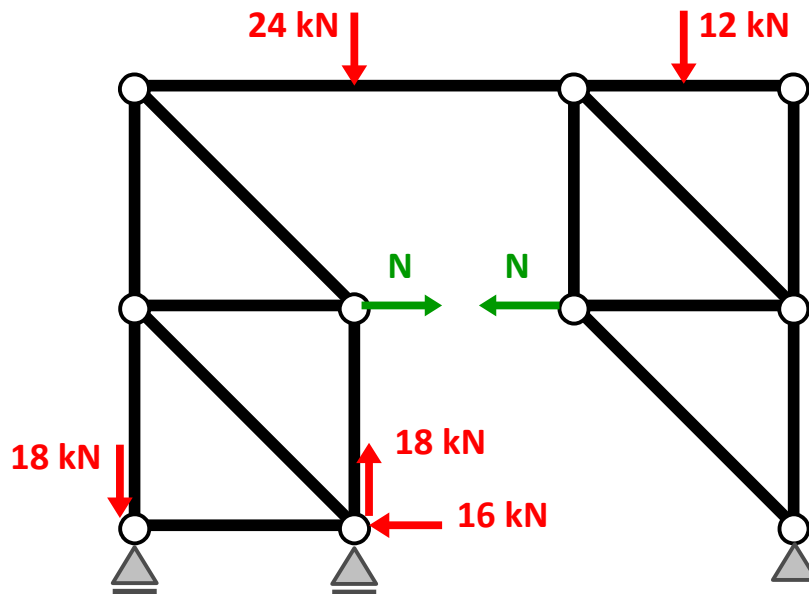
$$\delta L = -18 \cdot \delta - \frac{3N}{\sqrt{10}} \cdot \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = -6\sqrt{10} \text{ kN}$$

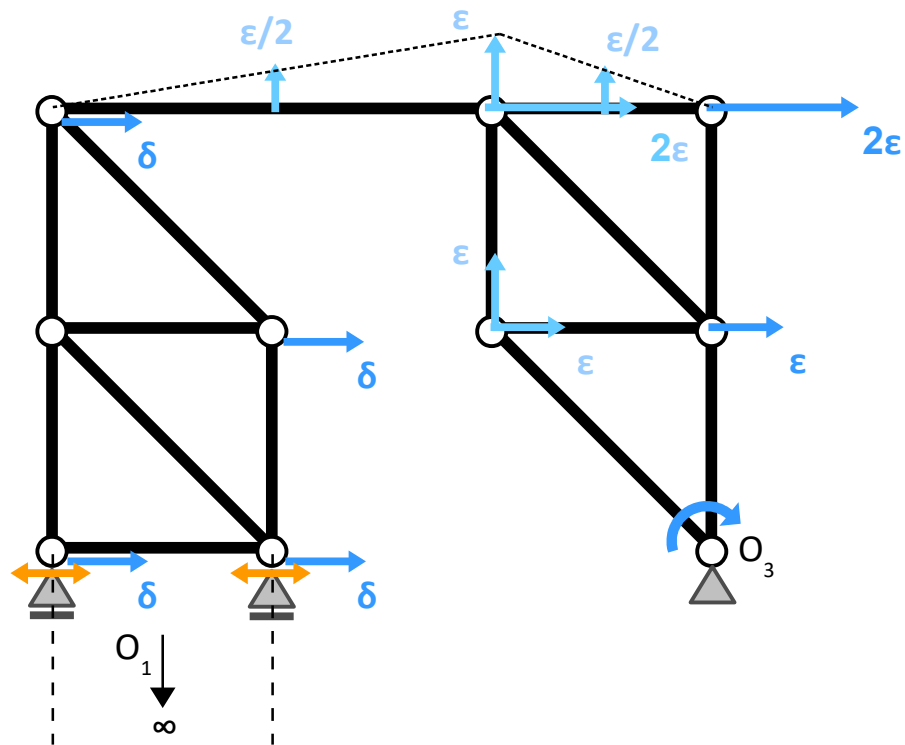
ZADANIE 16

Wyznaczyć siłę w pręcie kratowym AB korzystając z zasady prac wirtualnych.



ROZWIĄZANIE:





Z równości rzutów prędkości na kierunek łączący dwa punkty w bryle sztywnej:

$$\delta = 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}\delta$$

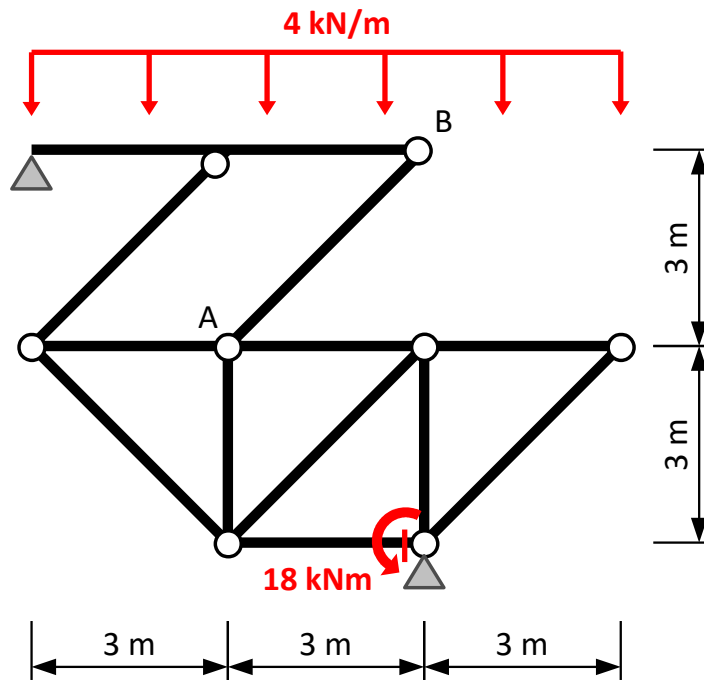
Praca wirtualna:

$$\delta L = -16 \cdot \delta + N \cdot \delta - N \cdot \frac{\delta}{2} - 24 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2} \right) - 12 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2} \right) = 0 \quad \forall \delta$$

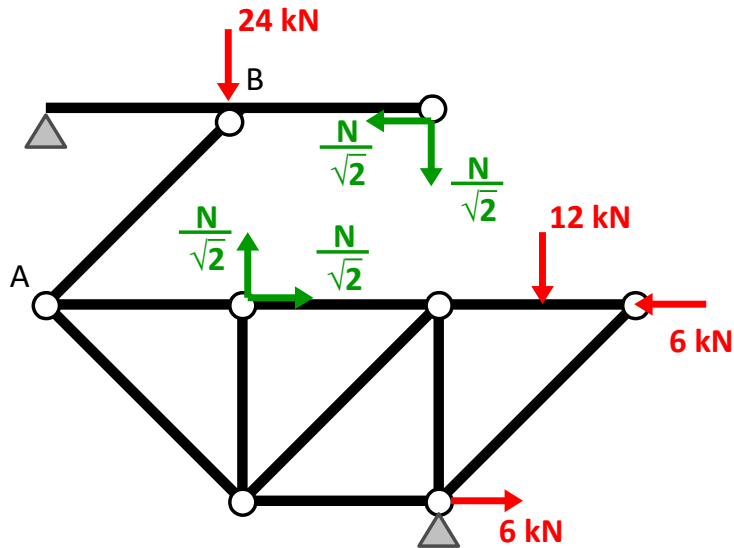
$$N = 50 \text{ kN}$$

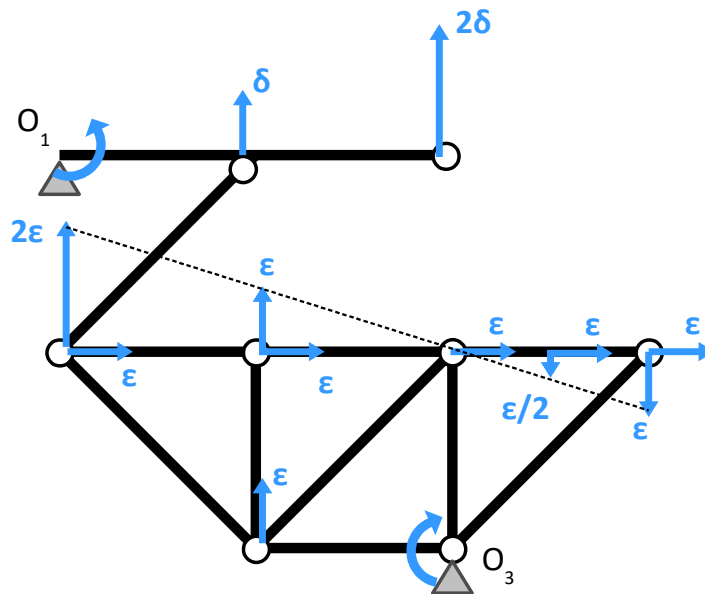
ZADANIE 17

Wyznaczyć siłę w pręcie kratowym AB korzystając z zasady prac wirtualnych.



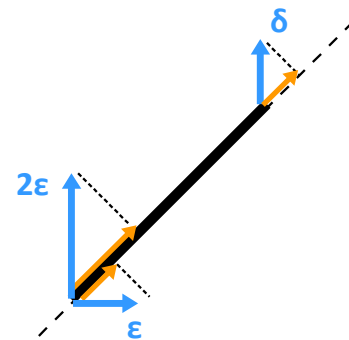
ROZWIĄZANIE:





Z równości rzutów prędkości na kierunku łączący dwa punkty w bryle sztywnej:

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{3}$$



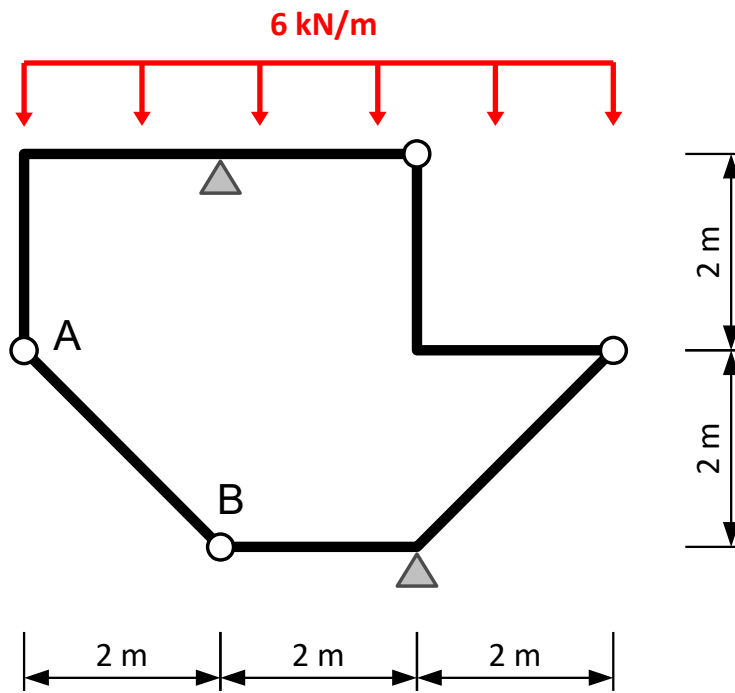
Praca wirtualna:

$$-24 \cdot \delta + 12 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{3} \right) - 6 \cdot \frac{\delta}{3} - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot 2\delta + \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta}{3} + \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta}{3} = 0 \quad \forall \delta$$

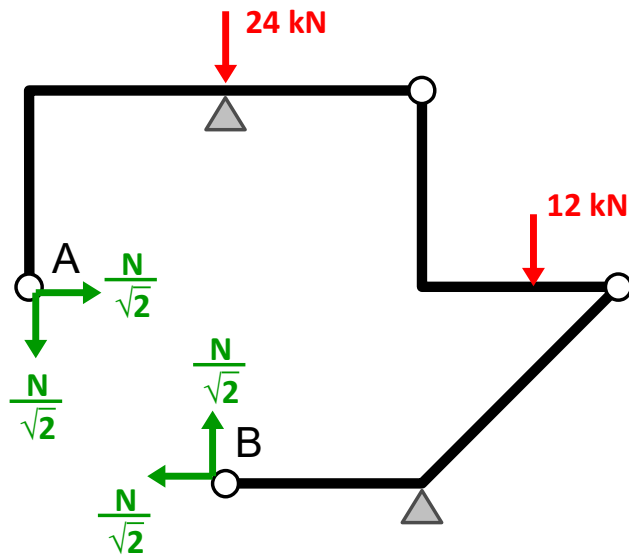
$$N = 18\sqrt{2} \text{ kN}$$

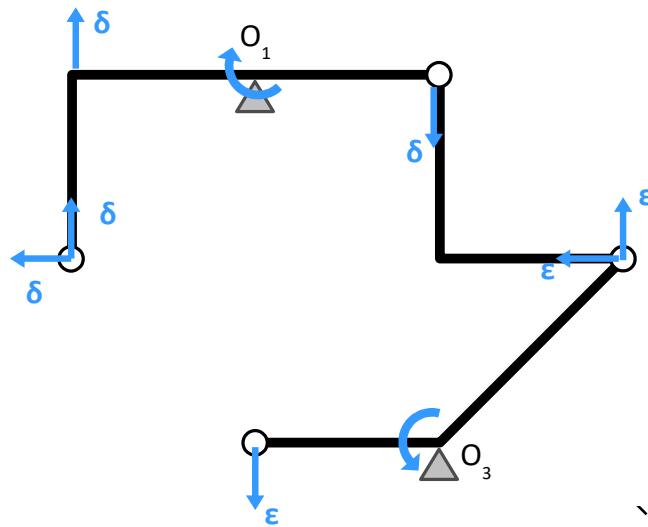
ZADANIE 18

Wyznaczyć siłę w pręcie kratowym AB korzystając z zasady prac wirtualnych.



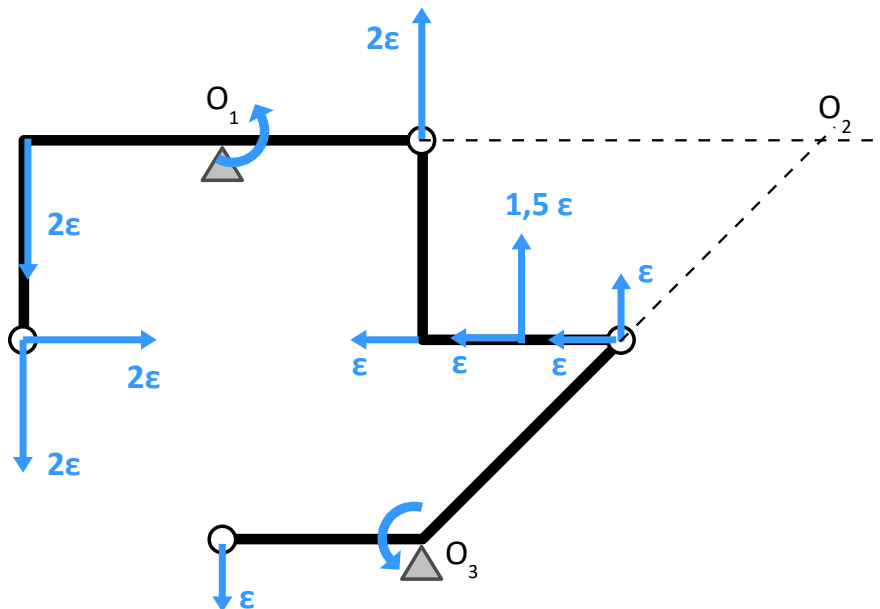
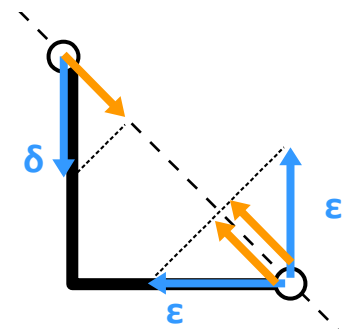
ROZWIĄZANIE:





Z równości rzutów prędkości na kierunku łączący dwa punkty w bryle sztywnej:

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} = -\frac{\delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow \epsilon = -\frac{\delta}{2}$$



Praca wirtualna:

$$\delta L = -12 \cdot 1,5\epsilon - \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \epsilon + \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot 2\epsilon + \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot 2\epsilon = 0 \quad \forall \epsilon$$

$$N = 6\sqrt{2} \text{ kN}$$

