

## MECHANIKA ANALITYCZNA – METODY WYZNACZANIA RÓWNAŃ RUCHU:

### 1. ZASADY DYNAMIKI NEWTONA

- Wyznaczamy **wszystkie siły** działające na dany układ mechaniczny – konieczne jest wyznaczenie również **sił reakcji więzów**  $\mathbf{R}$  !
- Równania ruchu określone są na podstawie **II zasady dynamiki Newtona**:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

### 2. ZASADA D'ALEMBERTA

- Z geometrii układu wyznaczamy wektory położenia  $\mathbf{r}$  wszystkich punktów, w których przyłożone są siły, a następnie różniczkując wyznaczamy pochodne  $\dot{\mathbf{r}}$  oraz  $\ddot{\mathbf{r}}$ .
- Wyznaczamy **siły czynne**  $\mathbf{F}$  oraz **siły bezwładności**  $\mathbf{B}$  działające na dany układ mechaniczny. **Siła bezwładności** działająca na masę  $m$  poruszającą się z przyspieszeniem  $\ddot{\mathbf{r}}$  jest równa:

$$\mathbf{B} = -m \ddot{\mathbf{r}}.$$

- Wyznaczamy następnie nieskończenie małe przemieszczenie dopuszczalne przez więzy, tzw. **przemieszczenie wirtualne**  $\delta \mathbf{r}$  równoległe do wektora prędkości  $\dot{\mathbf{r}}$
- Wyznaczamy **pracę wirtualną** czyli pracę sił czynnych i sił bezwładności na przemieszczeniach wirtualnych:

$$\delta L = (\mathbf{F} + \mathbf{B}) \circ \delta \mathbf{r}$$

- Zasada d'Alemberta głosi, że praca wirtualna ma być równa 0 dla dowolnego przemieszczenia wirtualnego – na tej podstawie formułujemy równania ruchu:

$$\delta L = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r}$$

### 3. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

- Wyznaczamy **energię kinetyczną** układu:  $E_k = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$
- Wyznaczamy **energię potencjalną** układu:  $E_p = -V$
- Wyznaczamy **energię całkowitą** układu:  $E = E_k + E_p$
- Zasada zachowania energii** głosi, że zmiana energii w czasie jest zerowa – na tej podstawie formułujemy równania ruchu:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

**UWAGA:** Zasada zachowania energii jest zawsze wystarczająca do wyznaczenia równań ruchu układów o maksymalnie jednym stopniu swobody!

#### 4. RÓWNANIA LAGRANGE'A I RODZAJU

- Dla każdego punktu określamy działające **siły czynne**  $\mathbf{F}$
- Dla każdego punktu określamy **równania więzów**:  $f_k(x, y, z) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, c$
- Wprowadzamy tyle nieznanych **mnożników Lagrange'a**  $\lambda_k$ , ile mamy równań więzów.
- Równań ruchu dostarczając nam równania **Lagrange'a I rodzaju**:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial y} \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial z} \end{cases}$$

#### 5. RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

- Dobieramy **współrzędne uogólnione**  $q_j$  w liczbie równej liczbie stopni swobody  $s$
- Wyznaczamy wektory położenia  $n$  punktów w których obecna jest masa lub przyłożona jest siła, jako funkcje współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s), \quad i = 1, \dots, n$$

- Wyznaczamy **energię kinetyczną układu** – w przypadku ogólnym będzie ona sumą energii kinetycznej ruchu postępowego i obrotowego każdego z elementów układu obdarzonych masą:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i^2$$

- Wyznaczamy **siły uogólnione**:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \circ \mathbf{F}_i$$

- Równań ruchu dostarczają nam **równania Lagrange'a II rodzaju**:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, 2, \dots, s$$

#### UWAGA:

- Jeśli **jedynymi siłami działającymi** na układ mechaniczny są **siły potencjalne** związane z potencjałem  $V$ , to określamy **energię potencjalną**  $E_p = -V$  a następnie określamy wielkość zwaną **lagranżjanem**, zdefiniowaną jako:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p$$

Równania ruchu przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, s$$

## 6. ZASADA NAJMNIJSZEGO DZIAŁANIA (ZASADA HAMILTONA)

- Możemy posłużyć się **współzrędnymi uogólnionymi**  $q_1, \dots, q_s$

- Wyznaczamy **energię kinetyczną**: 
$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i^2$$

- Wyznaczamy **energię potencjalną**: 
$$E_p = -V$$

- Wyznaczamy **lagranżjan**: 
$$\mathcal{L} = E_k - E_p$$

- Wyznaczamy **całkę działania**, która jest funkcjonałem – tj. funkcją określoną jako pewna całka, zaś zmienną tej funkcji jest inna funkcja, ta występująca pod całką

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) d\tau$$

- Równania ruchu otrzymujemy z **zasady najmniejszego działania**, zgodnie z którą działania przyjmować ma wartość minimalną:

$$S = \int_{t_0}^t \mathcal{L} d\tau \rightarrow \min$$

- W tym celu musimy obliczyć **wariację** tego funkcjonału i przyrównać ją do 0:

$$\delta S = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^s \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] d\tau = 0 \quad \forall \delta q_j, \delta \dot{q}_j$$

- Wiedząc, że  $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$ , wariację możemy scałkować przez części uzyskując:

$$\delta S = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^s \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j d\tau = 0 \quad \forall \delta q_j$$

- Ostatecznie otrzymujemy równania ruchu w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j=1, \dots, s$$

## 7. RÓWNANIA HAMILTONA

- Dobieramy dowolne **współrzędne uogólnione**  $q_j$  w liczbie równej liczbie stopni swobody  $s$ .
- Wyznaczamy wektory położenia  $n$  punktów materialnych jako funkcje współrzędnych uogólnionych
 
$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s) \quad i=1, \dots, n$$

- Wyznaczamy **energię kinetyczną** układu:
 
$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i^2$$

- Wyznaczamy **energię potencjalną** układu:
 
$$E_p = -V$$

- Wyznaczamy **lagranżjan** układu:
 
$$\mathcal{L} = E_k - E_p$$

- Wyznaczamy **pędy uogólnione**:
 
$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

- Odwracamy powyższą zależność wyznaczając prędkości uogólnione jako funkcje pędów uogólnionych:
 
$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(p_1, \dots, p_s)$$

- Na podstawie lagranżjanu wyznaczamy **hamiltonian** układu wyrażając za każdym razem prędkości uogólnione przez pędy uogólnione na podstawie poprzedniej zależności:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_i^s p_j \cdot \dot{q}_j(\mathbf{p}) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}))$$

- Równań ruchu dostarczają nam równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, s$$

### UWAGA:

- II zasada dynamiki Newtona dla  $n$  punktów daje nam  $3n$  równań różniczkowych 2 rzędu, przy czym, jeśli obecne są więzy, nie wszystkie są niezależne.
- W przypadku układu  $n$  punktów ograniczonych  $c$  więzami równania Lagrange'a I rodzaju dają nam układ  $3n + c$  równań różniczkowych 2 rzędu na  $3n$  współrzędnych punktów i  $c$  nieznanymi mnożnikami Lagrange'a.
- W przypadku układu  $n$  punktów ograniczonych  $c$  więzami liczba stopni swobody jest równa  $s = 3n - c$ . Równania Lagrange'a II rodzaju dają nam układ  $s$  równań różniczkowych drugiego rzędu. W takim przypadku równania Hamiltona dają nam układ  $2s$  równań różniczkowych pierwszego rzędu.