Wyznaczanie rozkładu naprężeń w płaskiej tarczy sprężystej z wykorzystaniem funkcji naprężeń Airy'ego METODĄ RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Rozpatrujemy **płaski stan naprężenia / odkształcenia** przy **braku sił masowych**

WPROWADZENIE TEORETYCZNE

Definiujemy **funkcję naprężeń Airy'ego**:

$$F(x, y): \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_{xx} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sigma_{yy} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} \end{cases}$$

Równania równowagi Naviera spełnione są na mocy samej definicji funkcji Airy'ego (patrz: *wzór (5.86)* w rozdziale *5. Teoria liniowa*). Kolejnym warunkiem, który musi spełniać funkcja Airy'ego jest warunek nierozdzielności odkształceń. Po uwzględnieniu prawa Hooke'a, warunek ten przyjmuje postać **równania biharmonicznego** (patrz: wyprowadzenie *wzoru (5.136)* w rozdziale *5. Teoria liniowa*):

$$\nabla^4 F = 0 \qquad \text{gdzie } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

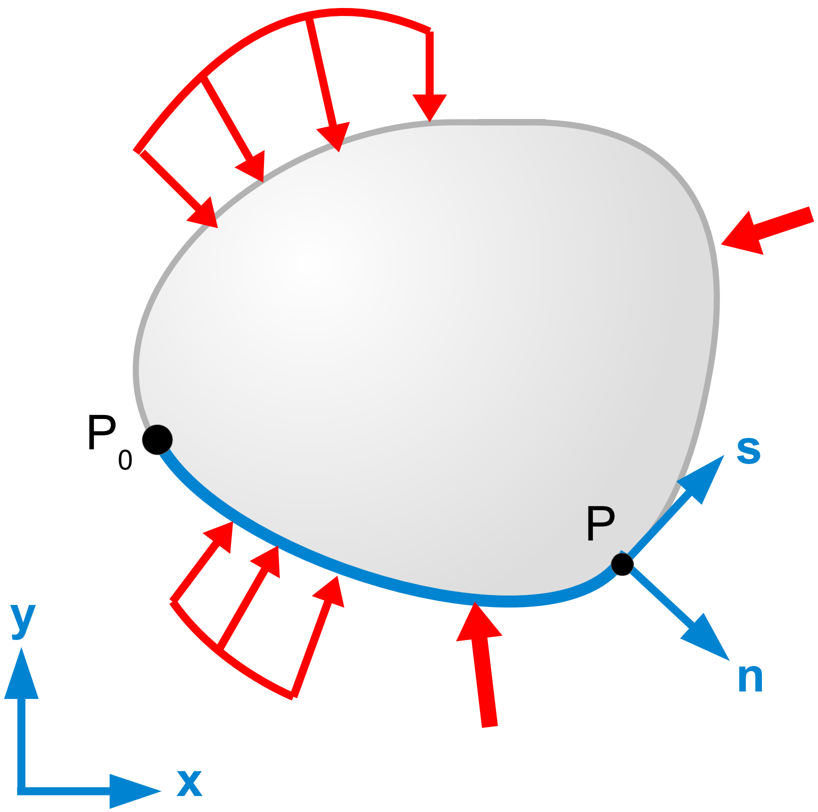
Rozwiązanie równania różniczkowego zależy od samego równania (u nas jest to tzw. **równanie biharmoniczne**), obszaru, na którym jest ono określone (**kształt tarczy**) oraz od **warunków brzegowych**.

Uzyskane równanie jest równaniem czwartego rzędu. Możemy zatem określić warunki brzegowe na wartości samej funkcji niewiadomej (funkcji Airy'ego) oraz jej pochodnych aż do czwartego rzędu włącznie.

Ograniczamy naszą uwagę do zagadnień, w których **warunki brzegowe mają tylko charakter obciążeniowy** – nie przyjmujemy żadnych warunków typu przemieszczeniowego. Oznacza to, że tarcza jest obciążona na brzegu znanymi siłami i może odkształcać się w sposób swobodny.

Warunki brzegowe dla funkcji Airy'ego można określić następująco (patrz: wyprowadzenie *wzoru 5.133* w podrozdziale *5.4.4.2* rozdziału *5. Teoria liniowa*)

$$\boxed{F\big|_P = \frac{M\big|_P}{h} \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{Q_s\big|_P}{h}}$$



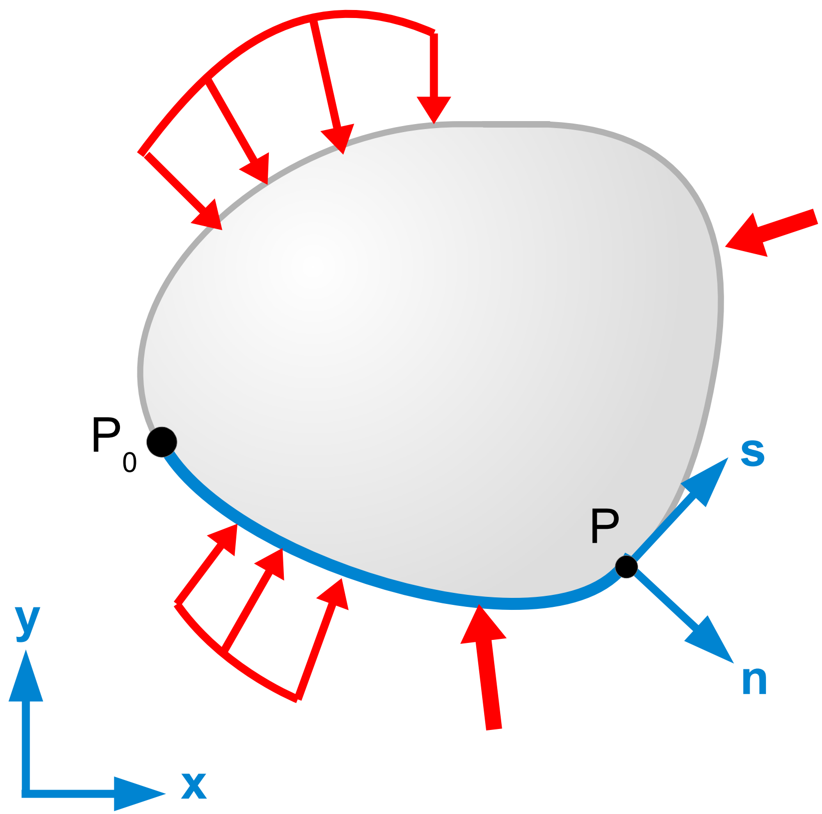
SCHEMAT OKREŚLANIA WARUNKÓW BRZEGOWYCH NA FUNKCJĘ AIRY'EGO NA PODSTAWIE OBCIĄŻENIA BRZEGU

- **Punkt P_0** wybieramy sobie **dowolnie**. Jego **położenie jest niezmienne**.
- Wybieramy następnie **punkt P**. Jego **położenie może się zmieniać**.
- W punkcie P wyznaczamy **lokalny układ współrzędnych (n,s)**, gdzie:
  - **n** – kierunek prostopadły do brzegu i skierowany na zewnątrz
  - **s** – kierunek styczny do brzegu i skierowany od P_0 do P

Wyznaczamy:

$M|_P$ **Moment względem punktu P od wszystkich obciążeń przyłożonych do odcinka brzegu zawartego pomiędzy punktami P0 i P**. Jeśli punkt porusza się po brzegu w taki sposób, ze wnętrze obszaru jest po lewej stronie, to za **moment dodatni** przyjmujemy moment przeciwny do ruchu wskazówek zegara

$Q_s|_P$ **Sumę sił stycznych** (tj. **równoległych do osi s układu lokalnego**) **od wszystkich obciążeń przyłożonych do odcinka brzegu zawartego pomiędzy punktami P0 i P**. Za **siły dodatnie** przyjmujemy siły zwrócone zgodnie z aktualnym zwrotem osi s w punkcie P.



SCHEMAT OKREŚLANIA WARUNKÓW BRZEGOWYCH NA FUNKCJĘ AIRY'EGO NA PODSTAWIE OBCIĄŻENIA BRZEGU

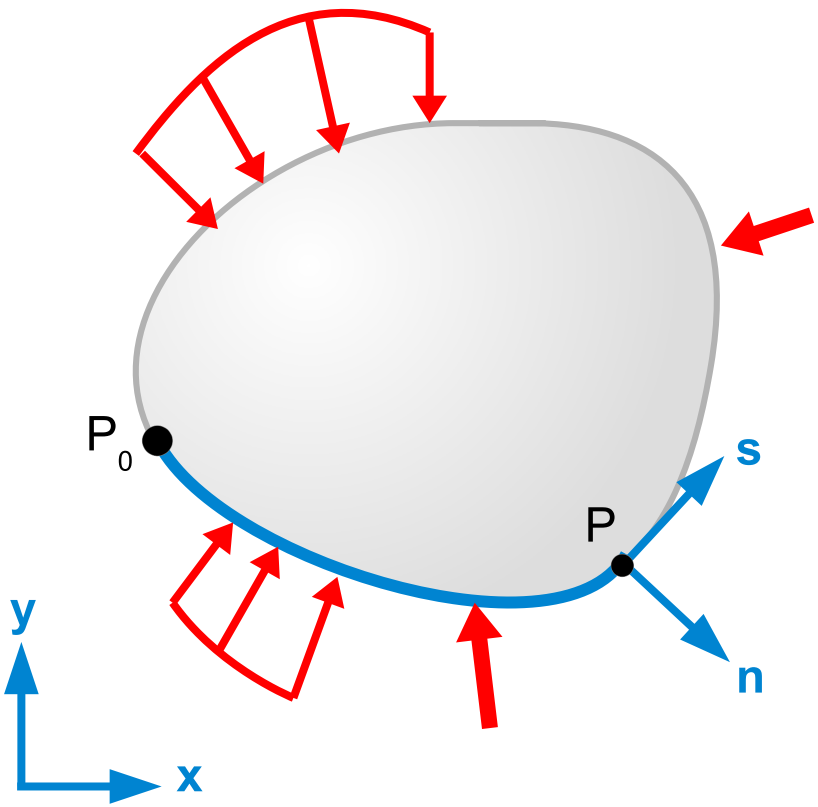
WARUNKI BRZEGOWE

- **na wartość funkcji Airy'ego** w punkcie P:

$$\boxed{F\big|_P = \frac{M\big|_P}{h}}$$

- **na wartość pochodnej kierunkowej** funkcji Airy'ego na kierunku normalnej zewnętrznej w punkcie P:

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{Q_s\big|_P}{h}}$$



SCHEMAT OKREŚLANIA WARUNKÓW BRZEGOWYCH NA FUNKCJĘ AIRY'EGO NA PODSTAWIE OBCIĄŻENIA BRZEGU

Pochodna kierunkowa funkcji Airy'ego na kierunku normalnej zewnętrznej w punkcie P:

Wyznaczamy normalną zewnętrzną brzegu w punkcie P, czyli wektor jednostkowy, prostopadły do brzegu i zwrócony na zewnątrz:

$$\mathbf{n}_{\boldsymbol{P}} = \left[n_x \ ; \ n_y \right]$$

Pochodna kierunkowa:

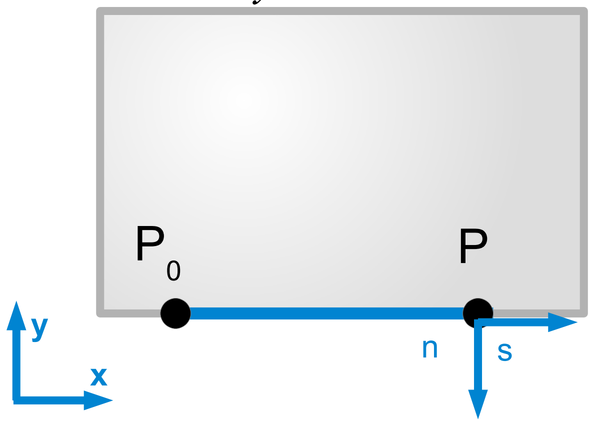
$$\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = \operatorname{grad} F\big|_P \circ \mathbf{n}_{\boldsymbol{P}} = \left[\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P \ ; \ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P \right] \circ \left[n_x \ ; \ n_y \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = n_x \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P + n_y \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P}$$

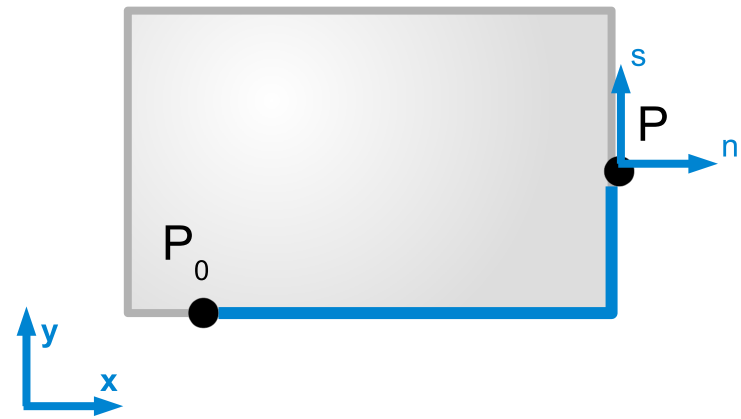
Pochodna kierunkowa funkcji Airy'ego na kierunku normalnej zewnętrznej w punkcie P dla **obszaru prostokątnego**.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = n_x \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P + n_y \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P$$

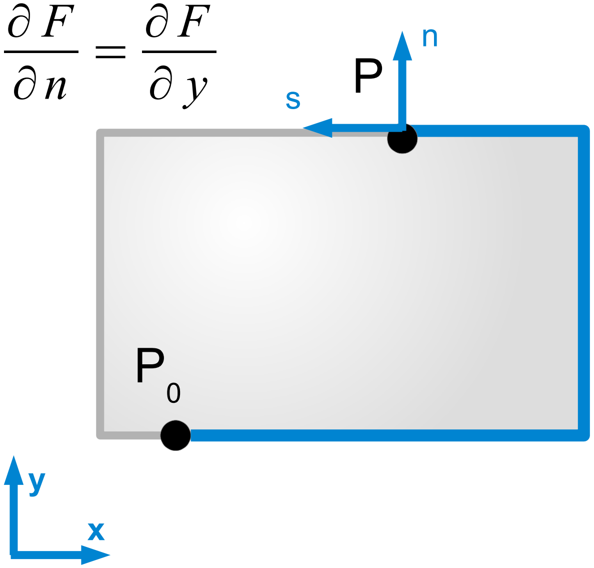
$$\frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{\partial F}{\partial y}$$



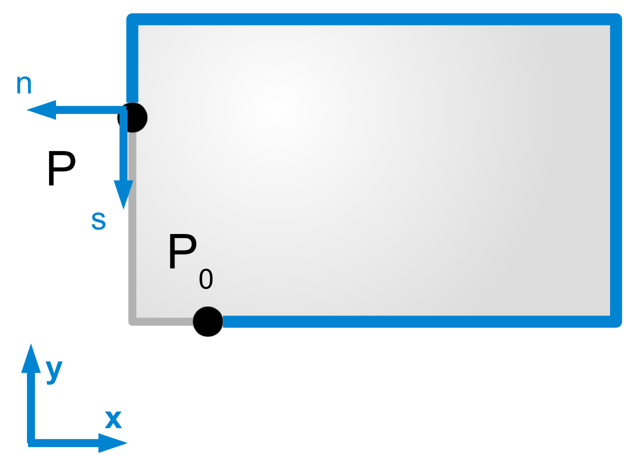
$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x}$$



$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial y}$$



$$\frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

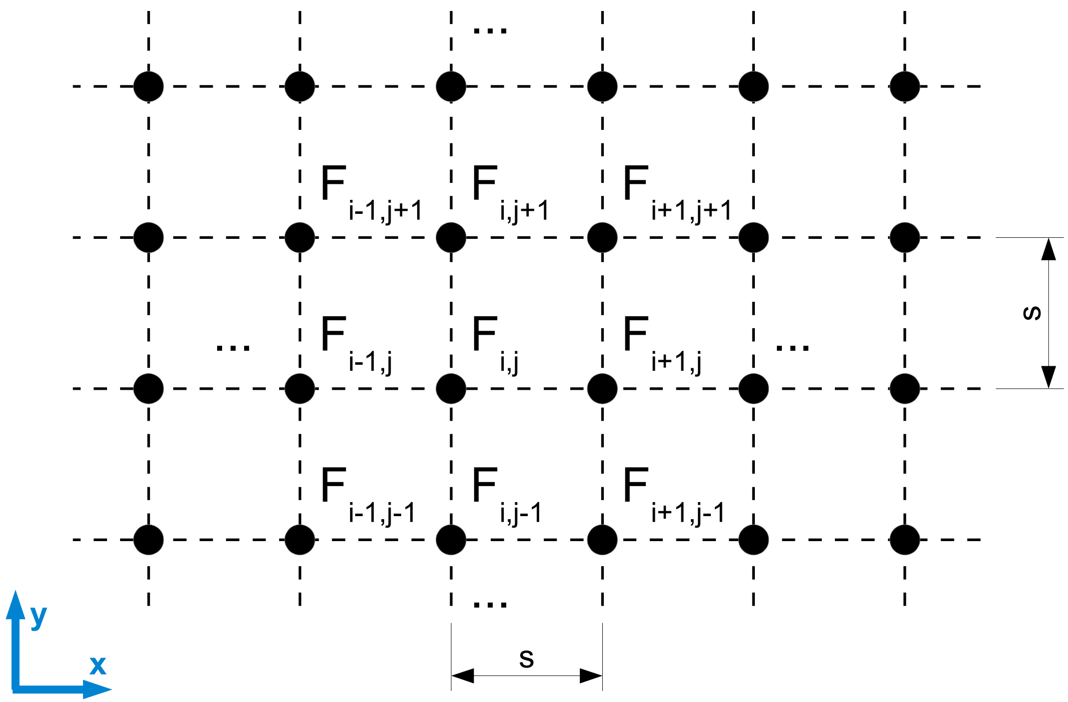


METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH – metoda numeryczna pozwalająca wyznaczyć przybliżone wartości rozwiązywania równań różniczkowych i układów równań różniczkowych w skończonej liczbie wybranych punktów, tj. w tzw. **węzłach siatki** MRS.

W każdym węźle zapisuje się równanie różniczkowe **przybliżając występujące w nim pochodne ilorazami różnicowymi** dla możliwie małych przyrostów zmiennych niezależnych Δx i Δy. Ponieważ każdy taki iloraz zależy od wartości poszukiwanej funkcji w odpowiednich węzłach w sposób liniowy, uzyskujemy w ten sposób **układ równań liniowych** na wartości węzłowe poszukiwanego rozwiązania.

Analogicznie zapisujemy również warunki brzegowe. Warunki brzegowe na pochodne wymagają wprowadzenia węzłów fikcyjnych poza obszarem obowiązywania równania – również i w nich musimy znaleźć przybliżoną wartość funkcji.

MRS w najprostszym wariancie przyjmuje siatkę prostokątną oraz identyczne przyrosty dla każdej zmiennej Δx = Δy = s.



Przykład: pochodna cząstkowa względem x

- **z definicji:**

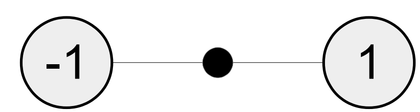
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{s \to 0} \frac{F(x+s, y) - F(x-s, y)}{2s}$$

- **w przybliżeniu:**

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2s}$$

- **Schemat graficzny:**

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2s} \cdot$$



WYBRANE SCHEMATY RÓŻNICOWE

Pochodne 1 rzędu:

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2s} \cdot \begin{array}{ccc} -1 & \bullet & 1 \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2s} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \\ -1 \end{array}$$

Pochodne 2 rzędu:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{s^2} \cdot \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \approx \frac{1}{s^2} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array}$$

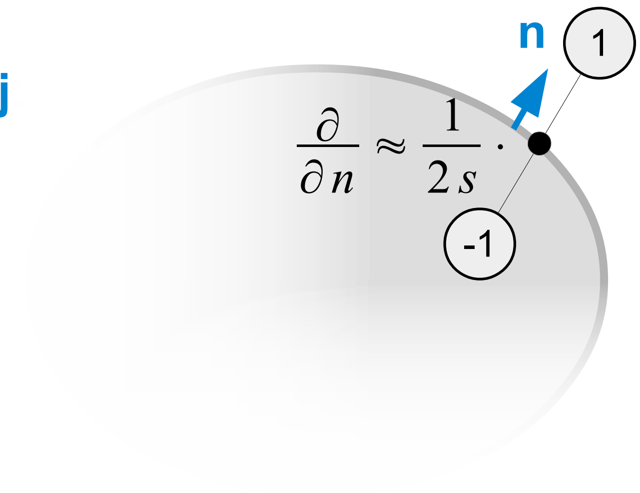
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{4s^2} \cdot \begin{array}{ccc} -1 & \bullet & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & \bullet & -1 \end{array}$$

Operator 4 rzędu:

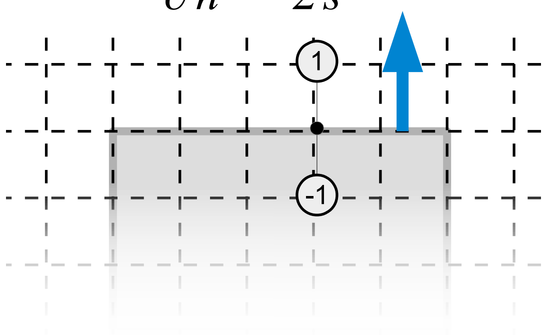
$$\nabla^4 \approx \frac{1}{s^4} \cdot \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

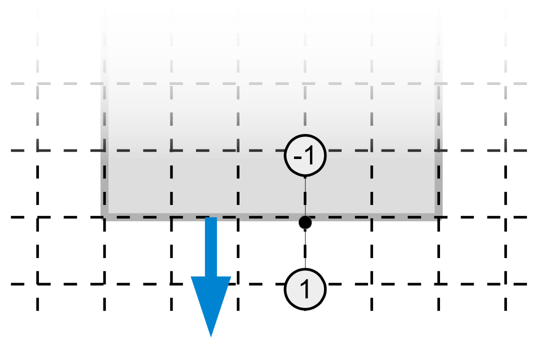
Pochodna kierunkowa na kierunku normalnej zewnętrznej

- węzeł **na zewnątrz** obszaru – mnożymy przez 1
- węzeł **wewnątrz** obszaru – mnożymy przez -1

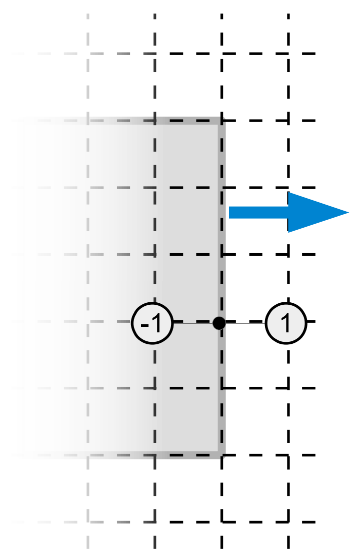


$$\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{1}{2s}\cdot$$



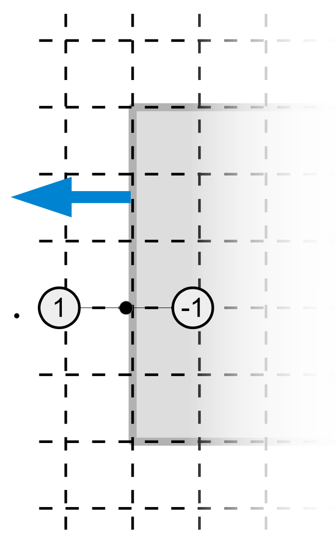


$$\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{1}{2s}\cdot$$



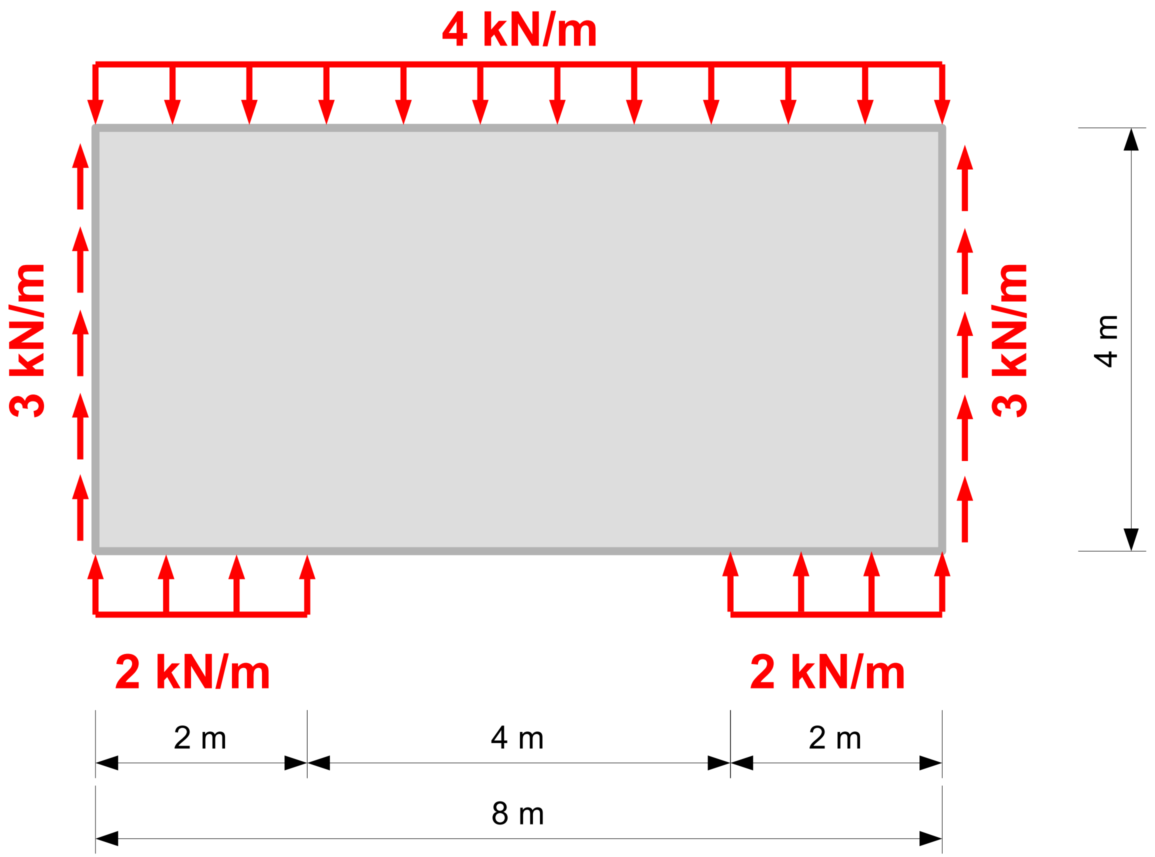
$$\cdot\frac{1}{2s} \approx \frac{\partial}{\partial n}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{1}{2s}\cdot$$



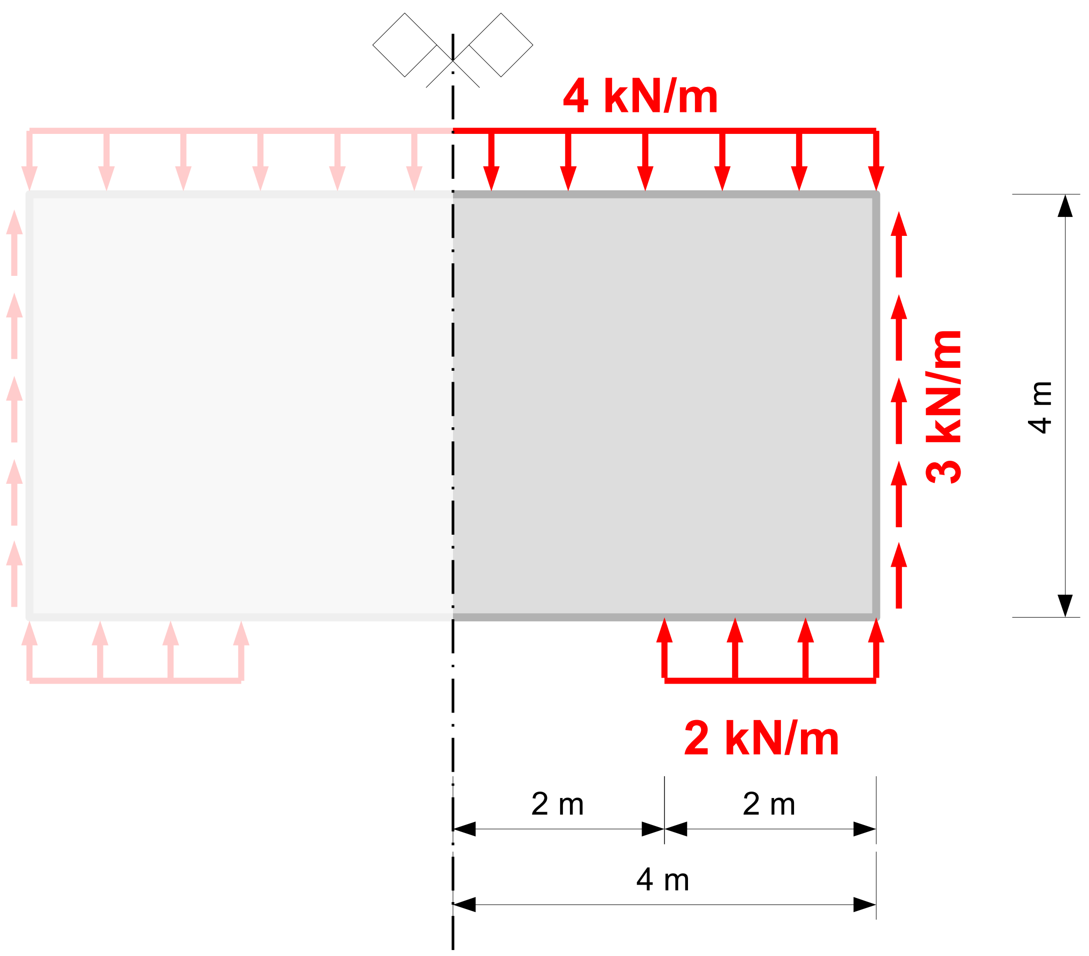
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Wyznaczyć stan naprężenia w środku tarczy jak na poniższym rysunku, korzystając z metody różnic skończonych. Przyjmij grubość tarczy h=20cm oraz oczko siatki MRS równe 1m.



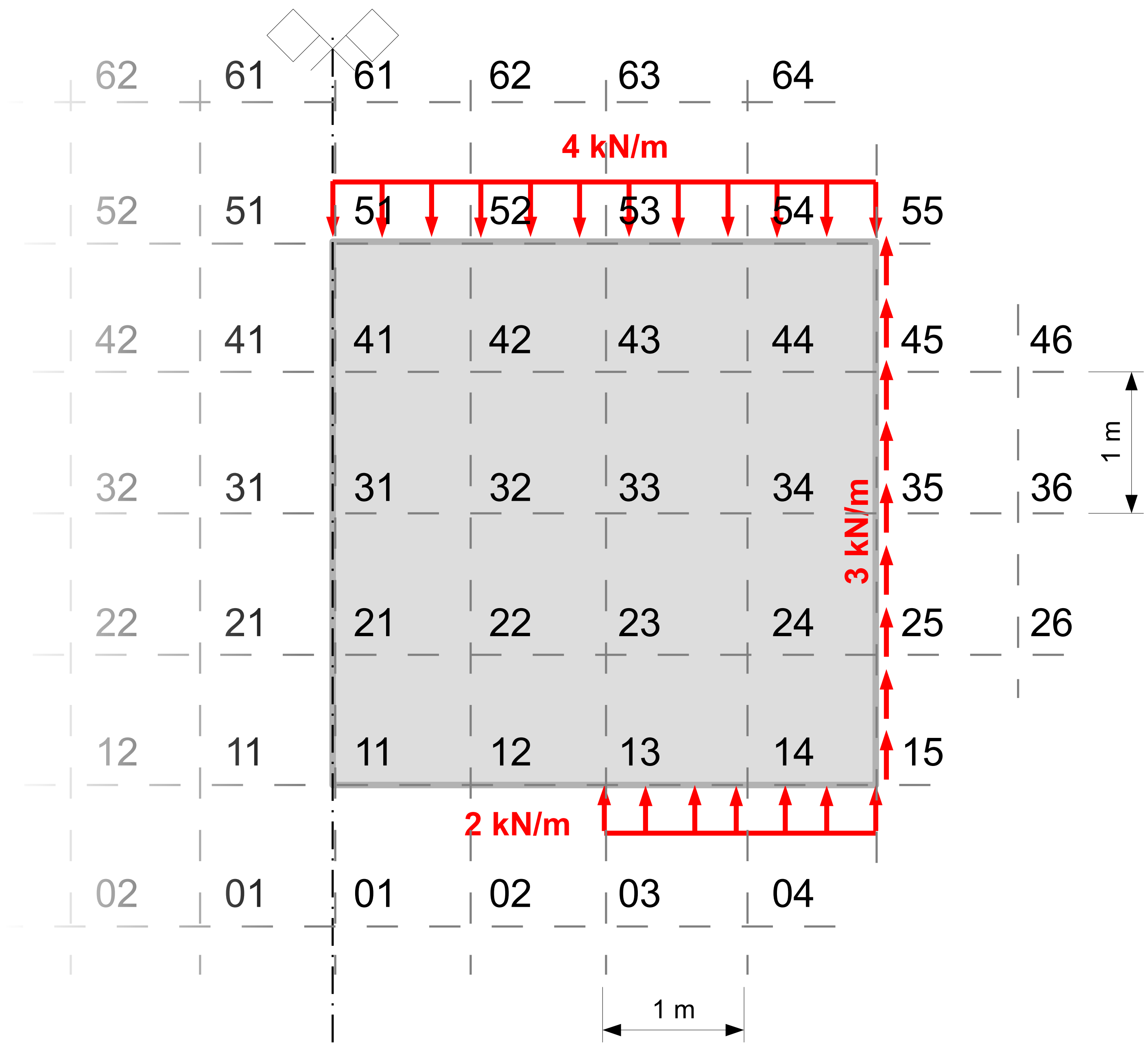
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Układ jest symetryczny – możemy rozpatrywać tylko jedną jego połowę. Wartości funkcji Airy'ego dla drugiej połówki są takie same.



PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Wykorzystując symetrię układu, siatkę MRS możemy przyjąć jak niżej:

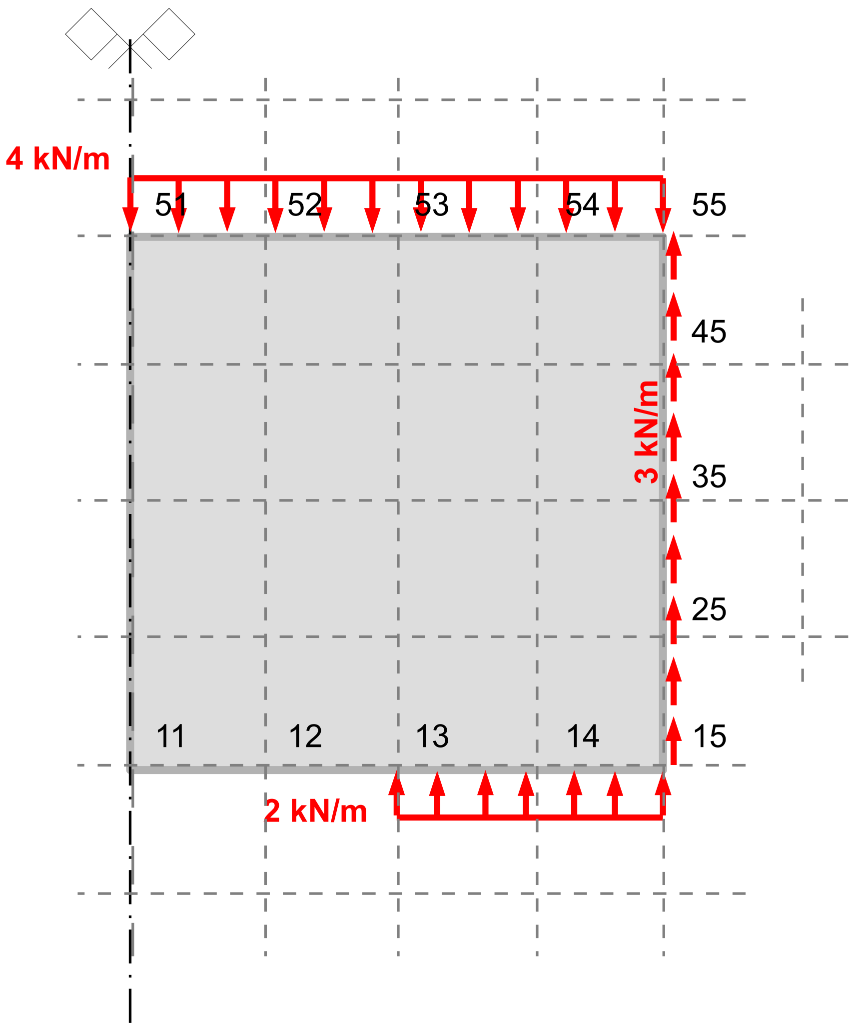


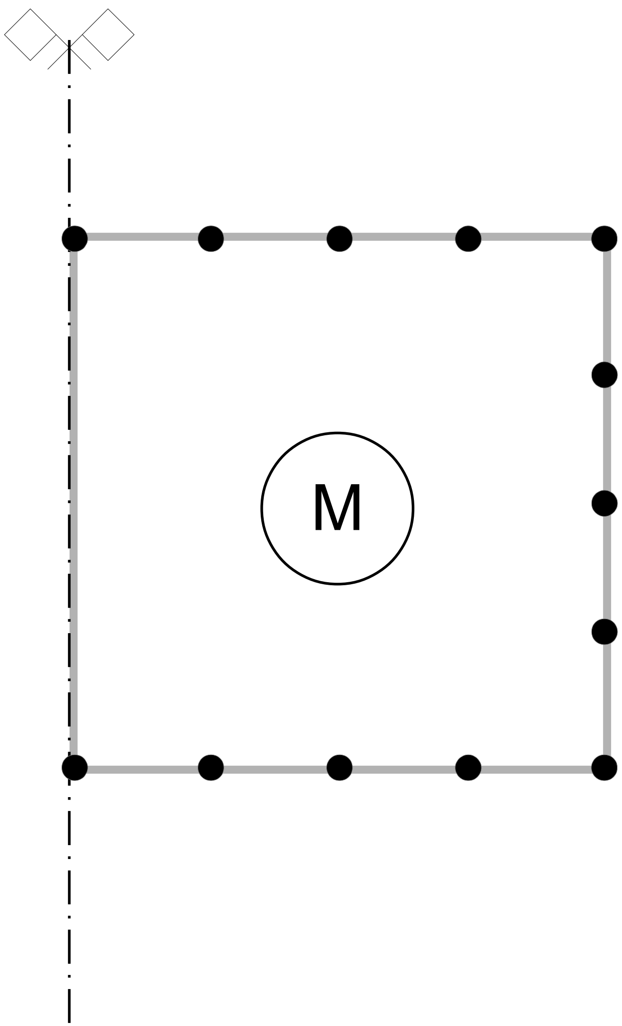
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Najpierw zapisujemy **warunki brzegowe** – ich uwzględnienie zredukuje liczbę poszukiwanych wartości węzłowych funkcji Airy'ego. Zacznijmy od warunku na **wartości brzegowe funkcji Airy'ego**:

$$F\big|_P = \frac{M\big|_P}{h}$$

Przyjmujemy punkt P_0 w węźle 11.





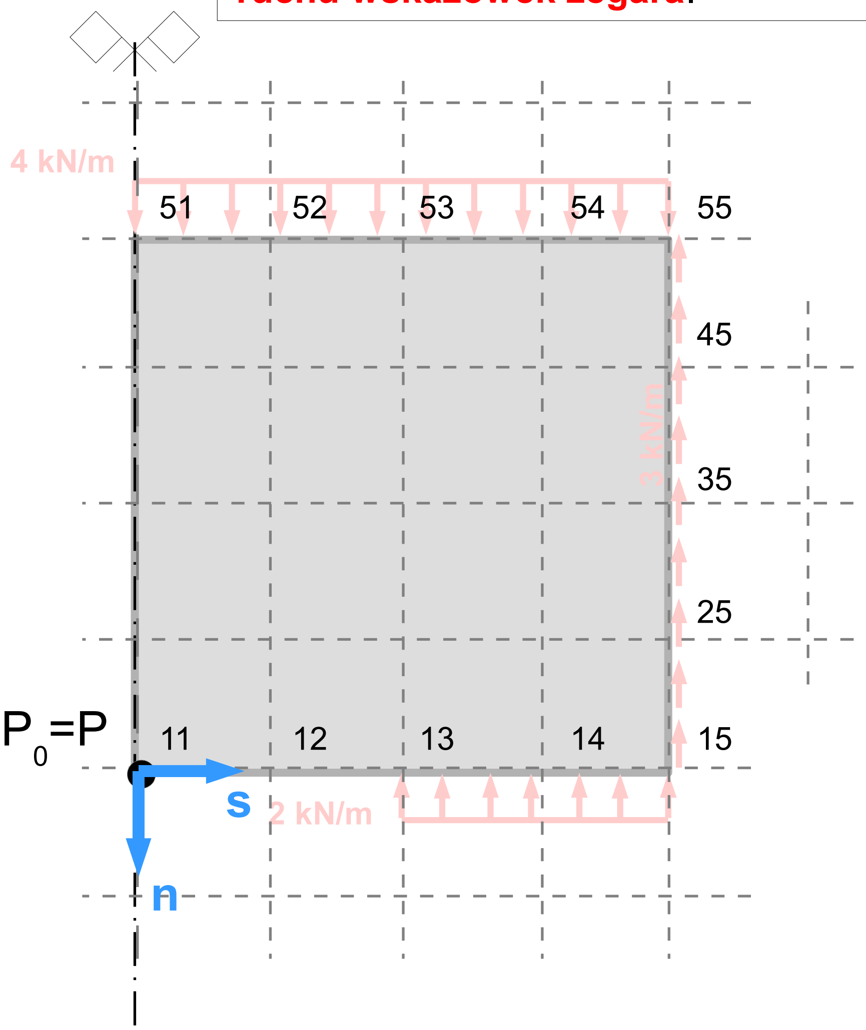
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

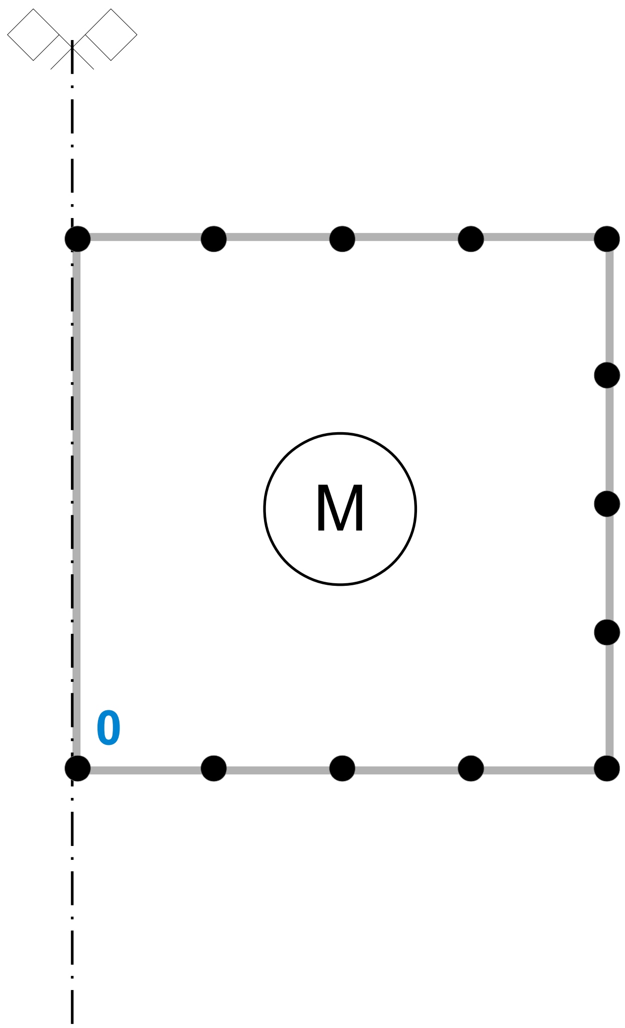
Przyjmujemy punkt P w węźle 11.

Moment względem punktu P (węzła 11) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 11):

$$M_{11} = 0 \text{ kNm}$$

Przy zadanej orientacji lokalnego układu współrzędnych (n,s), **moment dodatni** to moment „kręcący” **przeciwnie do ruchu wskazówek zegara**.



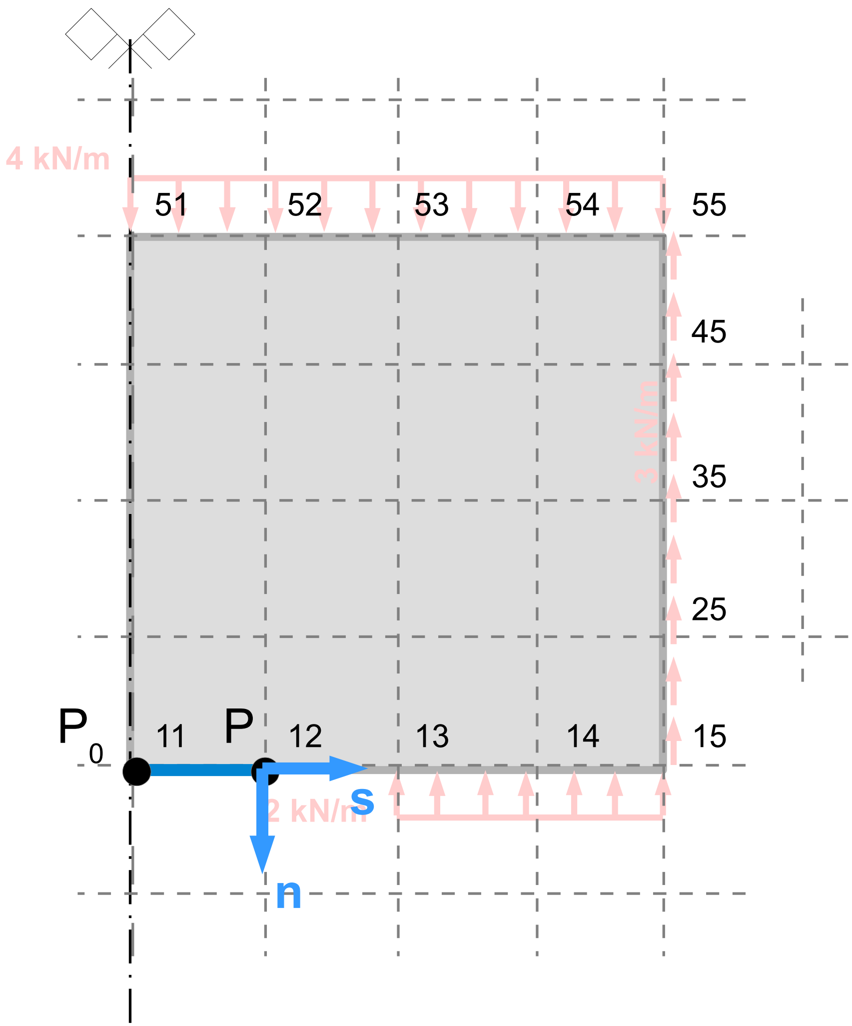


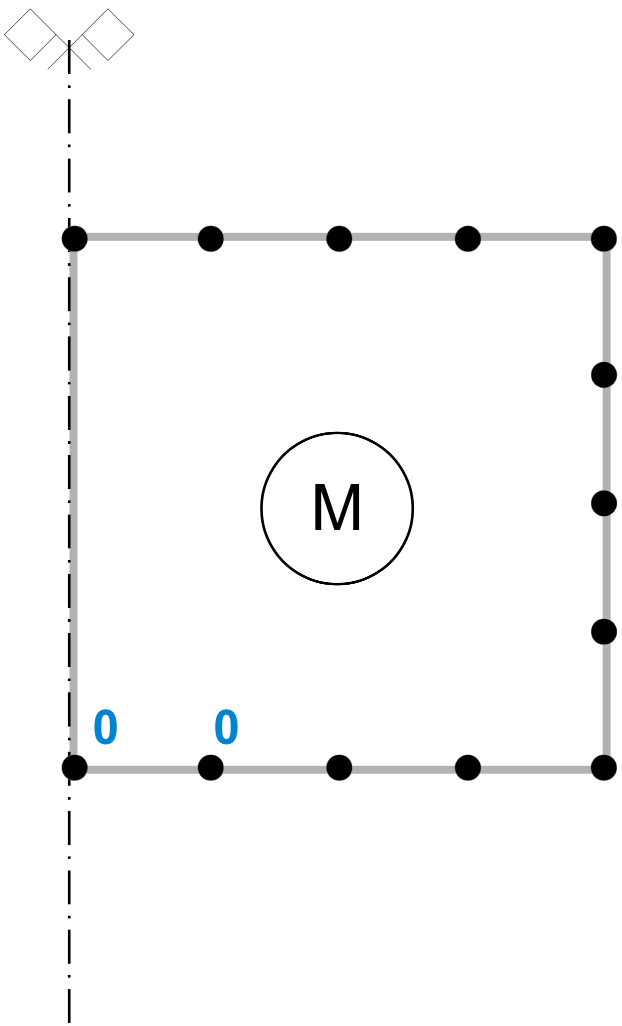
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 12.

Moment względem punktu P (węzła 12) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 12):

$$M_{12} = 0 \text{ kNm}$$



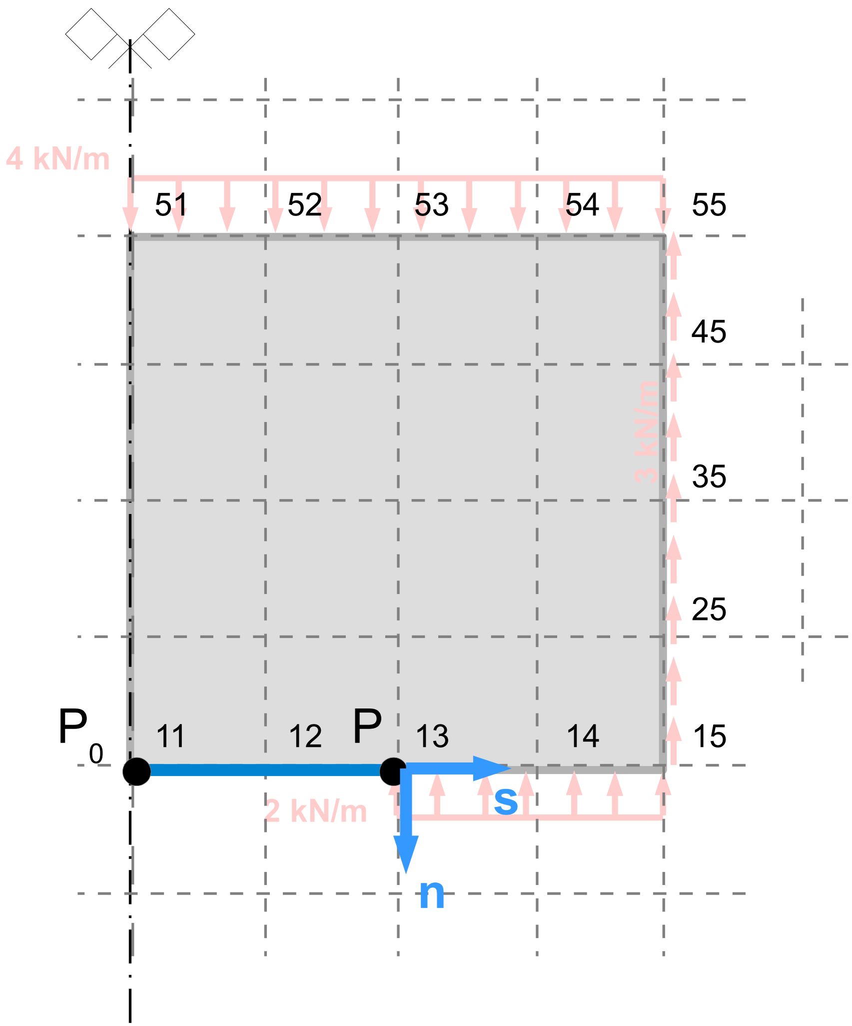


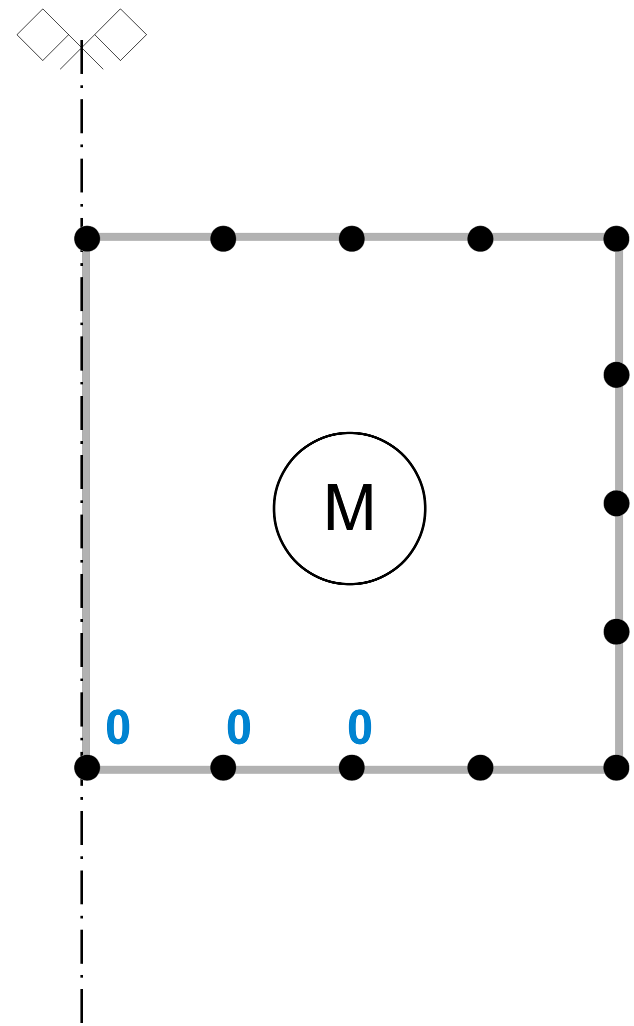
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 13.

Moment względem punktu P (węzła 13) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 13):

$$M_{13} = 0 \text{ kNm}$$

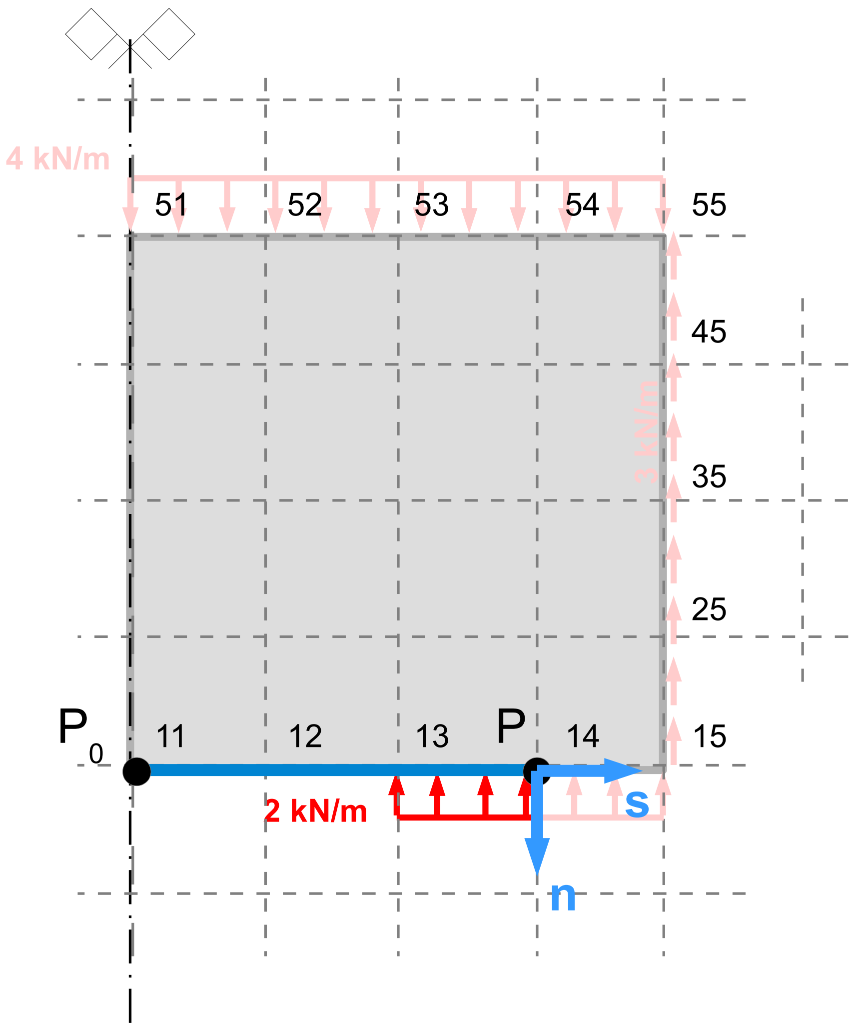


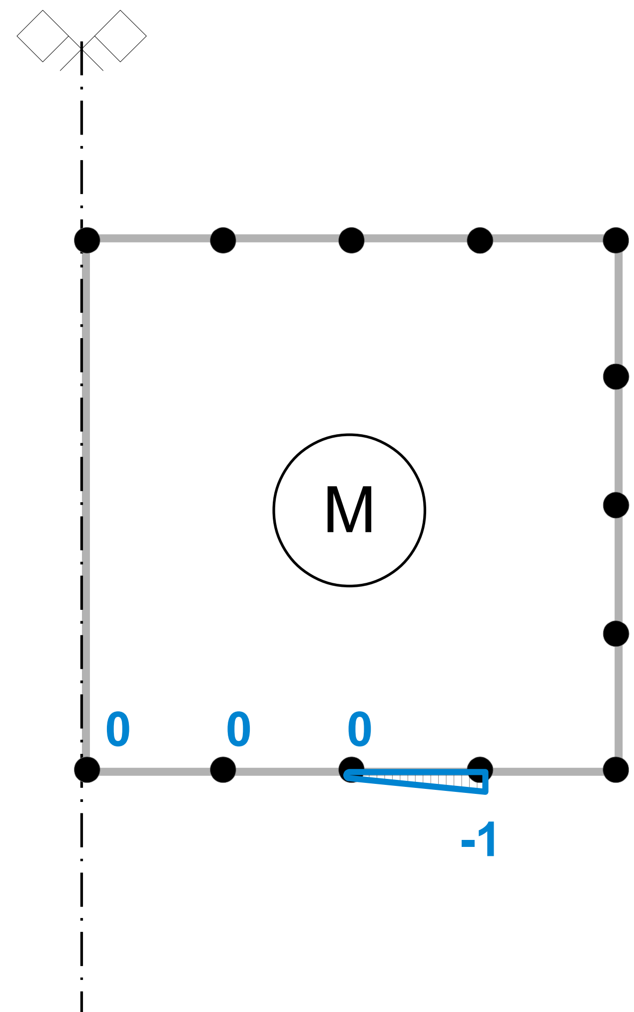


Przyjmujemy punkt P w węźle 14.

Moment względem punktu P (węzła 14) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 14):

$$M_{14} = -2\ \mathrm{kN/m^2} \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = -1\,\mathrm{kNm}$$

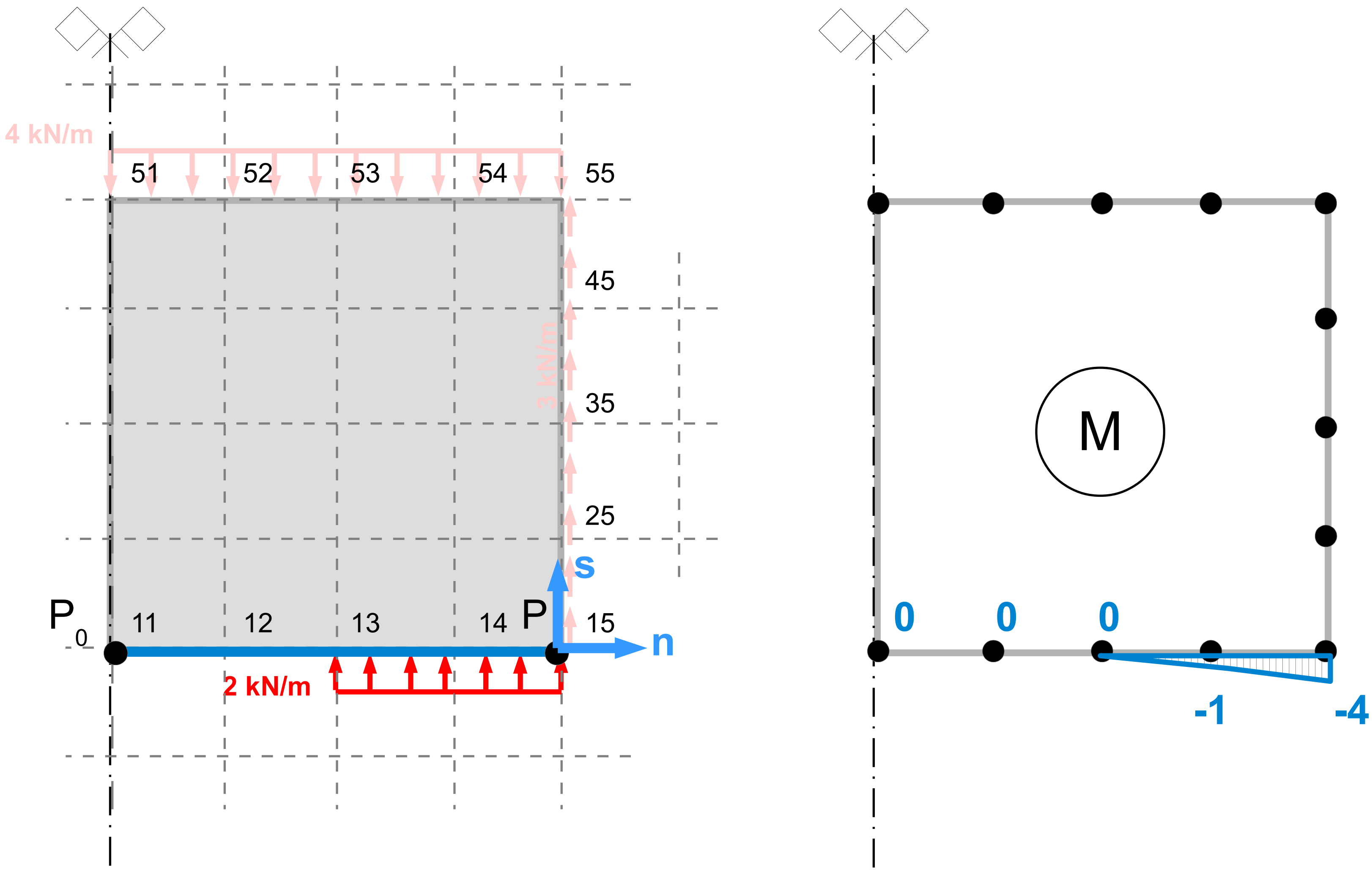




Przyjmujemy punkt P w węźle 15.

Moment względem punktu P (węzła 15) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 15):

$$M_{15} = -2\ \mathrm{kN/m^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = -4\,\mathrm{kNm}$$

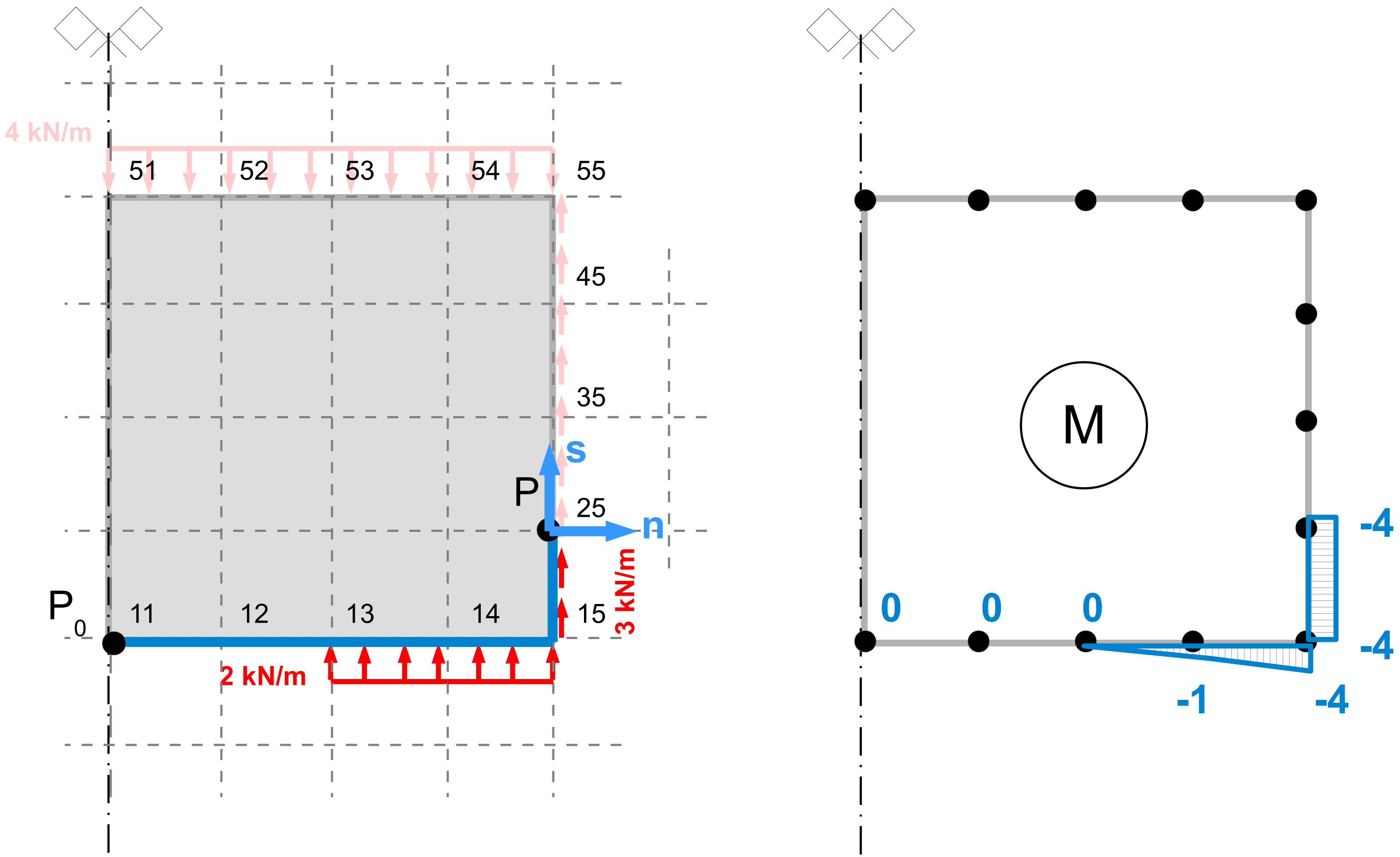


PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 25.

Moment względem punktu P (węzła 25) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 25):

$$M_{25} = -2\ \mathrm{kN/m^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = -4\,\mathrm{kNm}$$

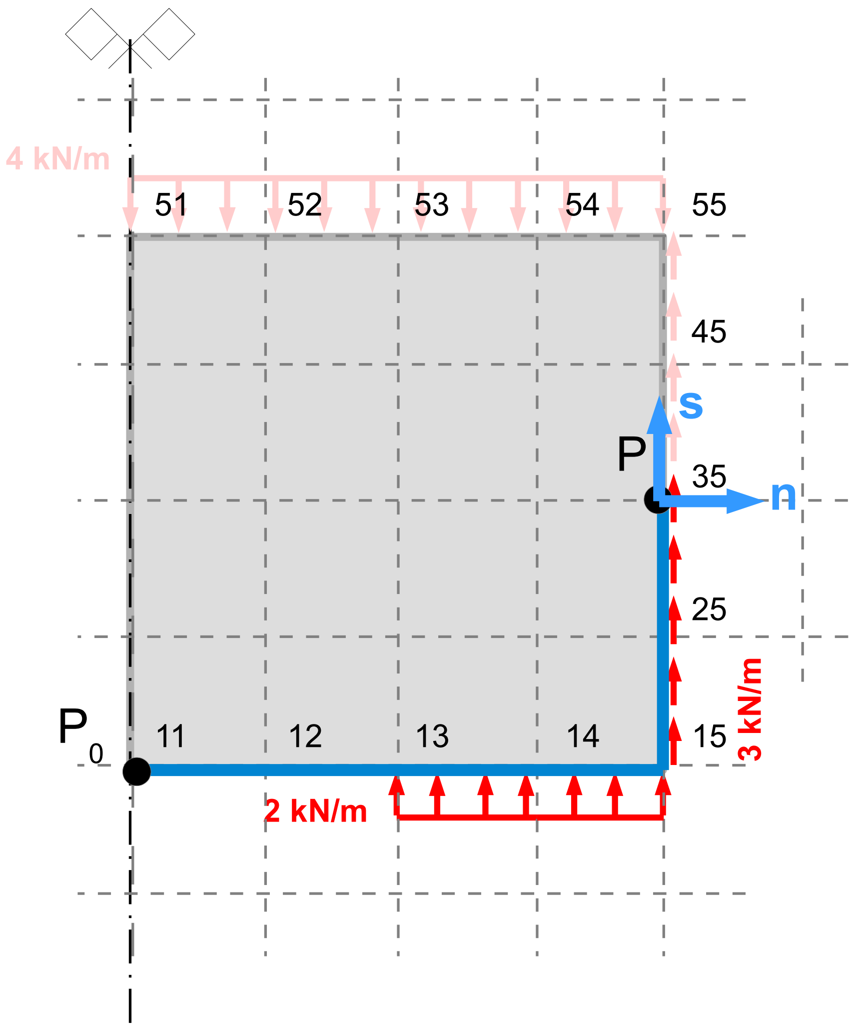


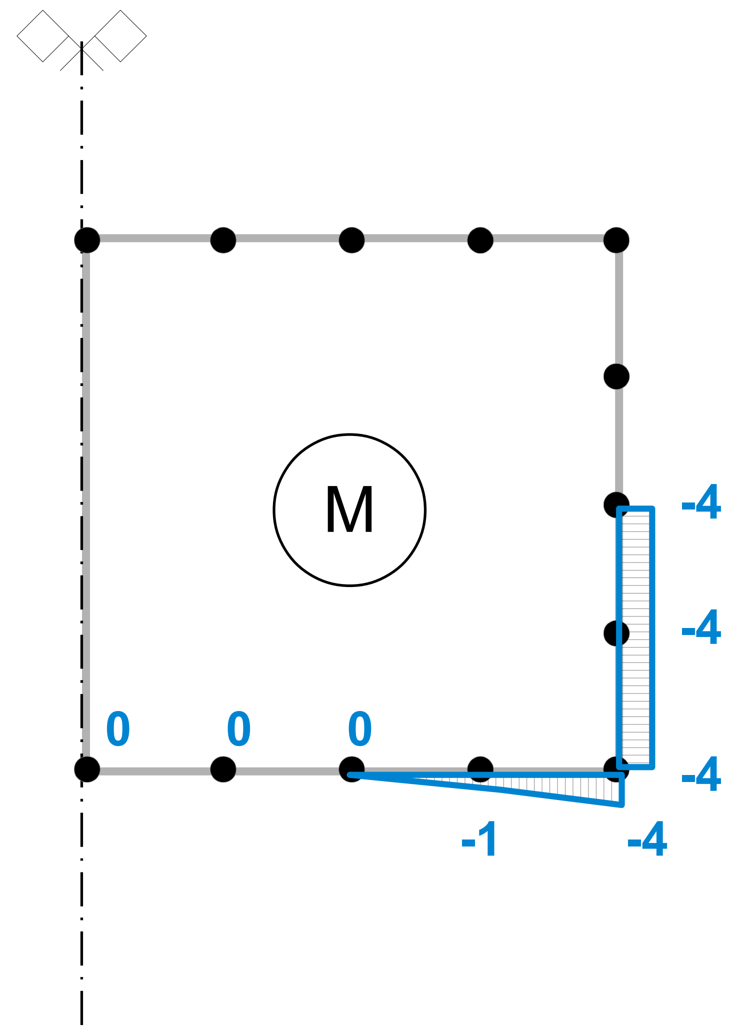
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 35.

Moment względem punktu P (węzła 35) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 35):

$$M_{35} = -2\ \mathrm{kN/m^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = -4\,\mathrm{kNm}$$



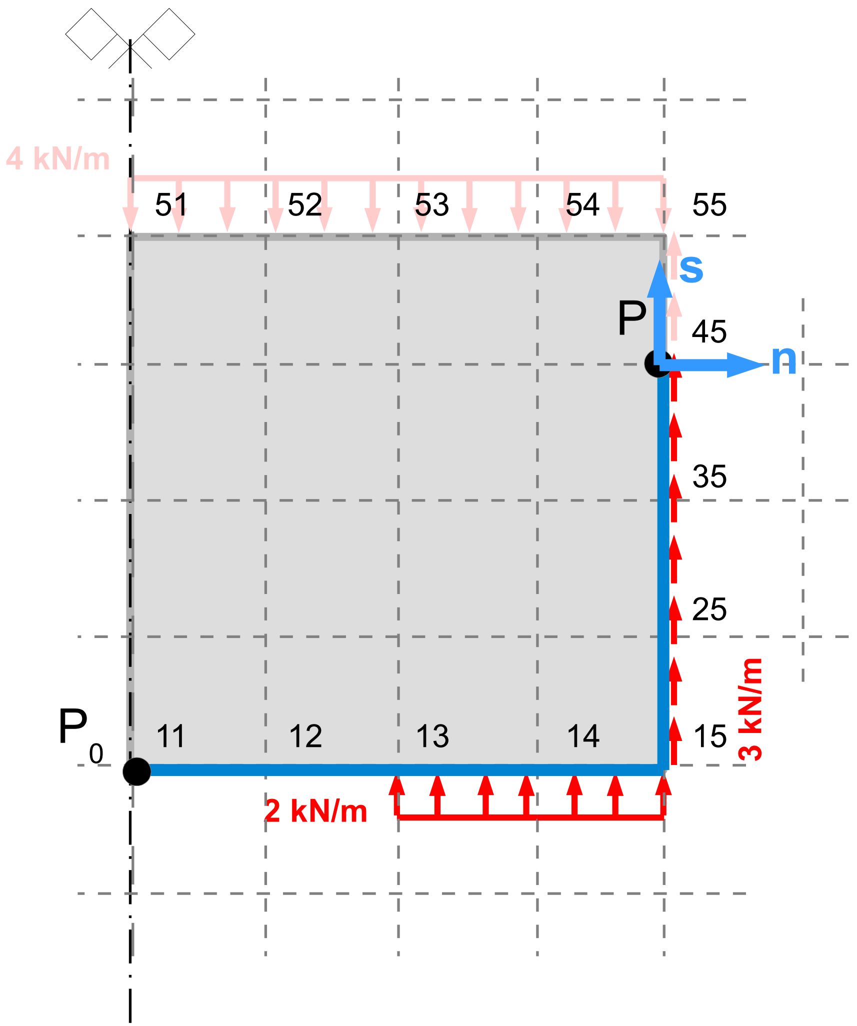


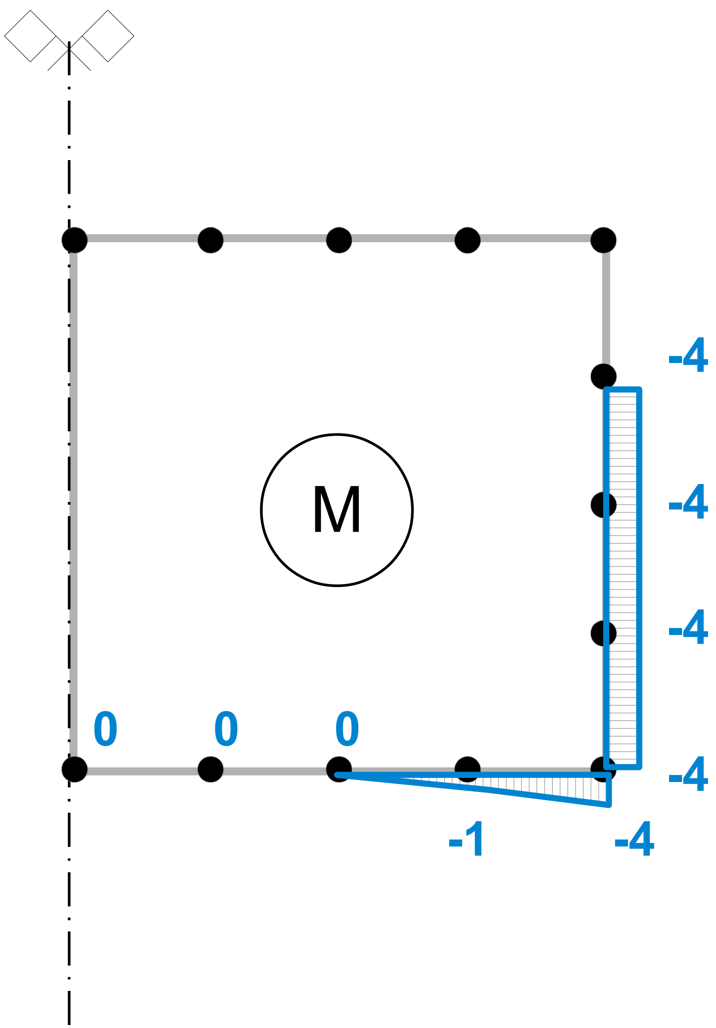
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 45.

Moment względem punktu P (węzła 45) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 45):

$$M_{45} = -2\ \mathrm{kN/m^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = -4\,\mathrm{kNm}$$

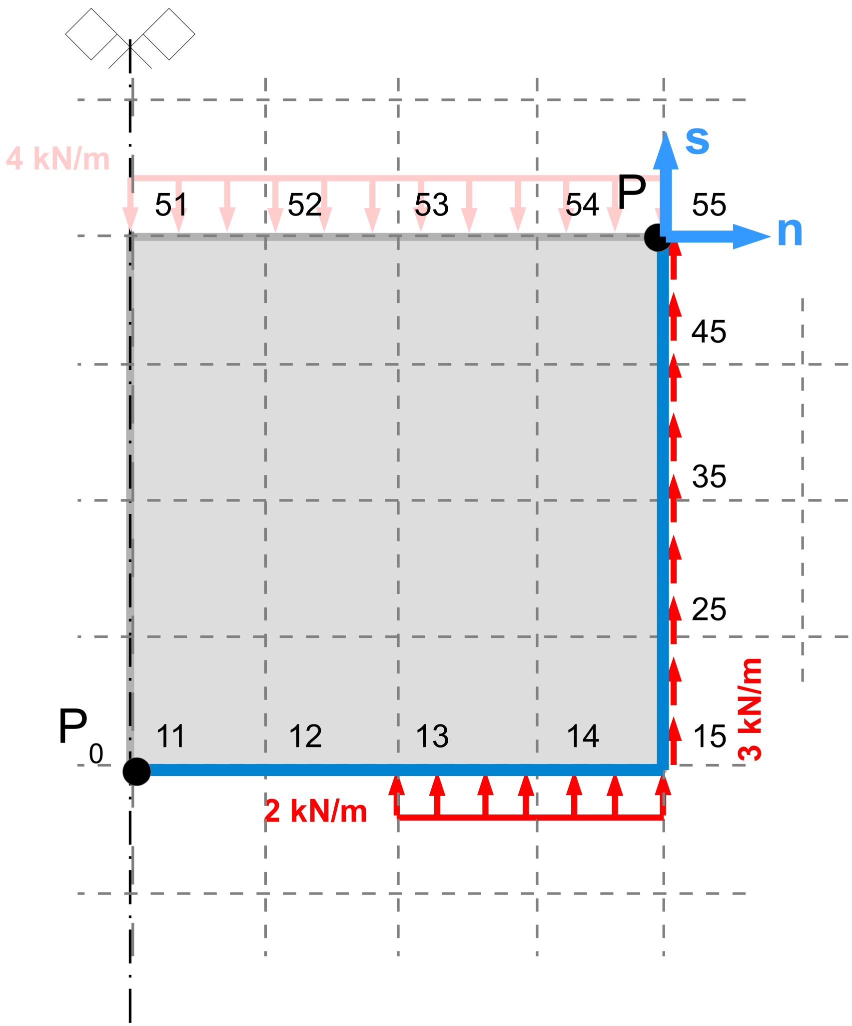


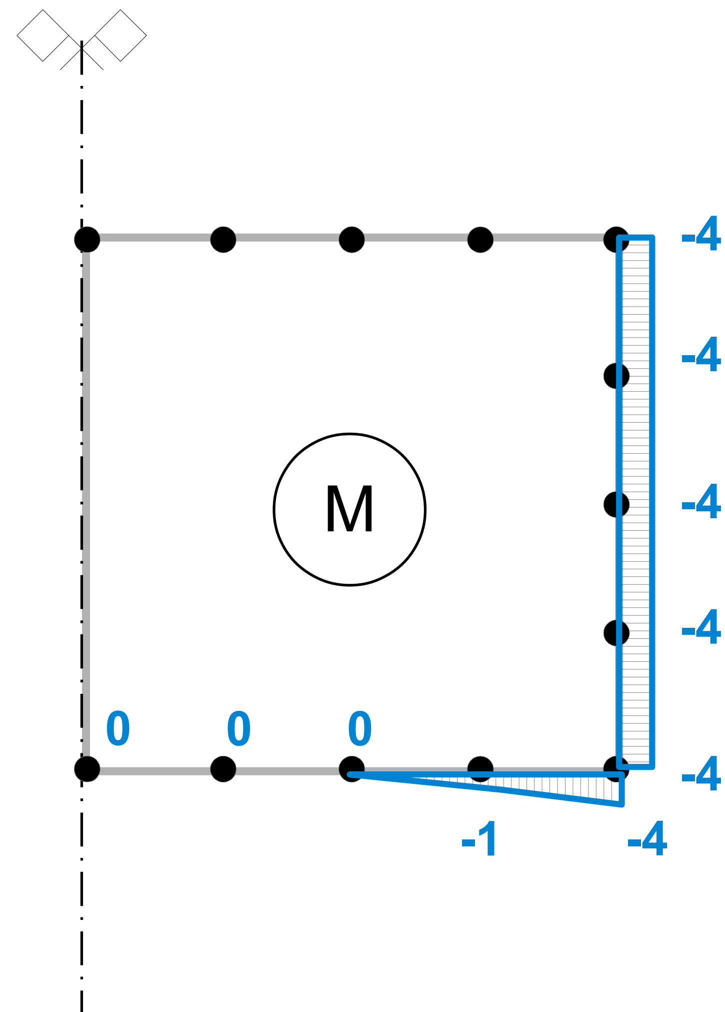


Przyjmujemy punkt P w węźle 55.

Moment względem punktu P (węzła 55) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 55):

$$M_{55} = -2\ \mathrm{kN/m^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = -4\,\mathrm{kNm}$$



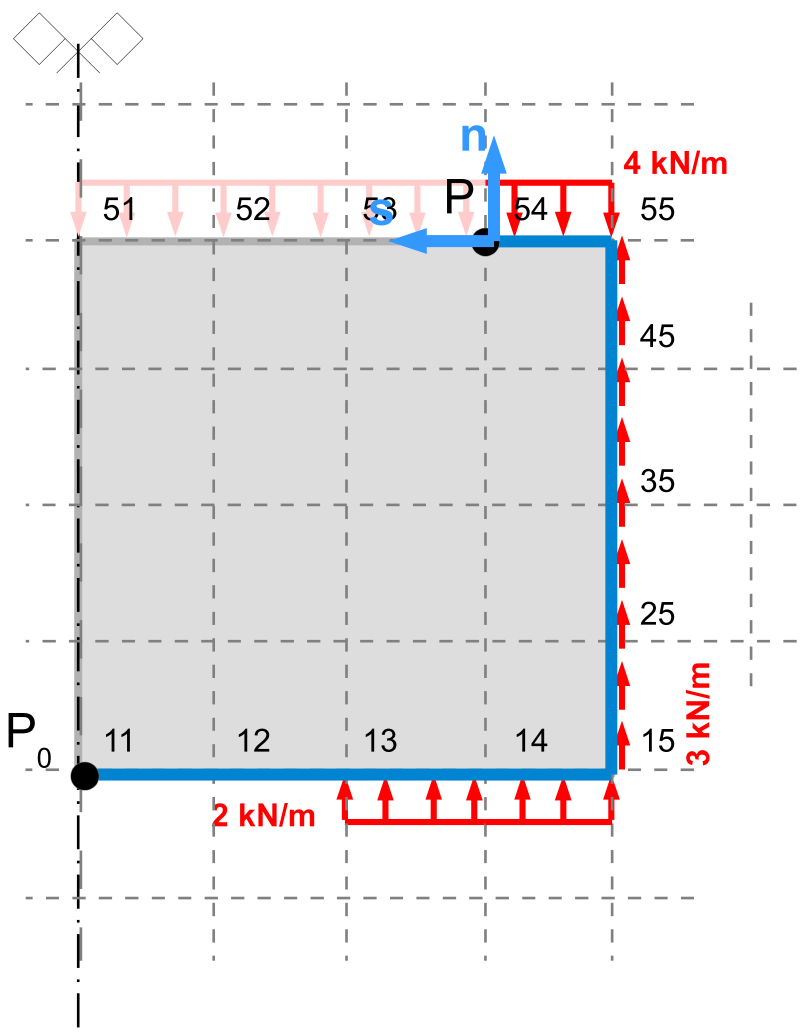


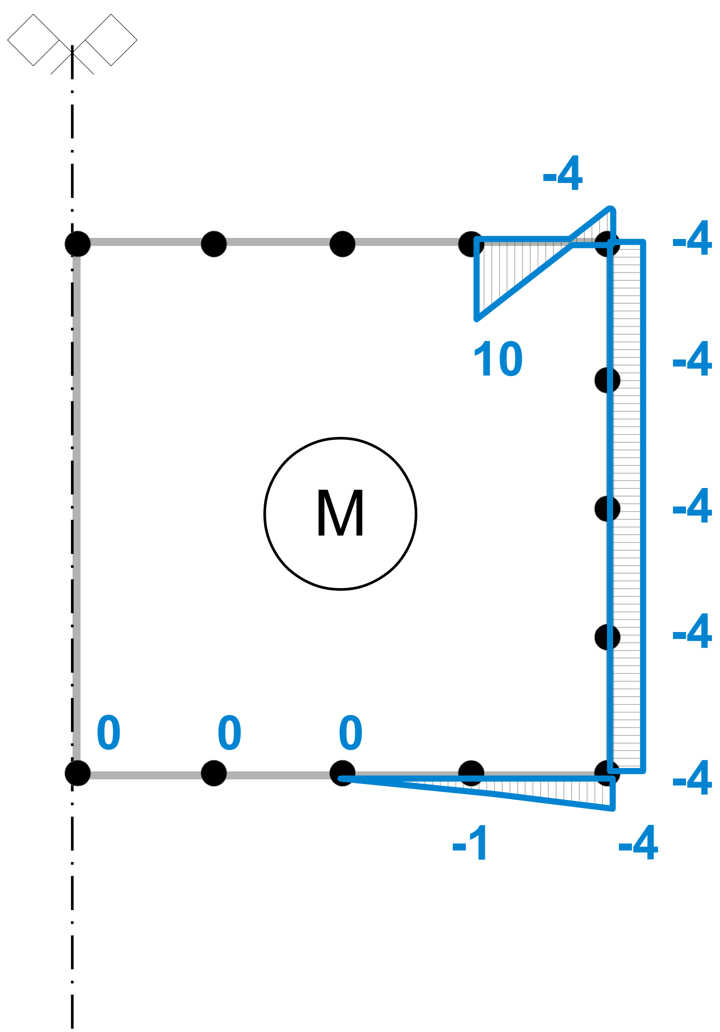
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 54.

Moment względem punktu P (węzła 54) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 54):

$$M_{54} = +\ 3{\cdot}4{\cdot}1\ -\ 4{\cdot}1{\cdot}0{,}5 = 10\,\mathrm{kNm}$$



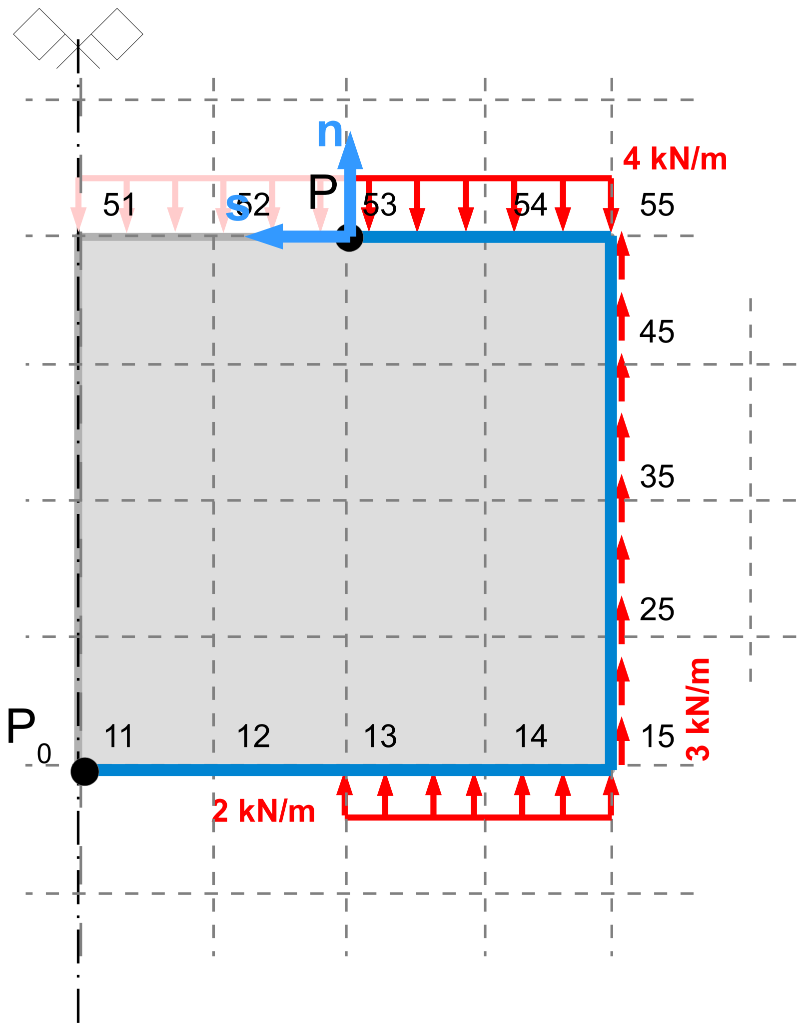


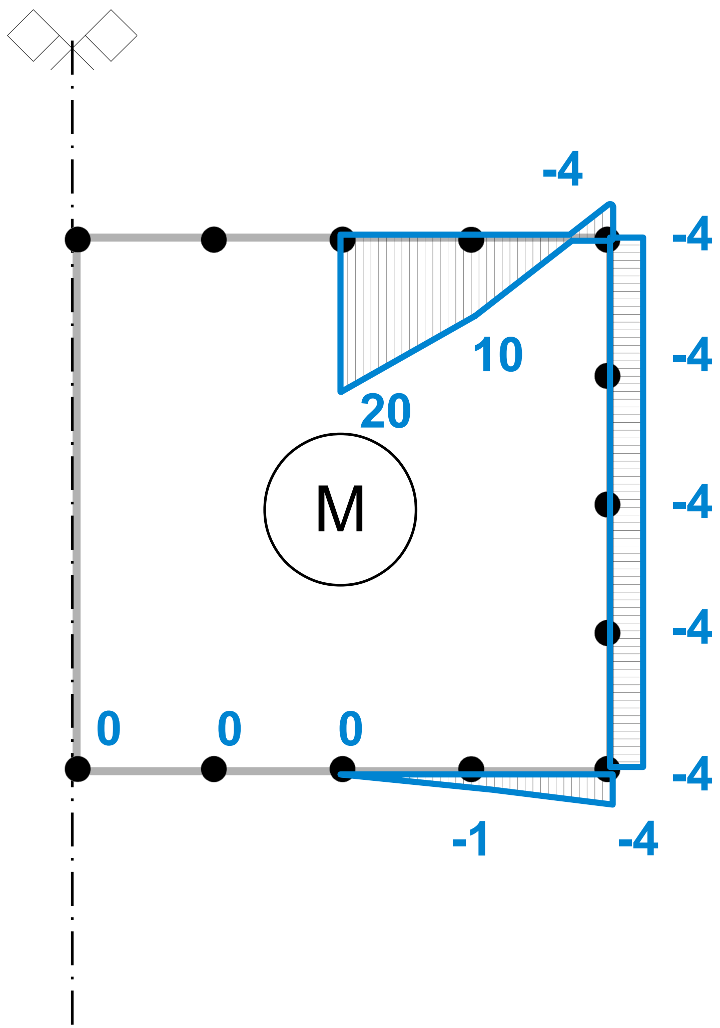
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 53.

Moment względem punktu P (węzła 53) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 53):

$$M_{53} = 2\cdot2\cdot1 + 3\cdot4\cdot2 - 4\cdot2\cdot1 = 20\,\text{kNm}$$



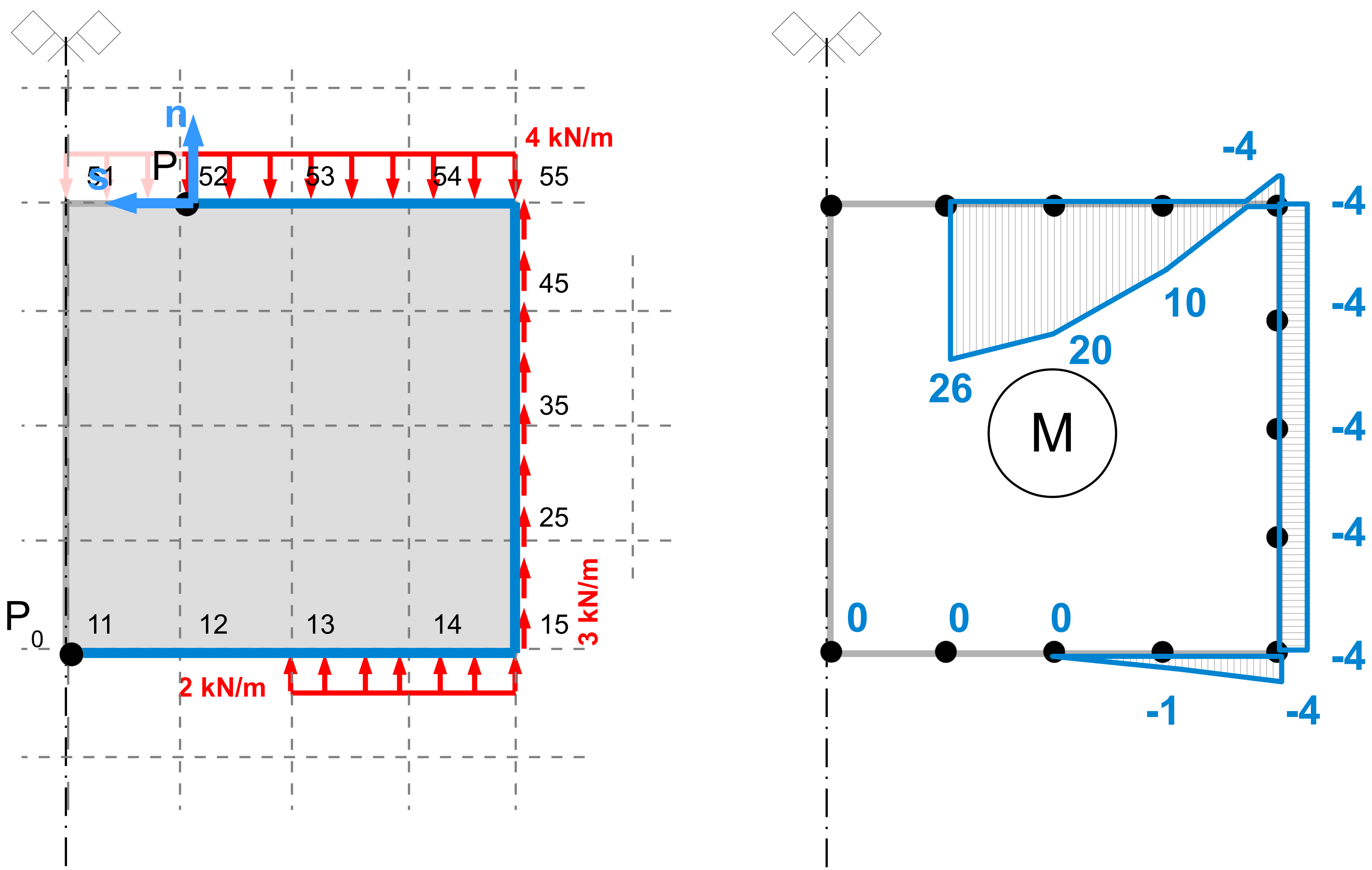


PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 52.

Moment względem punktu P (węzła 52) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 52):

$$M_{52} = 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 4\cdot 3 - 4\cdot 3\cdot 1{,}5 = 26\,\mathrm{kNm}$$

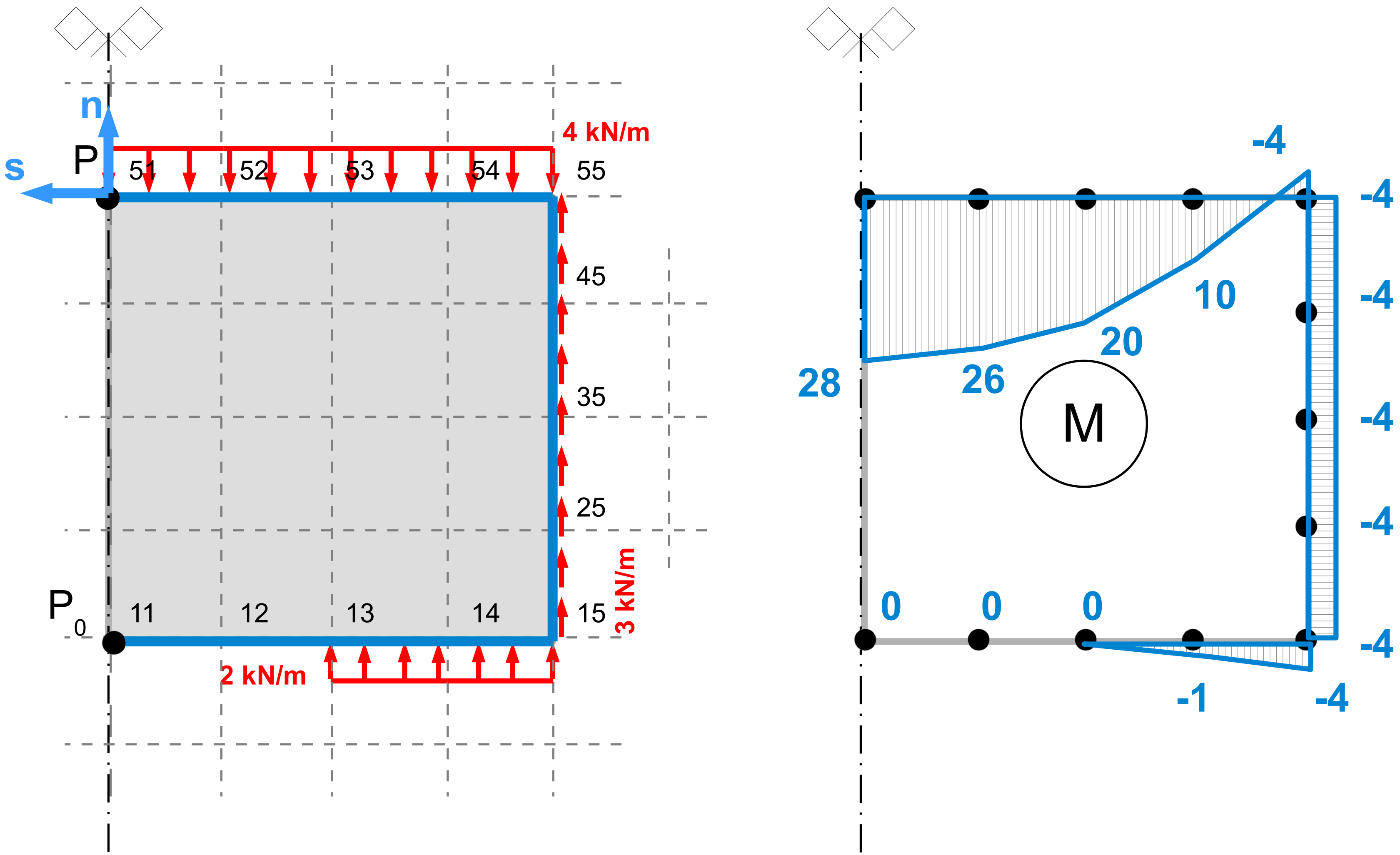


PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 51.

Moment względem punktu P (węzła 51) od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 51):

$$M_{51} = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 28 \, \mathrm{kNm}$$



PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zapisujemy warunki brzegowe.

$$F|_P = \frac{M|_P}{h}$$

$$F_{11} = \frac{M_{11}}{h} = \frac{0\,\text{kNm}}{0{,}2\,\text{m}} = 0\ \text{kN}$$

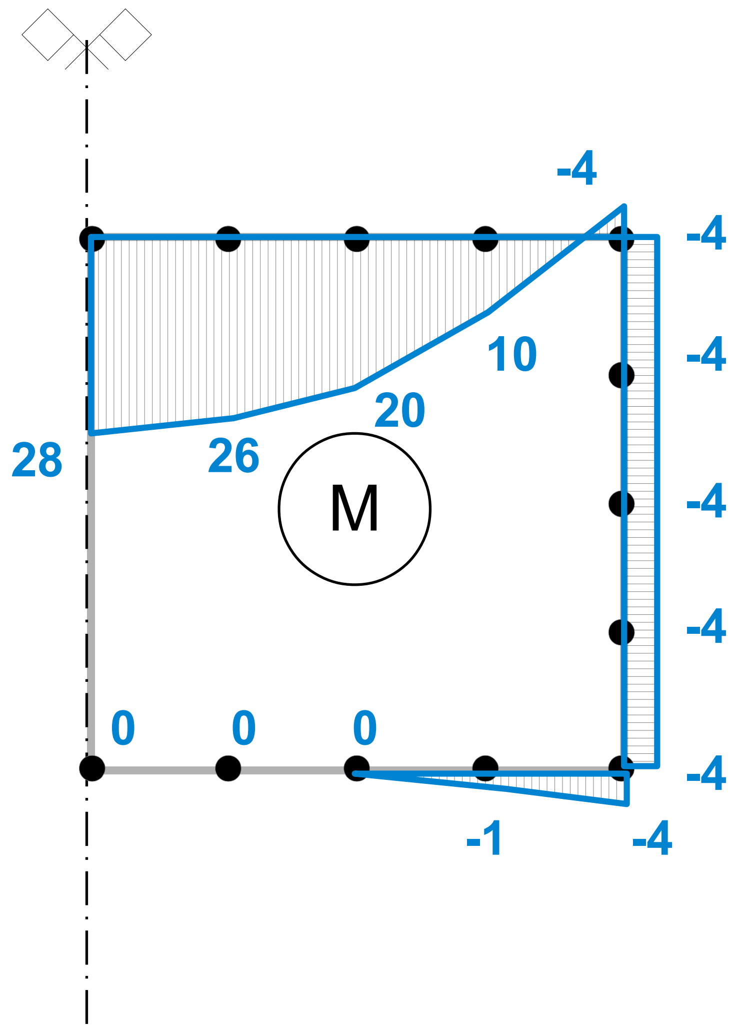
$$F_{12} = \frac{M_{12}}{h} = \frac{0\,\text{kNm}}{0{,}2\,\text{m}} = 0\ \text{kN}$$

...

$$F_{53} = \frac{M_{53}}{h} = \frac{20\,\text{kNm}}{0{,}2\,\text{m}} = 100\ \text{kN}$$

$$F_{52} = \frac{M_{52}}{h} = \frac{26\,\text{kNm}}{0{,}2\,\text{m}} = 130\ \text{kN}$$

$$F_{51} = \frac{M_{51}}{h} = \frac{28\,\text{kNm}}{0{,}2\,\text{m}} = 140\ \text{kN}$$



PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zapisujemy warunki brzegowe.

$$F\big|_P = \frac{M\big|_P}{h}$$

$$F_{11} = \frac{M_{11}}{h} = \frac{0\,\mathrm{kNm}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 0\ \mathrm{kN}$$

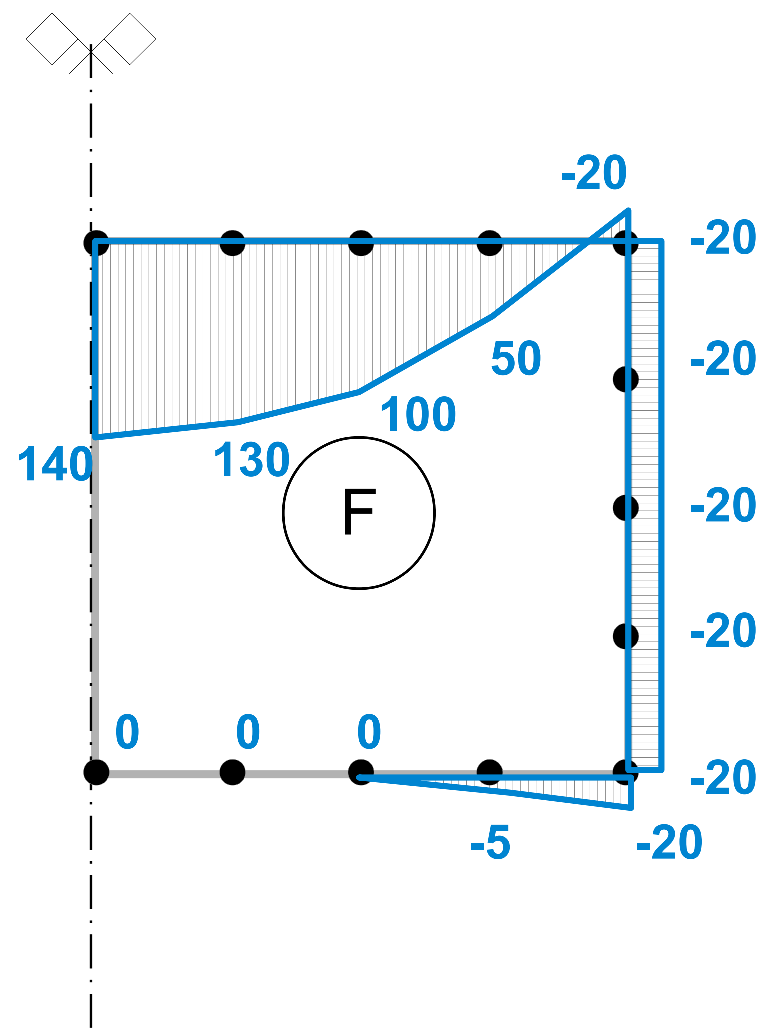
$$F_{12} = \frac{M_{12}}{h} = \frac{0\,\mathrm{kNm}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 0\ \mathrm{kN}$$

...

$$F_{53} = \frac{M_{53}}{h} = \frac{20\,\mathrm{kNm}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 100\ \mathrm{kN}$$

$$F_{52} = \frac{M_{52}}{h} = \frac{26\,\mathrm{kNm}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 130\ \mathrm{kN}$$

$$F_{51} = \frac{M_{51}}{h} = \frac{28\,\mathrm{kNm}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 140\ \mathrm{kN}$$

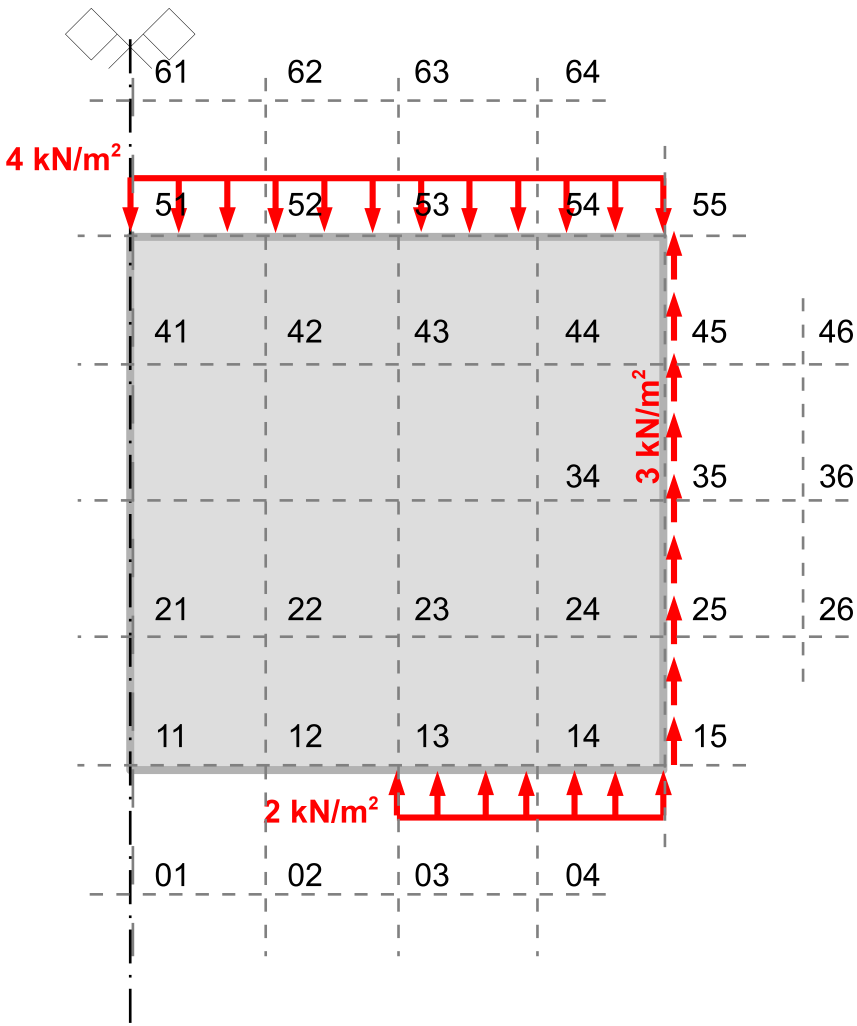


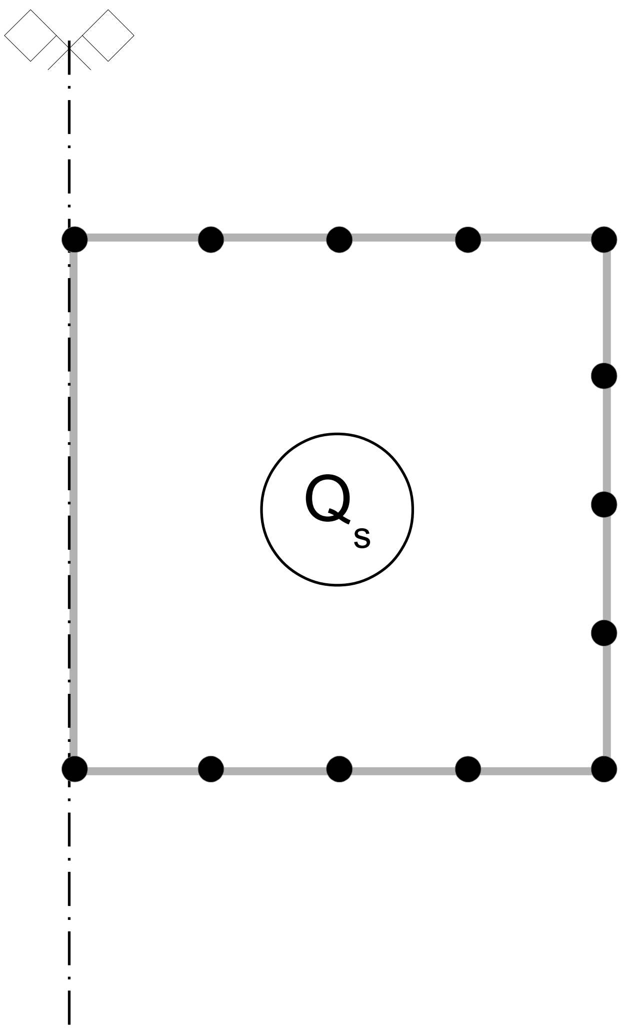
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zapiszmy teraz warunki na **wartości brzegowe pochodnej kierunkowej funkcji Airy'ego na kierunku normalnej zewnętrznej**:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{Q_s|_P}{h}$$

Przyjmujemy punkt P_0 w tym samym węźle co przy wyznaczaniu momentów, tj. w węźle 11.



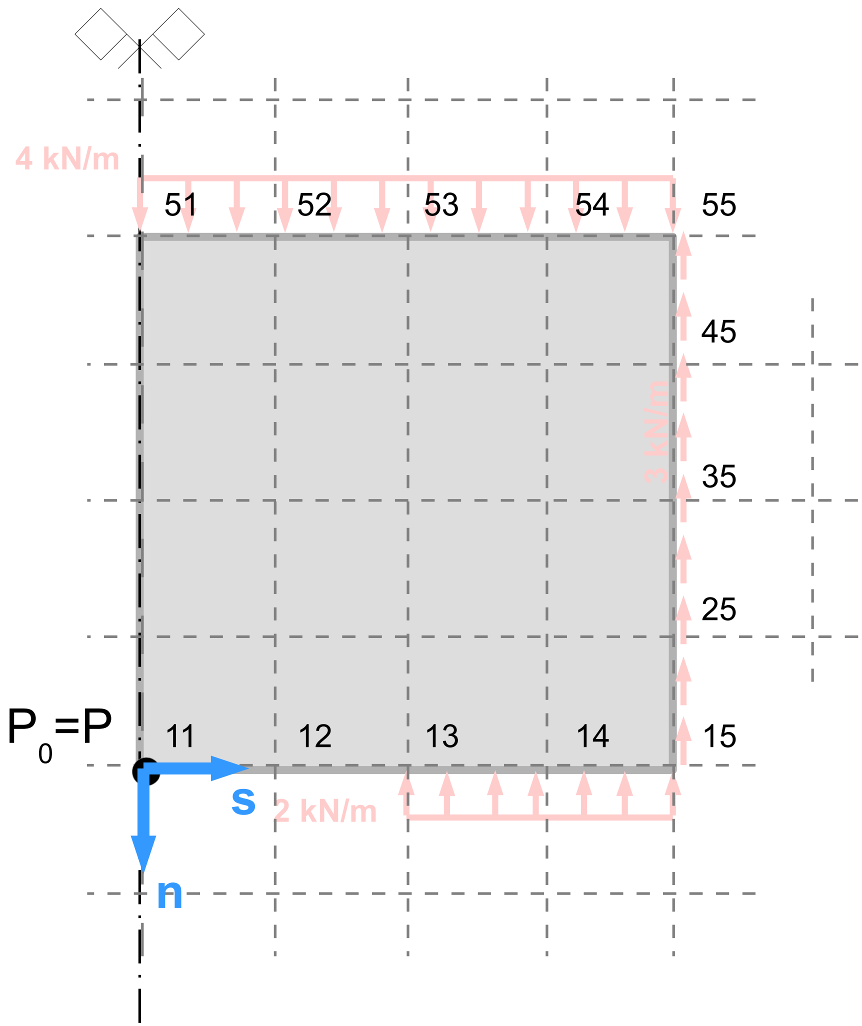


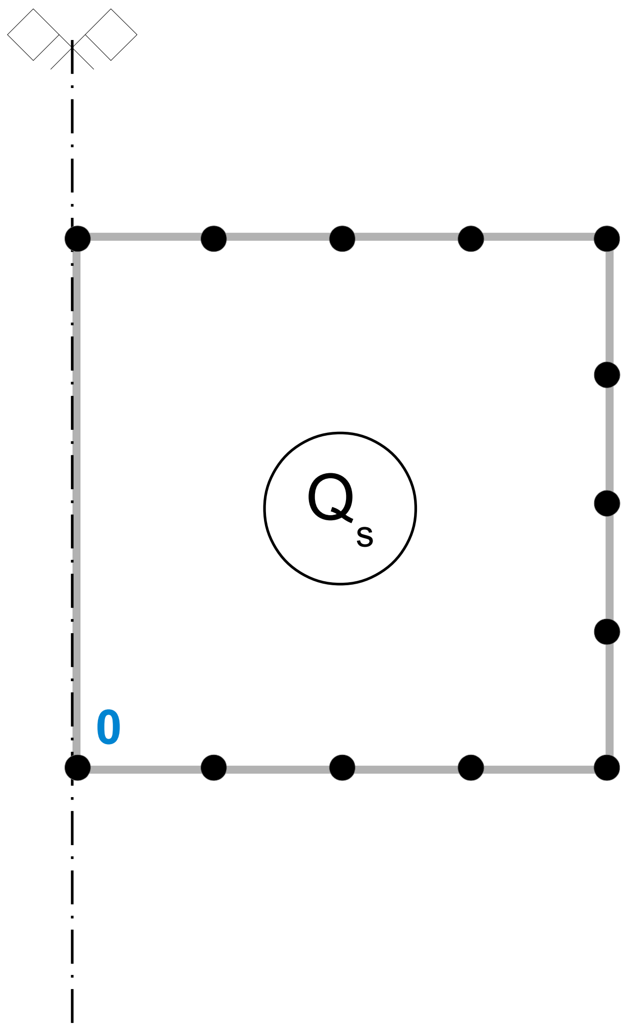
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 11.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 11):

$$Q_{s,11} = 0 \text{ kN}$$



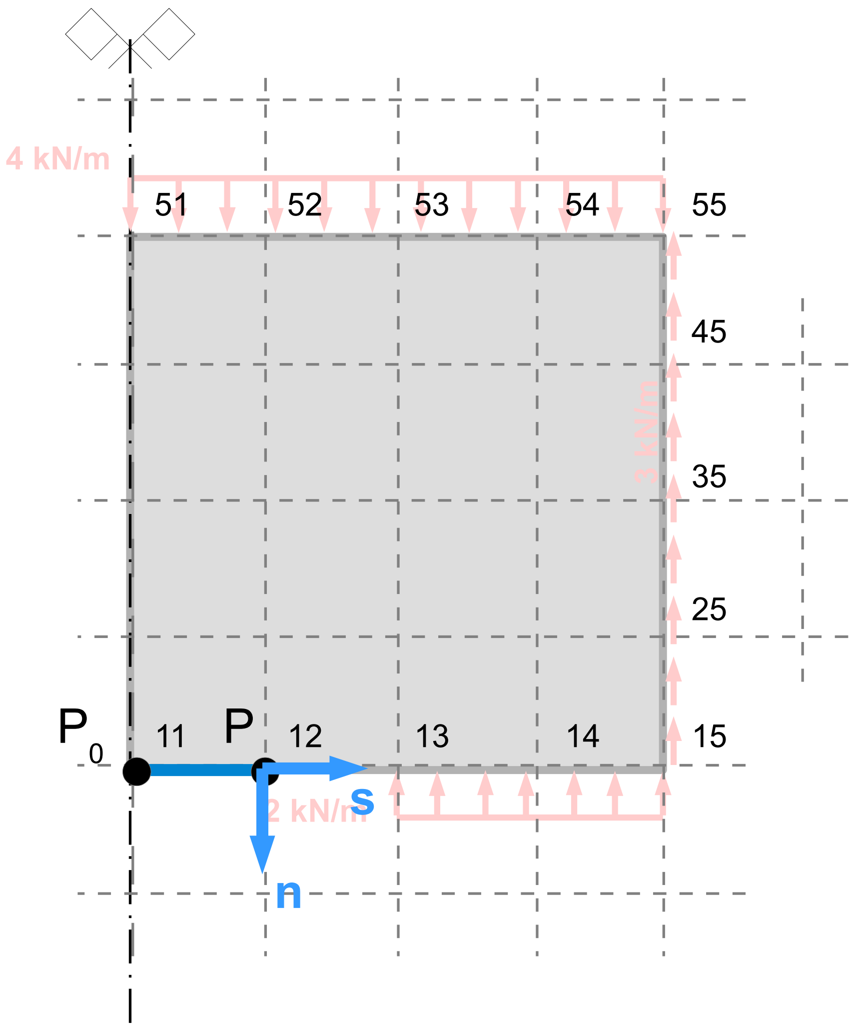


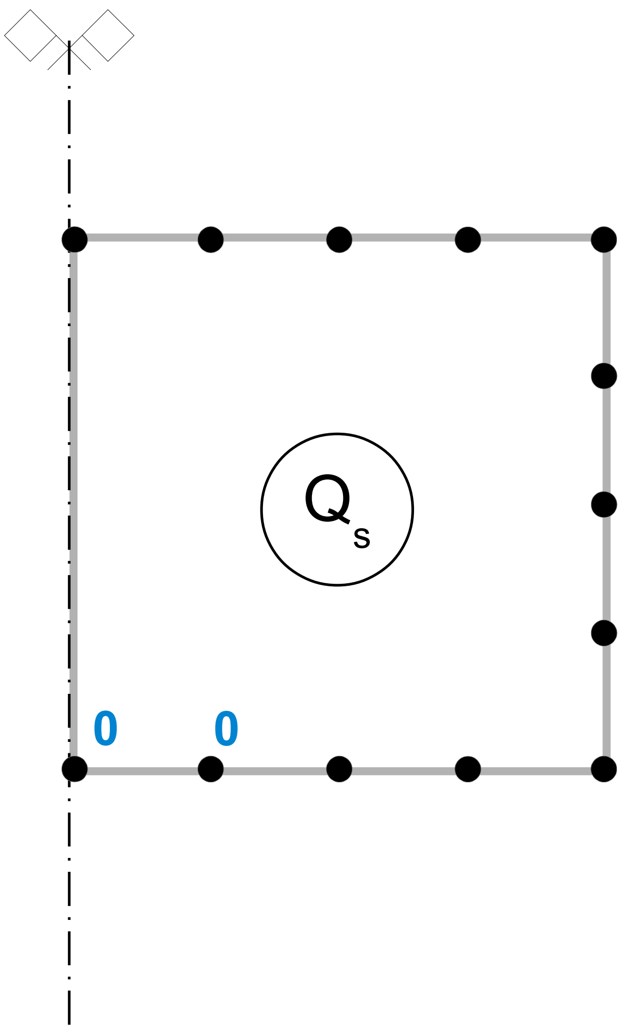
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 12.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 12):

$$Q_{s,12} = 0 \text{ kN}$$



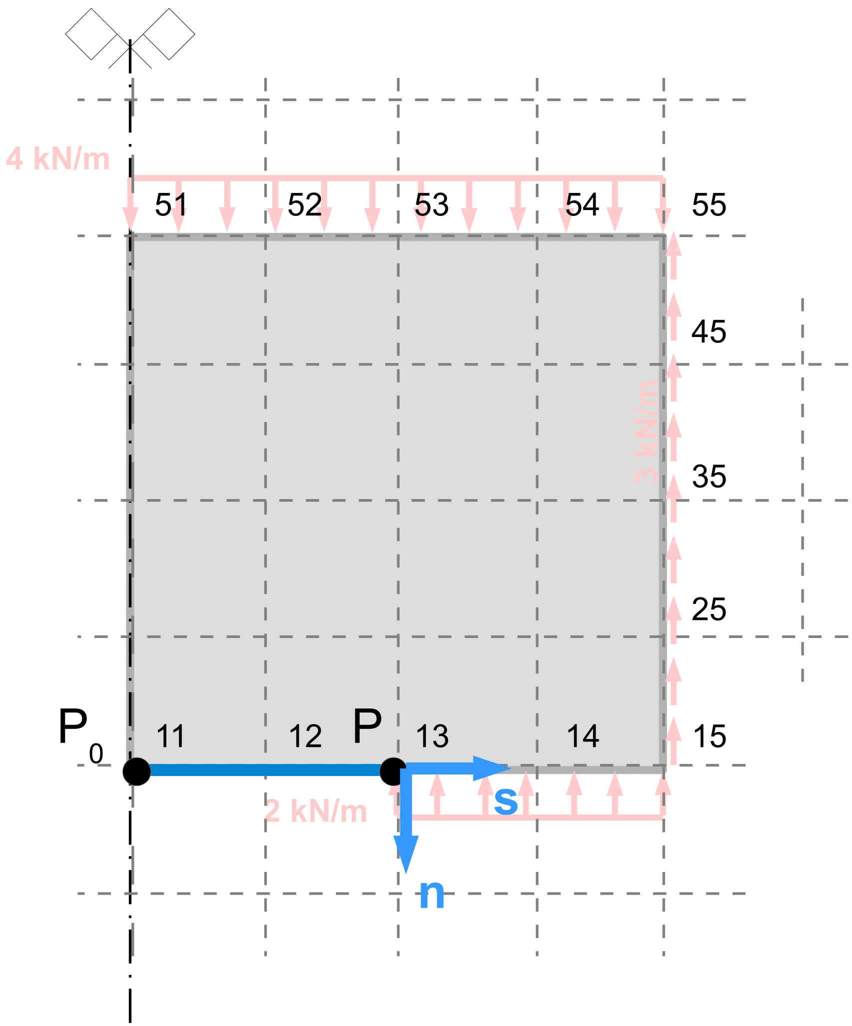


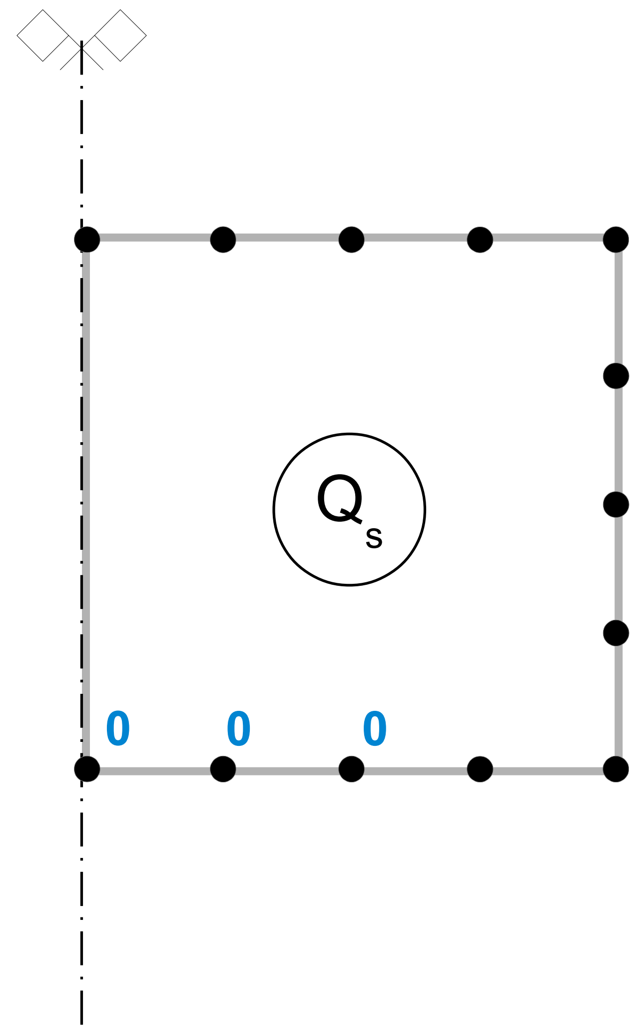
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 13.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 13):

$$Q_{s,13} = 0 \text{ kN}$$





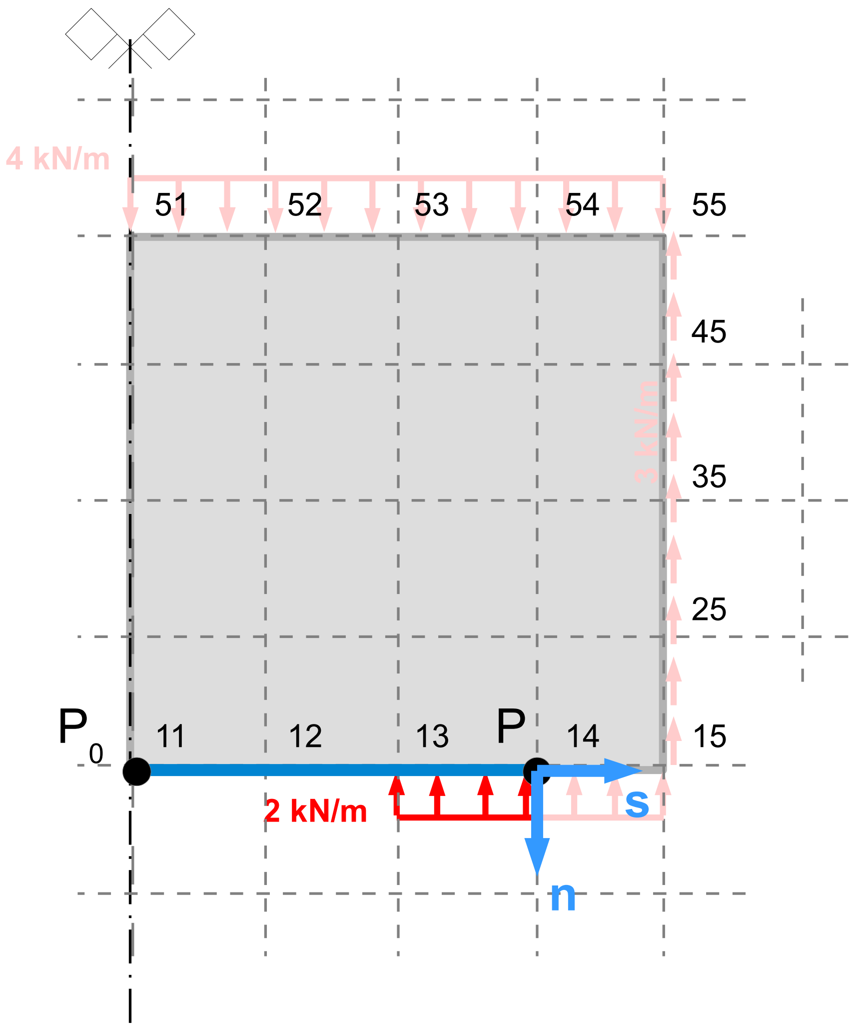
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

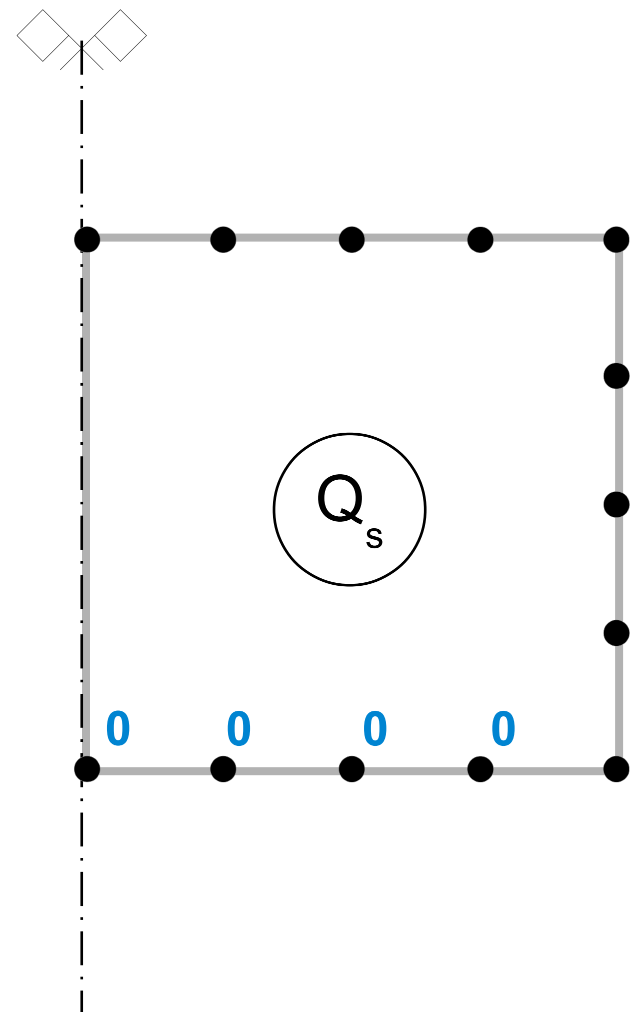
Przyjmujemy punkt P w węźle 14.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 14):

$$Q_{s,14} = 0\ \text{kN}$$

(obciążenie jest równolegle do osi n – **nie ma żadnych obciążeń na kierunku osi s**)





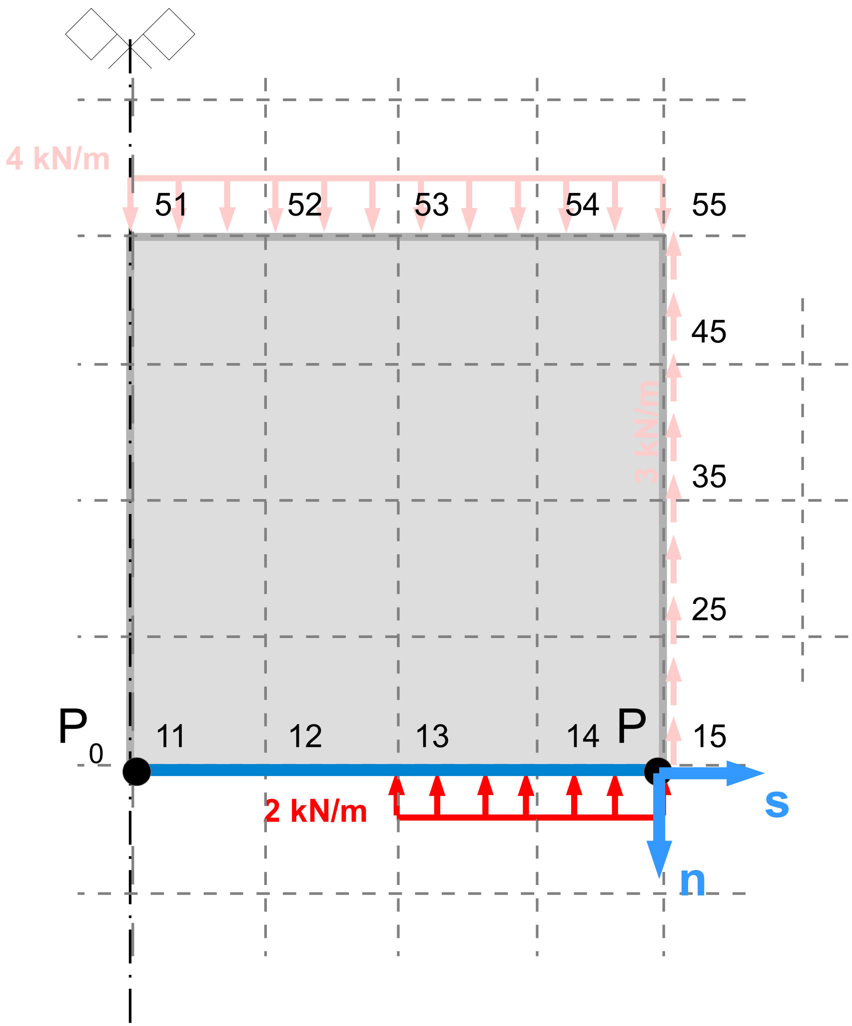
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

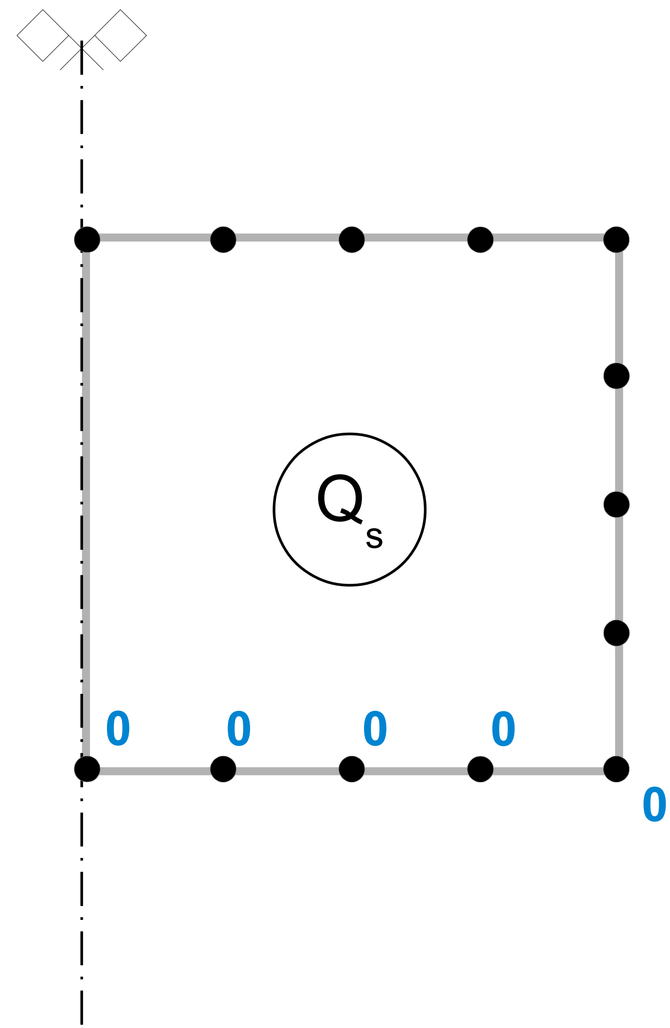
Przyjmujemy punkt P w węźle 15.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 15):

$$Q^{-}_{s,15} = 0 \text{ kN}$$

(jest to **wartość lewostronna**)





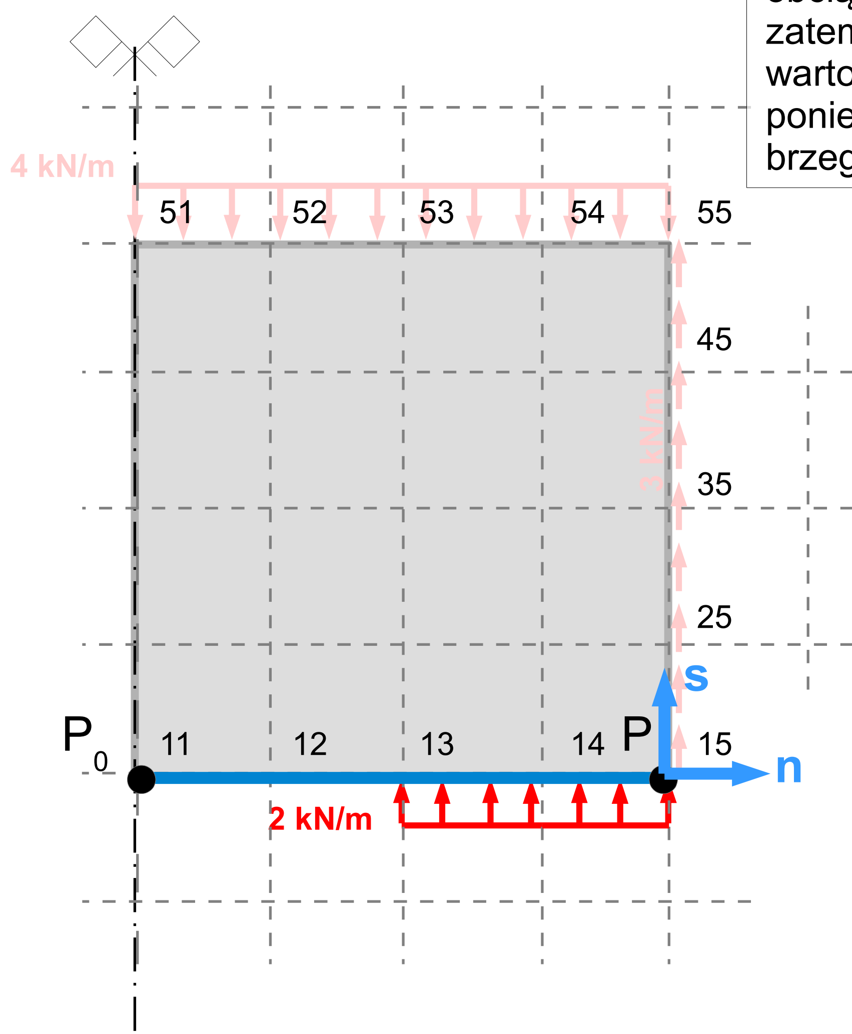
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

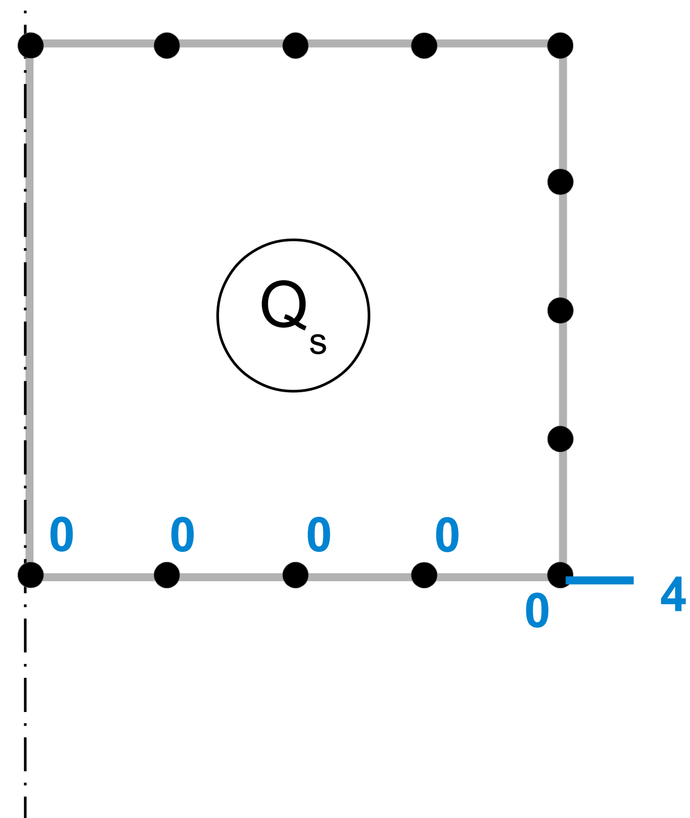
Przyjmujemy punkt P w węźle 15.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 15):

$$Q^{+}_{s,15} = 2\,\mathrm{kN/m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{kN}$$

(jest to **wartość prawostronna** – po przejściu na pionowy odcinek brzegu obrotowi ulega lokalny układ współrzędnych i teraz oś styczna s jest osią pionową. Teraz widzimy już obciążenie na kierunku osi s. Jest zwrócone zgodnie z osią s, zatem przyjmujemy je jako dodatnie. W rzeczywistości wartość tej siły w punkcie narożnym nie jest nam potrzebna, ponieważ dla takich węzłów nie zapisujemy warunku brzegowego na pochodną)

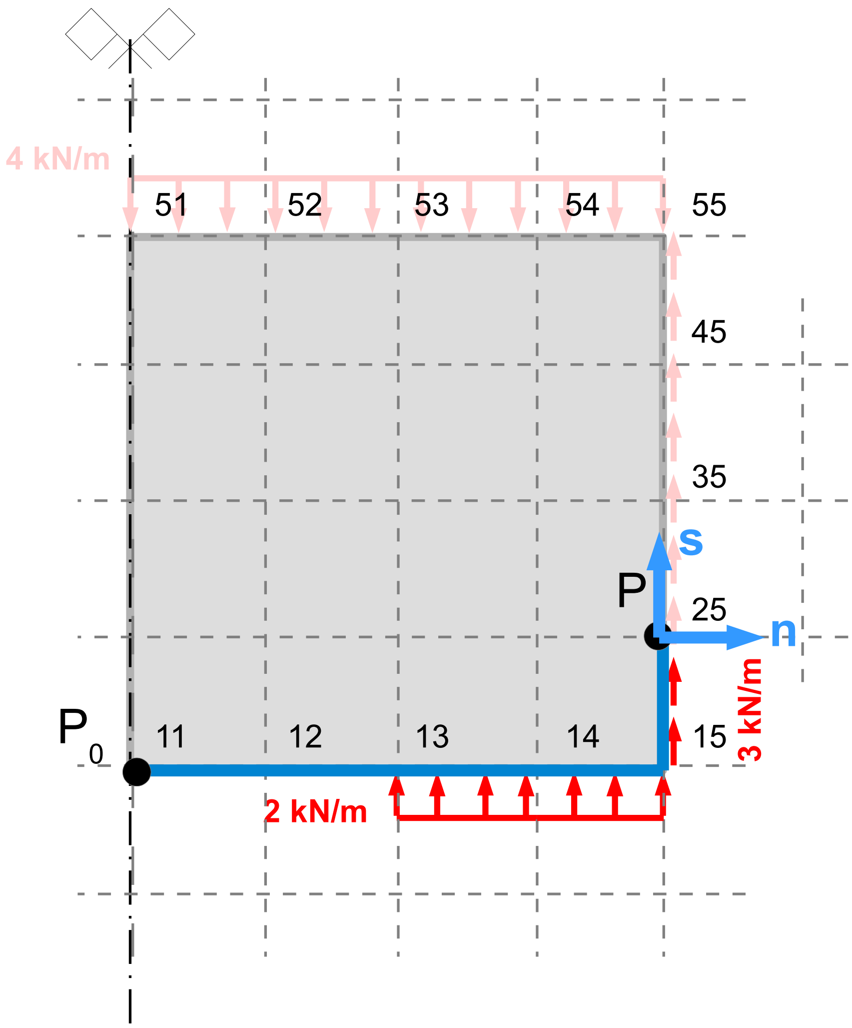


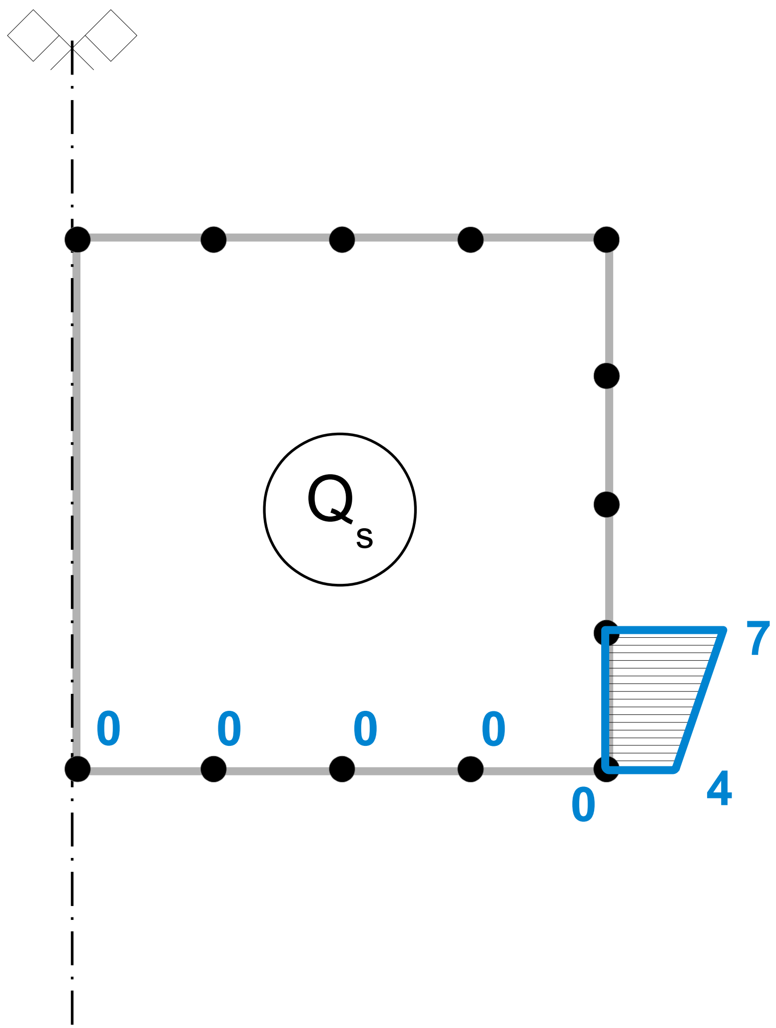


Przyjmujemy punkt P w węźle 25.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 25):

$$Q_{s,25} = 2{\cdot}2 + 3{\cdot}1 = 7\,\mathrm{kN}$$



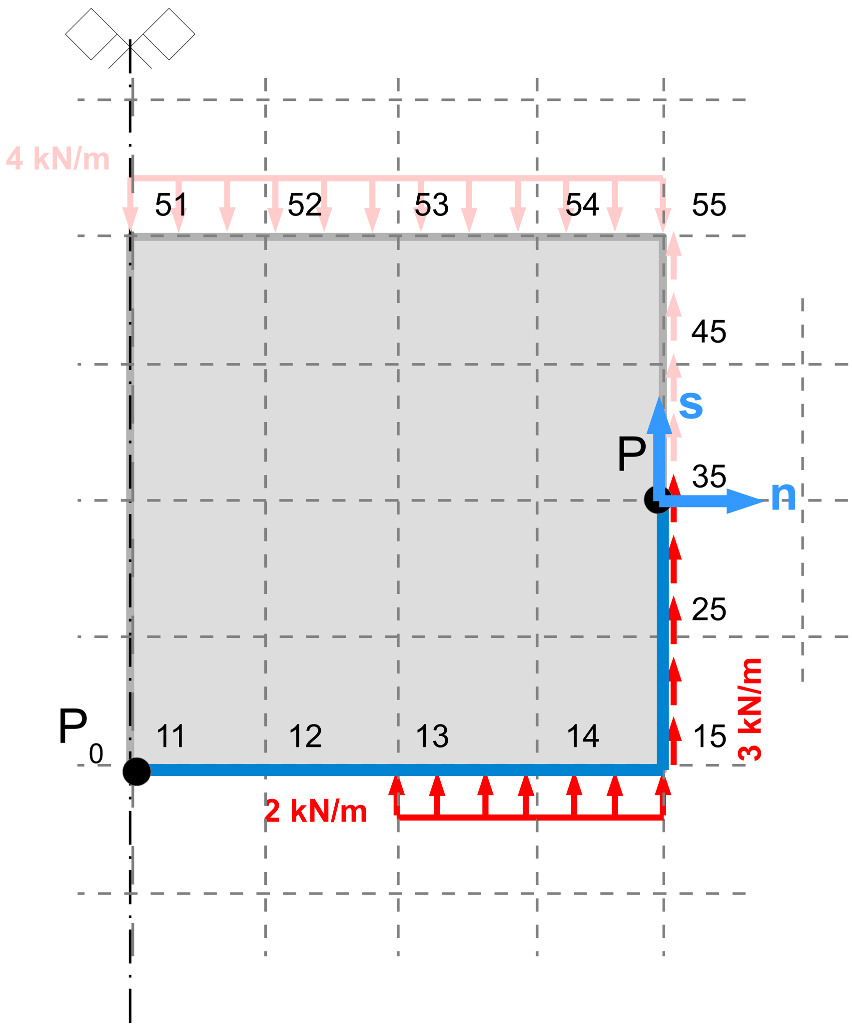


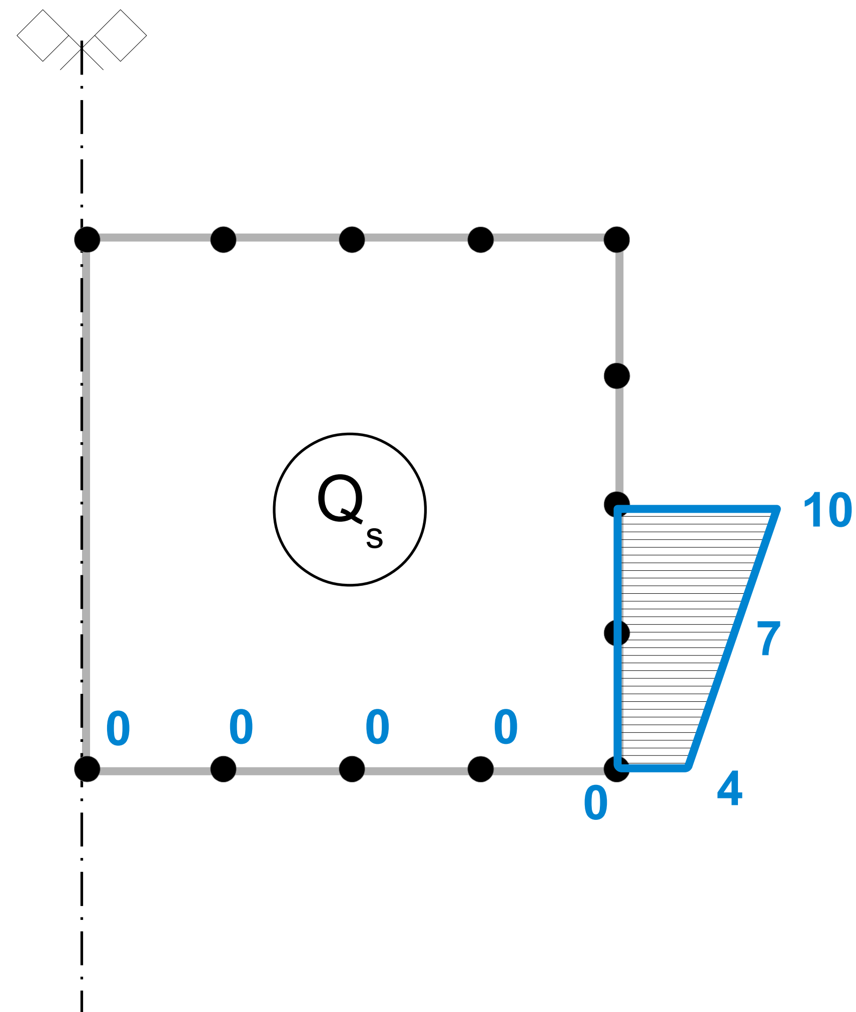
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 35.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 35):

$$Q_{s,35} = 2\cdot 2 + 3\cdot 2 = 10\ \text{kN}$$



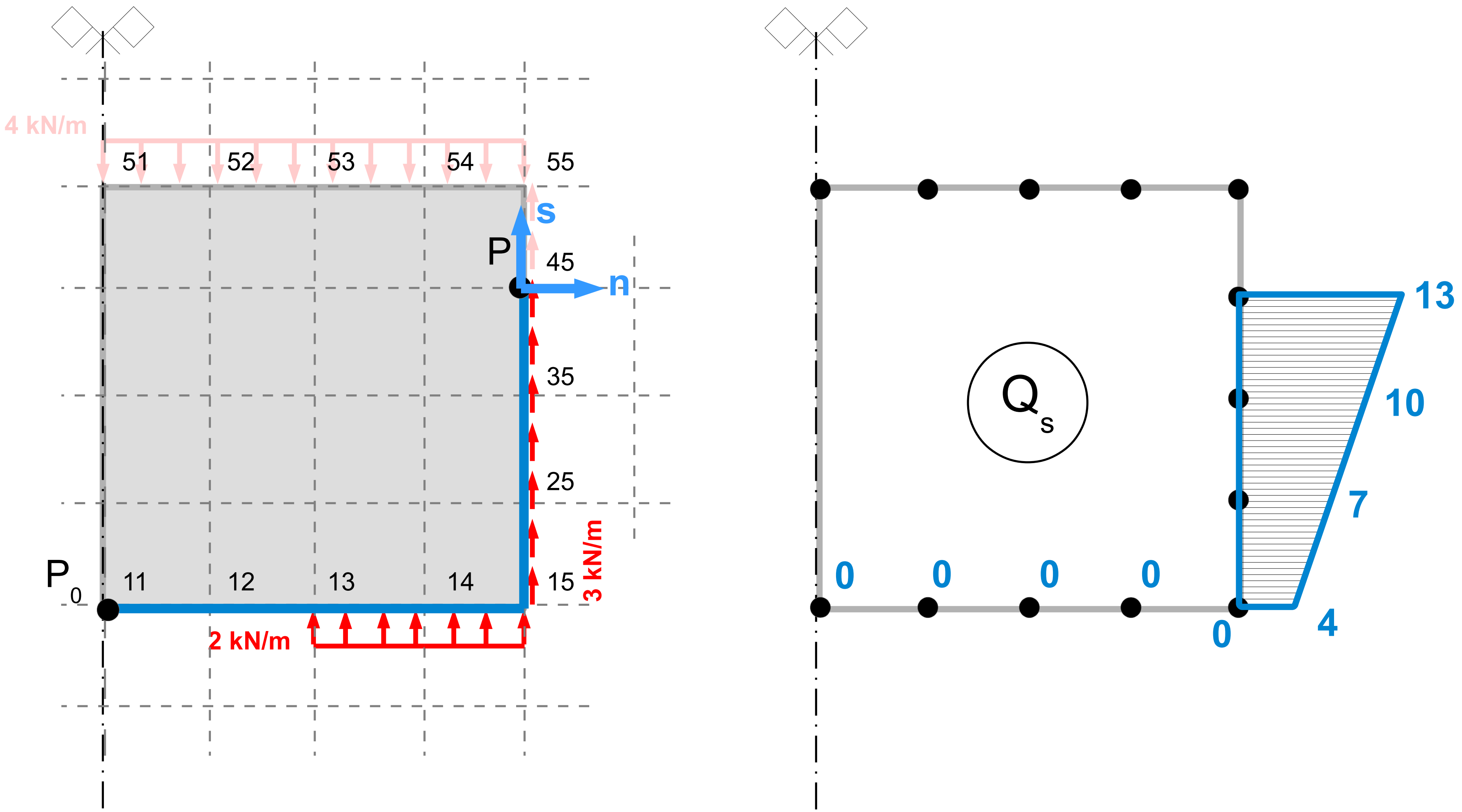


PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 45.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 45):

$$Q_{s,45} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \text{ kN}$$



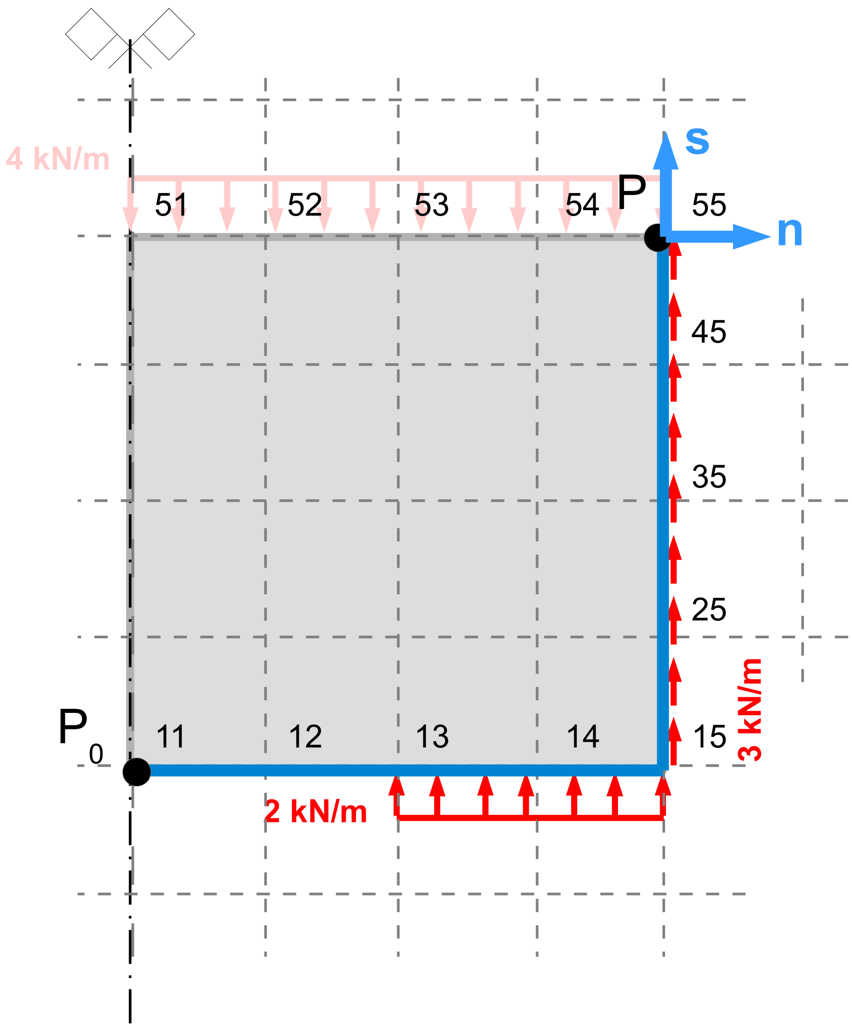
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

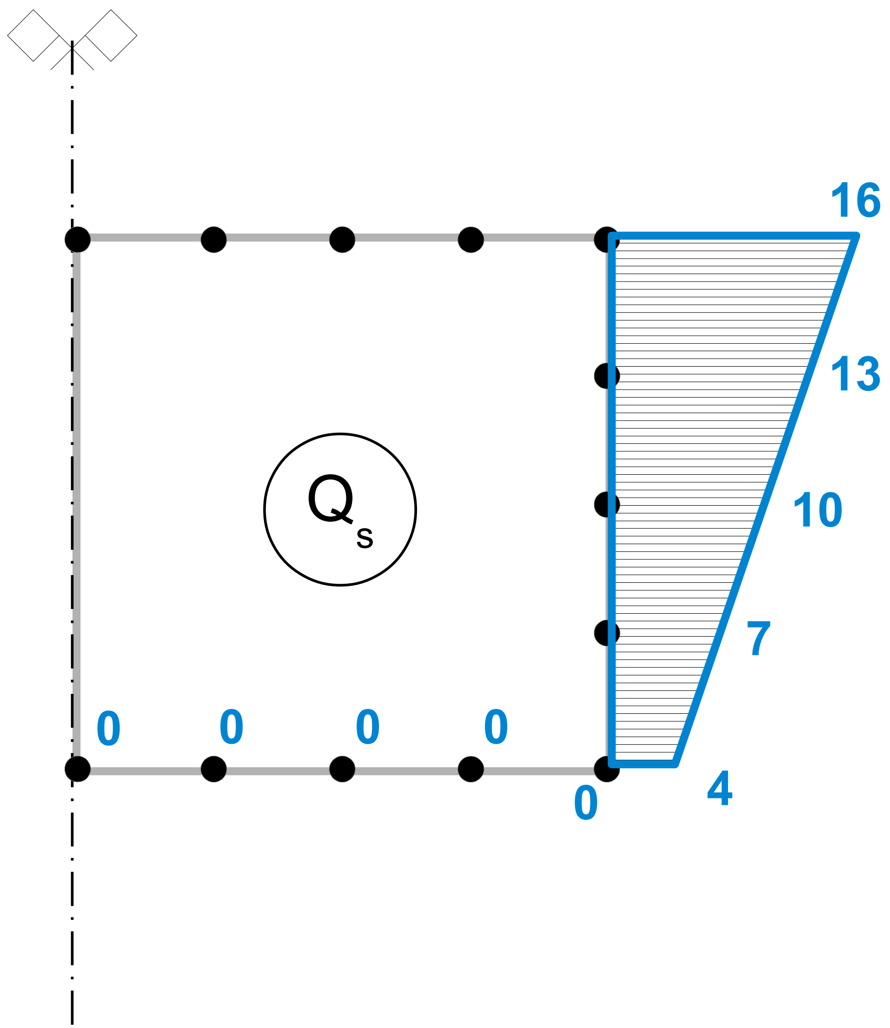
Przyjmujemy punkt P w węźle 55.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 55):

$$Q^{-}_{s,55} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16 \text{ kN}$$

(**wartość lewostronna**)





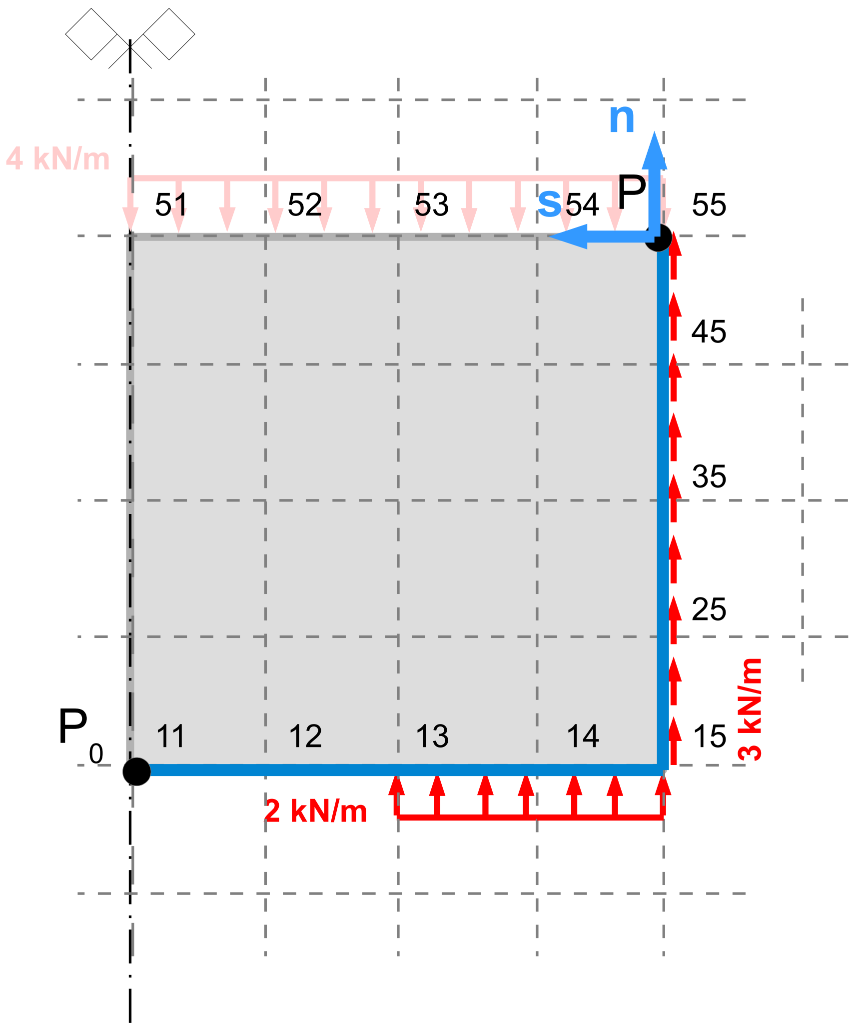
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

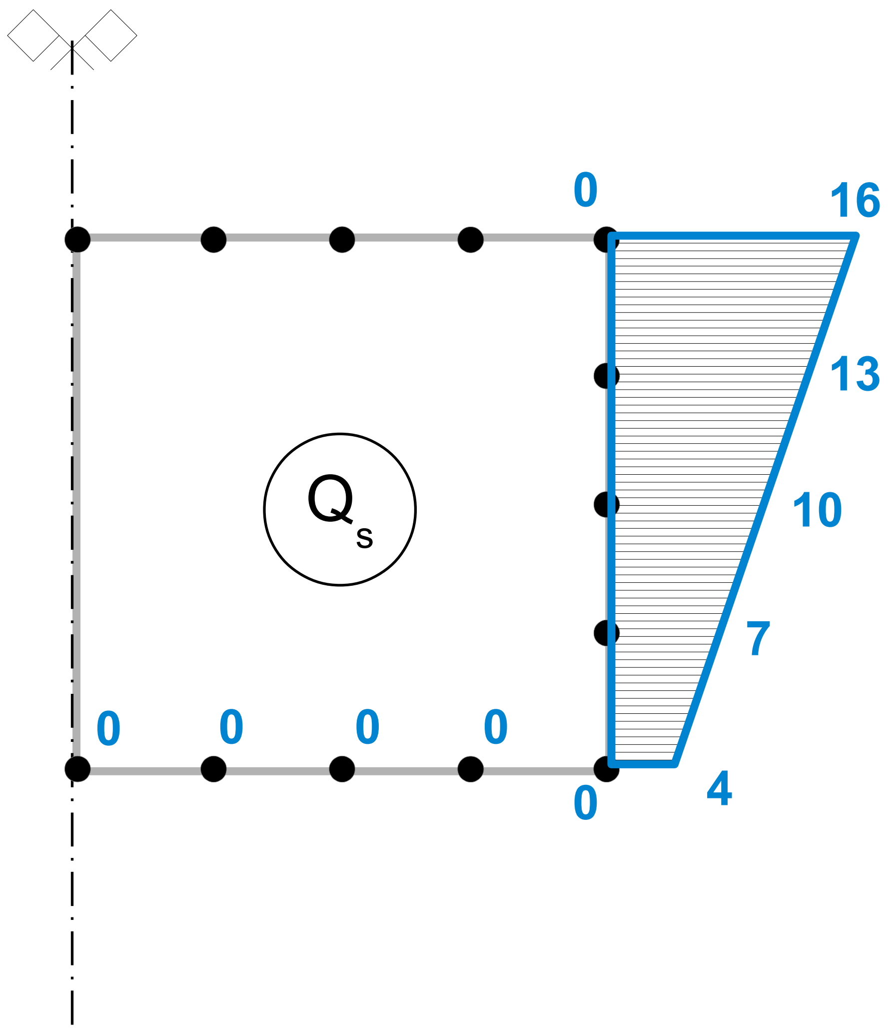
Przyjmujemy punkt P w węźle 55.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 55):

$$Q^{+}_{s,55} = 0 \text{ kN}$$

(**wartość prawostronna**)

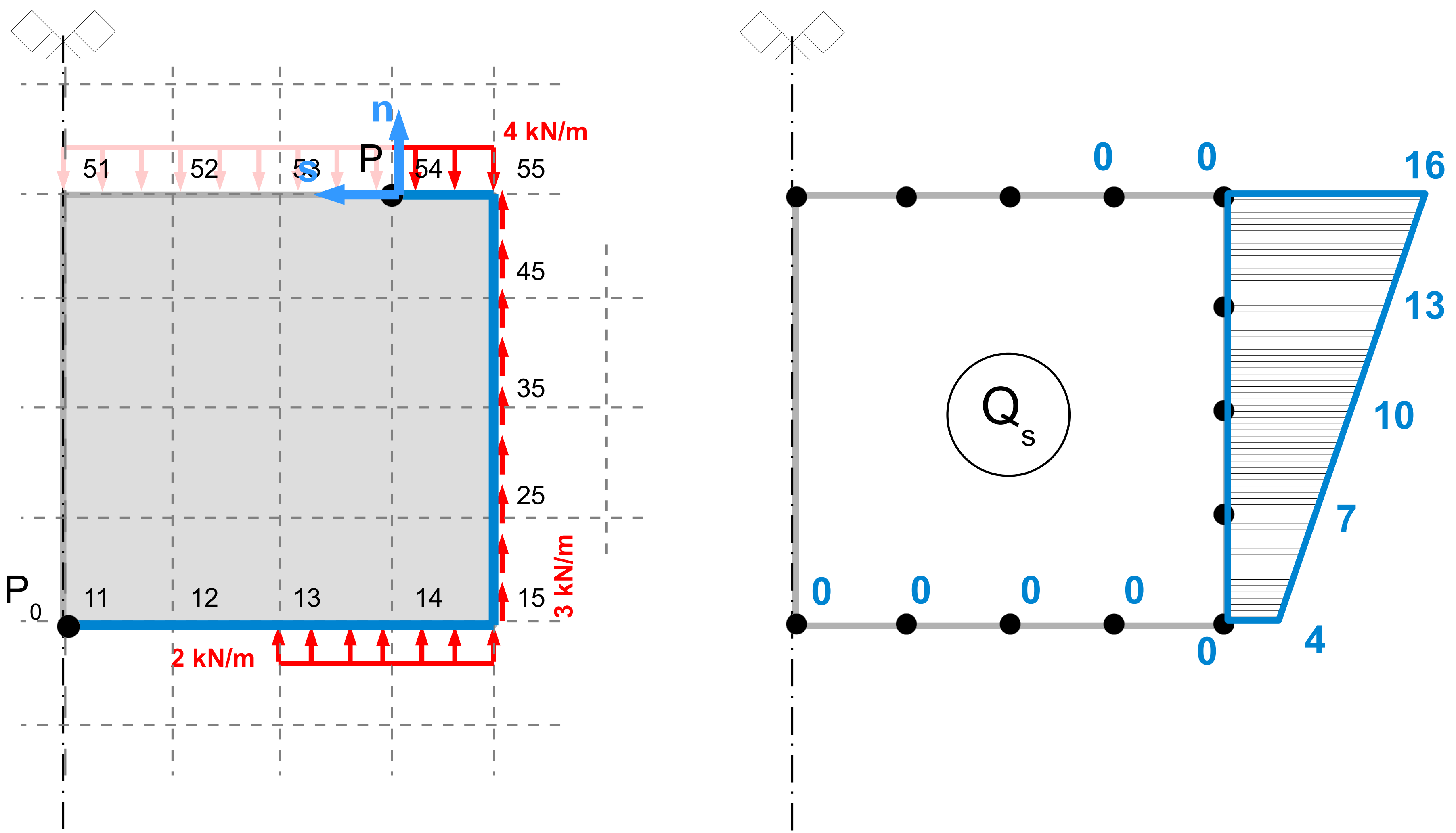




Przyjmujemy punkt P w węźle 54.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 54):

$$Q_{s,54} = 0 \text{ kN}$$

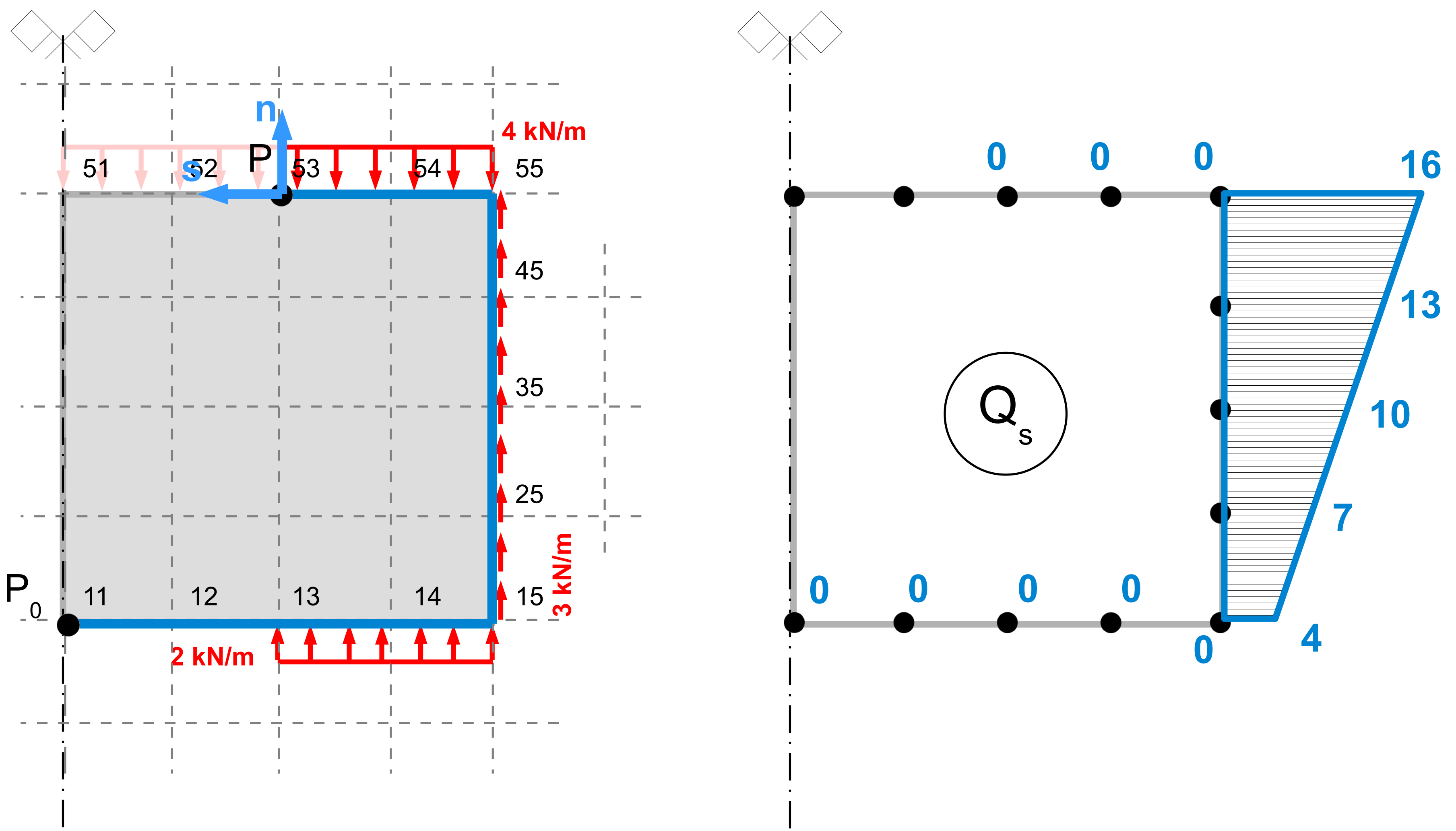


PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 53.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 53):

$$Q_{s,53} = 0 \text{ kN}$$

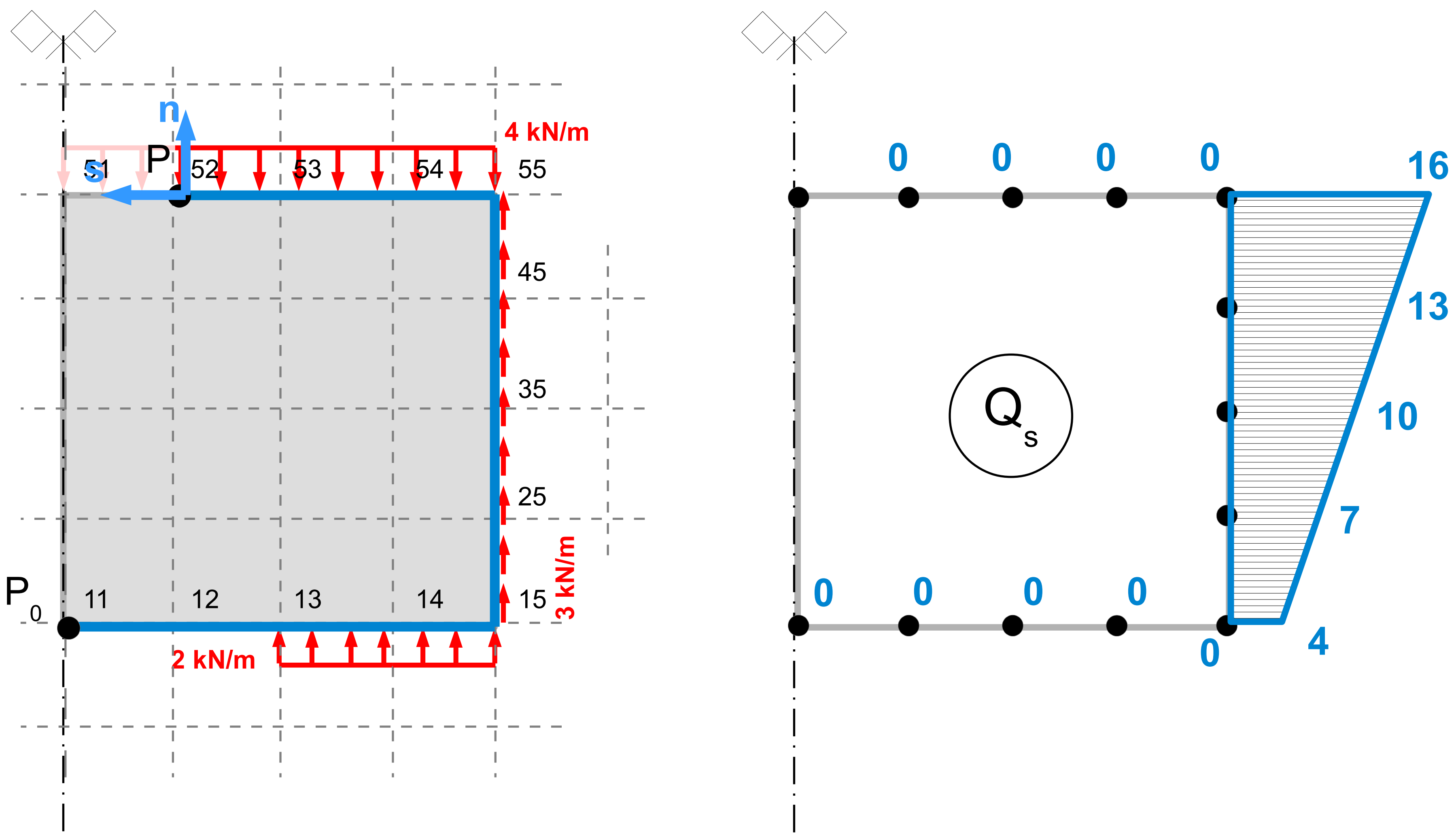


PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 52.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 52):

$$Q_{s,52} = 0 \text{ Nm}$$

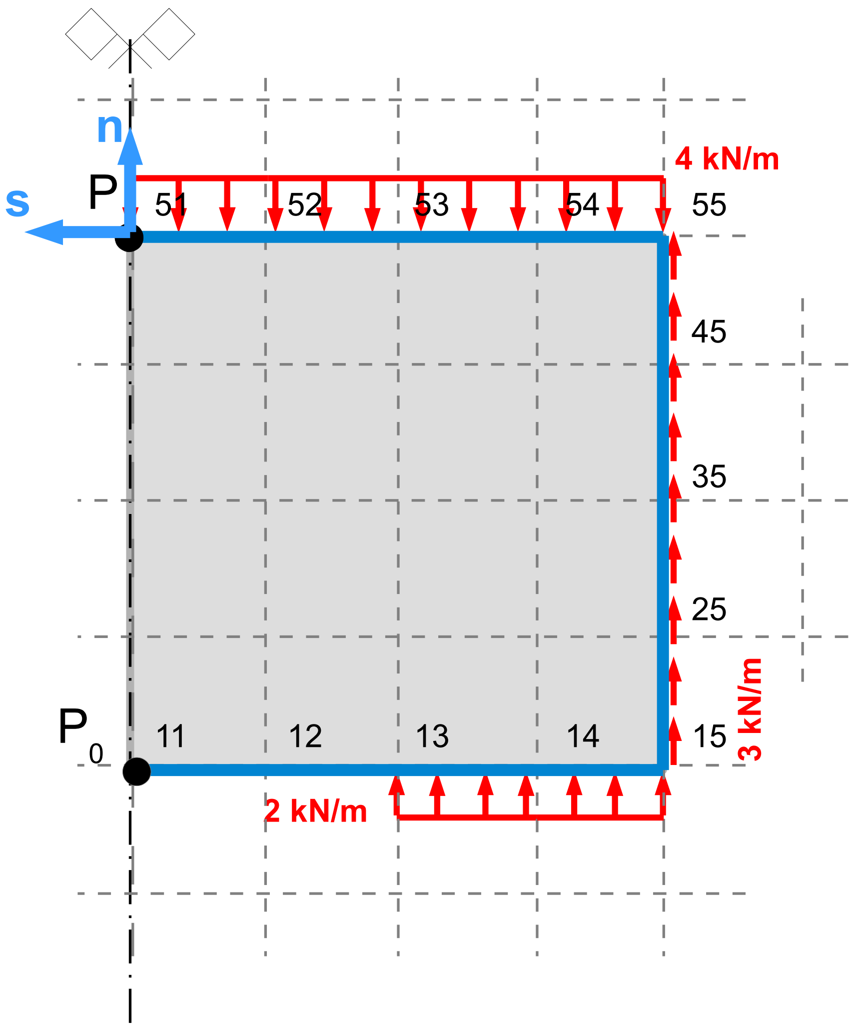


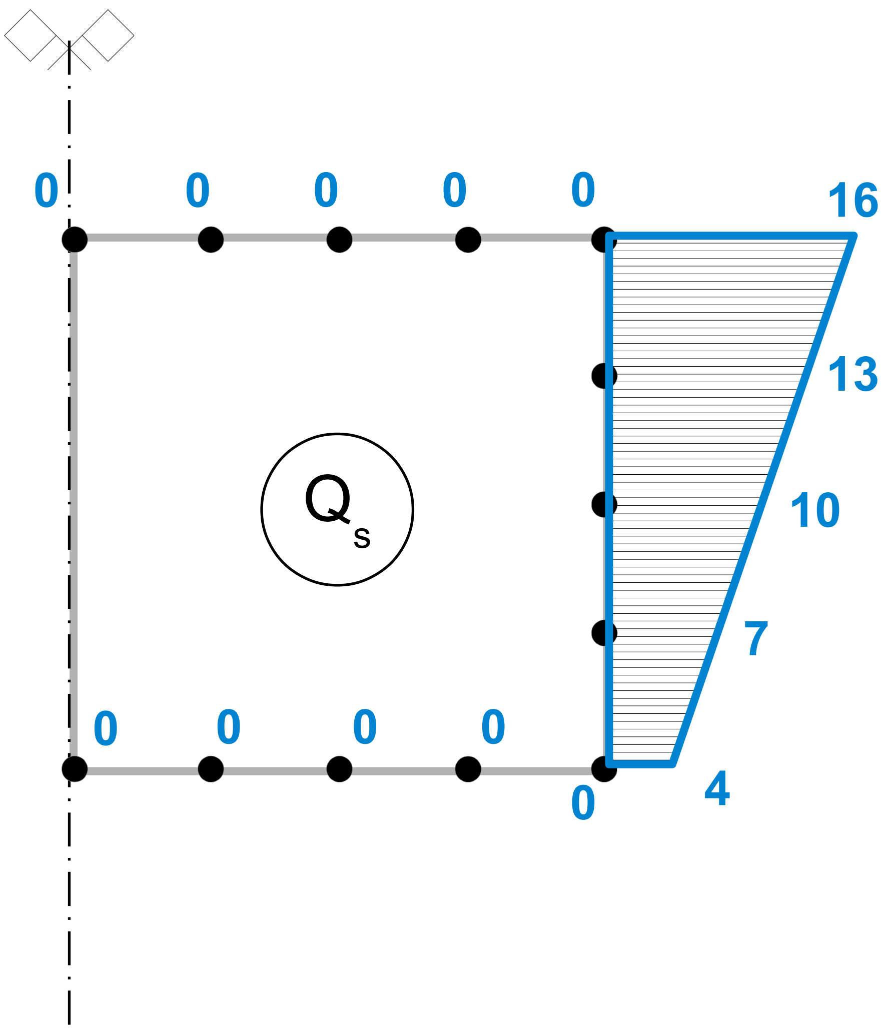
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmujemy punkt P w węźle 51.

Suma sił równoległych do osi s od obciążeń brzegowych na fragmencie brzegu zawartym między punktem P_0 (węzeł 11) a P (węzeł 51):

$$Q_{s,51} = 0 \text{ Nm}$$





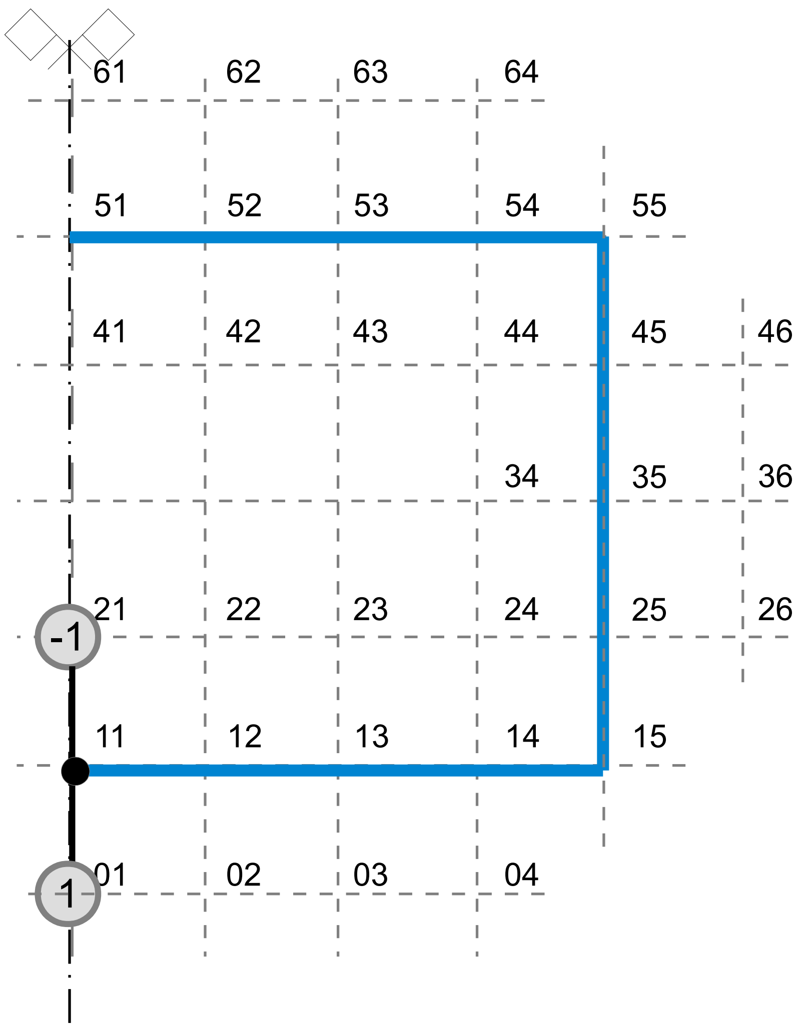
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

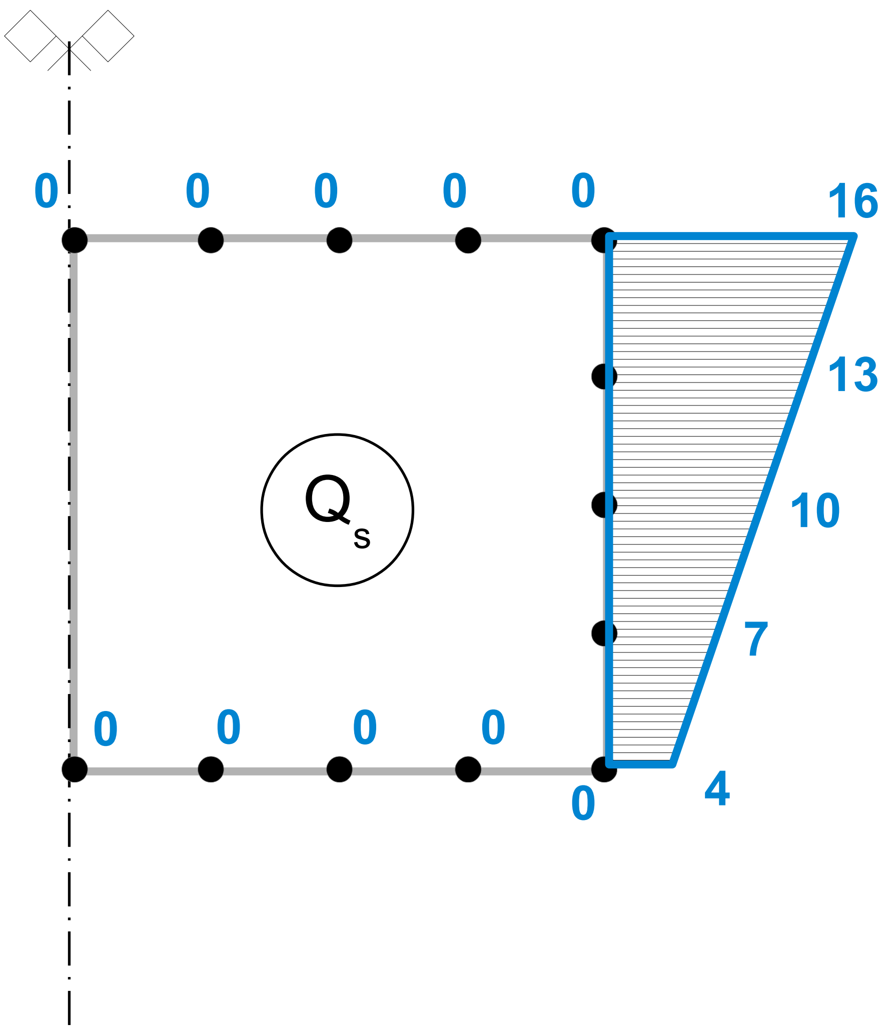
(w węzłach o **zerowej sile stycznej** do brzegu, warunek brzegowy na pochodną pozwala nam **zredukować liczbę poszukiwanych wartości węzłowych**)

Zapisujemy warunki brzegowe w węźle 11.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{Q_s|_P}{h}}$$

$$\frac{1}{2s}\left(F_{01}-F_{21}\right) = -\frac{0\,\mathrm{kN}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{01} = F_{21}}$$



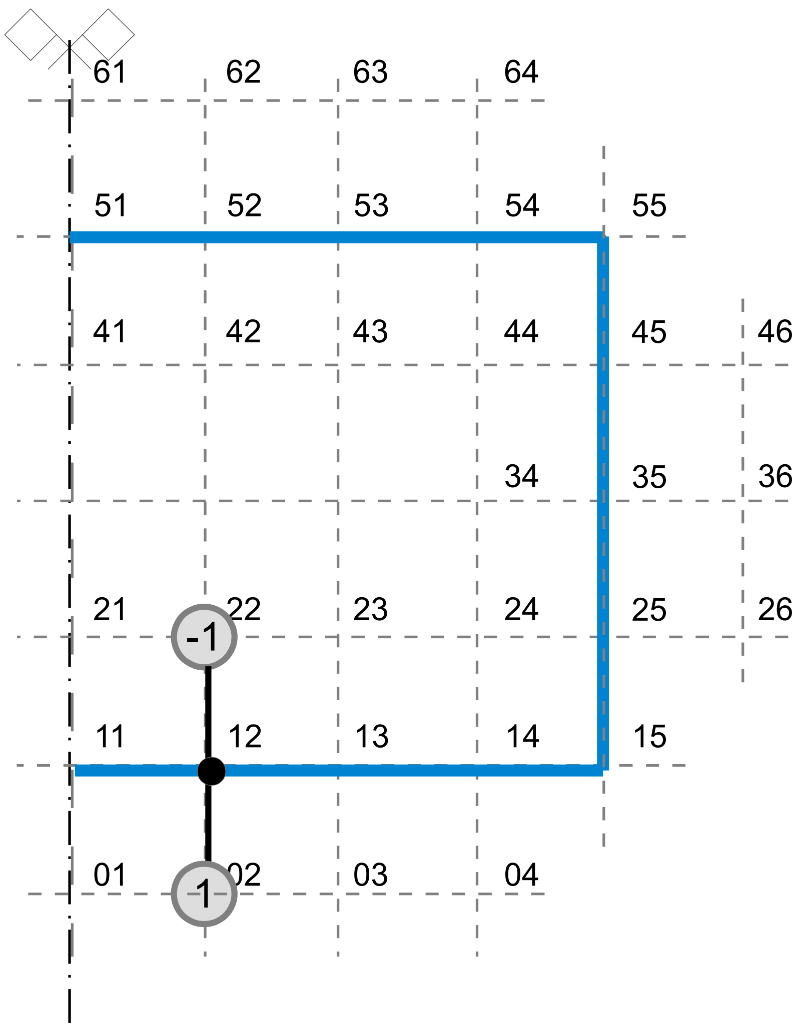


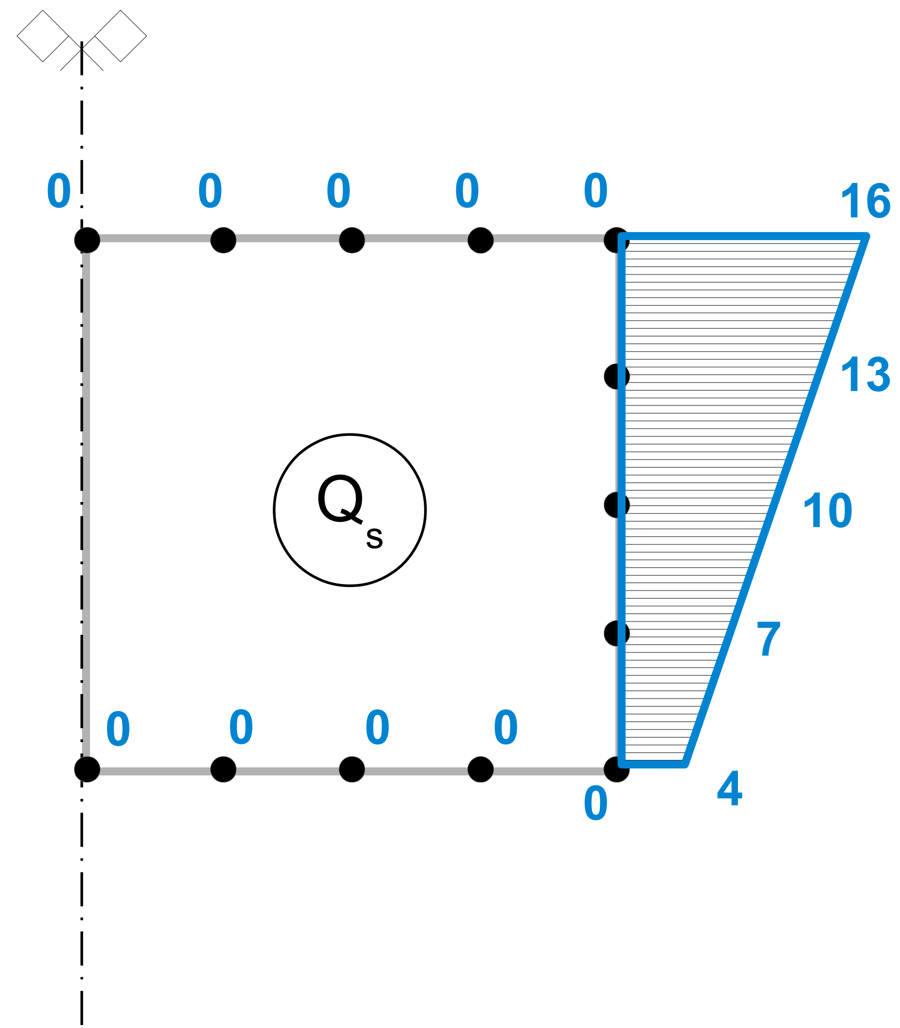
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zapisujemy warunki brzegowe w węźle 12.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{\left.Q_s\right|_P}{h}}$$

$$\frac{1}{2s}\left(F_{02}-F_{22}\right) = -\frac{0\,\mathrm{kN}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{02} = F_{22}}$$

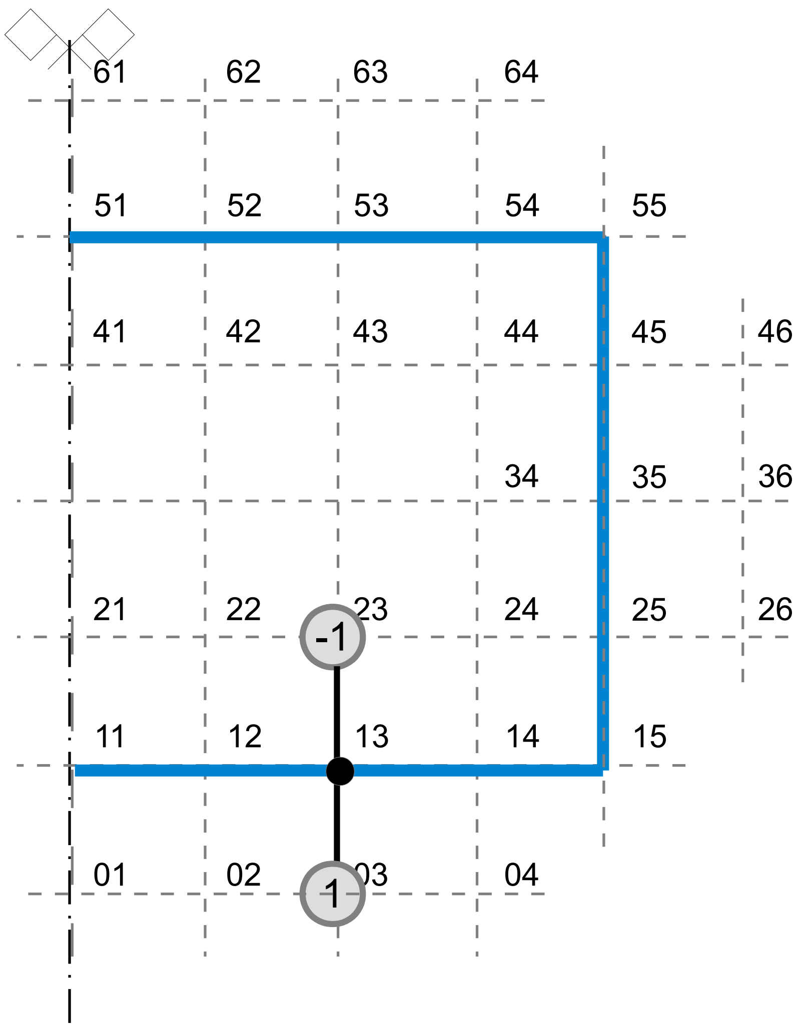


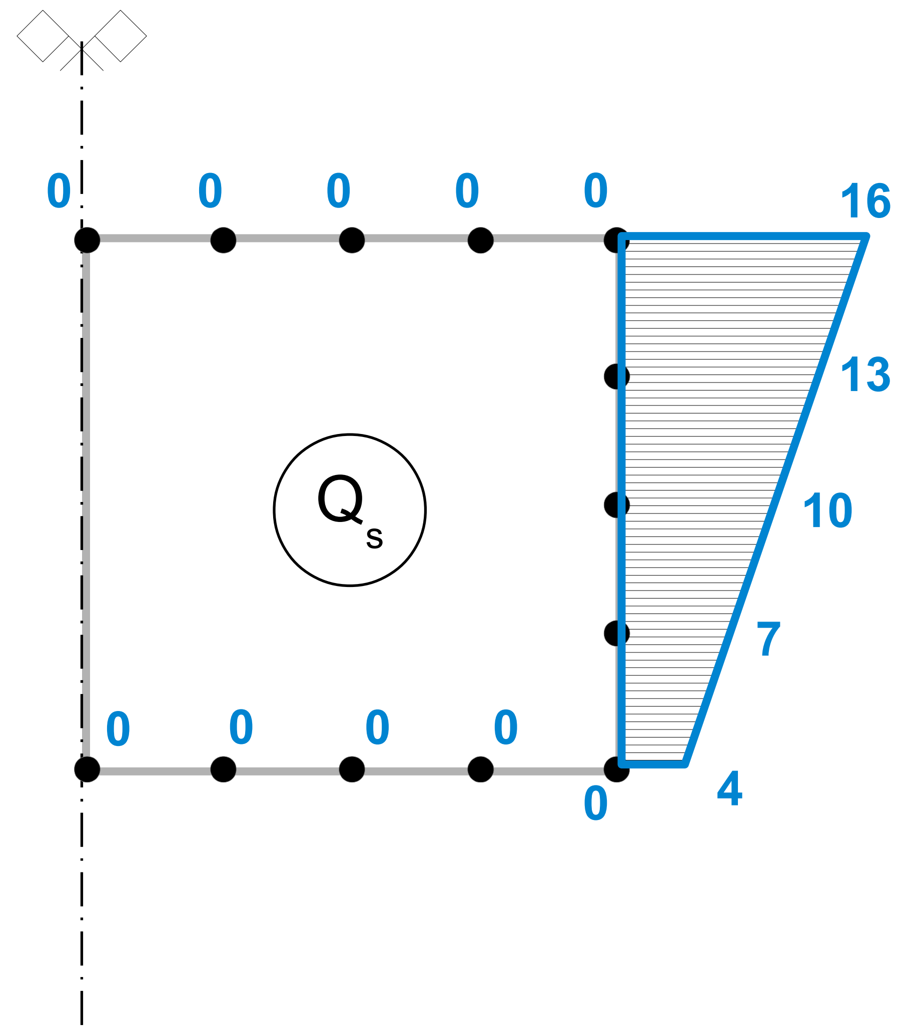


PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zapisujemy warunki brzegowe w węźle 13.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{Q_s|_P}{h}} \qquad \frac{1}{2s}\left(F_{03} - F_{23}\right) = -\frac{0\,\mathrm{kN}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{03} = F_{23}}$$



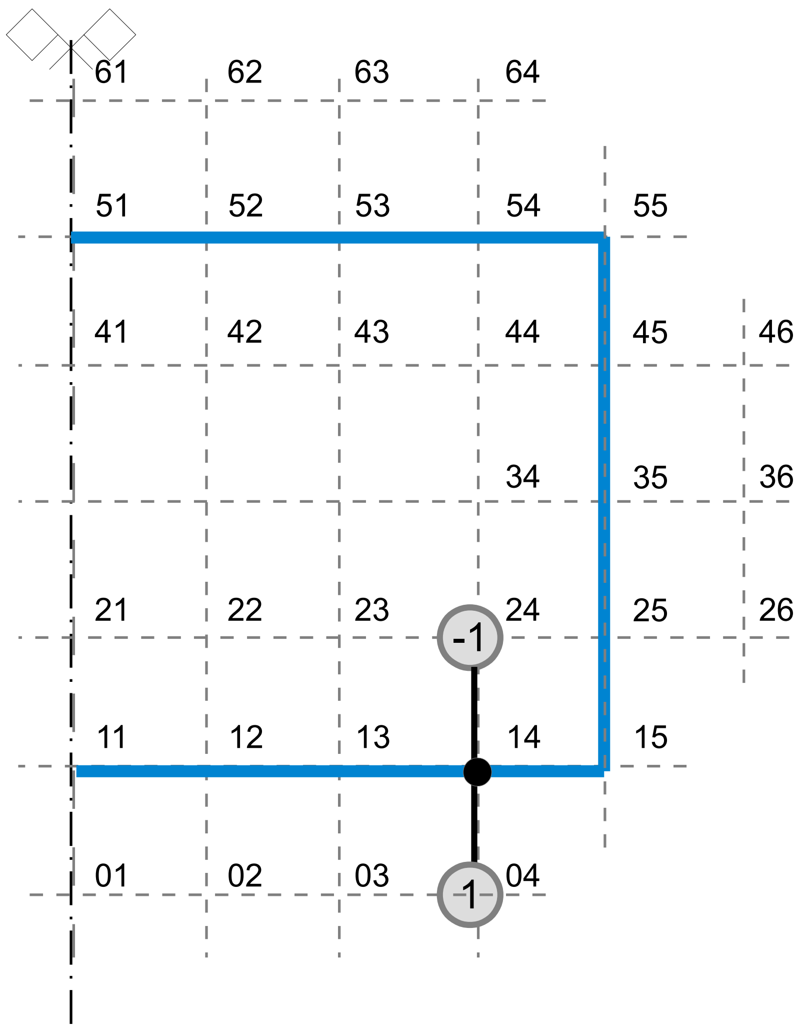


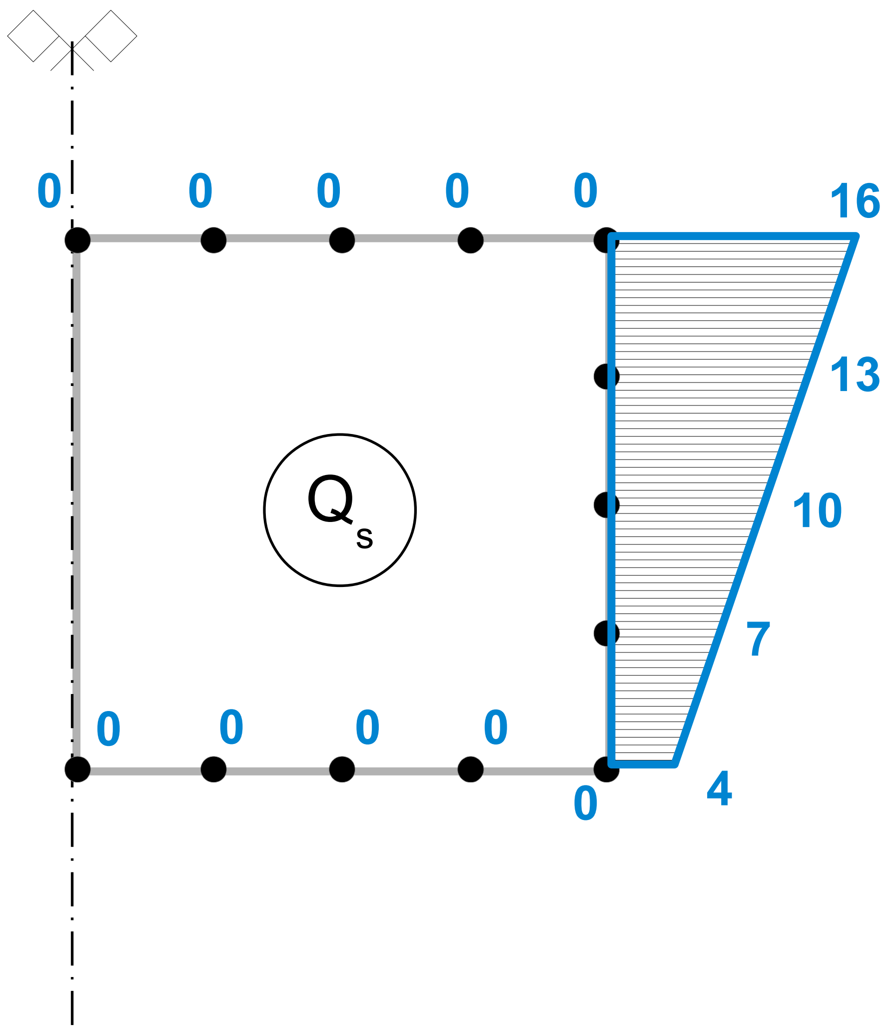
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zapisujemy warunki brzegowe w węźle 14.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{\left.Q_s\right|_P}{h}}$$

$$\frac{1}{2s}\left(F_{04}-F_{24}\right) = -\frac{0\,\mathrm{kN}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{04} = F_{24}}$$



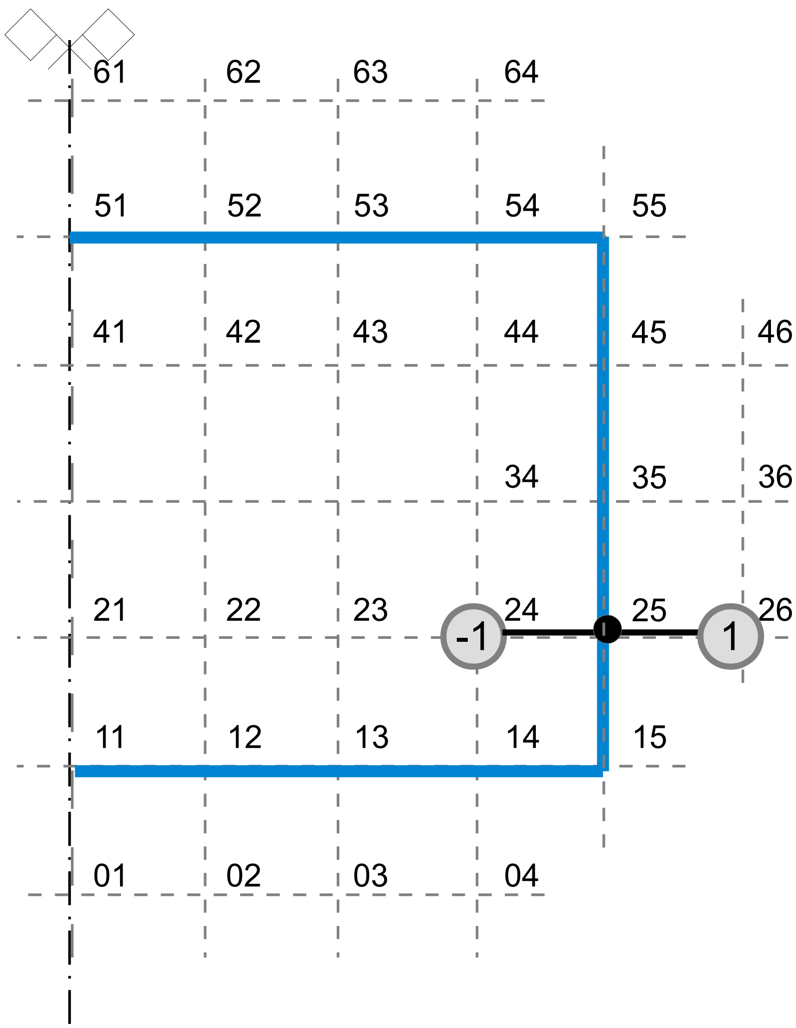


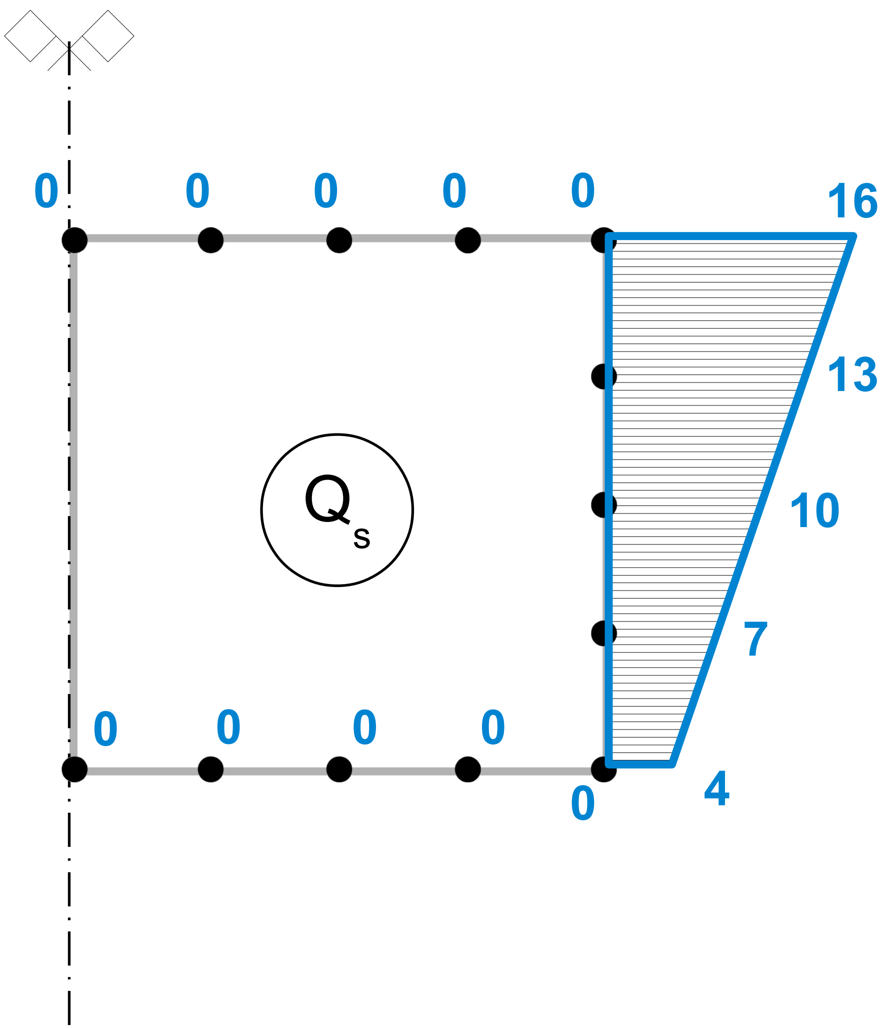
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

W węzłach narożnych nie zapisujemy warunku brzegowego na pochodną F.
Zapisujemy warunki brzegowe w węźle 25.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{\left.Q_s\right|_P}{h}}$$

$$\frac{1}{2s}\left(F_{26}-F_{24}\right) = -\frac{7\,\mathrm{kN}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = -35\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \Rightarrow \boxed{F_{26}-F_{24} = -70\,\mathrm{kN}}$$

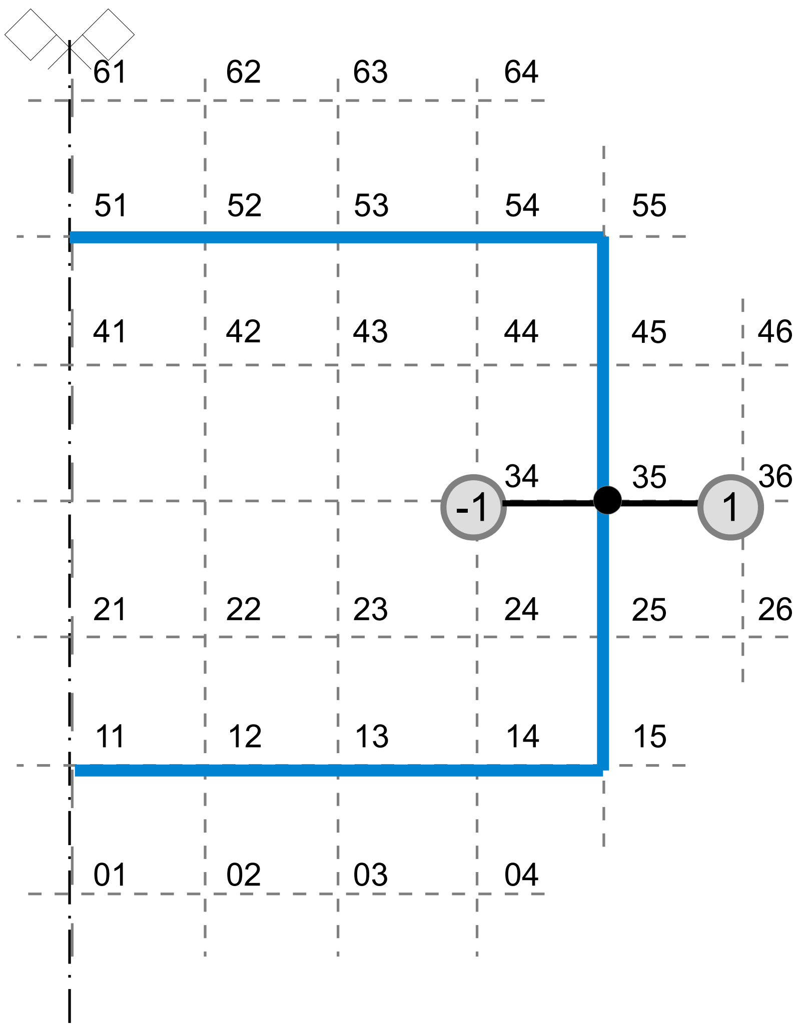


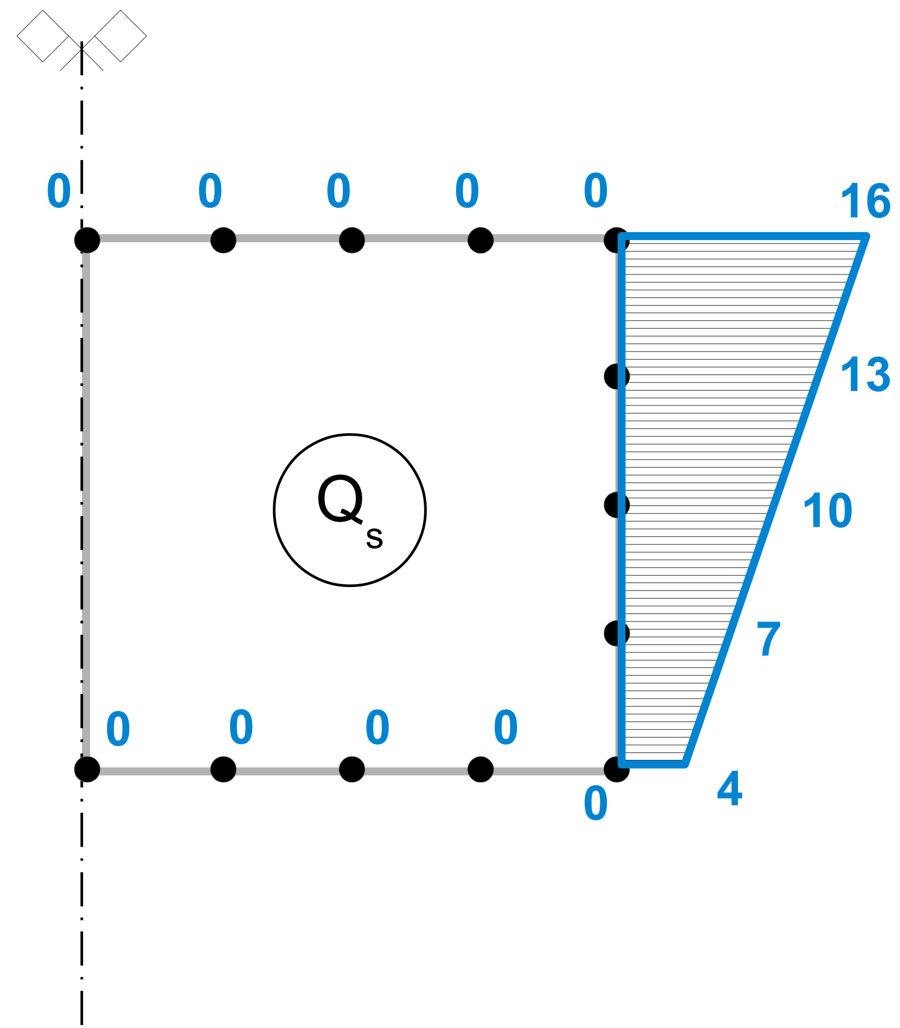


Zapisujemy warunki brzegowe w węźle 35.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{\left.Q_s\right|_P}{h}}$$

$$\frac{1}{2s}\left(F_{36}-F_{34}\right) = -\frac{10\,\mathrm{kN}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = -50\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{F_{36}-F_{34} = -100\,\mathrm{kN}}$$

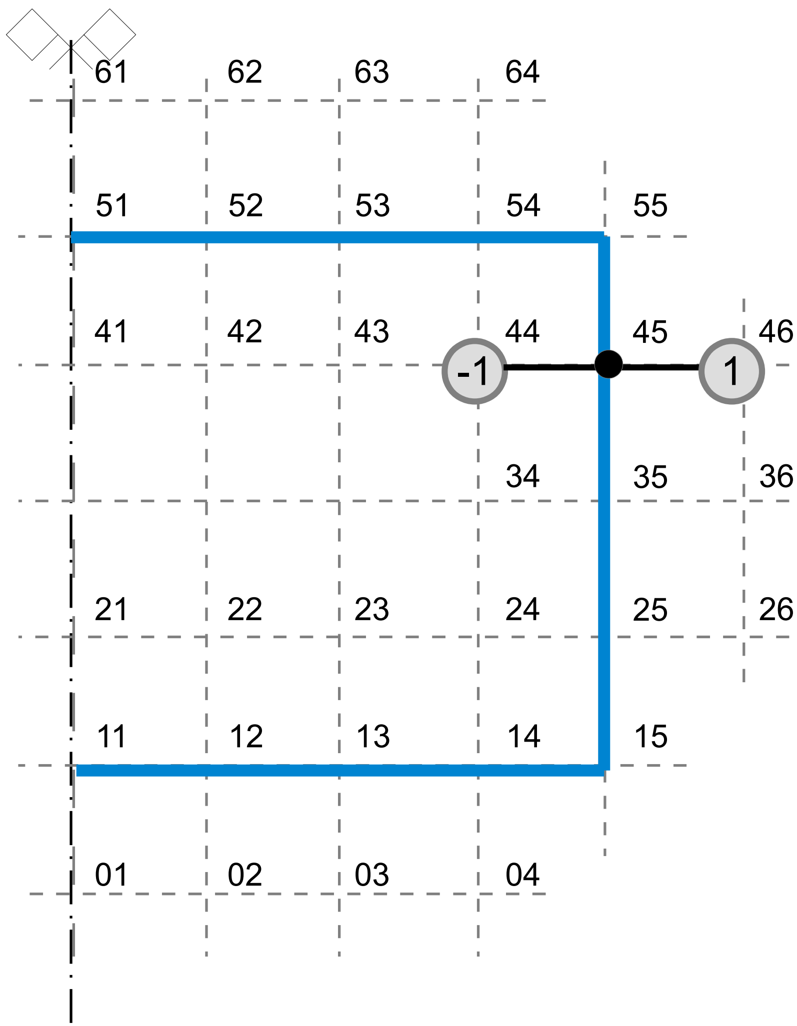


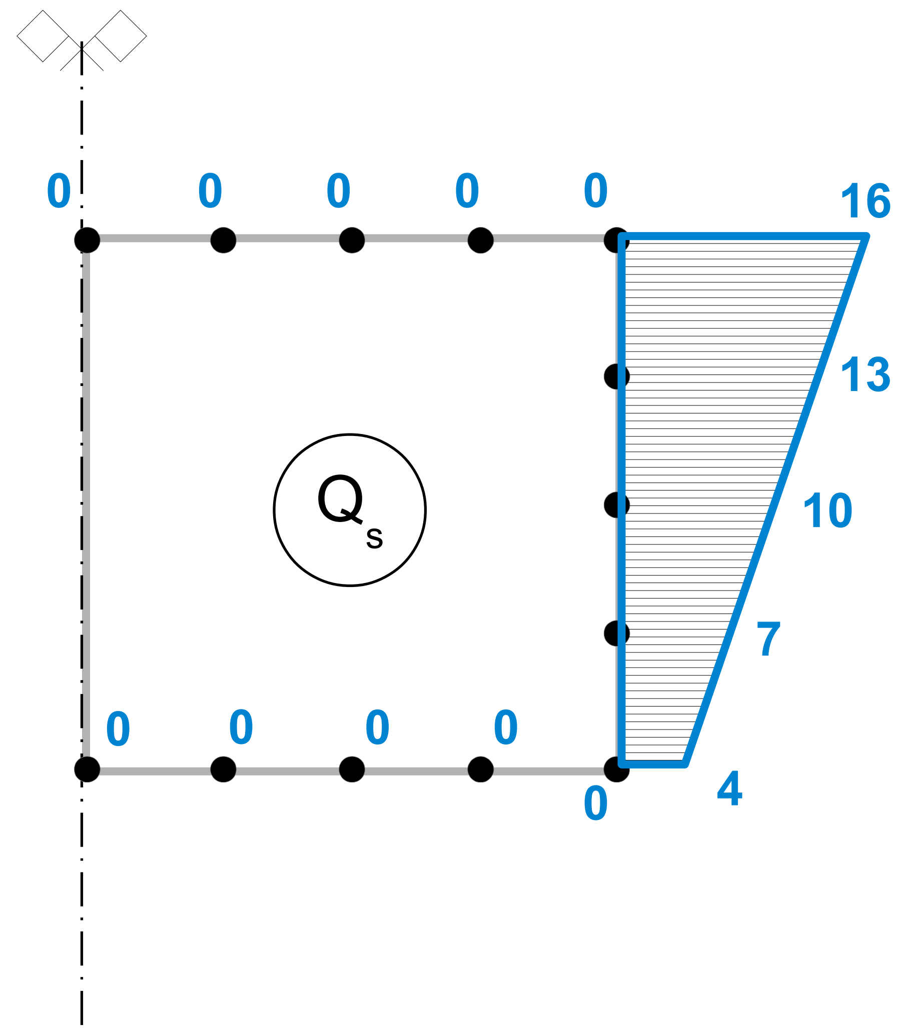


Zapisujemy warunki brzegowe w węźle 45.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{\left.Q_s\right|_P}{h}}$$

$$\frac{1}{2s}\left(F_{46} - F_{44}\right) = -\frac{13\,\mathrm{kN}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = -65\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \Rightarrow \boxed{F_{46} - F_{44} = -130\,\mathrm{kN}}$$

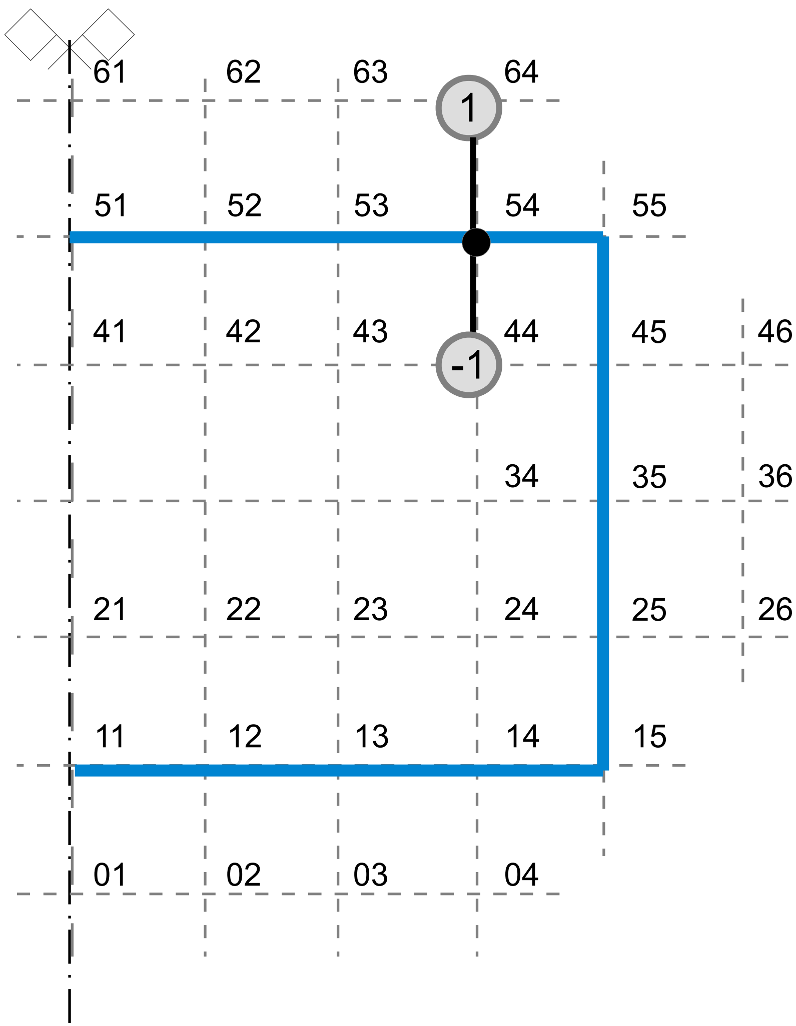


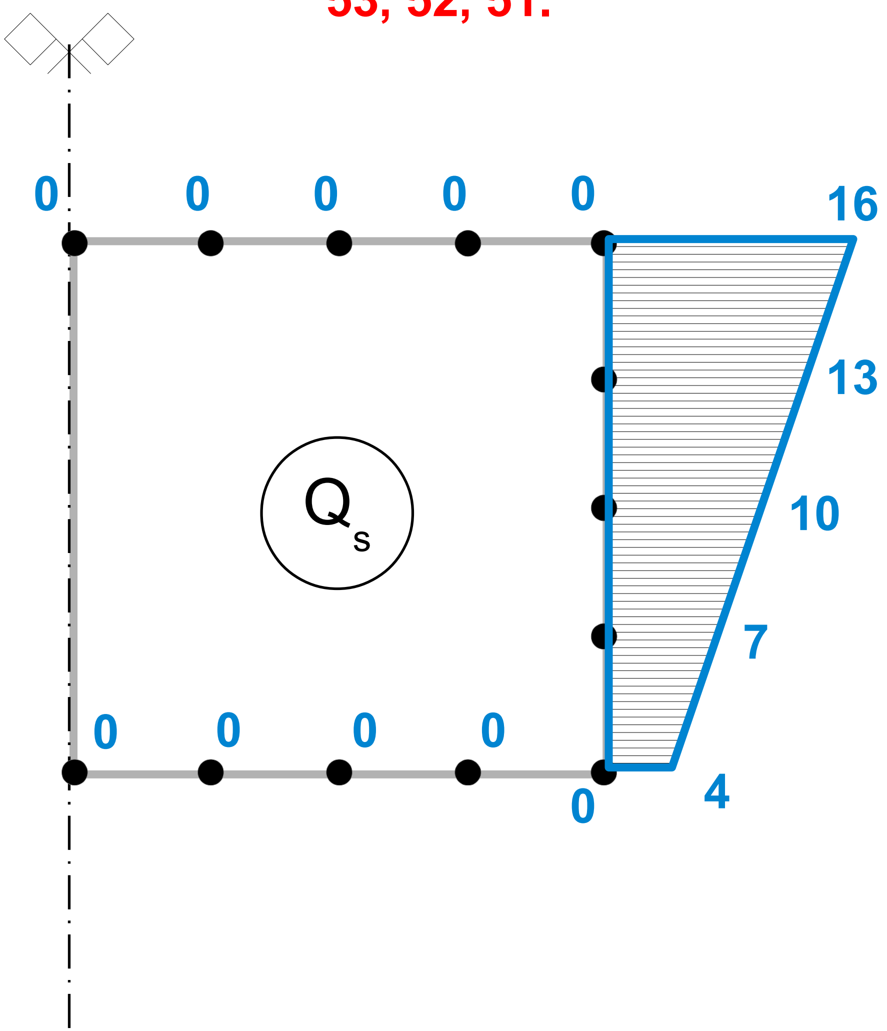


Zapisujemy warunki brzegowe w węźle 54.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P = -\frac{\left.Q_s\right|_P}{h}} \qquad \frac{1}{2\,s}\left(F_{64}-F_{44}\right) = -\frac{0\,\text{kN}}{0{,}2\,\text{m}} = 0\,\frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{64} = F_{44}}$$

Tak samo dla węzłów 53, 52, 51.

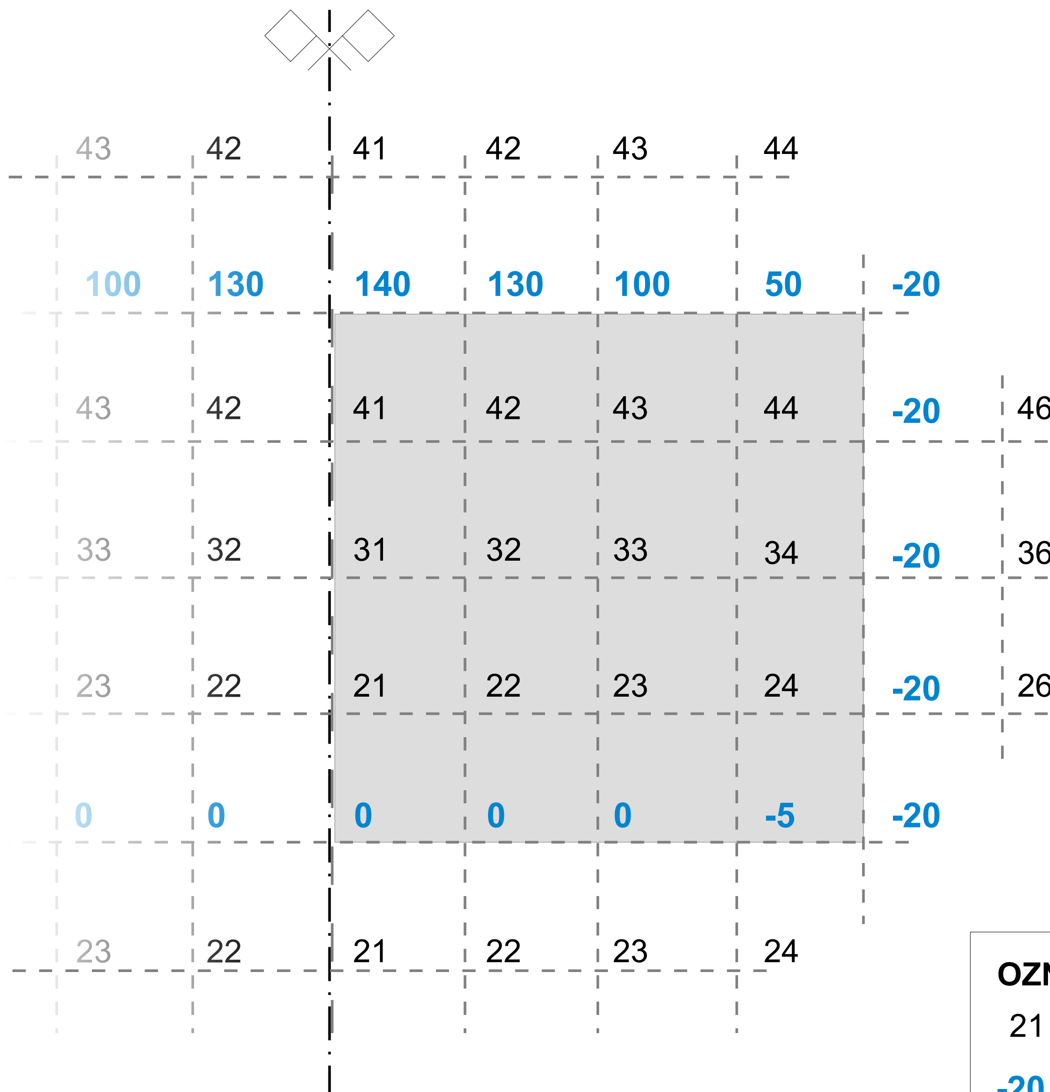




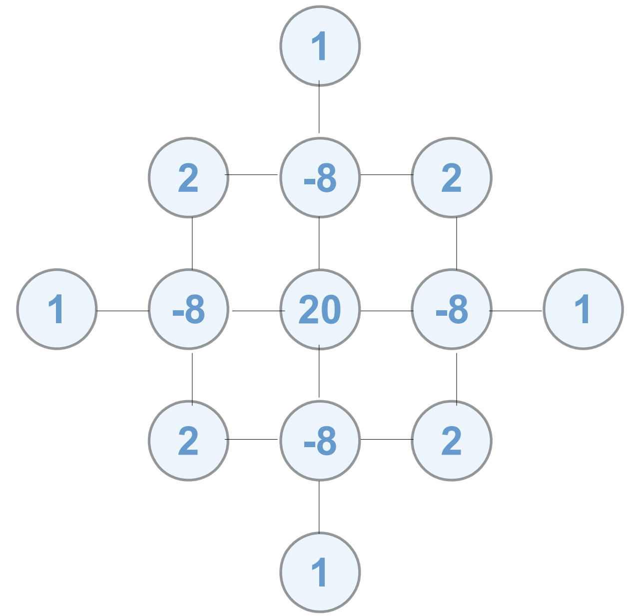
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Uwzględniając warunki brzegowe, możemy przyjąć siatkę MRS jak niżej.

Zapiszmy w **każdym węźle wewnętrznym** równanie rządzące zagadnieniem tarcz $\nabla^4 F = 0$, zastępując operator różniczkowy odpowiednim schematem MRS.



$$\nabla^4 \approx \frac{1}{s^4}\cdot$$



OZNACZENIA:

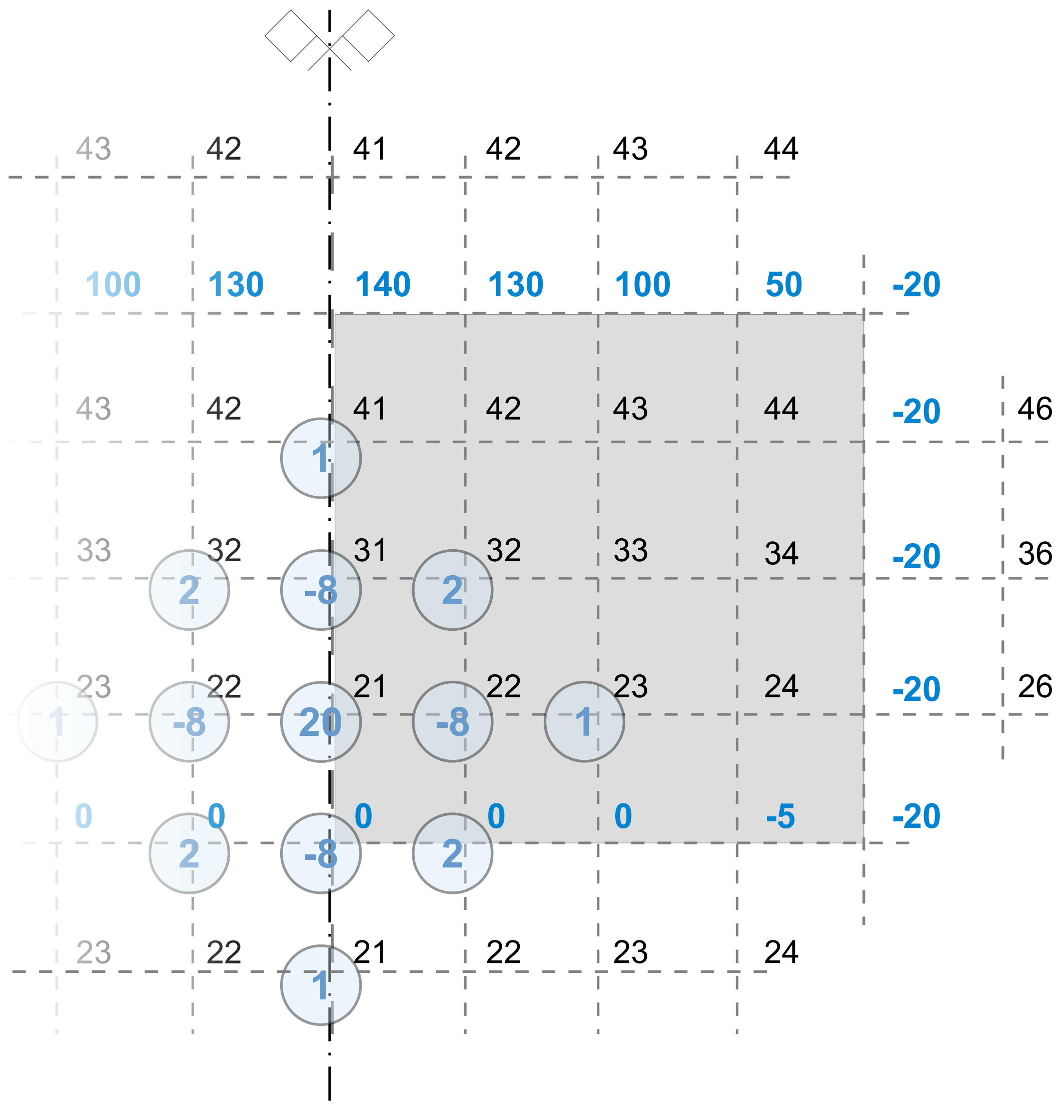
21 - numer węzła

-20 - wartość funkcji Airy'ego

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Równanie dla węzła 21:

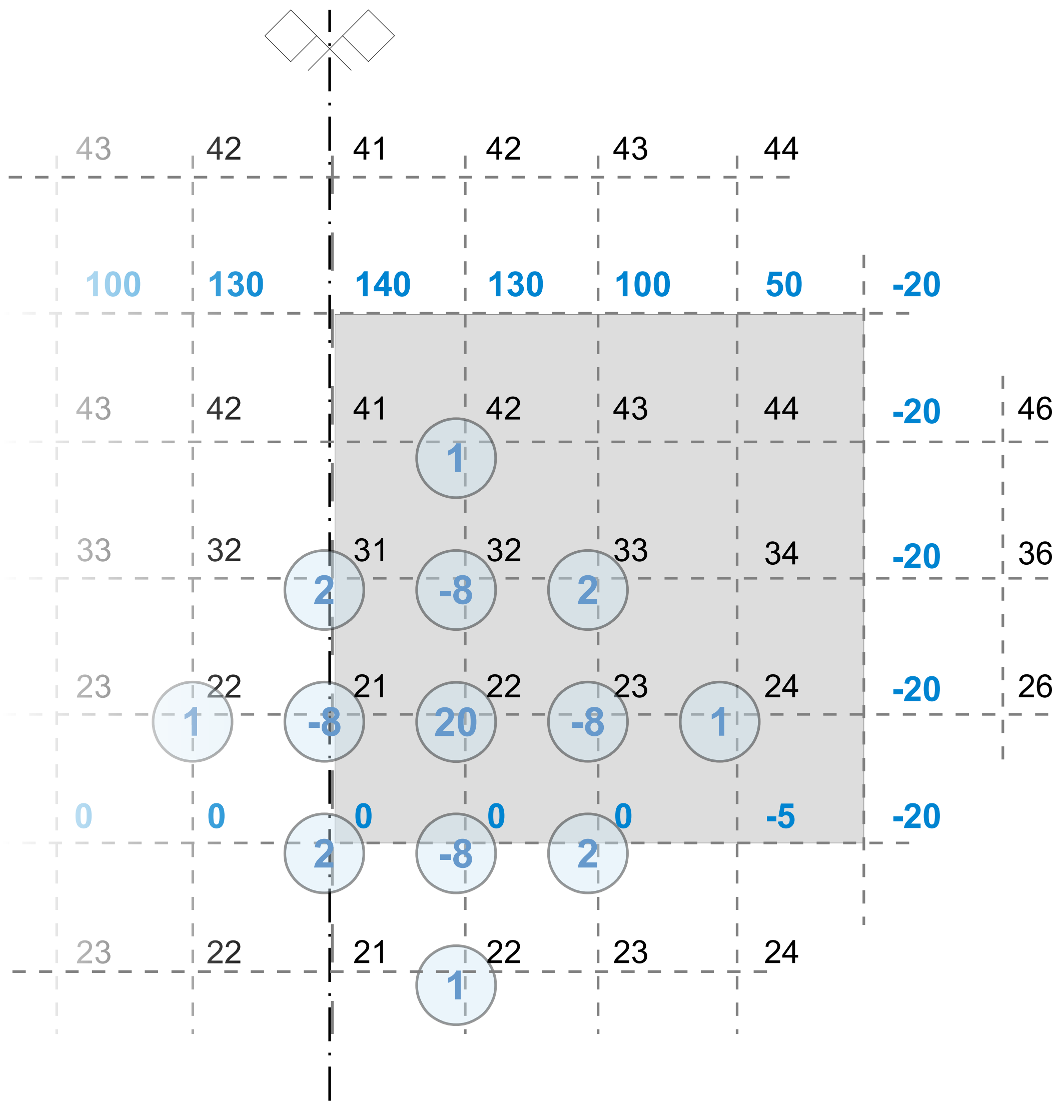
$$\frac{1}{s^4}\left[20\cdot\left(F_{21}\right) - 8\cdot\left(F_{22}+F_{22}+F_{31}+0\right) + 2\cdot\left(F_{32}+F_{32}+0+0\right) + 1\cdot\left(F_{21}+F_{23}+F_{23} + F_{41}\right)\right] = 0$$



PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Równanie dla węzła 22:

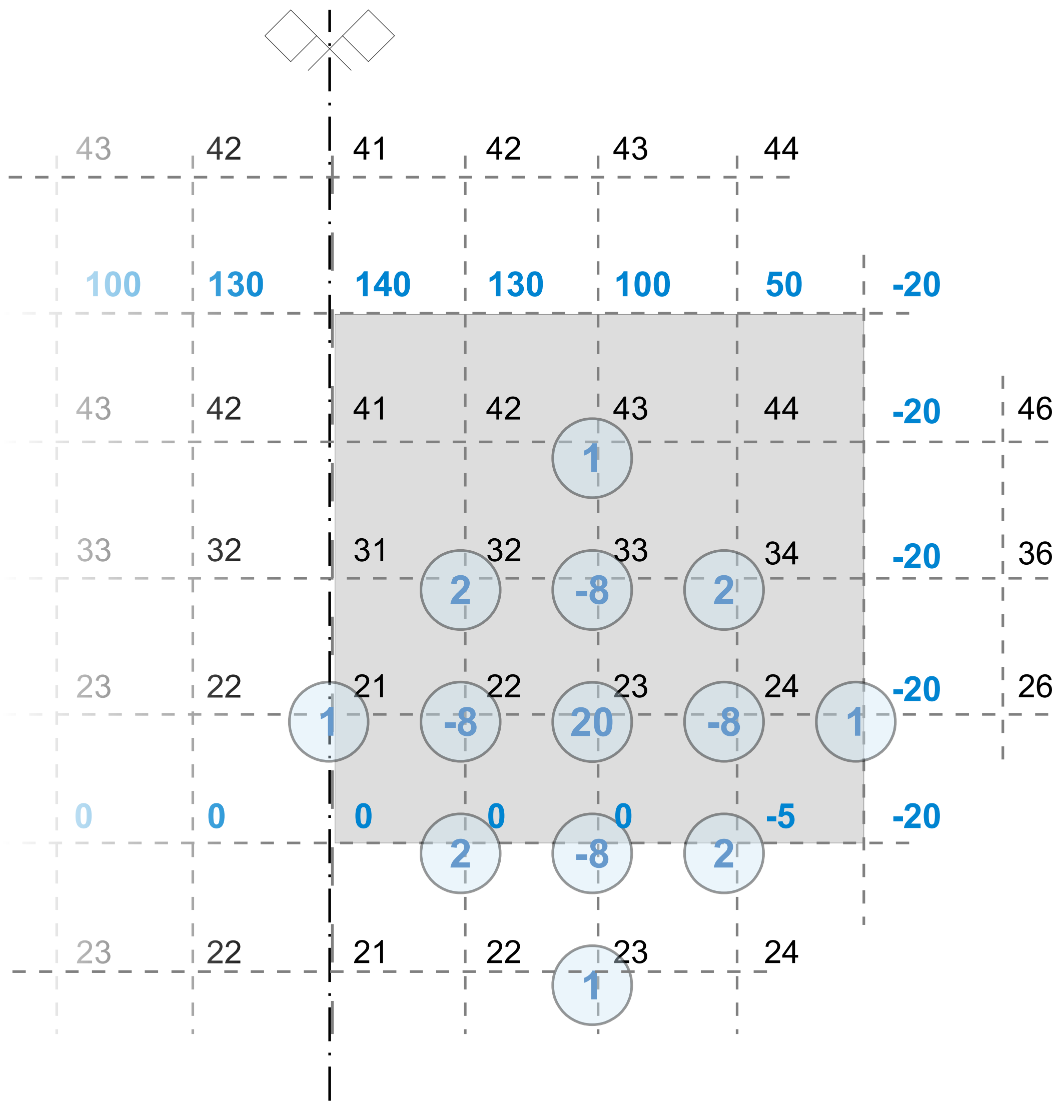
$$\frac{1}{s^4}\left[20\cdot(F_{22}) - 8\cdot(F_{21}+F_{23}+F_{32}+0) + 2\cdot(F_{31}+F_{33}+0+0) + 1\cdot(F_{24}+F_{22}+F_{22} + F_{42})\right] = 0$$



PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Równanie dla węzła 23:

$$\frac{1}{s^4}\left[20\cdot\left(F_{23}\right) - 8\cdot\left(F_{22}+F_{24}+F_{33}+0\right) + 2\cdot\left(F_{32}+F_{34}+0+(-5)\right) + 1\cdot\left(F_{21}+F_{23}+F_{43}+(-20)\right)\right] = 0$$



Tak samo dla węzłów:
24, 31, 32, 33, 34, 31, 42, 43, 44

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Układ równań MRS:

$$20\cdot(F_{21}) - 8\cdot(F_{22}+F_{22}+F_{31}+0) + 2\cdot(F_{32}+F_{32}+0+0) + 1\cdot(F_{21}+F_{23}+F_{23} + F_{41}) = 0$$

$$20\cdot(F_{22}) - 8\cdot(F_{21}+F_{23}+F_{32}+0) + 2\cdot(F_{31}+F_{33}+0+0) + 1\cdot(F_{24}+F_{22}+F_{22} + F_{42}) = 0$$

$$20\cdot(F_{23}) - 8\cdot(F_{22}+F_{24}+F_{33}+0) + 2\cdot(F_{32}+F_{34}+0+(-5)) + 1\cdot(F_{21}+F_{23}+F_{43} + (-20)) = 0$$

$$20\cdot(F_{24}) - 8\cdot(F_{23}+F_{34}+(-5)+(-20)) + 2\cdot(F_{33}+0+(-20)+(-20)) + 1\cdot(F_{24}+F_{22}+F_{26} + F_{44}) = 0$$

$$20\cdot(F_{31}) - 8\cdot(F_{32}+F_{32}+F_{21}+F_{41}) + 2\cdot(F_{22}+F_{22}+F_{42}+F_{42}) + 1\cdot(F_{33}+F_{33}+0 + 140) = 0$$

$$20\cdot(F_{32}) - 8\cdot(F_{31}+F_{33}+F_{22}+F_{42}) + 2\cdot(F_{41}+F_{21}+F_{43}+F_{23}) + 1\cdot(F_{32}+F_{34}+0 + 130) = 0$$

$$20\cdot(F_{33}) - 8\cdot(F_{32}+F_{34}+F_{23}+F_{43}) + 2\cdot(F_{22}+F_{24}+F_{42}+F_{44}) + 1\cdot(F_{31}+(-20)+0 + 100) = 0$$

$$20\cdot(F_{34}) - 8\cdot(F_{33}+F_{24}+F_{44}+(-20)) + 2\cdot(F_{23}+F_{43}+(-20)+(-20)) + 1\cdot(F_{32}+F_{36}+(-5) + 50) = 0$$

$$20\cdot(F_{41}) - 8\cdot(F_{42}+F_{42}+F_{31}+140) + 2\cdot(F_{32}+F_{32}+130+130) + 1\cdot(F_{21}+F_{43}+F_{43} + F_{41}) = 0$$

$$20\cdot(F_{42}) - 8\cdot(F_{41}+F_{43}+F_{32}+130) + 2\cdot(F_{31}+F_{33}+140+100) + 1\cdot(F_{42}+F_{44}+F_{22} + F_{42}) = 0$$

$$20\cdot(F_{43}) - 8\cdot(F_{42}+F_{44}+F_{33}+100) + 2\cdot(F_{32}+F_{34}+130+50) + 1\cdot(F_{41}+F_{23}+F_{43} + (-20)) = 0$$

$$20\cdot(F_{44}) - 8\cdot(F_{43}+F_{34}+50+(-20)) + 2\cdot(F_{33}+(-20)+(-20)+100) + 1\cdot(F_{42}+F_{24}+F_{46} + F_{44}) = 0$$

$$F_{26} - F_{24} = -70$$

$$F_{36} - F_{34} = -100$$

$$F_{46} - F_{44} = -130$$

Równanie tarczy zapisane dla **węzłów wewnętrznych**

Warunki brzegowe na pochodną zapisane dla **węzłów brzegowych**, w których **siła styczna jest różna od 0**.

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

ROZWIĄZANIE:

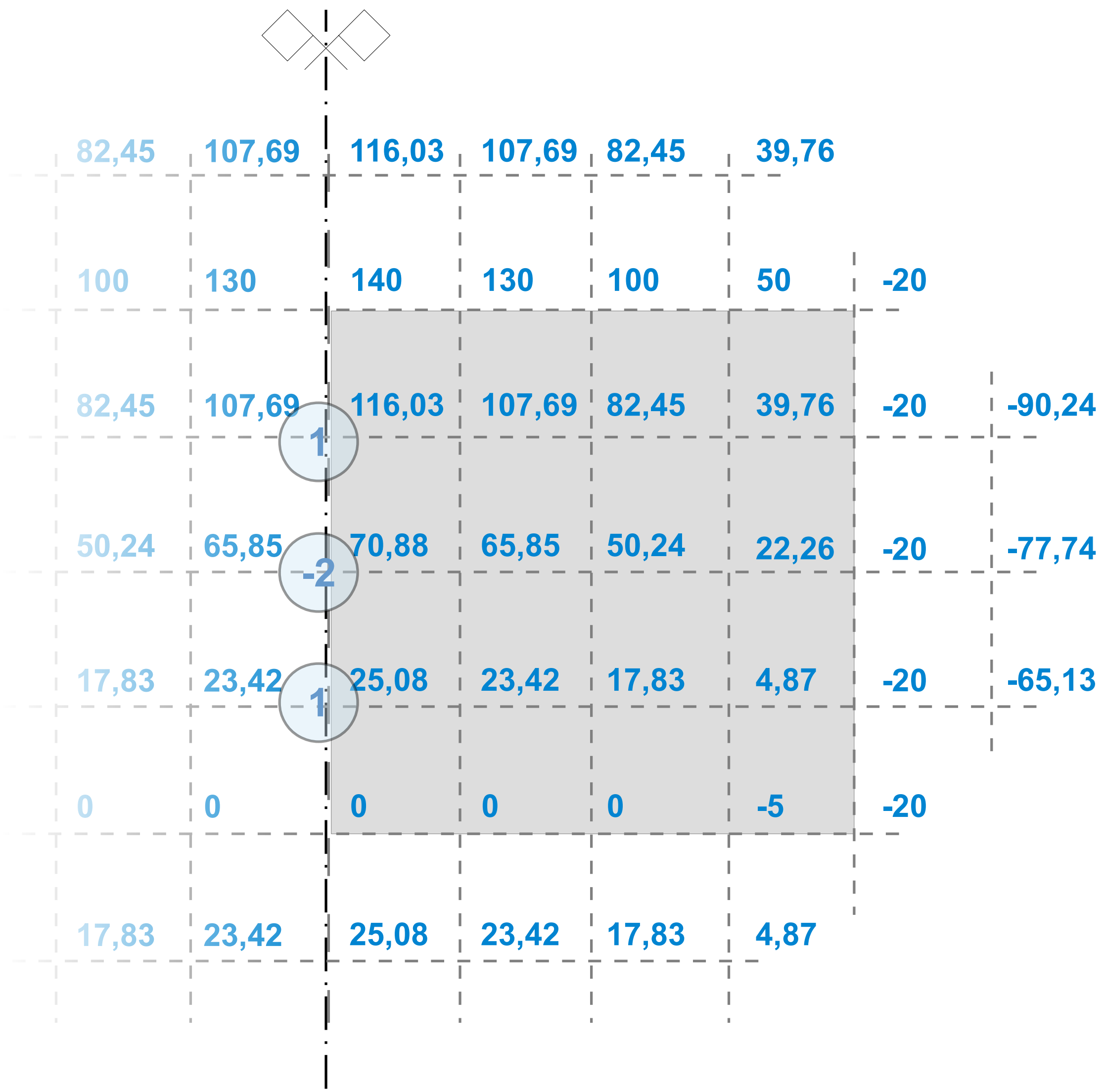
82,45	107,69	116,03	107,69	82,45	39,76		
100	130	140	130	100	50	-20	
82,45	107,69	116,03	107,69	82,45	39,76	-20	-90,24
50,24	65,85	70,88	65,85	50,24	22,26	-20	-77,74
17,83	23,42	25,08	23,42	17,83	4,87	-20	-65,13
0	0	0	0	0	-5	-20	
17,83	23,42	25,08	23,42	17,83	4,87		

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Stan naprężenia w środku tarczy – w węźle 31:

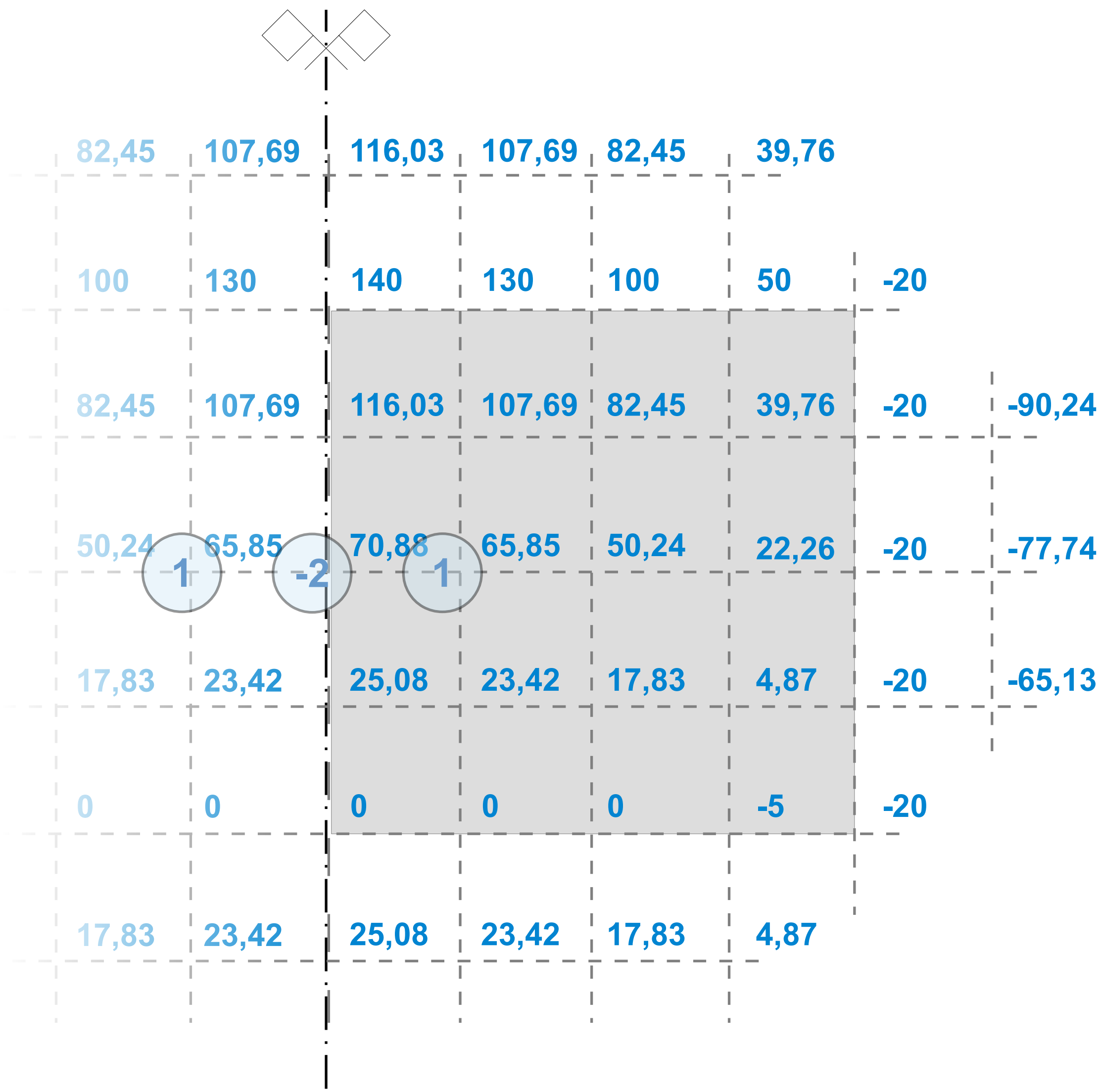
$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \approx \frac{1}{s^2}\left(F_{21} - 2\,F_{31} + F_{41}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^2}\left(25{,}08 - 2\cdot 70{,}88 + 116{,}03\right) = -0{,}65\ \text{kPa}$$



PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Stan naprężenia w środku tarczy – w węźle 31:



$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \approx \frac{1}{s^2}\left(F_{21} - 2F_{31} + F_{41}\right) =$$

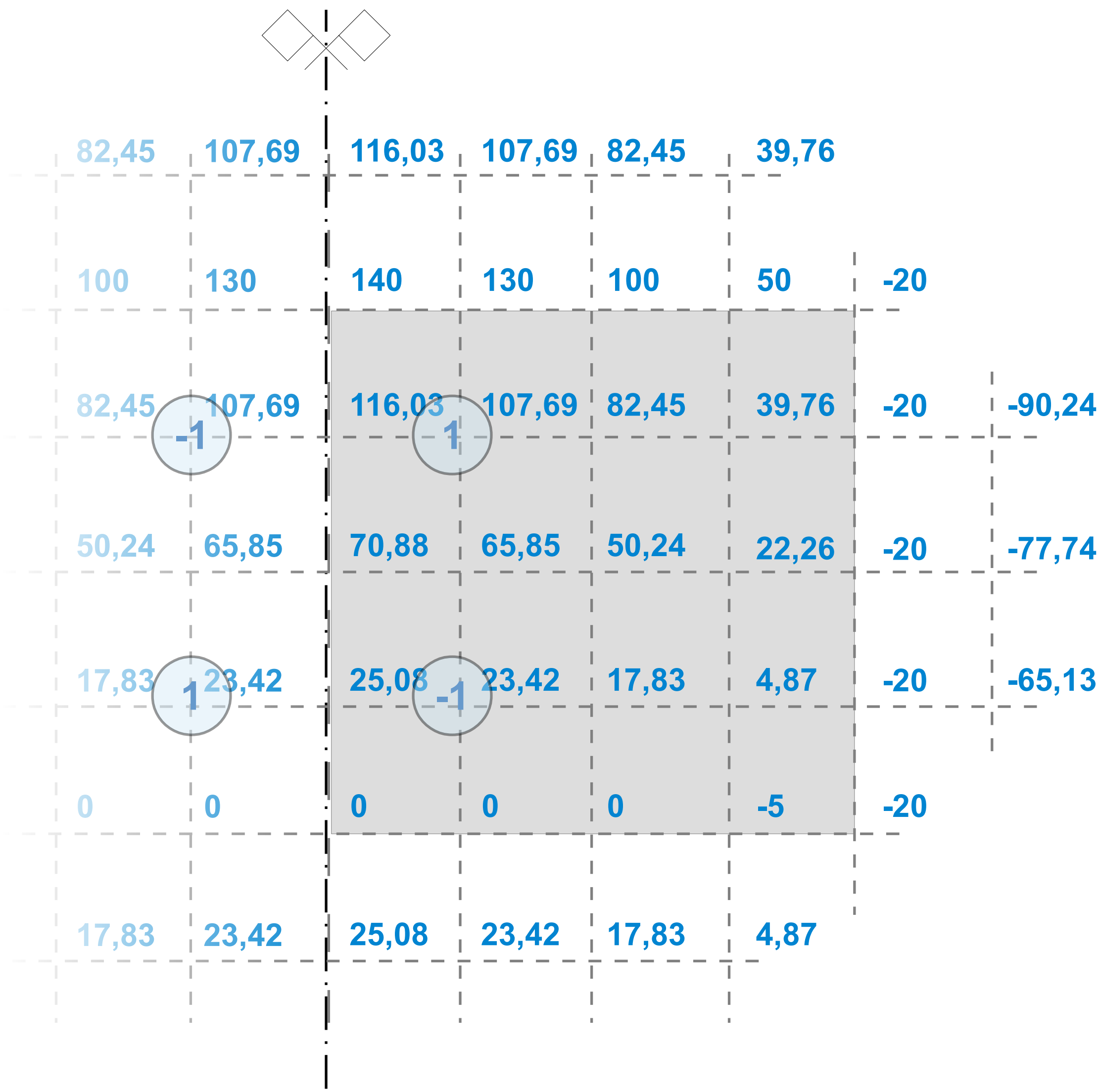
$$= \frac{1}{1^2}\left(25{,}08 - 2 \cdot 70{,}88 + 116{,}03\right) = -0{,}65\ \text{kPa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{1}{s^2}\left(F_{32} - 2F_{31} + F_{32}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^2}\left(65{,}85 - 2 \cdot 70{,}88 + 65{,}85\right) = -10{,}06\ \text{kPa}$$

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Stan naprężenia w środku tarczy – w węźle 31:



$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \approx \frac{1}{s^2}\left(F_{21} - 2F_{31} + F_{41}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^2}\left(25{,}08 - 2\cdot 70{,}88 + 116{,}03\right) = -0{,}65 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{1}{s^2}\left(F_{32} - 2F_{31} + F_{32}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^2}\left(65{,}85 - 2\cdot 70{,}88 + 65{,}85\right) = -10{,}06 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \approx -\frac{1}{4s^2}\left(F_{22} + F_{42} - F_{22} - F_{42}\right) =$$

$$= 0 \text{ kPa}$$

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Stan naprężenia w środku tarczy – w węźle 31:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -0{,}65 & 0 \\ 0 & -10{,}06 \end{bmatrix} \text{kPa}$$

82,45	107,69	116,03	107,69	82,45	39,76		
100	130	140	130	100	50	-20	
82,45	107,69	116,03	107,69	82,45	39,76	-20	-90,24
50,24	65,85	70,88	65,85	50,24	22,26	-20	-77,74
17,83	23,42	25,08	23,42	17,83	4,87	-20	-65,13
0	0	0	0	0	-5	-20	
17,83	23,42	25,08	23,42	17,83	4,87		